Lista 5 - Grafos Hamiltonianos

Daniel Yoshio Hotta – 9922700

May 14, 2020

E17.

Seja G um grafo simples com n vértices e hamiltoniano. Suponha por absurdo, que $\alpha(G) > n/2$.

Tomemos o conjunto não vazio $S \subset V(G)$ tal que $S = V(G) - \alpha(G)$.

Contudo, pelo teorema 4.1. Se G é hamiltoniano, então para todo conjunto não-vazio, $S \subset V(G)$, temos:

$c(G - S) \leq |S|$

Entretanto, temos que $c(G - S) = \alpha(G) > n/2$, pois é um conjunto estável e todos os vértices são não adjacentes. E ainda: $|S| < n/2$. Portanto,

$c(G - S) > |S|$ Uma contradição! Pois não satisfaz condição *necessária* para ser hamiltoniano!. Portanto, temos que a afirmação é verdadeira.

E18.

Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 3$ e $|A(G)| \geq (n-1)(n-2)/2 + 2$.

Primeiro, notemos que um grafo completo K_n tem $|A(G)| = n(n-1)/2$. Ou seja, G está a $n - 3$ arestas para se tornar um grafo completo.

Contudo, provaremos que todo par de vértice não adjacente u,v de $V(G)$ obedece a condição de Ore.

$g(u) + g(v) \geq n$ (*)

Note que não há remoção de arestas, chamemos de A, em K_n tal que $|A| = n-3$ e A quebre a condição (*). Um vez que: 1. Para não serem adjacentes temos que remover a aresta em comum de dados u, v. 2. Com as $n-4$ arestas restantes, mesmo que retiremos arestas somente de u, v, teríamos $g(u) + g(v) - n - 4 = (n-2) + (n-2) - (n-4) = n$.

Portanto, como G satisfaz a condição de Ore, G é hamiltoniano.

E20.

Suponha que a afirmação seja falsa, que existe grafo simples não hamiltoniano G, (X,Y)-bipartido com $|X| = |Y| = k \geq 2$ e para todo par u,v não adjacente, temos $g(u) + g(v) > k$.

Como G não é bipartido completo (pois senão seria claramente hamiltoniano, pois $|X| = |Y|$), existe um par de vértices u,j não adjacentes em G.

Consideremos $H := G + uv$. Pela maximalidade de G, temos que H é hamiltoniano.

Logo, todo circuito hamiltoniano em H tem deve conter a aresta uv. Então, G tem um caminho hamiltoniano de u a v, digamos

$P := (u = v_1, v_2, ..., v_n = v)$

Contudo, se v_i é adjacente a u, então, $v_i - 1$não é adjacente a v, pois senão teríamos um circuito:

$C = (v_1, v_i, v_i + 1, ..., v_n, v_i - 1, v_i - 2, ..., v_1)$

contrariando a escolha de G.

Portanto, para todo vértice adjacente a u, existe um vértice de $V(X)$ que não é adjacente a v. Mas, neste caso,

$g(v) = k - g(u)$ Contudo, $g(v) + g(u) = k - g(u) + g(u) = k$

Contrariando a hipótese de que $g(v) + g(u) > k$. Portanto, a afirmação é verdadeira.