Pour A un ensemble de formules de la logique propositionnelle, on dit qu'une valuation μ *satisfait* A si $\forall F \in A, \mu \vDash F$. On note cela $\mu \vDash A$.

On dit que A est *finement satisfiable* si pour tout $E \subseteq A$ fini, E est satisfiable.

On pose $(X_n)_n$ une suite de variables propositionelle.

(   ) **Question 0**   Les ensembles suivants sont-ils satisfiables ?
- $A_1 = \{X_{2n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg X_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
- $A_2 = \{X_i \vee \neg X_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$
- $A_3 = \{X_i \wedge \neg X_{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$

On cherche à montrer le *théorème de compacité*: A est satisfiable si et seulement si A est finement satisfiable

(   ) **Question 1**   Montrer que si A est satisfiable alors il est finement satisfiable.

(   ) **Question 2**   Dans le cas ou l'ensemble des variables propositionnelles de A est dénombrable, démontrer le théorème de compacité. On pourra chercher à construire une valuation par récurrence sur les variables propositionnelles.

On dit qu'un graphe non orienté $G = (S, E)$ avec $E \subseteq S^2$ et S potentiellement infini est N-coloriable s'il existe une fonction $c : S \to [\![1; N]\!]$ tel que $\forall (x, y) \in E, c(x) \neq c(y)$

(   ) **Question 3**   Utiliser le théorème de compacité pour montrer que un graphe infini est N coloriable si et seulement si tout ses sous-graphes fini sont N coloriables.