Álgebra

Universidad Internacional de Valencia

Máster Universitario en Inteligencia Artificial

02MIAR | Matemáticas:
Matemáticas para la Inteligencia Artificial

Profesor:
Amílcar J. Pérez A.

Definición

Un vector real v de dimensión n es una lista ordenada de n números reales:

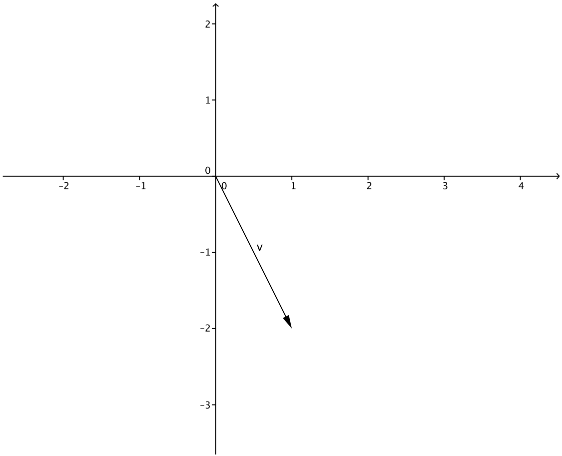
$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad v_i \in \mathbb{R}.$$

Se denota por $\mathbb{R}^n$ el conjunto formado por todos los vectores de dimensión n. Por tanto, podemos escribir $v \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplos

1. $v = (1, -\frac{2}{3}) \in \mathbb{R}^2$.
2. $w = (\sqrt{2}, -1.2, \pi) \in \mathbb{R}^3$.

Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden representar gráficamente mediante un sistema de coordenadas n dimensional en caso de que $n \leq 3$.



Definición

Dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, *definimos su suma componente a componente:*

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \ldots, v_n + w_n).$$

Definición

Dado un número real λ *(un escalar) y un vector* $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, *definimos el producto de un escalar por un vector así:*

$$\lambda \cdot v = \lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \ldots, \lambda v_n).$$

Además de la longitud euclídea (noción usual longitud) es posible dar otras definiciones de la **norma** de un vector. Algunas normas importantes son:

- Norma euclídea (o norma 2):

$$\|v\| = \|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

- Norma 1:

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|.$$

- Norma del máximo:

$$\|v\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |v_i|.$$

Ejemplo

Construimos un modelo computacional para predecir las temperaturas a partir de algunas variables de entrada (input). Supongamos que obtenemos un conjunto de n predicciones con el modelo considerado, almacenadas en un vector:

$$\hat{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \ldots, \hat{v}_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Comparamos ahora el vector de predicciones, $\hat{v}$, con el vector de respuestas reales (observaciones), $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Una forma de hacerlo es utilizar alguna norma $\| \cdot \|_*$ sobre la diferencia de los dos vectores:

$$E = \frac{1}{n} \|\hat{v} - v\|_*$$

Objetivo: encontrar un algoritmo que minimice E.

El producto escalar entre dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Ejemplo

Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$, *con* $v = (2, -1, 0)$ *y* $w = (-3, -2, 1)$. *Entonces*

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (2, -1, 0) \cdot (-3, -2, 1) \\ &= 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 = -6 + 2 + 0 = -4. \end{aligned}$$

Definición

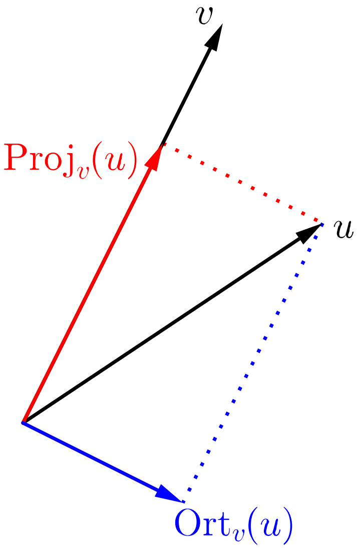
Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$*. Definimos la* **proyección** *de* u *sobre* v *como*

$$\operatorname{Proj}_v(u) = \frac{u \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$$

Definición

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$*. Definimos la* **ortogonal** *de* u *sobre* v *como*

$$\operatorname{Ort}_v(u) = u - \operatorname{Proj}_v(u)$$



Definición

Diremos que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ *son* **ortogonales** *si* $u \cdot v = 0$.

La definición de ortogonalidad entre dos vectores se corresponde con la noción geométrica de perpendicularidad.

Más concretamente,

$$u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos(\widehat{uv}),$$

donde $\widehat{uv}$ es el ángulo que forman los vectores u y v.

De esta expresión se sigue que, siendo $\hat{v} = v/\|v\|$ el vector unitario en la dirección de v:

$$\mathrm{Proj}_v\,(u) = \|u\| \cos(\widehat{uv})\hat{v}$$

Propiedades

Para $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$:

- $u + v = v + u$.
- $u \cdot v = v \cdot u$.
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
- $(\lambda u) \cdot v = \lambda(u \cdot v)$.
- $v \cdot v = \|v\|^2$.
- $u \cdot v = 0$ *si y sólo si* u *y* v *son ortogonales.*
- $v \cdot u = v \cdot \mathrm{Proj}_v(u)$.
- $\mathrm{Ort}_v(u) \cdot v = 0$

Definición

Dados $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, una **combinación lineal** *de los k vectores anteriores es cualquier expresión de la forma*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k,$$

con $\lambda_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$

Definición

Diremos que $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ son **linealmente independientes** *si se cumple que la ecuación*

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

tiene como única solución $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. En caso contrario, se dice que éstos vectores son **linealmente dependientes***.*

Definición

Una **matriz** *de tamaño $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto formado por $m \cdot n$ números reales, a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, distribuidos en m filas y n columnas de la siguiente forma:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $\mathbb{R}^{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es **cuadrada** *si $m = n$, i.e., si tiene el mismo número de filas que de columnas. $I_n = (\delta_{ij})$ es la matriz identidad $n \times n$.*

¡Muchas gracias!

Universidad Internacional de Valencia

Contacto:

amilcar.perez@professor.universidadviu.com