MP2I 861

Lycée du Parc

Principes de la dynamique newtonienne - Lois de Newton

A.-E. Badel

Contenus thématiques : Thème 2 : mouvements et interactions (1)

Notions et contenus	Capacités exigibles
2.2. Lois de Newton	
Quantité de mouvement Masse d'un système. Centre de masse d'un système.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système, cette position étant donnée.
Quantité de mouvement d'un point matériel et d'un système de points.	Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système et la vitesse de son centre de masse.
Lois de Newton Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Notion de force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
Deuxième loi de Newton. Équilibre d'un système.	Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, écriture adimensionnée, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force à l'aide d'un microcontrôleur ou de l'analyse d'un mouvement enregistré.**
Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.	Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire.
Modèle linéaire d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.	**Mettre en œuvre un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.**
Système modèle masse - ressort sans frottement.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter les analogies avec un oscillateur harmonique électrique.
Tension d'un fil. Pendule simple.	Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier le caractère harmonique des oscillations de faible amplitude.

1 Point matériel ou système de points matériels : définition et caractéristiques

1.1 Notion de solide

solide : tout système matériel pour lequel les distances entre deux points du système sont constantes et invariantes au cours du temps

1.2 Modélisation d'un solide par un point matériel

point matériel : solide dont la position est entièrement définie uniquement par trois paramètres *id est* effet de rotation du solide sur lui-même négligé

1.3 Notion de masse - Masse inertielle

masse (inertielle) : grandeur scalaire positive d'autant plus grande qu'elle s'oppose au mouvement

1.4 Quantité de mouvement

quantité de mouvement : $\overrightarrow{p_{/\mathcal{R}}}(M) = m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$

1.5 Ensemble de points matériels

à considérer quand des points d'un même système peuvent avoir des comportements différents

1.6 Centre de masse ou centre d'inertie d'un système de points matériels

centre d'inertie G : barycentre des points A_i affectés de leur masse m_i
soit $M\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}$ ou $\sum_i m_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$

1.7 Quantité de mouvement d'un système de points matériels

$\overrightarrow{p_{/\mathcal{R}}}(M) = \sum_i m_i\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M_i) = M\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(G)$

2 Première loi de Newton ou principe d'inertie - Référentiel galiléen

2.1 Principe d'inertie - Définition d'un référentiel galiléen

Il existe des référentiels privilégiés appelés référentiels galiléens dans lesquels un point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire que les vecteurs vitesse et quantité de mouvement sont constants au cours du temps.

2.2 Infinité de référentiels galiléens

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

2.3 Recherche d'un référentiel galiléen

- référentiel terrestre sauf déviation vers l'est, pendule de Foucault, etc.
- référentiel géocentrique sauf marées terrestres
- référentiel de Copernic (centre de masse du système solaire) ou Kepler (centre du Soleil) sauf influence des galaxies
- etc

3 Causes ou origines des mouvements : forces ou actions mécaniques

3.1 Notion de forces

On appelle force la grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et/ou de produire un mouvement ou une déformation du système.

3.2 Quatre interactions fondamentales

1. interaction gravitationnelle $\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{(M_1M_2)^3}\overrightarrow{M_1M_2}$ avec $G = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
2. interaction électromagnétique $\overrightarrow{F} = q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}} \wedge \overrightarrow{B}\right)$
   dont coulombienne $\overrightarrow{F_{1\to 2}} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{(M_1M_2)^3}\overrightarrow{M_1M_2}$ avec $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ F.m^{-1} permittivité diélectrique du vide (ou $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ m.F^{-1} ou kg.m^3.s^{-2}.C^{-2})
3. interaction forte
4. interaction faible

3.3 Troisième loi de Newton : principe de l'action et de la réaction ou principe des actions réciproques

si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\overrightarrow{f_{A\to B}}$, alors le point B exerce sur le point A une force $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ telle que

- les forces $\overrightarrow{f_{A\to B}}$ et $\overrightarrow{f_{B\to A}}$ s'exercent sur la même droite d'action à savoir la droite passant par A et B,
- on ait la relation : $\overrightarrow{f_{B\to A}} = -\overrightarrow{f_{A\to B}}$

3.4 Deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique

$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{f_i}$ avec quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{/\mathcal{R}}}(M) = m\overrightarrow{v_{/\mathcal{R}}}(M)$

3.5 Cas de la statique

pas de mouvement si vitesse et accélération nulles
ou $\displaystyle\sum_i \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{0}$ et vitesse nulle

3.6 Méthode de résolution en quatre étapes

1. définition du système
2. définition du référentiel et de son éventuel caractère galiléen
3. bilan des forces
4. résolution par choix d'une méthode pour l'instant principe fondamental de la dynamique

4 Mouvement dans le champ de pesanteur

4.1 Poids

$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$

4.2 Mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur

1. système : M
2. référentiel terrestre galiléen
3. bilan des forces : poids $m\overrightarrow{g}$
4. principe fondamental de la dynamique $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$

4.3 Mouvement de chute libre

4.3.1. Chute libre d'un point matériel

Soit un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. On note Oz l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Déterminer l'équation horaire $z(t)$.
3. En déduire la durée de chute.
4. Exprimer la vitesse du point matériel lorsqu'il arrive au sol.

1. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$
2. $z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$
3. durée de chute $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$
4. vitesse au sol $v = \sqrt{2gh}$

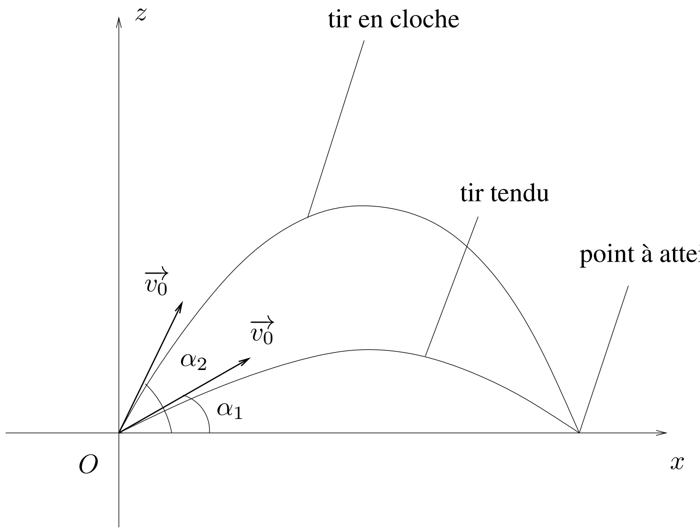
4.3.2. Tir dans le vide

Un point matériel M est lancé depuis un point O pris comme origine du repère avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec l'axe Ox horizontal. On note Oz l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur.

1. Justifier que le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$ peut être considéré comme une situation déjà abordé avec la chute libre étudiée précédemment.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer les équations horaires.
4. En déduire l'équation et la nature de la trajectoire.
5. Montrer que M atteint une hauteur maximale en un point dont on précisera les coordonnées.
6. Exprimer la portée du tir à savoir l'abscisse x_P pour laquelle M retombe au sol qu'on suppose horizontal.
7. Établir que deux angles α sont possibles pour une vitesse de même module v_0 pour que M atteigne un point au sol supposé horizontal à une distance d du point de tir.

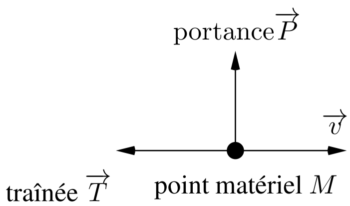
1. mouvement vertical avec vitesse initiale verticale
2. $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$
3. $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha$, $x = v_0 t \cos\alpha$

4. trajectoire parabolique $z = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$
5. hauteur maximale atteinte $z_m = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$
6. portée du tir $x_p = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$
7. schéma :



5 Influence d'un frottement fluide

5.1 Forces de frottement fluide



interaction avec milieu fluide : décomposition en portance $\overrightarrow{P}$ et traînée $\overrightarrow{T}$

traînée aussi appelée force de frottement fluide opposée au mouvement et souvent proportionnelle à la vitesse soit $-k\overrightarrow{v}$

5.1.1. Chute avec un frottement proportionnel à la vitesse

> Soit un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale d'une hauteur h. On suppose que M est soumis à une force de frottement de l'air proportionnelle à la vitesse avec un coefficient de frottement k. On note Oz l'axe vertical ascendant et $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur.
> 1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
> 2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.
> 3. Exprimer la vitesse du point matériel en fonction du temps.
> 4. Établir de deux manières l'existence d'une vitesse limite v_ℓ et donner son expression.

1. $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}$
2. $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{k}{m}v = -g$

3. $v = -\frac{mg}{k} + Ve^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{m}{k}$
4. vitesse limite $v_\ell = -\frac{m}{k}g$

5.1.2. Chute avec un frottement proportionnel au carré de la vitesse

On reprend la situation du paragraphe précédent.

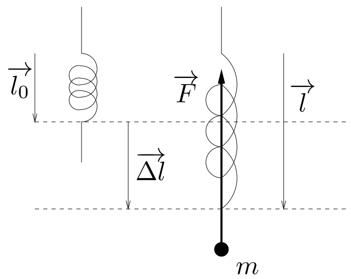
1. Comment est modifiée la vitesse limite si la force de frottement est proportionnelle au carré de la vitesse ? Donner son expression. Pour plus de simplicité, on utilisera un axe vertical Oz descendant.
2. Exprimer dans ce cas la vitesse en fonction du temps.

1. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v^2 = g$

   vitesse limite $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{k}}$
2. $v = v_\ell \mathrm{th}\frac{t}{\tau} = \sqrt{\frac{mg}{k}}\mathrm{th}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

6 Action d'un ressort

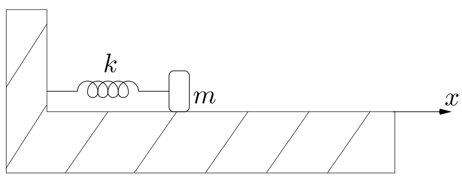
6.1 Tension d'un ressort ou force de rappel élastique



$\overrightarrow{F} = -k\Delta\ell\overrightarrow{u}_{ext}$

6.2 Mouvement horizontal d'une masse attachée à un ressort

Un point matériel M de masse m se déplace sans frottement le long d'un axe Ox horizontal. Il est attaché à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On choisit la position de M à l'équilibre comme origine du repère. À $t = 0$, le point M est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté d'une distance x_0 par rapport à sa position d'équilibre.



1. Exprimer la réaction du support.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. Déterminer l'équation horaire $x(t)$.

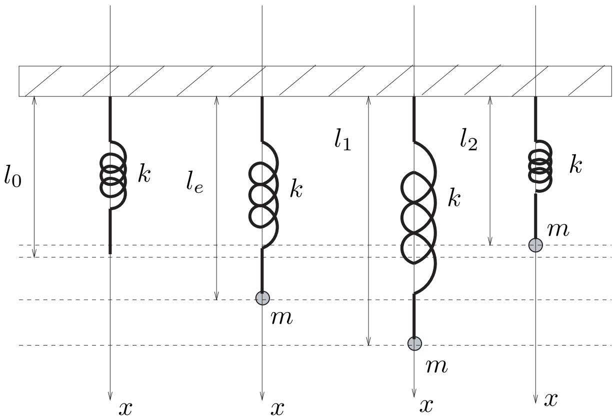
1. $R = mg$

2. $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$
3. $x = x_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

6.3 Mouvement vertical d'une masse attachée à un ressort

Un point matériel M de masse m est suspendu à un ressort vertical de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. On choisit la position de M à l'équilibre comme origine du repère. À $t = 0$, le point M est lâché sans vitesse initiale après avoir été écarté d'une hauteur z_0 par rapport à sa position d'équilibre.

1. Déterminer la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement.
3. En déduire que l'équation horaire $z(t)$ est identique à celle obtenue dans le cas d'un mouvement horizontal.



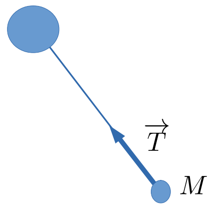
1. $\ell_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}$
2. $\ddot{z} + \frac{k}{m}z = 0$
3. $z = z_0 \cos(\omega t)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

6.4 Analogie avec les oscillations électriques du circuit L,C

	Mécanique	Electronique
Equation différentielle	$m\ddot{x} + kx = 0$	$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
Pulsation	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Variables	élongation x masse m ressort de raideur k	charge q inductance L capacité C

7 Mouvement d'une masse suspendue à l'extrémité d'un fil - Pendule simple

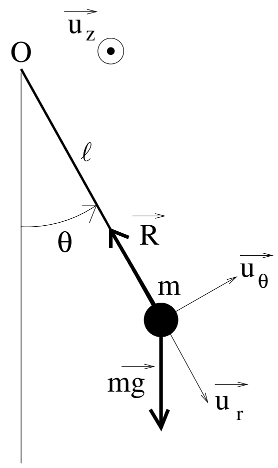
7.1 Tension d'un fil



direction le long de fil, d'objet vers fil, norme fonction des autres forces

7.2 Oscillations d'un pendule simple

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ. On écarte M de sorte que le fil fasse un angle θ_0 avec la verticale descendante.



1. Établir l'équation différentielle du mouvement.
2. Exprimer la tension du fil.
3. En multipliant l'équation différentielle du mouvement par $\dot{\theta}$ puis en intégrant cette relation, en déduire l'expression de la tension du fil en fonction de la position du fil définie par θ (sans $\dot{\theta}$ ni $\ddot{\theta}$).
4. Montrer que pour de faibles angles, on retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique.

1. $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\sin\theta = 0$
2. $R = m\ell\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$
3. $R = mg\cos\theta + 2mg\,(1-\cos\theta) = mg\,(2-\cos\theta)$
4. cas des petits angles : $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0$

8 Poussée d'Archimède

8.1 Expression de la poussée d'Arhcimède

force opposée du poids du fluide déplacé

8.2 Exemple

Soit un glaçon de masse m qu'on place dans un verre. On remplit ensuite le verre avec de l'eau à ras bords.

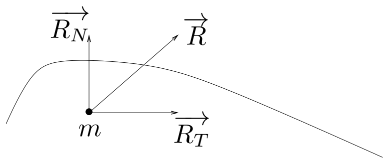
1. Déterminer le volume immergé V_{im} du glaçon.
2. En déduire que le verre ne déborde pas lors de la fonte du glaçon.

On note ρ_ℓ la masse volumique de l'eau et ρ_g celle de la glace ainsi que $\overrightarrow{g}$ l'accélération du champ de pesanteur. On négligera la poussée d'Archimède de l'air.

1. $V_{im} = \dfrac{m}{\rho_\ell}$
2. $V = V_{im}$

9 Réaction d'un support solide

9.1 Lois de Coulomb-Amontons du frottement solide



$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$ avec lois d'Amontons-Coulomb :

1. en l'absence de frottement solide $\overrightarrow{R_T} = \overrightarrow{0}$
2. avec frottement : si glissement $\overrightarrow{v_g} \neq \overrightarrow{0}$ $\overrightarrow{R_T}$ opposé à $\overrightarrow{v_g}$ et $R_T = fR_N$ avec f coefficient de frottement solide dynamique et si non glissement $R_T < f_0 R_N$ avec f_0 coefficient de frottement solide statique

9.2 Exemple

Un skieur de masse m descend une piste suivant une pente rectiligne inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. À $t = 0$, sa vitesse est nulle et on choisit O à sa position initiale. On note Ox l'axe de la ligne de plus grande pente orienté vers le bas et Oy l'axe perpendiculaire à la piste. Déterminer l'équation horaire $x(t)$ lorsque :

1. le coefficient de frottement des skis sur la neige vaut f,
2. la neige est gelée et qu'il n'y a pas de frottement.

1. $x = \dfrac{1}{2} g \left(\sin\alpha - f\cos\alpha\right) t^2$
2. $x = \dfrac{1}{2} g t^2 \sin\alpha$