Lógica y teoría de conjuntos - Soluciones

1. Comprueba mediante la tabla de verdad las siguientes equivalencias entre fórmulas lógicas:

   a) $p \vee \neg p = 1$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

(1)

   b) $p \to q = \neg q \to \neg p$

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1

(2)

   c) $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (ley de De Morgan)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

(3)

   d) $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ (ley de De Morgan)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

(4)

2. Halla el valor de verdad de las siguientes fórmulas lógicas:

   a) $p \to p$ (Tautológico)

   b) $p \to \neg p$ (Contingente)

   c) $p \to (p \wedge q)$ (Contingente)

   d) $(p \wedge q) \to p$ (Tautológico)

   e) $(p \vee q) \to p$ (Contingente)

   f) $(p \to q) \wedge (p \wedge \neg q)$ (Contradicción)

   g) $(p \to q) \wedge (q \to p)$ (Contingente)

   h) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ (Tautológico)

3. Elige como universo de discurso $\mathcal{U}$ alguno de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ y define dos predicados $p(x)$ y $q(x)$ para comprobar que las afirmaciones siguientes **no** son ciertas:

   a) $\forall x \in \mathcal{U}, [p(x) \vee q(x)] \vDash [\forall x \in \mathcal{U}, p(x)] \vee [\forall x \in \mathcal{U}, q(x)]$
   Escogemos $\mathcal{U} = \mathcal{R}$, como $p(x)$ el enunciado "$x \geq 0$" y como $q(x)$ el enunciado "$x < 0$". Entonces, se cumple que todo número real es o bien positivo o bien estrictamente negativo (la parte izquierda de la afirmación). No obstante, no se cumple que todo real sea positivo o todo real sea estrictamente negativo (como se afirma en la parte derecha). Por lo tanto, la afirmación no es cierta.

   b) $\exists x \in \mathcal{U} : [p(x) \wedge q(x)] \Dashv [\exists x \in \mathcal{U} : p(x)] \wedge [\exists x \in \mathcal{U}, q(x)]$
   Con los mismos enunciados del apartado a), se cumple que existe un real que es positivo y existe un real que es estrictamente negativo (parte derecha). Sin embargo, no existe un real que sea positivo y estrictamente negativo al mismo tiempo (parte izquierda). De nuevo, el enunciado es falso.

4. Expresa en lenguaje de primer orden los enunciados siguientes y razona sobre su veracidad o falsedad.

   a) Todo número entero es natural.
   $\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N}$ es falso, puesto existen valores enteros (todos los estrictamente negativos que no son naturales)

   b) Existe algún número natural par.
   $\exists x \in \mathbb{N} : x = 2n, n \in \mathbb{N}$ es verdadero. Es suficiente con dar un ejemplo: $x = 2$.

   c) Existe un valor real tal que, para todo número real, el producto de ambos es siempre igual al primero.
   $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, x \cdot y = x$ es cierto, ya que se cumple para $x = 0$. Se puede obtener resolviendo la ecuación, que se cumple para $y = 1, x \neq 0$ o para $x = 0$.

   d) No es cierto que para todo número natural, existe otro número natural que es mayor que él.
   $\neg[\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x < y]$ es falso, puesto que es equivalente por la ley de De Morgan a $\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N}, x \geq y$. Y esto supondría que existe una cota en los números naturales.

5. Expresa en lenguaje formal los pares de enunciados siguientes y razona acerca de su veracidad, comparando los resultados obtenidos.

   a)
   - Para todo número entero, existe otro entero tal que su suma es positiva.
   - Existe un entero tal que para todo número entero, la suma de ambos es positiva.

   Los enunciados son $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y > 0$ y $\exists x \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{Z}, x + y > 0$. El primero se puede comprobar que es cierto si elegimos $y = 1 - x$ (y siempre lo podemos hacer porque $1 - x \in \mathbb{Z}$). En el segundo caso, podemos ver que es falso ya que siempre podemos encontrar un y que no cumpla la desigualdad para un x fijo. Por ejemplo, $y = -x$. Por tanto, dado un x, no se cumple la desigualdad para todo y.

b)
- Toda función real es continua, o bien toda función real es discontinua.
- Toda función real es continua o bien discontinua.

Denotamos $\mathcal{F} = \{f | f \text{ es una función real}\}$, $p(x)$ el enunciado "f es continua" y $q(x)$ el enunciado "f es discontinua". Los enunciados son $[\forall f \in \mathcal{F}, p(x)] \vee [\forall f \in \mathcal{F}, q(x)]$ y $\forall f \in \mathcal{F}, p(x) \vee q(x)$. El primero es falso porque no todas las funciones pertenecen a uno de los dos grupos. Podemos escoger ejemplos de ambos ($f(x) = x$ y $f(x) = \{0, \text{ si } x < 0; 1, \text{ si } x \geq 0\}$). El segundo enunciado, sin embargo, sí es cierto.

c)
- Existe algún número natural que es par y existe algún número natural que es impar.
- Existe algún número natural tal que es par e impar.

Denotamos como $p(x)$ el enunciado "x es par" y como $q(x)$ el enunciado "x es impar". Los enunciados son $[\exists x \in \mathbb{N} : p(x)] \wedge [\exists x \in \mathbb{N} : q(x)]$ y $\exists x \in \mathbb{N} : p(x) \wedge q(x)$. El primer enunciado es cierto y lo podemos probar dando un par de ejemplos. El segundo es falso, puesto que requiere que el número x sea par e impar simultáneamente.

6. ¿Cuántas palabras de 5 letras diferentes pueden formarse escogiendo todas las letras del conjunto de las vocales?

   Las vocales son 5 letras y las palabras que queremos formar contienen todas las vocales y tienen 5 caracteres, por lo que escribiremos cada vocal una sola vez. Se trata de un problema de permutación sin repetición. De la fórmula, el número de posibilidades es $n!$, donde $n = 5$. Por lo tanto, 120 palabras.

7. ¿Cuántas manos diferentes podemos obtener en una partida de guiñote (baraja de 40 cartas, manos de 6 cartas)?

   En este caso, las cartas de una mano no se pueden repetir y las seleccionamos de un conjunto de 40 cartas totales. Además, en nuestra mano no importa el orden. Por lo tanto, es un problema de combinación sin repetición. De la fórmula, las posibilidades son $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $n = 40$ y $k = 6$. Por lo tanto, las posibles manos son $\dfrac{40!}{6!34!} = 3.838.380$.

8. ¿Cuántas palabras de 4 letras diferentes pueden formarse con las 10 primeras letras del abecedario?

   En las secuencias de letras sí importa el orden y además nos indican que las letras han de ser diferences, por lo que no se permite la repetición. Entonces, estamos ante una variación sin repetición. Según la fórmula, las posibilidades son $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. En nuestro caso, $n = 10$ y $k = 4$, por lo que las posibles palabras con letras diferentes son $\dfrac{10!}{6!} = 5.040$.

   Observación: Si el enunciado se interpreta como palabras diferentes que contengan 4 letras de las 10 primeras del abecedario, lo que cambia es que se permite la repetición (podemos formar, por ejemplo, "aaaa"). En este caso, se trata de un problema de variación con repetición. De la fórmula, las posibilidades son n^k, donde $n = 10$ y $k = 4$. En este caso, las posibles palabras son $10^4 = 10.000$.

9. ¿Cuántos valores diferentes pueden obtenerse reordenando los dígitos del número 956004556?

   Reordenar es el sinónimo de permutar. Además, en el número existen valores repetidos. Por lo tanto, debemos hacer una permutación con repetición. De la fórmula, las posibilidades son $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$. En nuestro caso $n = 9$ y el resto de n_i son 1 excepto $n_6 = 2$, $n_0 = 2$ y $n_5 = 3$. Por tanto, los diferentes dígitos son $\dfrac{9!}{2!2!3!} = 15.120$.

10. ¿Cuántas palabras de 3 letras pueden formarse con las 5 vocales (admitiendo repetición de letras)?

    En este caso tenemos una palabra de 3 letras con repetición donde el orden importa. Por lo tanto, es un problema de variación con repetición. De la fórmula, las posibilidades son n^k. En nuestro caso $n = 5$ y $k = 3$, por lo que las posibilidades son $5^3 = 125$.

11. En una urna con 10 bolas diferentes, se extraen 5, reemplazando la bola en la urna cada vez que se realiza una extracción. ¿Cuántos combinaciones posibles hay?

    Es un problema en el que no importa el orden y se pueden hacer repeticiones (podemos sacar la misma bola de nuevo). Por lo tanto, estamos ante un problema combinatorio con repetición. De la fórmula, las posibilidades son $\dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}$. En nuestro caso, $n = 10$ y $k = 5$, por lo que los posibles resultados son $\dfrac{14!}{9!5!} = 2.002$.

12. ¿Cuántos archivos diferentes de 8 bytes pueden existir?

    Cada byte corresponde a 8 bits, que a su vez corresponden a 8 valores binarios. Por lo tanto, si un archivo tiene 8 bytes, quiere decir que tiene 64 posiciones con valores posibles 1 o 0. Este es un problema de variación con repetición (pues sí que importa el orden). De la fórmula, las posibilidades son n^k, donde $n = 2$ y $k = 64$. Por lo tanto, los posibles archivos son $2^{64} = 18.446.744.073.709.551.616$.

13. En un archivo de 20 bytes se corrompen 4 bytes (cuyas posiciones se desconocen). ¿De cuántas formas diferentes se ha podido corromper?

    En este caso, se trata de un problema en el que 4 bytes (diferentes) de 20 cambian de valor. El orden no importa (no es relevante qué byte se modificó primero) y no hay repetición. Por lo tanto, se trata de una combinación sin repetición. De la fórmula, las posibilidades son $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. En nuestro caso, $n = 20$ y $k = 4$, por lo que las formas de corromper el archivo son $\dfrac{20!}{4!16!} = 4.845$.