MP2I 861

Lycée du Parc

Introduction à la mécanique
Systèmes de coordonnées

A.-E. Badel

Contenus thématiques : Thème 2 : mouvements et interactions (1)

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.1. Description et paramétrage du mouvement d'un point	
Repérage dans l'espace et dans le temps Espace et temps classiques. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.	Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.	Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé. Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

1 Bref historique

Epoque	Phénomène	Noms
Antiquité	centre de gravité, équilibre du levier hydrostatique théorie aristotélicienne	Archimède (-287/-212) Aristote (-384/-322)
XVI^e siècle Renaissance 1632	moments statiques réfutation du modèle de l'Univers de Ptolémée description cinématique du système solaire lois relatives au mouvement des planètes notion d'accélération, pendule, plan incliné, chute libre principe de relativité galiléenne et principe d'inertie	Léonard de Vinci (1452-1519) Nicolas Copernic (1473-1543) Johannes Kepler (1571-1630) Galilée (1564-1642)
XVII^e siècle	hydrostatique mouvements de rotation, oscillations du pendule, énergie cinétique et force centrifuge les trois lois de Newton, théorie de la gravitation universelle	Blaise Pascal (1623-1662) Christiaan Huygens (1629-1695) Isaac Newton (1642-1727)
XVIII^e siècle	mécanique analytique	Louis-Joseph Lagrange (1736-1813) Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) Leonhard Euler (1707-1783)

	équations de la mécanique des fluides méthode des perturbations appliquée au mouvement des planètes	Leonhard Euler (1707-1783) Pierre-Simon Laplace (1749-1827)
XIX^e siècle	prédiction de l'existence de Neptune, avance du périhélie de Mercure et limite de la mécanique classique mécanique mathématique extensions aux milieux continus	Urbain Le Verrier (1811-1877) William Rowan Hamilton (1805-1865) Henri Poincaré (1854-1912)
XX^e siècle années 1970	mécanique relativiste, mécanique quantique systèmes chaotiques recherche sur les vibrations et les oscillations couplés	

2 Objet de la mécanique

2.1 Quelques définitions

cinématique : étude du mouvement sans chercher les causes
dynamique : étude du mouvement avec lien avec les causes
statique : étude des équilibres

2.2 Cadre de la mécanique newtonienne

mètre : distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une durée de $\frac{1}{299792458}$ seconde

seconde : durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux raies hyperfines de l'état fondamental de l'isotope 133 du césium

hypothèses du cadre newtonien :

- précision illimité de la position et de la vitesse
- universalité du temps
- espace euclidien
- continuité du temps et de l'espace

3 Systèmes de coordonnées

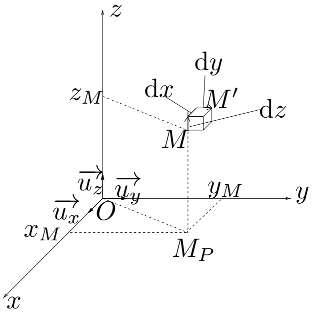
3.1 Une base fixe : les coordonnées cartésiennes

3.1.1. Définition

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$

3.1.2. Déplacement élémentaire

$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$



3.1.3. Volume élémentaire

$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

3.1.4. Surfaces élémentaires

- $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
- $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$,
- $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

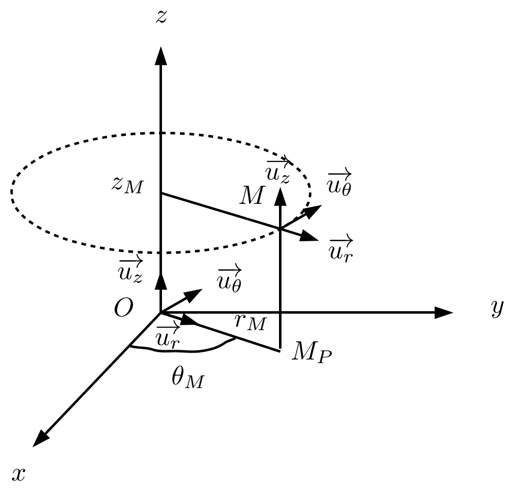
3.2 Une base mobile : les coordonnées cylindriques

3.2.1. Définition

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$
avec $\theta \in [0; 2\pi]$ et $r > 0$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{Arctan}\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$



base mobile : $\overrightarrow{u_r}$ unitaire suivant $\overrightarrow{OM_P}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ unitaire issu de rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{u_r}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \cos\theta\overrightarrow{u_x} + \sin\theta\overrightarrow{u_y} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{w} = w_r\overrightarrow{u_r} + w_\theta\overrightarrow{u_\theta} + w_z\overrightarrow{u_z}$
w_r : composante radiale, w_θ : composante orthoradiale
et w_z : composante axiale.

3.2.2. Déplacement élémentaire

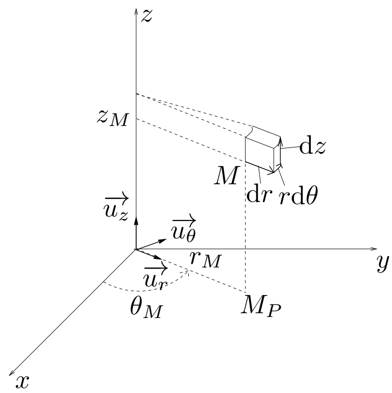
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$

3.2.3. Volume élémentaire

$\mathrm{d}\tau = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$

3.2.4. Surfaces élémentaires

- $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,
- $\mathrm{d}r\mathrm{d}z$,
- $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.

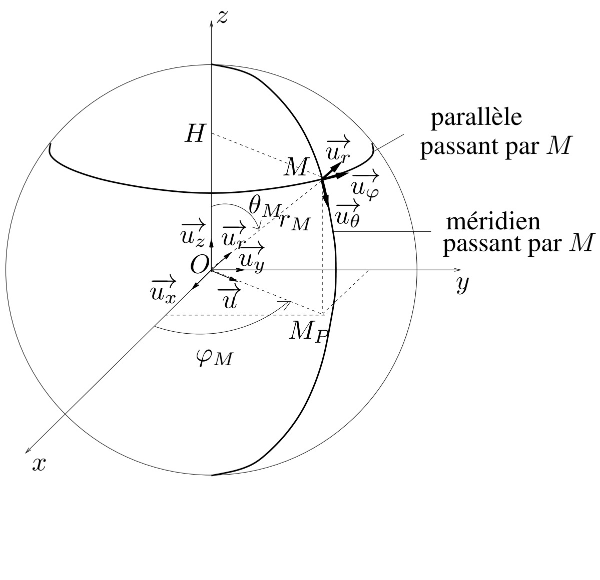


3.3 Une autre base mobile : les coordonnées sphériques

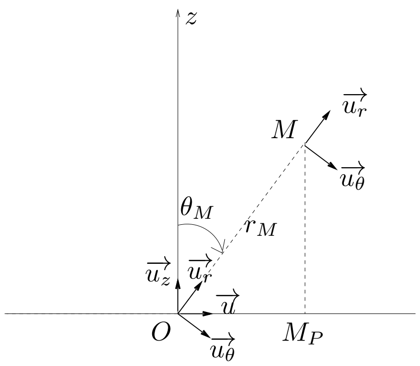
3.3.1. Définition

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$
avec $\theta \in [0; \pi]$,
$\varphi \in [0; 2\pi]$
et $r > 0$

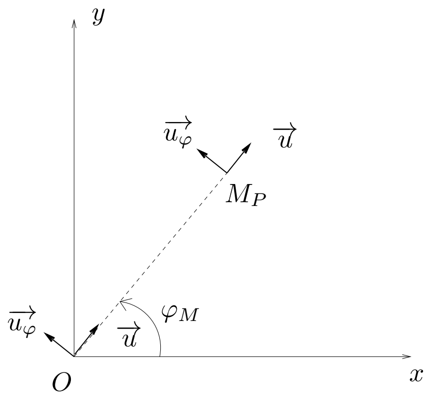
parallèle : cercle de centre H passant par M parallèle à (xOy)
méridien : cercle de centre O passant par M perpendiculaire à (xOy)
plan méridien : plan contenant méridien



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$



projection dans le plan méridien



projection dans le plan xOy

$$\left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \text{Arctan}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \varphi = \text{Arctan}\dfrac{y}{x} \end{array}\right.$$

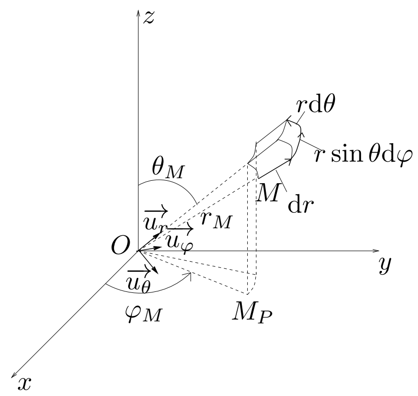
$\overrightarrow{u_r}$ unitaire suivant $\overrightarrow{OM}$
$\overrightarrow{u_\theta}$ unitaire dans méridien par rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{u_r}$
$\overrightarrow{u_\varphi}$ unitaire pour $(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta},\overrightarrow{u_\varphi})$ directe donc perpendiculaire au plan méridien et tangent au parallèle passant par M

Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{w} = w_r\overrightarrow{u_r} + w_\theta\overrightarrow{u_\theta} + w_\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$

w_r : composante radiale

3.3.2. Déplacement élémentaire

$\text{d}\overrightarrow{OM} = \text{d}r\overrightarrow{u_r} + r\text{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\text{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$



3.3.3. Volume élémentaire

$\text{d}\tau = r^2\sin\theta\text{d}r\text{d}\theta\text{d}\varphi$

3.3.4. Surfaces élémentaires

- $r\text{d}r\text{d}\theta$,
- $r\text{d}r\sin\theta\text{d}\varphi$,
- $r^2\sin\theta\text{d}\theta\text{d}\varphi$.

3.4 Base liée au mouvement : la base de Frenet

Cf. paragraphe suivant

4 Dérivée d'un vecteur unitaire tournant par rapport à l'angle de rotation

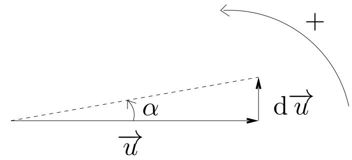
4.1 Cas des coordonnées polaires

$$\left\{\begin{array}{l} \text{d}\overrightarrow{u_r} = \text{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \text{d}\overrightarrow{u_\theta} = -\text{d}\theta\overrightarrow{u_r} \end{array}\right.$$

4.2 Cas général

$\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u}^2 = 1$ (unitaire)

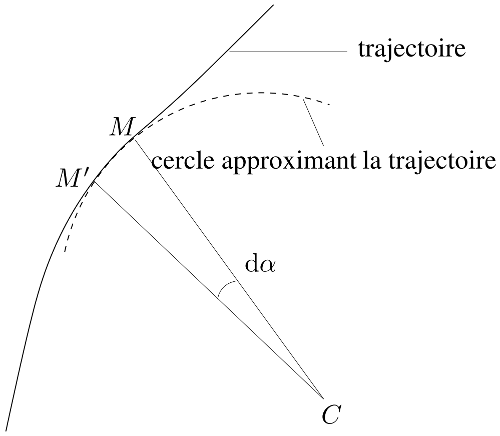
$\overrightarrow{u}.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\alpha} = 0$ soit $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\alpha}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$

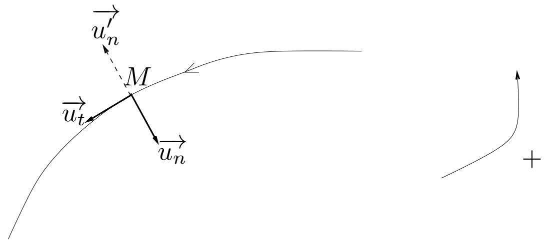


4.3 Base liée au mouvement : la base de Frenet

abscisse curviligne $s(t)$ soit $\mathrm{d}s = \lim\limits_{M' \to M} MM'$

rayon de courbure $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$





$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_t}}{\mathrm{d}\alpha} = \overrightarrow{u_n} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\overrightarrow{u_n}}{R}$$