Cálculo - Ejercicios no evaluables

1. Calcúlese el dominio de definición de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = x^2 + 1$.
   f es un polinomio y, como tal, está definida en todo $\mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \sqrt{x-1}$.
   En este caso, f se puede escribir como una composición de dos funciones $f = g \circ h$, donde $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x - 1$. h es un polinomio y como tal, está definida en todo $\mathbb{R}$. La función g, sin embargo, no está definida para valores negativos de x, es decir, $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Por lo tanto, el dominio de definición de f es $[1, +\infty)$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
   f es un cociente de polinomios, cociente que no está definido cuando el denominador se anula. En este caso, hay una asíntota en $x = 1$. Es decir, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$. Por lo tanto, el dominio de definición de f es $\mathbb{R}\backslash\{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

   d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.
   En este caso, el denominador no tiene soluciones en los reales, ya que $x^2 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R}$.

   e) $f(x) = \log(1 - x^2)$.
   Como en el caso de la raíz cuadrada, podemos descomponer el problema en dos funciones. Sabemos que el logaritmo está definido para un argumento estrictamente positivo. Por tanto, el dominio de f está dado por el conjunto solución de $1 - x^2 > 0$, i.e., $-1 < x < 1$, equivalentemente el intervalo $(-1, 1)$.

   f) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
   De nuevo, la raíz cuadrada está definida para valores positivos. Por lo tanto, el dominio de definición es $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

2. Obténgase el valor del límite en cada caso:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) + e^x$.
   Sabemos que por separado $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} e^x = 1$.
   Por lo tanto,
   $$\lim_{x\to 0} \sin(x) + e^x = 1.$$

   b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \log(1 - x)$.
   Este logaritmo es una función definida para $1 - x > 0$ o $x < 1$. De modo que, si $x \to 1^-$, entonces $(1 - x) \to 0^+$. Por lo tanto,
   $$\lim_{x\to 1^-} \log(1 - x) = -\infty.$$

c) $\lim_{x\to 3} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \sin\big(\pi(x-3)\big) & x < 3 \\ -2 & x = 3 \\ e^{x-3} - 1 & x > 3 \end{cases}$$

Como f es una función definida a trozos que tiene diferentes expresiones alrededor del punto $x = 3$, debemos hacer los límites por izquierda y por derecha. Por la izquierda de $x = 3$ tenemos

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3} \sin(\pi(x-3)) = 0.$$

Por la derecha de $x = 3$ tenemos

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} e^{x-3} - 1 = 0.$$

En definitiva, tenemos que los límites laterales coinciden. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 0.$$

Fijaos que $f(3) = -2 \neq 0$. Es decir, la función no es continua en el punto $x = 3$.

d) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 2 & x = 0 \\ 3 - x & x > 0 \end{cases}$$

El límite por la izquierda de 0 es el límite de valores de $x < 0$ que se aproximan a 0. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} x + 1 = 1.$$

e) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, donde f es la función del apartado anterior.
Cuando nos acercamos a 0 por la derecha, es decir, para valores $x > 0$, el límite es

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} 3 - x = 3.$$

f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{x}$.
En este caso tenemos un cociente de funciones que divergen cuando $x \to +\infty$. Por lo tanto, obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Para determinar el valor del límite usamos la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x}$. En este caso obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+2\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}} = 1$$

3. Determínese si las siguientes funciones son o no continuas en los puntos indicados.

a) En $x = 0$ para

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{\sin(x)}+1 & x < 0 \\ x+3 & x \geq 0 \end{cases}$$

Para saber si esta función por partes es continua en $x = 0$ es necesario calcular los límites por izquierda y por derecha de este punto y comprobar si coinciden. Por la izquierda

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} 2e^{\sin(x)} + 1 = 3.$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x + 3 = 3.$$

Como los límites laterales son iguales e iguales a $f(0)$, la función es continua en $x = 0$.

b) En $x = 1$ para

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2+2 & x > 1 \end{cases}$$

De nuevo nos calculamos los límites laterales. En particular, en este caso el límite en $x = 1$ además debe coincidir con $f(1) = 2$. Por la izquierda

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 3x - 1 = 2.$$

Por la derecha

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 + 2 = 3.$$

Por tanto, hay una discontinuidad de salto finito en $x = 1$ y en consecuencia la función no es continua en ese punto.

c) En $x = 0$ para

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

En el punto $x = 0$ el límite es

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1.$$

Sin embargo, $f(0) = 0 \neq 1$. Por tanto, la función no es continua.

4. Obténgase la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x + 4$.
   De la derivada de un polinomio,
   $$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 10x - 1$$

   b) $f(x) = x\ln(x)$.
   Usando la regla de la derivada del producto
   $$f'(x) = \ln(x) + x\frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

   c) $f(x) = x^2\sin(x)$.
   Como en el caso anterior $f'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$.

   d) $f(x) = -2x^3\cos(x)\ln(x)$.
   Aplicamos la derivada del producto de forma iterativa para obtener
   $$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2\cos(x)\ln(x) - 2x^3(\cos(x)\ln(x))' \\ &= -6x^2\cos(x)\ln(x) + 2x^3\sin(x)\ln(x) - 2x^3\cos(x)\frac{1}{x} \\ &= -6x^2\cos(x)\ln(x) + 2x^3\sin(x)\ln(x) - 2x^2\cos(x) \end{aligned}$$

   e) $f(x) = e^{x^2+1}$.
   Aplicando la regla de la cadena
   $$f'(x) = e^{x^2+1}\cdot 2x$$

   f) $f(x) = \ln(\ln(x))$.
   Aplicando la regla de la cadena
   $$f'(x) = \frac{1}{\ln(x)}\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

   g) $f(x) = \sqrt{\sin(x) + \cos(x) + 2}$.
   Aplicando la regla de la cadena
   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x) + \cos(x) + 2}}(\cos(x) - \sin(x))$$

   h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)\sin(x)}{1 + x^2}$.
   Aplicando la regla de derivación para un cociente de funciones y la de la derivada de un producto
   $$f'(x) = \frac{(-\sin(x)^2 + \cos(x)^2)(1 + x^2) - \cos(x)\sin(x)2x}{(1 + x^2)^2}$$

i) $f(x) = \arctan\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.
Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2} \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2+\ln(x)^2}$$

j) $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$.

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = \cos(\cos(\tan(x))) \cdot (-\sin(\tan(x))) \cdot (1+\tan^2(x))$$

5. Obténgase el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2(x)}{1} = 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{2x-3} = \frac{0}{1} = 0.$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\ln(x)}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}-1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{x-1}}{1/x} = \lim_{x\to 1} xe^{x-1} = 1.$$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital dos veces para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{2} = 1.$$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2)+e^x-1}{x^2\cos(x)}$.
Indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de l'Hôpital para obtener

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)+e^x-1}{x^2\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos(x^2)+e^x}{2x\cos(x)-x^2\sin(x)} = \infty,$$

puesto que el denominador tiende a 0 pero el numerador tiende a 1.

6. Calcúlese los puntos críticos de las siguientes funciones y determínese su tipo:

a) $f(x,y) = x^2+y^2-1$.
Los puntos críticos son aquellos puntos (x_0,y_0) tal que $\nabla f(x_0,y_0)=0$. En este caso

$$\nabla f(x,y) = (2x,2y),$$

por lo que el único punto crítico es $(0,0)$. Para saber qué tipo de punto es necesitamos calcular la matriz Hessiana.

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando el Teorema para caracterizar puntos críticos, como $\det H_f(0,0) = 4 > 0$ y $H_f(0,0)_{11} = 2 > 0$, el punto $(0,0)$ es un mínimo local.

b) $f(x,y) = 4-x^2-2y^2$.

$$\nabla f = (-2x,-4y), \quad H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Hay un punto crítico en $(0,0)$ y es un máximo local, dado que $\det H_f(0,0) > 0$ y $H_f(0,0)_{11} = -2 < 0$.

c) $f(x,y) = 9-2x^2+3y^2+5xy+4x-y$.

$$\nabla f = (-4x+5y+4, 6y+5x-1), \quad H_f = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Hay un punto crítico en $(x_0,y_0) = (29/49, -16/49)$ y es un punto de silla, ya que $\det H_f(x_0,y_0) = -49 < 0$.

d) $f(x,y) = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+1$.

$$\nabla f = (3x^2-6xy+3y^2, -3x^2+6xy-3y^2), \quad H_f = \begin{pmatrix} 6x-6y & 6y-6x \\ 6y-6x & 6x-6y \end{pmatrix}$$

En este caso existe una recta de puntos críticos $x = y$, lo que puede verse escribiendo $\nabla f = 3(x-y)^2(1,-1)$.
Para caracterizarlos usamos la matriz Hessiana, que satisface $\det H_f(x,y) = 0$, si $x = y$. Por lo tanto, el criterio no es decisivo y habría que usar otros métodos para clasificar estos puntos críticos (métodos que no hemos discutido en este curso).

7. Obténgase el valor de $(g \circ f)'(0)$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

   Usando la regla de la cadena,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{1}$$

   Así pues, para calcular la derivada de la composición de funciones podemos usar la fórmula (1) o bien expresar la función compuesta y derivarla. Vamos a verlo.
   Aplicando la regla de la cadena,

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(e^x)^2} \cdot e^x = -e^{-x}.$$

   Por lo tanto, $(g \circ f)'(0) = -1$.
   Expresando la función compuesta y derivándola obtenemos el mismo resultado (como debe ocurrir si hemos hecho todo bien)

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}, \quad (g \circ f)'(x) = -e^{-x}.$$

   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cumpliendo $f(0) = 5$, $f'(0) = -7$, $g'(5) = 2$.
   Usando la regla de la cadena,

$$(g \circ f)'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(5)f'(0) = -14.$$

   c) $f : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$, $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) := x^2 + y^2 + 1, \quad g(z) = \ln(z).$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) &= \ln(x^2 + y^2 + 1) \\ \nabla(g \circ f)(x,y) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}(2x, 2y) \end{aligned}$$

   Por tanto, $\nabla(g \circ f)(0,0) = (0,0)$.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y) = (x^2 + y, x - y^3), \quad g(w,z) = w - z.$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y) &= x^2 + y - x + y^3 \\ \nabla(g \circ f)(x,y) &= (2x - 1, 3y^2 + 1) \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla(g \circ f)(0,0) = (-1,1)$.

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x,y,z) = (xy + z, x - yz), \quad g(s,t) = s^2 - \sin(t).$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x,y,z) &= (xy + z)^2 - \sin(x - yz) \\ \nabla(g \circ f)(x,y,x) &= ((xy + z)y - \cos(x - yz), \\ &\quad (xy + z)x + z\cos(x - yz), \\ &\quad (xy + z) + y\cos(x - yz)) \end{aligned}$$

Por tanto, $\nabla(g \circ f)(0,0,0) = (-1,0,0)$.

8. Determínese la expresión general asociada a las siguientes primitivas:

a) $\displaystyle\int (x^2 - 4x - 1)\mathrm{d}x.$

Usando que $(x^n)' = nx^{n-1}$,

$$\int (x^2 - 4x - 1)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - x + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{4}{1 + x^2}\mathrm{d}x.$

En este caso, podemos consultar la tabla de primitivas o bien escribir $x = \tan(y)$. Por lo que $y = \arctan(x)$ y $\mathrm{d}x = (1 + \tan^2(y))\mathrm{d}y$. Sustituyendo estas expresiones en la integral obtenemos

$$\int \frac{4}{1 + x^2}\mathrm{d}x = \int 4\mathrm{d}y = 4y + C = 4\arctan(x) + C.$$

c) $\displaystyle\int x\cos(x)\mathrm{d}x.$

Esta integral no tiene una primitiva directa, pero podemos aplicar la regla de la integral por partes para solucionarla.

La regla de la integral por partes es

$$\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u.$$

Por lo tanto, escogiendo $u = x$ y $\mathrm{d}v = \cos(x)\mathrm{d}x$ se obtiene

$$\int x\cos(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) - \int \sin(x)\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

d) $\int x^2 \sin(x)\mathrm{d}x.$
Aplicamos de nuevo la regla de la integral por partes dos veces seguidas escogiendo u como el término polinómico y $\mathrm{d}v$ como el término trigonométrico para obtener

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\mathrm{d}x &= -x^2\cos(x) + \int 2x\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) - \int 2\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C.\end{aligned}$$

9. Calcúlese el valor de las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-2}^{3}(4x^3 - 6x^2 + 1)\mathrm{d}x.$
La primitiva se puede calcular fácilmente y es $F(x) = x^4 - 2x^3 + x + C$.
A continuación podemos usar la regla de Barrow para obtener la integral definida de la siguiente forma

$$\int_{-2}^{3}(4x^3 - 6x^2 + 1)\mathrm{d}x = F(3) - F(-2) = 30 - 30 = 0$$

b) $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$
Como hemos visto en el ejercicio anterior, la primitiva es $F(x) = \arctan(x) + C$. Por tanto, la integral definida será $F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{-\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

c) $\int_{-3\pi}^{\pi}\sin(x)\mathrm{d}x.$
En este caso la primitiva es $F(x) = -\cos(x) + C$ y la integral definida será $F(\pi) - F(-3\pi) = -1 - (-1) = 0$.

d) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(x) + \cos(x))\,\mathrm{d}x.$
La primitiva es $F(x) = \sin(x) - \cos(x) + C$ y la integral definida, $F(\pi) - F(-\pi) = -1 - (-1) = 0$.