Cálculo

Universidad Internacional de Valencia

Máster Universitario en Inteligencia Artificial

02MIAR | Matemáticas:

Matemáticas para la Inteligencia Artificial

Profesor:

Amílcar J. Pérez A.

universidadviu.com

De: Planeta Formación y Universidades

Funciones reales de variable real

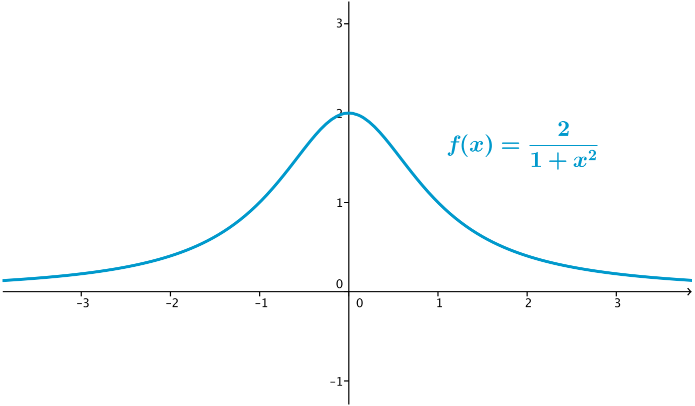
Una función real de variable real es una de la forma $f : A \to \mathbb{R}$, donde $A \subseteq \mathbb{R}$. Cuando se especifique sólo la regla y no el dominio de la función, se entenderá que éste es el mayor subconjunto posible de los números reales donde dicha regla tenga sentido.

Ejemplos

1. *Tiene sentido definir la función $f(x) = x^2$ sobre todos los números reales, es decir, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
2. *La función $f(x) = \sqrt{x}$ sólo tiene sentido tomarla sobre los números no negativos, luego $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$.*
3. *La función $f(x) = \log(x)$ sólo tiene sentido tomarla sobre los números positivos, luego $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.*
4. *Tiene sentido definir la función $f(x) = \frac{1}{x}$ sobre todos los reales salvo el 0, luego $f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.*

Funciones reales de variable real

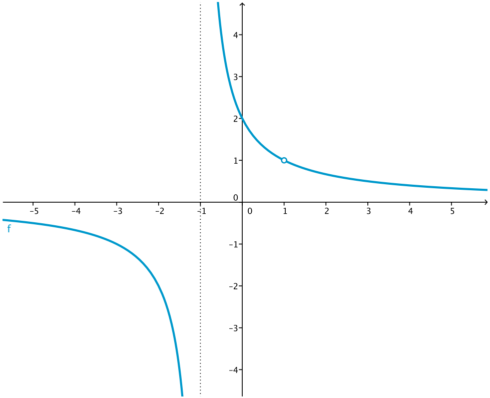
Una función real de variable real $f : A \to \mathbb{R}$ puede representarse gráficamente en dos dimensiones, considerando como coordenada X (abscisas) los diferentes valores del dominio y como coordenada Y (ordenadas) los valores de f asociados:
$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$.



Consideremos la función siguiente:

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 1}.$$

¿Qué ocurre en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?



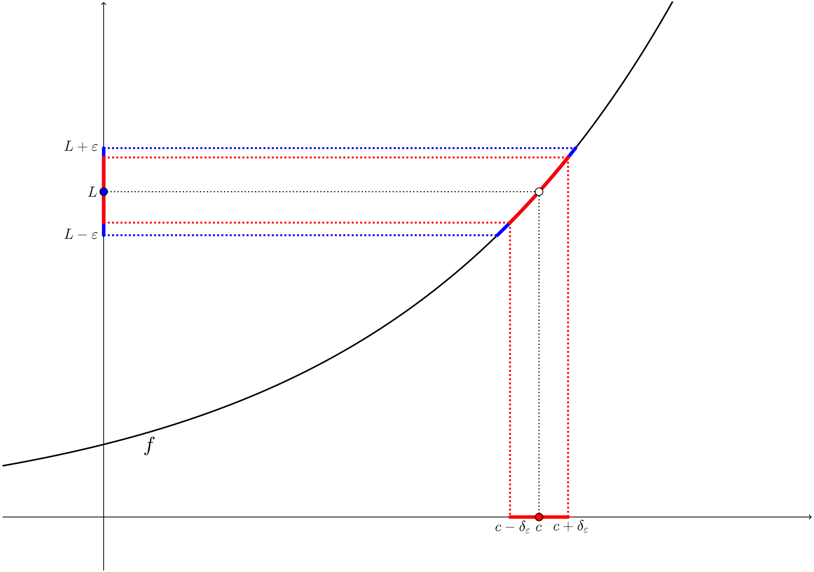
Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $c \in A$, de forma que $(c - \rho, c + \rho) \subseteq A$ para algún $\rho > 0$. Diremos que existe el **límite** *$L \in \mathbb{R}$ de f cuando x tiende a c, que denotaremos por $\lim_{x \to c} f(x) = L$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - c| < \delta_\varepsilon \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Intuitivamente, lo que indica la definición anterior es el siguiente enunciado: *dado un margen de error cualquiera, podemos encontrar un intervalo lo suficientemente pequeño centrado en c (asociado al margen de error proporcionado), de forma que la distancia entre $f(x)$ y L está siempre por debajo de ese margen de error dado en el intervalo considerado.*

Universidad Internacional de Valencia



Definición

- *Diremos que* $\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = L$ *si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_\varepsilon > 0 : 0 < \pm(x-c) < \delta_\varepsilon \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- *Diremos que* $\lim_{x\to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ *si*

$$\forall M > 0, \exists\delta_M > 0 : 0 < \pm(x-c) < \delta_M \to \pm f(x) > \pm M.$$

- *Diremos que* $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ *si*

$$\forall M > 0, \exists\delta_M > 0 : 0 < |x-c| < \delta_M \to |f(x)| > M.$$

- *Diremos que* $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = L$ *si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon > 0 : \pm x > \pm K_\varepsilon \to |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- *Diremos que* $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *si*

$$\forall M > 0, \exists K_M > 0 : \pm x > \pm K_M \to \pm f(x) > \pm M.$$

Teorema

Se cumple:

$$\exists \lim_{x\to c} f(x) = L \leftrightarrow \exists \lim_{x\to c^-} f(x) = L \wedge \exists \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

Propiedades

Si $\exists \lim_{x\to c} f(x) = L_1$ *y* $\exists \lim_{x\to c} g(x) = L_2$, *entonces:*

- $\exists \lim_{x\to c} \left(f(x) \pm g(x)\right) = L_1 \pm L_2.$
- $\exists \lim_{x\to c} \left(f(x)g(x)\right) = L_1 L_2.$
- *Si* $L_2 \neq 0$, $\exists \lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}.$

Continuidad

Definición

Diremos que una función f es **continua en un punto** *a si existe el siguiente límite (y es igual a $f(a)$)*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

En caso de que la continuidad se dé en todos los puntos de su dominio, diremos además que f es **continua**.

Ejemplos

1. *Todas las funciones polinómicas son continuas.*
2. $f(x) = |x|$ *es continua.*
3. $f(x) = \log(x)$ *es continua en todo su dominio.*
4. $f(x) = \sqrt{x}$ *es continua en todo su dominio.*

Ejemplos

5. *Sea f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x<0, \\ x-1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2+1) = 1 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1,$$

luego $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$, *por lo que f no es continua en* 0.

Ejemplos

6. *Sea f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & x < 1, \\ 4 & x = 1, \\ 5x - 2 & x > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^3 + 2) = 3 = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (5x - 2) = 3.$$

Luego $\exists \lim_{x \to 1} f(x) = 3$. *Sin embargo,* $f(1) = 4 \neq 3$, *por lo que* f *no es continua en* 1.

Universidad Internacional de Valencia

Ejemplos

7. *Sea f dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{x^2-1} & x \notin \{-1, 1\}, \\ 0 & x = -1, \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

Entonces

- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = 1 = f(1)$, *luego f es continua en* 1.
- $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \dfrac{2x-2}{x^2-1} = +\infty \neq 0 = f(-1)$, *luego f no es continua en* -1.

Propiedades

Sean f y g funciones continuas en $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $f \pm g$ *es continua en* c.
- fg *es continua en* c.
- *Si* $g(c) \neq 0$, *entonces* $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* c.
- $g \circ f$ *es continua en* c.

Teorema (Teorema de Bolzano)

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *continua y* $a, b \in \mathbb{R}$, *con* $a < b$ *y* $[a, b] \subseteq A$. *Si* $f(a)f(b) < 0$, *entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Ejemplo

Probemos que la ecuación $\sin(x) = \cos(x)$ *tiene una solución entre* 0 *y* $\frac{\pi}{2}$. *En efecto, si definimos* $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$, *se tiene por una parte que* $f(0) = -1$ *y, por otra parte,* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, *luego* $f(0)f(\frac{\pi}{2}) < 0$, *por lo que* $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2})$ *tal que* $f(c) = 0$, *es decir:*

$$f(c) = 0 \leftrightarrow \sin(c) - \cos(c) = 0 \leftrightarrow \sin(c) = \cos(c).$$

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Diremos que* f *es* **derivable en un punto** $c \in \operatorname{int}(A)$ *(*$\exists \rho > 0$*:* $(c-\rho, c+\rho) \subseteq A$*) si*

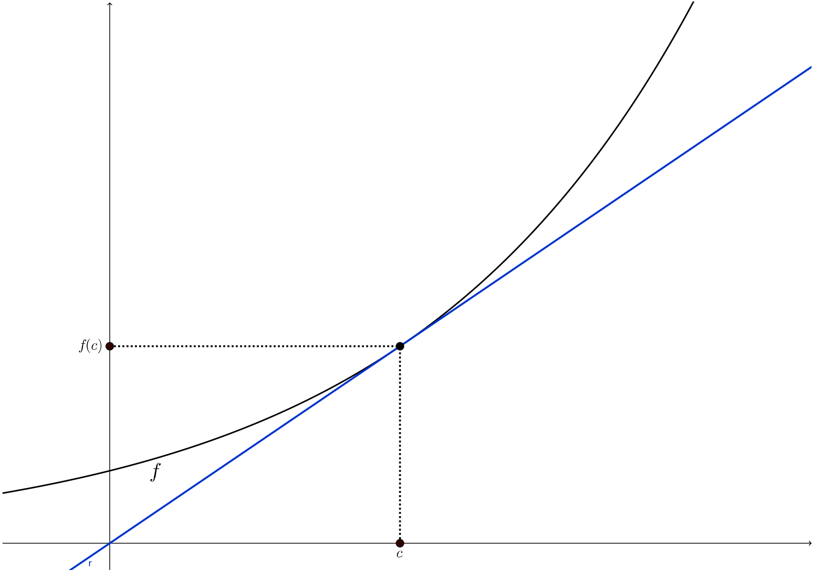
$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

En tal caso, llamaremos **derivada de** f **en** c *al valor anterior y lo denotaremos por*

$$f'(c) = \frac{df}{dx}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Además, si f *es derivable en* x, $\forall x \in \operatorname{int}(A)$, *diremos que* f *es* **derivable**.

Cálculo diferencial



Cálculo diferencial

En general, se conocen las expresiones generales de las derivadas de las funciones elementales:

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$	$\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a)a^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Cálculo diferencial

Ejemplos

1. *Sea* $f(x) = 2x^5 + 4x^3 - x^2 + x - 7$. *Entonces* $f'(x) = 10x^4 + 12x^2 - 2x + 1$.
2. *Sea* $f(x) = \sqrt{x}$. *Podemos escribir* $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. *Por tanto:*
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$
3. *Sea* $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$. *Podemos escribir* $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$, *luego:*
$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}.$$
4. *Sea* $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Entonces podemos escribir* $f(x) = x^{-1}$, *por lo que:*
$$f'(x) = (-1)\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Propiedades

Sean f, g funciones derivables en x. Entonces:

1. $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.
2. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *(***regla del producto***)*.
3. *En particular, si* $a \in \mathbb{R}$, $[af(x)]' = af'(x)$.
4. $[g(f(x))]' = g'(f(x))f'(x)$ *(***regla de la cadena***)*.
5. *En particular, si* $g(x) \neq 0$: $\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]' = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$
6. *En particular, combinando 2 y 5, si* $g(x) \neq 0$ *entonces*
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Universidad Internacional de Valencia

Ejemplos

Calculamos $f'(x)$ para los siguientes casos:

1. $f(x) = x^2 \ln(x)$.
$$f'(x) = 2x\ln(x) + x.$$
2. $f(x) = \sin(\cos(x))$.
$$f'(x) = -\cos(\cos(x))\sin(x).$$
3. $f(x) = \sin(e^{\cos(x)})$.
$$f'(x) = -\cos(e^{\cos(x)})e^{\cos(x)}\sin(x).$$
4. $f(x) = x\sin(x)\ln(x^2)$.
$$f'(x) = \sin(x)\ln(x^2) + x\cos(x)\ln(x^2) + 2\sin(x).$$

Cálculo diferencial

De la regla de la cadena se deducen las siguientes fórmulas generalizadas:

$F(x)$	$F'(x)$
$f(x)^r$	$rf(x)^{r-1}f'(x)$
$\sin(f(x))$	$\cos(f(x))f'(x)$
$\cos(f(x))$	$-\sin(f(x))f'(x)$
$\tan(f(x))$	$[1+\tan^2(f(x))]f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}f'(x)$
$a^{f(x)}$	$\ln(a)a^{f(x)}f'(x)$
$\ln(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$F(x)$	$F'(x)$
$\log_a(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\ln(a)f(x)}$
$\arcsin(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\arccos(f(x))$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$\arctan(f(x))$	$\dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$

Teorema (Teorema de Rolle)

Sea $f : A \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *tales que es* f *es continua en* $[a, b] \subseteq A$ *y derivable en* (a, b). *Si* $f(a) = f(b)$, *entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema (Regla de l'Hôpital)

Sean f, g *funciones reales de variable real, cumpliendo* $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$ *o* $\pm\infty$. *Si* $\exists \rho > 0$ *tal que* $\forall x \in (c - \rho, c) \cup (c, c + \rho)$ f *y* g *son derivables, con* $g(x) \neq 0$, *y* $\exists \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *entonces*

$$\exists \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ejemplo

Obtengamos $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. *Para ello, definimos* $L = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *y, aprovechando la continuidad de* f*:*

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, $\ln(L) = 1$, *luego* $L = e^1 = e$.

Definición

Diremos que f es derivable n veces en c si $\exists f^{(n)}(c)$, donde $f^{(0)}(c) = f(c)$ y $f^{(k)}(c) = (f^{(k-1)})'(c)$, $1 \leq k \leq n$.

Si una función es derivable n veces en todo su dominio, diremos que f es n veces derivable, y llamaremos a $f^{(n)}$ **derivada de orden n de f**.

Ejemplos

1. *Sea* $f(x) = \sin(x)$. *Calculemos* $f''(x)$. $f'(x) = \cos(x) \to f''(x) = -\sin(x)$.
2. *Sea* $f(x) = x^3 - x + 2$. *Obtengamos* $f'''(x)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \to f''(x) = 6x \to f'''(x) = 6$.

Monotonía

Universidad Internacional de Valencia

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que f es (estrictamente) creciente en $B \subseteq A$ si $\forall a, b \in B$, $a < b$, $f(a) \leq f(b)$ (resp., $f(a) < f(b)$).

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Diremos que f es (estrictamente) decreciente en $B \subseteq A$ si $\forall a, b \in B$, $a < b$, $f(a) \geq f(b)$ (resp., $f(a) > f(b)$).

Teorema

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$ intervalo abierto, con f derivable en B. Entonces:

- *Si $f'(x) \geq 0$ (resp., $f'(x) > 0$) $\forall x \in B$, entonces f es creciente (resp., estrictamente creciente) en B.*
- *Si $f'(x) \leq 0$ (resp., $f'(x) < 0$) $\forall x \in B$, entonces f es decreciente (resp., estrictamente decreciente) en B.*

Extremos

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $B \subseteq A$. *Diremos que un punto* $c \in B$ *es un* **máximo absoluto de** f **en** B *si* $f(c) \geq f(x)\ \forall x \in B$.

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ *y* $B \subseteq A$. *Diremos que un punto* $c \in B$ *es un* **mínimo absoluto de** f **en** B *si* $f(c) \leq f(x)\ \forall x \in B$.

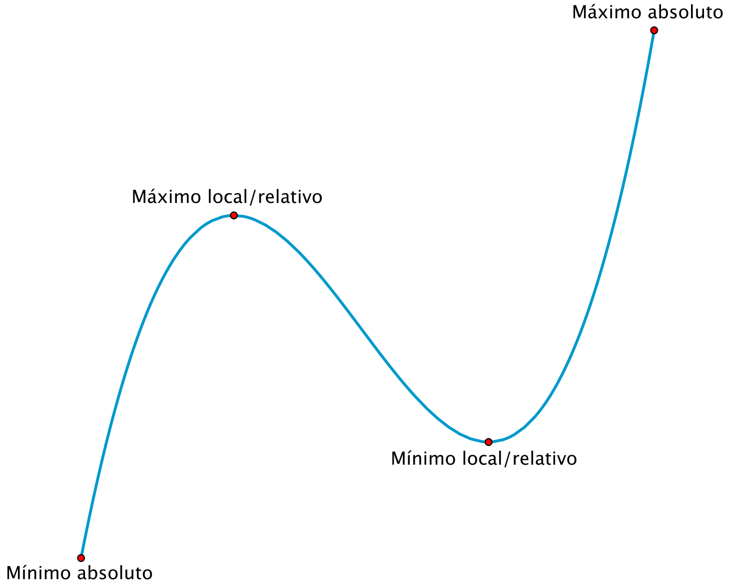
Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. *Diremos que un punto* $c \in A$ *es un* **máximo relativo o local de** f *si* $\exists \rho > 0$ *tal que* $f(c) \geq f(x)\ \forall x \in (c-\rho, c+\rho)$.

Definición

Sea $f : A \to \mathbb{R}$. *Diremos que un punto* $c \in A$ *es un* **mínimo relativo o local de** f *si* $\exists \rho > 0$ *tal que* $f(c) \leq f(x)\ \forall x \in (c-\rho, c+\rho)$.

Extremos



Máximo absoluto
Máximo local/relativo
Mínimo local/relativo
Mínimo absoluto

Puntos críticos

Definición

Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in A$. c *es un* **punto crítico** *de* f *si* $\exists f'(c) = 0$.

Ejemplo

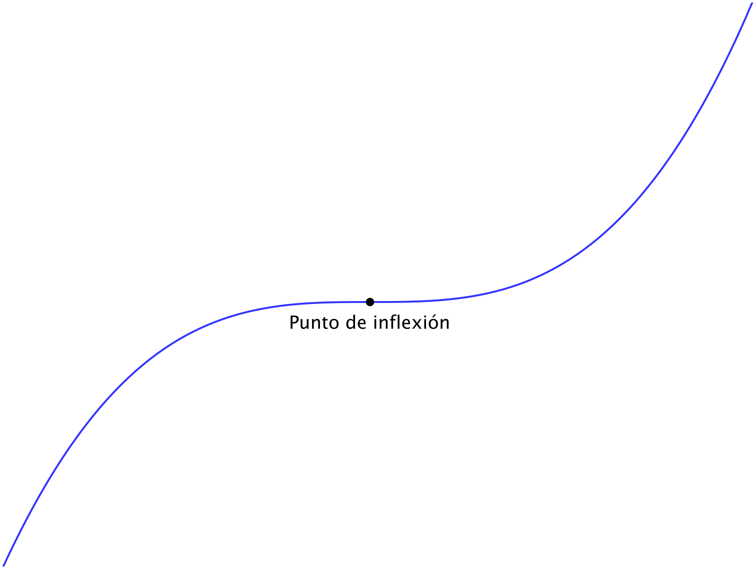
Sea $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \to f'(x) = 6x^2 - 6x$. *Imponiendo* $f'(x) = 0$, *se obtiene* $x = 0$ *y* $x = 1$, *por lo que* f *tiene dos puntos críticos:* 0 *y* 1.

Teorema

Sea c *un punto crítico de* f *y* $n \geq 2$ *el primer natural tal que* $f^{(n)}(c) \neq 0$. *Entonces:*

- *Si* n *es par, se tienen dos casos:*
  - *Si* $f^{(n)}(c) < 0$, *entonces* c *es un máximo relativo de* f.
  - *Si* $f^{(n)}(c) > 0$, *entonces* c *es un mínimo relativo de* f.
- *Si* n *es impar, entonces* c *es un* **punto de inflexión** *de* f.

Puntos críticos



Universidad Internacional de Valencia

Ejemplos

1. *Vimos anteriormente que los puntos críticos de* $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ *son* $x = 0$ *y* $x = 1$. *Tenemos* $f'(x) = 6x^2 - 6x$ *y* $f''(x) = 12x - 6$.
   - *Por una parte, para* $x = 0$ *se tiene* $f''(0) = -6 < 0$, *por lo que* 0 *es un máximo relativo de* f.
   - *Por otra parte, para* $x = 1$, *tenemos* $f''(1) = 6 > 0$, *por lo que* 1 *es un mínimo relativo de* f.
2. *Sea* $f(x) = x^3$. *En este caso,* $f'(x) = 3x^2$, *por lo que su único punto crítico es* $x = 0$. *Si calculamos* f'', *obtenemos* $f''(x) = 6x$, *con lo cual* $f''(0) = 0$. *Por otra parte,* $f'''(x) = 6$, *luego* $f'''(0) = 6$. *Por tanto,* 0 *es un punto de inflexión y no es extremo local, puesto que* $f(x) < f(0)$ *para* $x < 0$ *y* $f(x) > f(0)$ *para* $x > 0$.

Ejemplo

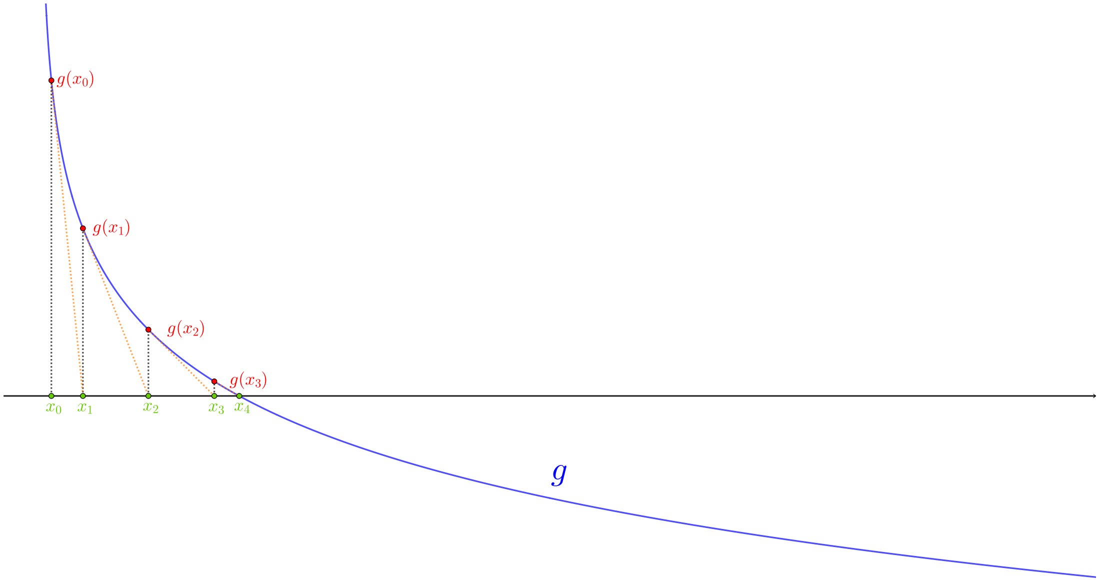
Un comerciante vende un determinado producto por un valor de 50 euros, con una media de 200 clientes mensuales. Por otra parte, sabe que por cada euro que aumente el precio, perderá un promedio de 2 clientes mensuales. ¿Cuánto tiene que aumentar el precio para aspirar a obtener el mayor beneficio posible?

- *Si x es el aumento de precio, la función de ganancia mensual es* $f(x) = (50 + x)(200 - 2x) = -2x^2 + 100x + 10000$.
- *Analizamos f' con el fin de buscar puntos críticos:* $f'(x) = -4x + 100$, *luego el único punto crítico correspondiente a la identidad* $f'(x) = 0$ *es* $x = 25$.
- *Calculamos* $f''(x) = -4$ *y obtenemos* $f''(25) = -4 < 0$, *luego hay un máximo relativo en* $x = 25$.
- *Por tanto, deberá aumentar el precio 25 euros.*

Ejercicio

Un algoritmo satisface la siguiente propiedad. Si éste se ejecuta en paralelo a través de dos procesadores, cada procesador pierde un 0.8 % *de eficiencia con respecto a su funcionamiento original sin ir en paralelo. Si es ejecutado en paralelo a través de tres procesadores, cada procesador pierde un* 1.6 % *de eficiencia con respecto al funcionamiento original. Si hay cuatro, un* 2.4 % *con respecto al funcionamiento original, y así sucesivamente (tras cada procesador añadido en paralelo, cada uno de ellos pierde un* 0.8 % *de eficiencia con respecto a su funcionamiento original sin ir en paralelo con otros). ¿Cuál es el número óptimo de procesadores en paralelo para ejecutar el algoritmo lo más rápidamente posible?*

Método de Newton



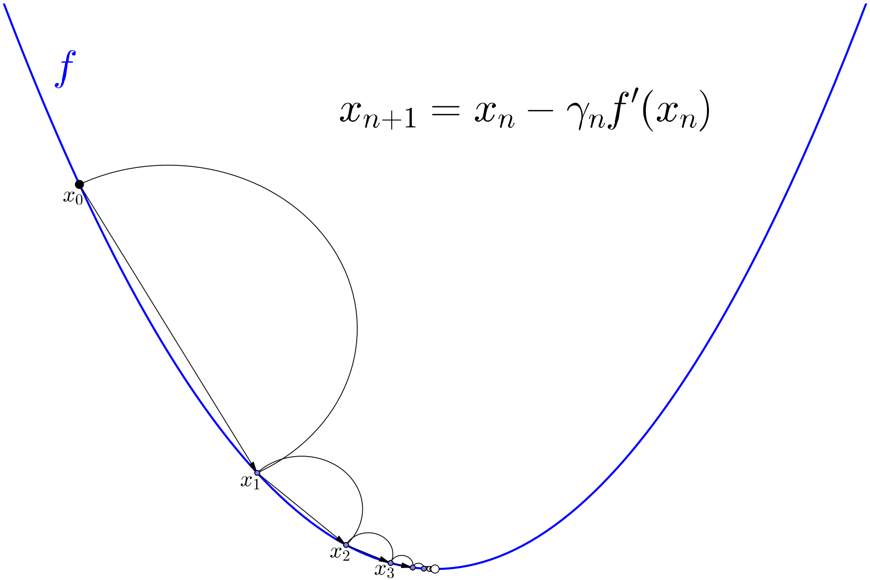
Descenso de gradiente

- No todas las funciones que se desean optimizar tienen una expresión sencilla, con una derivada que se pueda conocer globalmente, obteniéndose directamente los puntos críticos.
- **Ejemplo:** funciones de coste en el entrenamiento de una red neuronal.
- Esto precisa de métodos que permitan aproximarse a mínimos locales vía un conjunto discreto de evaluaciones.
- **Descenso de gradiente** (caso de una variable):
  - Dada $f : A \to \mathbb{R}$, elegimos un valor inicial $x_0 \in A$.
  - Para $n \geq 0$, obtenemos x_{n+1} como sigue:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n f'(x_n),$$

donde $\gamma_n > 0$ recibe el nombre de **ratio de aprendizaje**.

Descenso de gradiente



Puntos críticos

Posibles elecciones del ratio de aprendizaje:

- $\gamma_n = \gamma > 0$, valor constante, lo suficientemente pequeño como para garantizar la convergencia.
- **Método de Newton modificado** sobre f':
  - Aproximación local de f' vía recta tangente:

$$f'(x) \approx f'(x_n) + (x - x_n)f''(x_n).$$

  - Aproximación de un x tal que $f'(x) = 0$:

$$f'(x_n) + (x - x_n)f''(x_n) = 0 \leftrightarrow x = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

  - Construcción del método iterativo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{|f''(x_n)|} = x_n - \frac{1}{|f''(x_n)|}f'(x_n) = x_n - \gamma_n f'(x_n),$$

donde $\gamma_n = \dfrac{1}{|f''(x_n)|}$.

- **Método de la secante modificado** sobre f' (evita tener que trabajar sobre f''):
  - Aproximación de $f''(x_n)$ en términos de f':

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(x_n) - f'(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

  - Redefinición del método:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma_n f'(x_n), \quad n \geq 1,$$

donde $\gamma_0 = h$, con $h > 0$ pequeño, y

$$\gamma_n = \frac{1}{\left|\frac{f'(x_n)-f'(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}\right|} = \frac{|x_n - x_{n-1}|}{|f'(x_n) - f'(x_{n-1})|}, \quad n \geq 1.$$

- En resumen, posibles elecciones de γ_n (entre muchas otras):

$$\gamma_n = h, \quad \gamma_n = \frac{1}{|f''(x_n)|}, \quad \gamma_n = \begin{cases} h & n = 0 \\ \dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|f'(x_n) - f'(x_{n-1})|} & n > 0 \end{cases}$$

Cálculo integral

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $F : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Diremos que* F *es una* **primitiva** *de* f *si* $F' = f$.

Ejemplos

1. *Una primitiva de* $6x^2$ *es* $2x^3$.
2. *Una primitiva de* e^{2x+1} *es* $\dfrac{1}{2}e^{2x+1}$.
3. *Otra primitiva de* $6x^2$ *es* $2x^3 + 1$.
4. *Otra primitiva de* e^{2x+1} *es* $\dfrac{1}{2}e^{2x+1} - 7$.
5. $2x^3 + C$ *son primitivas de* $6x^2$, $\forall C \in \mathbb{R}$.
6. $\dfrac{1}{2}e^{2x+1} + C$ *son primitivas de* e^{2x+1}, $\forall C \in \mathbb{R}$.

Teorema

Si f es continua y F_1, F_2 son primitivas de f, entonces $\exists C \in \mathbb{R}$ tal que $F_2 - F_1 = C$.

Esto motiva la siguiente definición:

Definición

Definimos

$$\int f(x)dx$$

como la familia formada por todas las primitivas de f.

Por el teorema anterior, bastará con encontrar una única primitiva F cumpliendo $F' = f$, puesto que el resto de primitivas posibles vendrá unívocamente determinado por las funciones de la forma $F + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Para calcular primitivas elementales, basta con fijarse en las tablas de las derivadas en sentido inverso:

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
x^r	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$

Cálculo integral

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$g(x)^r g'(x)$	$\frac{1}{r+1} g(x)^{r+1} + C$
$\cos(g(x))g'(x)$	$\sin(g(x)) + C$
$\sin(g(x))g'(x)$	$-\cos(g(x)) + C$
$[1 + \tan^2(g(x))]g'(x)$	$\tan(g(x)) + C$
$e^{g(x)} g'(x)$	$e^{g(x)} + C$
$a^{g(x)} g'(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} a^{g(x)} + C$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln(g(x)) + C$
$\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1 - g(x)^2}}$	$\arcsin(g(x)) + C$
$-\dfrac{g'(x)}{\sqrt{1 - g(x)^2}}$	$\arccos(g(x)) + C$
$\dfrac{g'(x)}{1 + g(x)^2}$	$\arctan(g(x)) + C$

Ejemplos

1. $\displaystyle\int 2x\cos(x^2)\mathrm{d}x = \sin(x^2) + C.$
2. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$
3. $\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x = -\ln\big(\cos(x)\big) + C.$
4. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4x+5}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+(x-2)^2}\mathrm{d}x = \arctan(x-2) + C.$

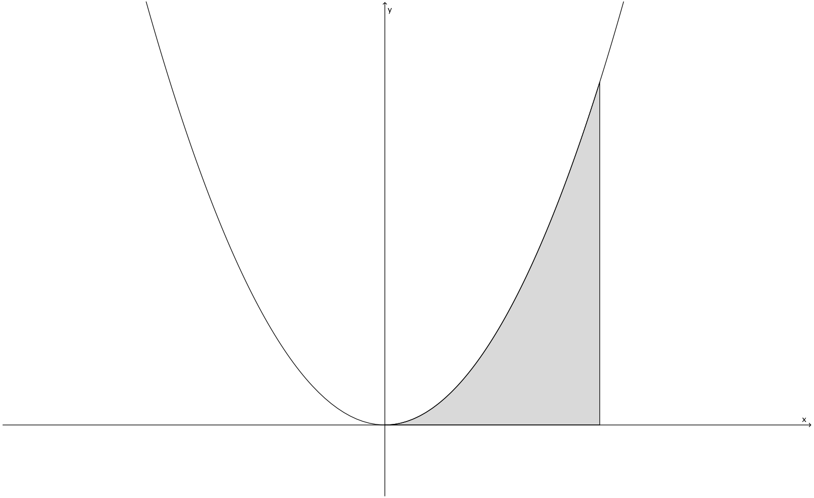
Cálculo integral

- Algunas integrales no pueden realizarse de forma inmediata a través de los métodos elementales, como por ejemplo
$$\int x \sin(x) \mathrm{d}x.$$

- Un método para calcular algunas primitivas como la anterior es el conocido como **integración por partes**, que se basa en la fórmula de la derivada de un producto:
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
Tomando primitivas:
$$uv = \int u'v + \int uv' \to \int uv' = uv - \int vu'.$$

Cálculo integral

Nuestro objetivo es aproximar el área que encierra una función f en un determinado intervalo $[a, b]$:



- Una forma de obtener una solución aproximada es considerar una **partición** del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con extremos $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ y considerar en cada caso el área de rectángulo con base en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\xi_i)$, para algún conjunto de puntos intermedios $\mathcal{R} = \{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], 1 \leq i \leq n\}$, cuya área será por tanto $(x_i - x_{i-1})f(\xi_i)$, $1 \leq i \leq n$.
- Por tanto, una aproximación del área que encierra f en $[a, b]$ asociada a dicha partición consiste en sumar las áreas de dichos rectángulos:

$$\sigma_f(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(\xi_i).$$

- En los casos en los que f tenga un comportamiento "razonable" en $[a, b]$, cabe esperar que al aumentar n (el número de intervalos) la expresión anterior se irá aproximando cada vez más al área que se desea calcular.

Cálculo integral

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$ y $[a, b] \subseteq A$. Sea $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ una partición asociada a dicho intervalo. Llamamos **suma inferior de Riemann** *asociada a dicha partición al resultado de calcular la siguiente suma de áreas de rectángulos:*

$$\sigma_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

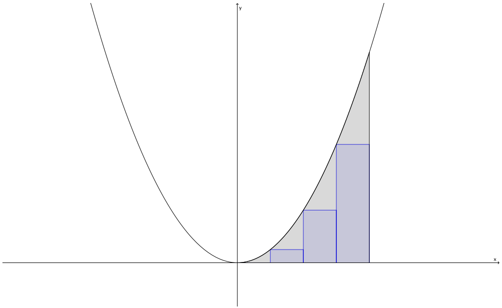
Definición

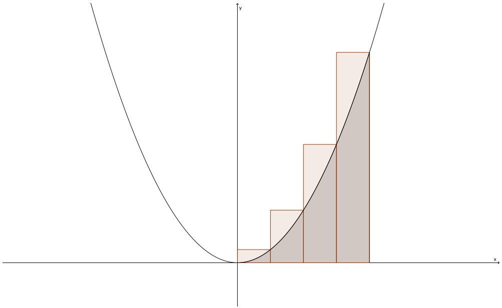
En las condiciones anteriores, llamamos **suma superior de Riemann** *al resultado de calcular la siguiente suma de áreas de rectángulos:*

$$\Sigma_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

- En el caso particular en que los puntos de una partición $\mathcal{P}$ estén igualmente equiespaciados, diremos que la partición es **uniforme**, en cuyo caso se cumple $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $1 \leq i \leq n$.
- En tal caso, podemos escribir

$$\sigma_f(\mathcal{P}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \ \Sigma_f(\mathcal{P}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$





Definición

Diremos que f es **integrable Riemann** *en $[a, b]$ si*

$$\sup_{\mathcal{P}} \sigma_f(\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \Sigma_f(\mathcal{P}).$$

En tal caso, llamaremos

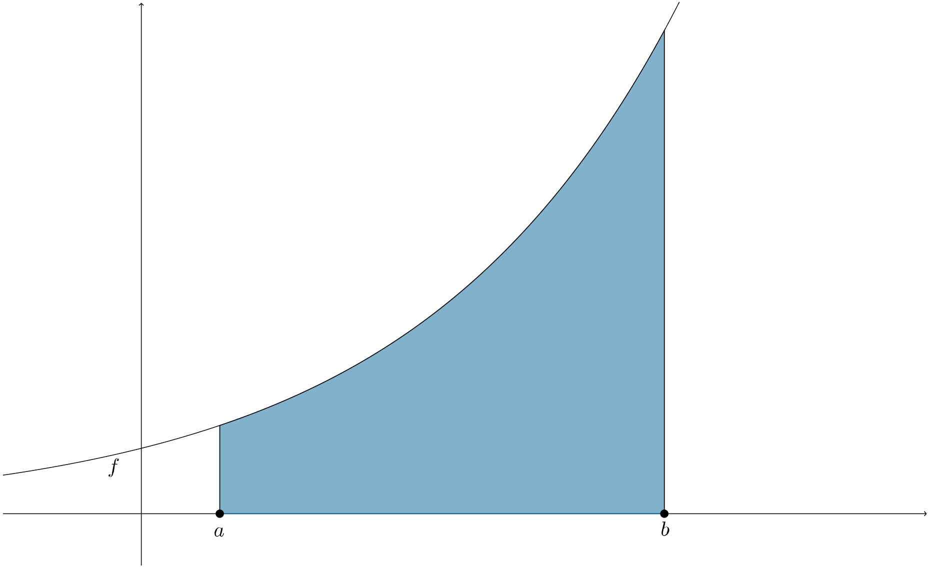
$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\mathcal{P}} \sigma_f(\mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} \Sigma_f(\mathcal{P}),$$

que representa el área encerrada por f entre a y b, y que recibe el nombre de **integral definida** *de f en $[a, b]$.*

Teorema (Regla de Barrow)

Si F es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$

Cálculo integral



¡Muchas gracias!

Universidad Internacional de Valencia

Contacto:

amilcar.perez@professor.universidadviu.com