Représentation des entiers

1 Entiers non signés

1.1 Entiers naturels

Exercice 1. Conversion en binaire.
Convertissez les nombres suivants du binaire vers le décimal.

1) 1111.
2) 100 1001.
3) 111 1011.
4) 1000 0000.

Convertissez les nombres suivants du décimal vers le binaire en effectuant des divisons euclidiennes successives.

5) 17.
6) 31.
7) 32.
8) 733.

Exercice 2. Hexadécimal, même pas mal.
Convertissez les nombres suivant du binaire vers l'hexadécimal.

1) 1111 0000 0000 1101.
2) 1011 1010 1101 0100 0101 0101.
3) 1101 0011 1100 0000 1101 1110.

Convertissez les nombres suivants de l'hexadécimal vers le binaire.

4) `FB1`.
5) `F10A7`.
6) `E1FFE165DABADEE`.

Exercice 3. Calcul en binaire.
Convertissez les nombres suivants en binaire puis effectuez les opérations demandées.

1) $43 + 38$
2) $65 + 63$
3) 43×4
4) 43×38.

1.2 Entiers positifs sur n bits

Exercice 4. L'invasion des uns.

1) Montrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$.
2) Déduisez-en la valeur de l'entier $a = \overline{11\ldots1}$ dont la décomposition binaire est composée de n bits.
3) Quel est l'ensemble des entiers naturels que l'on peut coder sur n bits ?

Exercice 5. Entiers positifs sur 4 bits.
On considère l'ensemble E des entiers non signés représentables sur 4 bits. Listez les éléments de E en décimal, en binaire puis en hexadécimal.

Exercice 6. unsigned int.
Soit n un entier naturel non nul et a un entier défini sur m bits.

1) Déterminez, en binaire, le reste de la division euclidienne de $a = \overline{a_{m-1}\ldots a_1 a_0}$ par 2^n.

On considère maintenant deux entiers a et b codés sur n bits. On effectue la somme $a+b$ et le produit ab, que l'on enregistre dans des entiers s et p codés sur n bits. Autrement dit, on tronque $a+b$ et ab en ne gardant que les n derniers bits.

2) En utilisant les notions d'arithmétique, quelles relations pouvez-vous établir entre $a+b$, ab, s et p ?
3) Sous quelle condition a-t-on $a+b = s$ (ne cherchez pas trop compliqué) ? Même question pour $ab = p$.

1.3 Pratique

Exercice 7. Calculs sur un octet.
Considérons les entiers non signés représentables sur 8 bits. Effectuez les calculs suivants en binaire puis exprimez le résultat en hexadécimal. Vérifiez ensuite vos calculs sur machine en utilisant des `unsigned char`. Toutes les expressions suivantes sont exprimées en hexadécimal.

1) `73 + 8D`. 2) `AB + CD`. 3) `01 * 01`. 4) `37 * 7`.

Exercice 8. Opérations binaires.
Considérons les entiers non signés représentables sur 8 bits. Effectuez les calculs suivants en binaire puis exprimez le résultat en hexadécimal. Vérifiez ensuite vos calculs sur machine en utilisant des `unsigned char`. Toutes les expressions suivantes sont exprimées en hexadécimal.

1) `~42`
2) `37 & 42`
3) `37 | 42`
4) `37 ^ 42`
5) `01 << 4`
6) `03 >> 2`
7) `42 << 2`
8) `3C >> 2`

Exercice 9. Manipulations binaires.
Pour chacune des questions suivantes, vous devez utiliser les opérations binaires et/ou classiques pour obtenir le résultat souhaité en *une* instruction en langage C. Il est donc interdit d'avoir recours aux fonctions ou aux boucles.

1) Obtenir le nombre ayant uniquement le `n`-ième bit à 1.
2) Obtenir le nombre ayant uniquement le `n`-ième bit à 0.
3) Obtenir 2 à la puissance `n`.
4) Obtenir le nombre ayant les `n` bits de poids faible à 1 et tous les autres à 0.
5) Obtenir le quotient de la division d'un entier `a` par 2, 4, puis 2 à la puissance `n`.
6) Obtenir le reste de la division d'un entier `a` par 2, 4, puis 2 à la puissance `n`.

2 Entiers signés

Exercice 10. Erreurs d'addition.
Selon les conditions de représentation des entiers signés présentées dans le cours (c'est à dire avec un bit de signe seulement), que valent les opérations suivantes en conservant la méthode de calcul de l'addition et de la soustraction ?

1) $21+73$; 2) $73+(-21)$; 3) $73+73$; 4) $21+(-73)$; 5) $73+(-73)$;

Exercice 11. Des petits entiers.
On considère l'ensemble E entiers signés représentables sur 4 bits. Listez les éléments de E en décimal, en binaire puis en hexadécimal.

Exercice 12. Opposés.

Considérons les entiers signés représentables sur 8 bits. Calculez les opposés des nombres suivants exprimés en hexadécimal. Vérifiez ensuite vos calculs sur machine.

1) `01` 2) `FF` 3) `42` 4) `80`

Exercice 13. Formule de l'opposé.

Soit n un entier naturel non nul. Considérons un entier a dans $]\!]-2^{n-1}, 2^{n-1}[\![$ et notons c son codage sur n bits.

1) Montrez que dans $\mathbb{N}$, on a $c + (\sim c) = \overline{1\ldots1}$.
2) Déduisez-en, toujours dans $\mathbb{N}$ la valeur exacte de $c + (\sim c) + 1$.
3) Montrez que $(\sim c) + 1 \equiv -c \ \ [2^n]$.

Exercice 14. Entiers signés.

Considérons les entiers signés représentables sur 8 bits. Effectuez les calculs suivants en binaire puis exprimez le résultat en hexadécimal et en décimal (en faisant apparaitre le signe). Vérifiez ensuite vos calculs sur machine en utilisant des `unsigned char`. Toutes les expressions suivantes sont exprimées en décimal.

1) $43 - 38$ 2) $38 - 43$ 3) $(-2) \times 42$ 4) $(-4) \times (-4) \times (-8)$