Lógica

Universidad Internacional de Valencia

Máster Universitario en Inteligencia Artificial

02MIAR | Matemáticas:
Matemáticas para la Inteligencia Artificial

Profesor:
Amílcar J. Pérez A.

De:
Planeta Formación y Universidades

Lógica proposicional

Definición

Un **enunciado lógico** *o* **proposición lógica** *consiste en una afirmación a la cual se le puede atribuir un* **valor de verdad**, *pudiendo ser este verdadero (1) o falso (0).*

Ejemplos

1. *La proposición "$2+2=4$" tiene valor de verdad 1.*
2. *La proposición "$4>5$" tiene valor de verdad 0.*
3. *La afirmación "todo número par mayor que 2 se puede escribir como la suma de dos números primos" (conjetura de Goldbach) tiene un valor de verdad desconocido.*
4. *La afirmación "existe vida inteligente fuera de la Tierra" tiene un valor de verdad desconocido.*
5. *"La mesa de Antonio" no es una proposición lógica.*

Definición

Dados dos enunciados lógicos p y q, se define la **conjunción** *entre p y q a un nuevo enunciado lógico, denotado por $p \wedge q$ y leído como "p y q", cuyo valor de verdad es verdadero siempre y cuando ambos enunciados lo sean simultáneamente.*

La **tabla de verdad** correspondiente es, por tanto:

p	q	$p \cdot q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

El conector $\wedge$ se puede identificar con la operación "$\cdot$", producto.

Definición

Dados dos enunciados lógicos p y q, se define la **disyunción** *entre p y q a un nuevo enunciado lógico, denotado por $p \vee q$ y leído como "p o q", cuyo valor de verdad es verdadero siempre y cuando alguno de los dos enunciados (o ambos) lo sean.*

La tabla de verdad correspondiente es, por tanto:

p	q	$p+q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

El conector $\vee$ se puede identificar con la operación "$+$", suma.

Universidad Internacional de Valencia

Definición

Dados dos enunciados lógicos p y q, se define la **implicación lógica***, leída como "p implica q" y denotada por $p \to q$, cuyo valor de verdad está en consonancia con el hecho de que si se da p, entonces necesariamente ha de darse también q, estableciendo de ese modo una relación de causalidad entre ambos enunciados.*

La tabla de verdad correspondiente es, por tanto:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Definición

Dados dos enunciados lógicos p y q, se define la **equivalencia**, **bicondicional** *o* **implicación doble**, *leída como "p si y sólo si q" y denotada por $p \leftrightarrow q$, cuyo valor de verdad está en consonancia con el hecho de que si se da p, entonces necesariamente ha de darse también q y viceversa, si se da q, entonces también debe darse p.*

La tabla de verdad correspondiente es, por tanto:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Universidad Internacional de Valencia

Definición

Dado un enunciado lógico p, se define la **negación** *lógica como el resultado de invertir el valor de verdad del enunciado original, denotándose por $\neg p$ (y leído como "no p").*

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

La negación de un enunciado p, además de $\neg p$, también puede denotarse por $\overline{p}$.

Universidad Internacional de Valencia

Definición

Una **fórmula lógica** $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *consiste en una serie de enunciados lógicos conectados por diferentes conectores lógicos. Según su valor de verdad, puede ser de tres tipos:*

- **Tautológica:** *si* $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *tiene valor de verdad* 1 *independientemente de la combinación de valores de verdad de* $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
- **Contradictoria:** *si* $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *tiene valor de verdad* 0 *independientemente de la combinación de valores de verdad de* $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
- **Contingente:** *si* $F(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *tiene valor de verdad* 0 *para ciertas combinaciones de valores de verdad de* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, *mientras que vale* 1 *para otras combinaciones.*

Lógica proposicional

Ejemplos

1. $p + \overline{p}$ *es una tautología.*
2. $p \cdot \overline{p}$ *es una contradicción.*
3. $\overline{p}$ *es contingente.*
4. $p \to p$ *es una tautología.*
5. $p \to \overline{p}$ *es contingente.*
6. $p \cdot q$ *es contingente.*
7. $p \leftrightarrow \overline{p}$ *es una contradicción.*
8. $(p \cdot q) \to (p + q)$ *es una tautología.*
9. $(p + q) \to (p \cdot q)$ *es contingente.*
10. $\overline{p \leftrightarrow p}$ *es una contradicción.*

Lógica proposicional

Definición

Dos fórmulas lógicas son **equivalentes** *si su valor de verdad es coincidente para cualquier combinación de valores de las proposiciones lógicas que la integran.*

Por ejemplo, $p \to q$ es equivalente a $\overline{p} + q$:

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} + q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Ejercicio

Probar que $p \to q$ no es equivalente a su **recíproco**, *$q \to p$, pero sí que es equivalente a su* **contrarrecíproco**, *$\overline{q} \to \overline{p}$.*

Universidad Internacional de Valencia

Propiedades

- $p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r, \quad p + (q + r) = (p + q) + r.$
- $p \cdot q = q \cdot p, \quad p + q = q + p.$
- $p \cdot (q + r) = (p \cdot q) + (p \cdot r), \quad p + (q \cdot r) = (p + q) \cdot (p + r).$
- $p \cdot \overline{p} = 0, \quad p + \overline{p} = 1.$
- $p \cdot 0 = 0, \quad p + 1 = 1.$
- $p \cdot 1 = p, \quad p + 0 = p.$
- $p \cdot p = p, \quad p + p = p.$
- $p \cdot (p + q) = p, \quad p + (p \cdot q) = p.$
- $\overline{\overline{p}} = p.$
- $\overline{p \cdot q} = \overline{p} + \overline{q}$ *(ley de De Morgan).*
- $\overline{p + q} = \overline{p} \cdot \overline{q}$ *(ley de De Morgan).*

Teoría de conjuntos

Definición

Un **conjunto** *es una colección de objetos físicos o abstractos. Cada uno de estos objetos recibe el nombre de* **elemento***.*
Si A es un conjunto, denotamos $a \in A$ a la relación "a es un elemento de A" o, equivalentemente, "a pertenece a A".

Cada conjunto se denota entre llaves separando cada elemento con una coma.

Ejemplos

1. *Conjunto de los planetas del sistema solar:*
   $\{\text{Mercurio}, \text{Venus}, \text{Tierra}, \text{Marte}, \text{Júpiter}, \text{Saturno}, \text{Urano}, \text{Neptuno}, \text{Plutón}\}$.
2. *Conjunto de los números naturales impares:*
   $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\} = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definición

El **cardinal** *de un conjunto es el número de elementos que posee. Si A es un conjunto, su cardinal se denota por $|A|$.*

En caso de que un conjunto A tenga una infinidad de elementos, denotamos $|A| = \infty$.

Ejemplos

1. *Sea A el conjunto de los planetas del sistema solar. Entonces $|A| = 9$.*
2. *Sea B el conjunto dado por los números naturales impares. Entonces $|B| = \infty$.*

Teoría de conjuntos

- Cada uno de los elementos de un conjunto sólo debe aparecer una única vez.

Ejemplo

El conjunto $\{a, b, c, c, d, a\}$ *no está bien denotado, ya que hay elementos repetidos. Lo correcto sería denotarlo por* $\{a, b, c, d\}$*.*

- El conjunto formado por cero elementos recibe el nombre de **conjunto vacío** y se denota por $\emptyset$.

Ejemplo

Sea A *el conjunto de satélites de Venus. Entonces* $A = \emptyset$*, ya que Venus no tiene ningún satélite.*

Lógica de predicados

- Algunas afirmaciones lógicas encierran una estructura más compleja.
- La lógica proposicional es limitada en estos casos.
- La **lógica de primer orden** se encarga de analizar enunciados con **predicados**.

Ejemplos

- $x < 4$.
- *Para todo entero x, si x es múltiplo de 4 entonces x es par.*
- *Todos los planetas tienen una órbita elíptica.*
- *Existe un entero z tal que $z = z + 1$.*
- *Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $x \in \mathbb{N}$.*

Lógica de predicados

Definición

Un **predicado** $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es una afirmación que hace referencia a una propiedad o una relación entre objetos* $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, de forma que al sustituirlos por valores concretos,* $c_1, c_2, \ldots, c_n$*, el resultado de reemplazar dichos objetos por los valores correspondietes es una afirmación lógica,* $p(c_1, c_2, \ldots, c_n)$*, la cual dispone de un valor de verdad, que depende de los valores* c_i.

Ejemplos

1. *Sea* $p(x)$ *la afirmación "*x *es un reptil". Entonces, por ejemplo,* $p(\text{serpiente})$ *es verdadera, mientras que* $p(\text{gato})$ *es falsa.*
2. *Tomemos* $p(x, y)$ *la afirmación "*$x + y = 3$*". Entonces, por ejemplo,* $p(1, 2)$ *es verdadera, mientras que* $p(1, 1)$ *no lo es.*

Definición

Si $p(x)$ es un predicado, la afirmación "para todo x, $p(x)$" es una proposición que indica que cualquier valor de $x \in \mathcal{U}$ verifica $p(x)$. El símbolo que denota esta relación es "$\forall$" y recibe el nombre de **cuantificador universal***. En este caso, la afirmación anterior puede expresarse como $\forall x, p(x)$ o $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$.*

- En la cuantificación universal pueden utilizarse tantas variables como se necesite. Por ejemplo, para expresar "para todo x e y, $p(x, y)$", puede utilizarse indistintamente $\forall x, \forall y, p(x, y)$ o bien $\forall x, y, p(x, y)$.
- Una afirmación universalmente cuantificada es verdadera cuando p se cumple para todos los valores cuantificados.
- En caso contrario (existencia de algún valor o valores que no la cumplan) es falsa.

Universidad Internacional de Valencia

Ejemplos

Transcribamos formalmente las siguientes afirmaciones:

1. *"El cuadrado de todo número real es mayor o igual que 0":*

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0.$$

   Esta afirmación puede expresarse en general de la forma $\forall x, p(x)$*, donde* $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ *y* $p(x)$: "$x^2 \geq 0$".

2. *"Todo par de números enteros verifica que su suma es positiva":*

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y > 0.$$

   En este caso, puede expresarse como $\forall x, y, p(x, y)$*, con* $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ *y* $p(x, y)$: $x + y > 0$.

Definición

Si $p(x)$ es un predicado, la afirmación "existe un x tal que $p(x)$" es una proposición que indica la existencia de algún valor de $x \in \mathcal{U}$ verificando $p(x)$. El símbolo que denota esta relación es "$\exists$" y recibe el nombre de **cuantificador existencial**. *En este caso, la afirmación anterior puede expresarse como $\exists x : p(x)$ o $\exists x \in \mathcal{U} : p(x)$.*

- En la cuantificación existencial pueden utilizarse tantas variables como se necesite. Por ejemplo, para expresar "existen x e y tal que $p(x, y)$", puede utilizarse indistintamente $\exists x, \exists y : p(x, y)$ o bien $\exists x, y : p(x, y)$.
- Una afirmación existencialmente cuantificada es verdadera cuando p se cumple para algún valor cuantificado.
- En caso contrario (inexistencia de valores que la cumplan) es falsa.

Ejemplos

Transcribamos formalmente las siguientes afirmaciones:

1. *"Existe un valor real cuyo cuadrado es igual a -1":*

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1.$$

   Esta afirmación puede expresarse en general de la forma $\exists x : p(x)$, donde $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ y $p(x)$: "$x^2 = -1$".

2. *"Existen un par de números enteros tales que su suma es igual a 10":*

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} : x + y = 10.$$

   En este caso, puede expresarse como $\exists x, y : p(x, y)$, con $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ y $p(x, y)$: $x + y = 10$.

Nota

Los dos tipos de cuantificadores pueden combinarse de cualquier forma; no obstante, el orden en el que aparecen es **crucial**, *puesto que* **NO** *conmutan.*

Ejemplo

Consideremos las dos afirmaciones siguientes:

1. $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : y > x.$
   "*Para todo número natural, existe otro natural tal que este último es mayor que el primero*".
2. $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N}, y > x.$
   "*Existe un número natural tal que es mayor que el resto de números naturales*".

Universidad Internacional de Valencia

Definición

Sean A y B dos afirmaciones lógicas. Diremos que A **implica lógicamente** *B, y lo denotaremos por $A \models B$, si se cumple que B es verdadera siempre que A lo sea.*

Ejemplo

Sea A la afirmación "$x > 4$" y B la afirmación "$x > 3$".

- *$A \models B$, ya que si un valor es mayor que 4 también es mayor que 3.*
- *$B \not\models A$, puesto que, por ejemplo, tomando $x = 4$, se tiene que B es verdadero ($4 > 3$), pero no A ($4 \not> 4$).*

Definición

Sean A y B dos afirmaciones lógicas. Diremos que A **equivale lógicamente** *a B, y lo denotaremos por $A \equiv B$ se tiene que $A \vDash B$ y viceversa, $B \vDash A$.*

Ejemplos

1. *Sea A la afirmación "$x = y$" y B la afirmación "$x - y = 0$". Entonces $A \equiv B$.*
2. *Sea A la afirmación "$\forall x, p(x)$" y B la afirmación "$\exists x : p(x)$". Entonces $A \not\equiv B$, ya que $B \nvDash A$ (si bien $A \vDash B$).*
3. *Consideremos A "$\forall x, y, x + y > 0$" y B "$\forall x, y, x \cdot y < 0$". Entonces $A \not\equiv B$ ($A \nvDash B$ y $B \nvDash A$).*

Propiedades

Se cumplen las siguientes relaciones:

1. $\forall x, [p(x) \vee q(x)] \dashv [\forall x, p(x)] \vee [\forall x, q(x)].$
2. $\exists x : [p(x) \vee q(x)] \equiv [\exists x : p(x)] \vee [\exists x : q(x)].$
3. $\forall x, [p(x) \wedge q(x)] \equiv [\forall x, p(x)] \wedge [\forall x, q(x)].$
4. $\exists x : [p(x) \wedge q(x)] \models [\exists x : p(x)] \wedge [\exists x : q(x)].$

Ejemplos

1. *Consideremos la afirmación "todo número natural es par o bien impar" (verdadera), la cual puede transcribirse como* $\forall x \in \mathbb{N}, [p(x) \vee q(x)]$, *siendo* $p(x)$: *"x es par" y* $q(x)$: *"x es impar".*

   No obstante, la afirmación $[\forall x \in \mathbb{N}, p(x)] \vee [\forall x \in \mathbb{N}, q(x)]$ *se lee como*

   "todo número natural es par, o bien todo número natural es impar"

   (falsa, por ser una disyunción de dos proposiciones falsas).

Ejemplos

2. *Sea* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *y la afirmación "existe algúnver número en* A *que es múltiplo de* 2 *y* 3 *simultáneamente" (falsa). Ésta puede leerse como* $\exists x \in A : [p(x) \wedge q(x)]$, *donde* $p(x)$: *"*x *es múltiplo de* 2*" y* $q(x)$: *"*x *es múltiplo de* 3*".*

   No obstante, la afirmación $[\exists x \in A : p(x)] \wedge [\exists x \in A : q(x)]$ *se lee como*

   "existe un múltiplo de 2 *en* A *y existe un múltiplo de* 3 *en* A*"*

   (verdadera, por ser una conjunción de dos proposiciones verdaderas).

Lógica de predicados

Teorema

Se cumplen las siguientes **leyes de De Morgan generalizadas***:*

1. $\neg[\forall x, p(x)] \equiv \exists x : \neg p(x)$.
2. $\neg[\exists x : p(x)] \equiv \forall x, \neg p(x)$.
3. $\forall x, p(x) \equiv \neg[\exists x : \neg p(x)]$.
4. $\exists x : p(x) \equiv \neg[\forall x, \neg p(x)]$.

Ejemplos

1. $\forall x, \neg[\exists y : [p(x,y) \to q(x)]]$.

$$\forall x, \neg[\exists y : [\neg p(x,y) \vee q(x)]]$$

$$\forall x, \forall y, \neg[\neg p(x,y) \vee q(x)]$$

$$\forall x, \forall y, [\neg[\neg p(x,y)] \wedge \neg q(x)]$$

$$\forall x, \forall y, [p(x,y) \wedge \neg q(x)]$$

$$\forall x, y, [p(x,y) \wedge \neg q(x)]$$

Ejemplos

2. *Consideremos el enunciado "no es cierto que todo entero sea simultáneamente par y positivo":*

$$\neg[\forall x \in \mathbb{Z}, [p(x) \wedge q(x)]],$$

donde $p(x)$: *"*x *es par",* $q(x)$: *"*x *es positivo".*

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \neg[p(x) \wedge q(x)]$$
$$\exists x \in \mathbb{Z} : \neg p(x) \vee \neg q(x),$$

siendo por tanto el enunciado equivalente "existe algún número entero tal que o bien es impar o bien no es positivo".

¡Muchas gracias!

Universidad Internacional de Valencia

Contacto:

amilcar.perez@professor.universidadviu.com