MP2I 861

Lycée du Parc

Cinématique

A.-E. Badel

Contenus thématiques : Thème 2 : mouvements et interactions (1)

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Cinématique du point Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération. Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
Mouvement rectiligne uniformément accéléré.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.
Mouvement à vecteur accélération constant.	Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.	Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
Coordonnées des vecteurs vitesse et accéélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.	Caractériser le vecteur accélération pour les mouvements suivants : circulaire, circulaire uniforme. Faire le lien avec les composantes polaires de l'accélération. **Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération.**

1 Description cinématique

1.1 Référentiel et temps absolu

référentiel : système d'axes liés à un observateur muni d'une horloge
temps absolu donc identique dans tous les référentiels

1.2 Position, équations horaires et trajectoire

position par rapport à origine O définie par vecteur $\overrightarrow{OM}$
équations horaires : expressions des trois composantes en fonction du temps t dans une base de projection
trajectoire : courbe décrite par M et dont équation lie les trois composantes dans une base de projection sans faire intervenir le temps t de manière explicite

1.3 Vitese

$\vec{v}_{/\mathcal{R}}(t) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}}$
indépendante du point fixe du référentiel choisi comme origine
mais dépendante du référentiel

1.4 Accélération

$\vec{a}_{/\mathcal{R}}(t) = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right)_{/\mathcal{R}}$

2 Expressions de la vitesse et de l'accélération

2.1 Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\overrightarrow{u_y} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

2.2 Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_r}(t) + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

2.3 Coordonnées intrinsèques ou base de Frenet

$$\vec{v} = \dot{s}\overrightarrow{u_t}$$

$$\vec{a} = \ddot{s}\overrightarrow{u_t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\overrightarrow{u_n} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$$

2.3.1. Cas du mouvement circulaire

$\vec{v} = v\overrightarrow{u_t} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ soit $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $v = R\dot{\theta}$
$\vec{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_t} + \dfrac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n}$ soit $\overrightarrow{u_n} = -\overrightarrow{u_r}$ et rayon de courbure rayon de trajectoire

2.4 Coordonnées sphériques - Compléments

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\overrightarrow{u_r}(t)$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\dot{\varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(2\dot{r}\sin\theta\dot{\varphi} + r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi}\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

3 Exemples de mouvements

3.1 Mouvements rectilignes

mouvement rectiligne si sur une droite
mouvement rectiligne sinusoïdal si abscisse sur la droite fonction sinusoïdale du temps $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$
donc $v(t) = \dot{x} = -\omega X\sin(\omega t + \varphi)$ en quadrature avec $x(t)$
et $a(t) = -\omega^2 X\cos(\omega t + \varphi)$ en opposition de phase avec $x(t)$

3.2 Mouvements à accélération constante

$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\text{constante}}$
donc mouvement rectiligne si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v_0}$ colinéaires
ou mouvement plan

3.3 Mouvements uniforme, accéléré et décéléré

mouvement uniforme si module de la vitesse constant
mouvement accééré si module de la vitesse croissant
mouvement décéléré si module de la vitesse décroissant
cas rectiligne : uniforme si accélération nulle, accéléré si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ colinéaire de même sens et décéléré si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ colinéaire de sens contraire

3.4 Mouvement circulaire

mouvement circulaire si trajectoire circulaire
vitesse orthoradiale $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ avec $\dot{\theta}$ vitesse angulaire
accélération $\overrightarrow{a} = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$
si en plus uniforme vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante
donc accélération radiale centripète $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$

4 Caractère relatif du mouvement - Notion de changement de référentiels

Exemples :

- chute d'un objet dans un train pour un passager du train ou une personne sur le quai
- mouvement d'une valve de roue vu de la roue ou du bord de la route

Attention ! référentiel différent de base de projection...