

Álgebra lineal – Soluciones

1. Obténganse las normas 1, 2 e ∞ de los siguientes vectores:

a) $v_1 = (1, 0, 2)$.

De la definición de estas normas:

- $\|v_1\|_1 = |1| + |0| + |2| = 3$
- $\|v_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
- $\|v_1\|_\infty = \max\{|1|, |0|, |2|\} = 2$

b) $v_2 = (-6, 5)$.

Aplicando las expresiones de arriba: $\|v_2\|_1 = 11$, $\|v_2\|_2 = \sqrt{61}$, $\|v_2\|_\infty = 6$.

c) $v_3 = (\sqrt{2}, -1, 0, 1)$.

Aplicando las expresiones de arriba: $\|v_3\|_1 = 2 + \sqrt{2}$, $\|v_3\|_2 = 2$, $\|v_3\|_\infty = \sqrt{2}$.

2. Calcúlese $u \cdot v$ en cada caso y determínese si u y v son perpendiculares.

a) $u = (0, -1, 2)$, $v = (1, 0, 0)$.

Recordad que dos vectores u y v son perpendiculares u ortogonales si $u \cdot v = 0$. En este caso, $u \cdot v = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$. Sí son perpendiculares.

b) $u = (-3, 1, 4)$, $v = (1, 4, -2)$.

$u \cdot v = -7$. No lo son.

c) $u = (\sqrt{2}, 1, 0)$, $v = (-\sqrt{2}, 2, -3)$.

$u \cdot v = 0$. Sí lo son.

3. Compruebe que $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$ siendo $u, v, w \in \mathbb{R}^n$.

Vamos a comprobar que se cumple la propiedad distributiva mediante las definiciones de suma y producto de vectores. ¡Recordad! Dados $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \quad (1)$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j \quad (2)$$

Entonces, $u \cdot (v + w)$ es

$$\sum_{j=1}^n u_j (v_j + w_j) = \sum_{j=1}^n (u_j v_j + u_j w_j) = \sum_{j=1}^n u_j v_j + \sum_{j=1}^n u_j w_j = u \cdot v + u \cdot w \quad (3)$$

Lo que hemos obtenido utilizando las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa del producto de números reales.

4. Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$. Demuestra que si u es perpendicular a w y v es perpendicular a w , entonces $u + v$ también es perpendicular a w .

Recordad que u es perpendicular a w significa que $u \cdot w = 0$. Del mismo modo, v es perpendicular a w equivale a $v \cdot w = 0$. Por lo tanto, usando la propiedad distributiva

$$(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w = 0 + 0 = 0. \quad (4)$$

Es decir, $u + v$ es perpendicular a w .

5. Sean $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ y $w = (\alpha, 2, \alpha)$ vectores de \mathbb{R}^3 . Encuentra para qué valores de α el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

De la definición, u, v y w son linealmente independientes si

$$au + bv + cw = \vec{0}, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad (5)$$

tiene como única solución $a = b = c = 0$. Si escribimos la ecuación (5) explícitamente, tenemos el sistema lineal de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} a + \alpha c &= 0, \\ a + b + 2c &= 0, \\ b + \alpha c &= 0. \end{cases} \quad (6)$$

Al resolverlo, obtenemos las ecuaciones $a = b = -\alpha c$, $c(1 - \alpha) = 0$. Estas ecuaciones tienen infinitas soluciones si $\alpha = 1$. No obstante, si $\alpha \neq 1$ entonces necesariamente $c = 0$, lo que implica $a = b = 0$. En definitiva, los vectores anteriores son linealmente independientes para $\alpha \neq 1$.

De hecho, si sustituís $\alpha = 1$ en el vector inicial, podéis comprobar rápidamente que $w = u + v$. Es decir que w es combinación lineal de u y v .

6. Compruebe las siguientes afirmaciones:

- a) Los vectores $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$ son linealmente independientes

Como en el ejercicio anterior, nos construimos el sistema de ecuaciones lineales resultante de hacer $\alpha v_1 + \beta v_2 = \vec{0}$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De este obtenemos que $\alpha = \beta$ y $\alpha = -\beta$. Esto solo es posible si $\alpha = \beta = 0$. Por lo tanto, son linealmente independientes.

- b) Todo vector $v \in \mathbb{R}^2$ es combinación lineal de v_1 y v_2 .

Esta afirmación se traduce en: $\forall v \in \mathbb{R}^2, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : v = \alpha v_1 + \beta v_2$. ¿Es eso verdad? Vamos a comprobarlo. Sea $v = (a, b)$ un vector cualquiera de \mathbb{R}^2 , entonces

$$v = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad (7)$$

implica que $a = \alpha - \beta$ y $b = \alpha + \beta$. Es decir, aislando α y β de las expresiones anteriores, podemos escribir cualquier vector $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ como $\frac{1}{2}(a + b)v_1 + \frac{1}{2}(b - a)v_2$.

7. Realícense las siguientes operaciones matriciales:

a)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -5 & -12 \\ 0 & 14 & 0 & 34 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9 & 12 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

c)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 8 \end{pmatrix} = 48$$

8. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices cuadradas tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -3$. Obtén razonadamente el valor de $\det(12A^2B)$.

Mediante el Teorema visto en clase que nos dice que para matrices regulares $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se cumple $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$, podemos obtener fácilmente que

$$\det(12A^2B) = 12^n \det(A)^2 \det(B) = -12^{n+1}. \quad (8)$$

Fijáos que λA , para $\lambda \in \mathbb{R}$, multiplica todos los elementos de A por λ . Por lo tanto, λ aparecerá tantas veces en el determinante como filas tenga la matriz. Podéis hacer la comprobación para matrices 2×2 y 3×3 , o incluso demostrarlo para todo n mediante la definición del determinante.

9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- a) Comprueba que $\det A = \det A'$. Siendo $A' = A^\top$ la matriz traspuesta de A .

De la definición del determinante podéis ver que ambos cálculos dan $ad - bc$.

- b) Deduce entonces que A es regular si y sólo si A' es regular.

Basta con usar el Teorema de la matriz inversa (A regular/invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$). De este se concluye que A' es invertible si y solo si $\det(A') \neq 0$ si y solo si $\det(A) \neq 0$ si y solo si A es invertible.

10. Demuestra, usando las identidades trigonométricas convenientes, los enunciados (a) y (b) siguientes, siendo $f_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$:

- a) $\|f_\theta(v)\| = \|v\|, \forall v \in \mathbb{R}^2, \forall \theta \in \mathbb{R}$. Siendo $\|\cdot\|$ la norma euclídea de \mathbb{R}^2 .

Equivalentemente probaremos que $\|f_\theta(v)\|^2 = \|v\|^2$:

$$\|f_\theta(v)\|^2 = x^2(\cos \theta)^2 + y^2(\sin \theta)^2 - 2xy \cos \theta \sin \theta + x^2(\sin \theta)^2 + y^2(\cos \theta)^2 + 2xy \sin \theta \cos \theta = (x^2 + y^2)((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) = x^2 + y^2 = \|v\|^2.$$

b) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

De la definición de f_θ

$$f_\alpha \circ f_\beta = f_\alpha(f_\beta(v)) = f_\alpha(x \cos \beta - y \sin \beta, x \sin \beta + y \cos \beta) \quad (9)$$

$$= ((x \cos \beta - y \sin \beta) \cos \alpha - (x \sin \beta + y \cos \beta) \sin \alpha, \quad (10)$$

$$(x \cos \beta - y \sin \beta) \sin \alpha + (x \sin \beta + y \cos \beta) \cos \alpha). \quad (11)$$

Usando las identidades $\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ y $\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ se obtiene

$$f_\alpha \circ f_\beta = (x \cos(\alpha + \beta) - y \sin(\alpha + \beta), x \sin(\alpha + \beta) + y \cos(\alpha + \beta)), \quad (12)$$

que es exactamente la definición de $f_{\alpha+\beta}$.

c) Comprueba que la aplicación $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal.

Tenemos que comprobar que $f_\theta(au + bv) = af_\theta(u) + bf_\theta(v)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^2$. Fijáos que es equivalente a probar por separado $f_\theta(au) = af_\theta(u)$ y $f_\theta(u+v) = f_\theta(u) + f_\theta(v)$.

De la definición, para $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$,

$$f_\theta(au) = f_\theta(au_1, au_2) = (au_1 \cos \theta - au_2 \sin \theta, au_1 \sin \theta + au_2 \cos \theta) = af_\theta(u) \quad (13)$$

$$f_\theta(u+v) = f_\theta(u_1+v_1, u_2+v_2) \quad (14)$$

$$= ((u_1+v_1) \cos \theta - (u_2+v_2) \sin \theta, (u_1+v_1) \sin \theta + (u_2+v_2) \cos \theta) \quad (15)$$

$$= (u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta, u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta) \quad (16)$$

$$+ (v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta, v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta) \quad (17)$$

$$= f_\theta(u) + f_\theta(v) \quad (18)$$

d) Halla la representación matricial de $f_{\pi/4}$, i.e., la matriz $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $f_{\pi/4}(v) = Mv$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$.

De la definición, la representación matricial es

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Para $\theta = \pi/4$,

$$M_{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

11. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por $T(1, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 1) = (-1, 1)$, calcule:

a) $T(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

Como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ y T es lineal, tenemos que $T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1)$. Por tanto

$$T(x, y) = (x - y, x + y)$$

b) La representación matricial de T i.e., la matriz $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $T(v) = Mv$:

Llamemos $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$, entonces M es la matriz $(T(e_1)|T(e_2))$, escribiendo $T(e_1)$, $T(e_2)$ como vectores columna, i.e.,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Si } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Mv = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} = T(v).$$

12. Diagonaliza, de ser posible, las matrices siguientes:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, para cada matriz M , debemos hallar su polinomio característico $p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I)$ y entonces hallar el conjunto de autovalores reales de M $\sigma(M) := \{\lambda \in \mathbb{R} : p(\lambda) = 0\}$. Y en segundo lugar verificar si hay una base de autovectores:

(a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Por tanto $\sigma(A) = \{1, 2\}$.

Ahora, para cada $\lambda \in \sigma(A)$ hallemos un autovector asociado v_λ i.e., una solución no trivial ($\neq \vec{0}$) de $(A - \lambda I)v = \vec{0}$. Equivalentemente, buscamos $v_\lambda = (x, y)$ solución no trivial del sistema

$$\begin{cases} -\lambda x + 2y & = 0 \\ -x + (3 - \lambda)y & = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema encontramos $v_1 = (2, 1)$ y $v_2 = (1, 1)$. De modo que la matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = \text{Diag}(1, 2)$ es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Y $\text{Diag}(1, 2) = (d_{ij})$ es la matriz diagonal con entradas $d_{11} = 1$, $d_{22} = 2$ y $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

(b) $p_B(\lambda) = \lambda^2$, por lo que $\sigma(B) = \{0\}$ i.e., $\lambda = 0$ es autovalor doble (de multiplicidad algebraica 2).

Resolviendo el sistema asociado a $Bv = \vec{0}$ encontramos que cualquier autovector es múltiplo de $v = (0, 1)$. De modo que B no es diagonalizable.

(c) $p_C(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$, cuyo discriminante $\Delta = -4$, por lo que no hay soluciones reales a la ecuación característica $p_C(\lambda) = 0$. Así pues, C no es diagonalizable.

b)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 1)$, por lo que $\sigma(A) = \{0, \pm 1\}$. Al ser tres autovalores distintos tendremos una base de autovectores y por tanto A es diagonalizable. Hallemos la matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = \text{Diag}(-1, 0, 1)$.

Recordemos que $P = (v_{-1}|v_0|v_1)$ donde los autovectores v_λ están dispuestos como columnas. Y cada v_λ es una solución no trivial de $A - \lambda I_3 = \vec{0}$. Resolviendo los sistemas asociados encontramos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$