On dit qu'un mot $w \in \Sigma^*$ est n-univers si tout les mots de Σ^n sont des facteurs de w. On s'intéresse à créer les plus petits mots n-univers.

(   ) **Question 0** Montrer qu'un mot n-univers sur un alphabet à k lettres à au moins une longueur de $k^n + n - 1$

Soit $G = (V, E)$ un graphe **orienté**, on définit $L(G)$ le *graphe ligne* de G par le graphe orienté (E, E') avec E' l'ensemble des arêtes de la forme $((x, y), (y, z))$ pour $(x, y), (y, z) \in E$.

(   ) **Question 1** Donner le graphe ligne du cycle à 4 éléments et d'un arbre binaire parfait de hauteur 2.

On construit alors la famille des graphes de Bruijn $(\mathrm{DB}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\mathrm{DB}(1) = \left(\{0,1\}, \{0,1\}^2\right)$ et $\mathrm{DB}(n+1) = L(\mathrm{DB}(n))$.

(   ) **Question 2** Construire $\mathrm{DB}(2)$

(   ) **Question 3** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, chaque sommet de $\mathrm{DB}(n)$ à autant d'arêtes sortantes que entrantes. Combien de sommets et d'arêtes $\mathrm{DB}(n)$ possède t'il ?

(   ) **Question 4** Montrer que pour tout graphe orienté fortement connexe tel que pour tout sommet le degrée entrant est le même que le degrée sortant, il existe un cycle eulérien (un cycle passant par toutes les arêtes du graphe).

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{DB}(n)$ possède un cycle eulérien.

(   ) **Question 5** En voyant les sommets de $\mathrm{DB}(n)$ comme des mots dans $\{0,1\}^{n-1}$, et en étiquetant les arêtes par 0 ou 1, montrer qu'il existe un mot n-univers sur l'alphabet $\{0,1\}$ de taille $2^n + n - 1$

(   ) **Question 6** Généraliser la question précédente pour des alphabets plus grand.