Lógica

Universidad Internacional de Valencia

Máster Universitario en Inteligencia Artificial

02MIAR | Matemáticas:

Matemáticas para la Inteligencia Artificial

Profesor:

Amílcar J. Pérez A.

De:
Planeta Formación y Universidades

Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

Sean A y B conjuntos. Diremos que B es un **subconjunto** *de A si se cumple $B \subseteq A$.*

Ejemplo

$B = \{a, d, e\}$ es un subconjunto de $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, mientras que $C = \{a, g\}$ no es un subconjunto de A.

Definición

Sea A un conjunto. El conjunto de las **partes** *de A es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A y se denota por $\mathcal{P}(A)$. En otras palabras:*

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Teoría de conjuntos (parte II)

Ejemplos

1. *Sea* $A = \{a, b\}$, *entonces*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

2. *Sea* $A = \{1, 2, 3\}$, *entonces*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Teorema

Sea A *un conjunto finito, con* $|A| = n$*. Entonces* $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$*.*

Teoría de conjuntos (parte II)

Universidad Internacional de Valencia

Definición

Sean A, B dos conjuntos. El **producto cartesiano** *de A y B, denotado por $A \times B$, consta del conjunto de todos los* **pares ordenados**, *donde los elementos de A ocupan la primera posición y los de B la última:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\alpha, \beta\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}.$$

Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

Sean A, B dos conjuntos. Diremos que una regla de la forma $f : A \to B$ es una **aplicación** *o* **función** *si relaciona cada uno de los elementos de A a un* **único** *elemento de B; dicho de otra forma:*

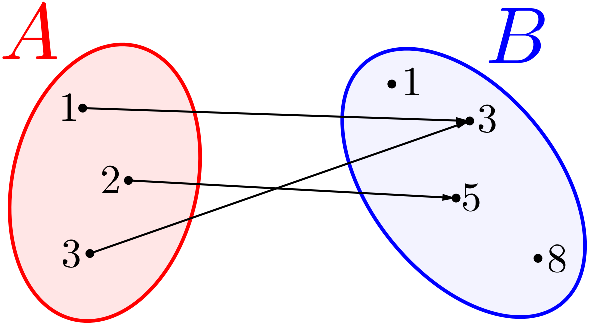
$$\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b.$$

- *El conjunto A recibe el nombre de* **dominio** *de f, y se denota por* $\mathrm{Dom}(f)$.
- *El conjunto B se denomina* **codominio** *de f.*
- *El conjunto $f(A)$, dado por $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ recibe el nombre de* **recorrido** *o* **imagen** *de f.*
- *Dado $C \subseteq B$, el conjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ se denota por* **imagen inversa** *o* **preimagen** *de B sobre f.*

Teoría de conjuntos (parte II)

Ejemplos

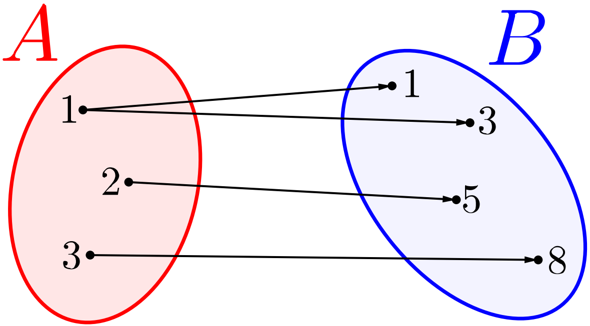
1. *Sean* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{1, 3, 5, 8\}$. *Tomamos* $f : A \to B$ *tal que* $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ *y* $f(3) = 3$. *Entonces* f *es una aplicación, con* $\mathrm{Dom}(f) = \{1, 2, 3\}$ *e* $\mathrm{Im}(f) = \{3, 5\} \subseteq B$.



Teoría de conjuntos (parte II)

Ejemplos

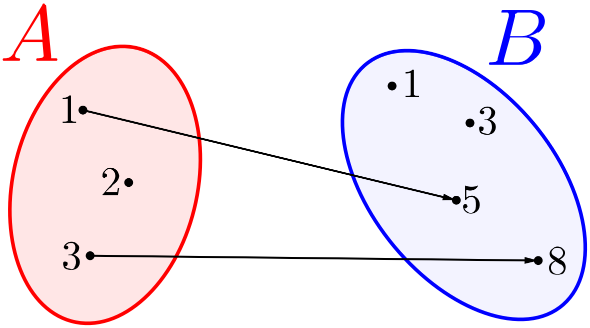
2. *Sean* $A = \{1,2,3\}$ *y* $B = \{1,3,5,8\}$. *Sea* $f : A \to B$ *tal que* $f(1) = 1$, $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ *y* $f(3) = 8$. *Entonces* f *NO es una aplicación, pues* $1 \in A$ *tiene asignados dos valores de* B*:* 1 *y* 3.



Teoría de conjuntos (parte II)

Ejemplos

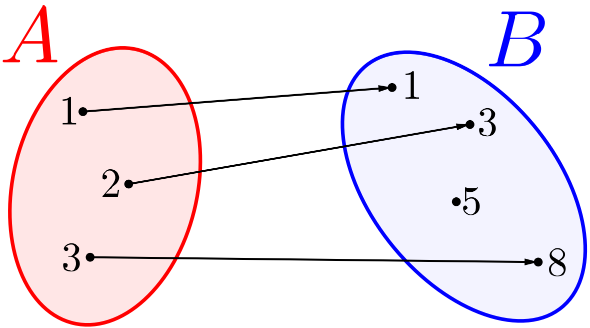
3. *Sean* $A = \{1, 2, 3\}$ *y* $B = \{1, 3, 5, 8\}$*. Tomamos* $f : A \to B$ *tal que* $f(1) = 5$*, y* $f(3) = 8$*. Entonces* f *NO es una aplicación, ya que* $2 \in A$ *no tiene asignado ningún valor.*



Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

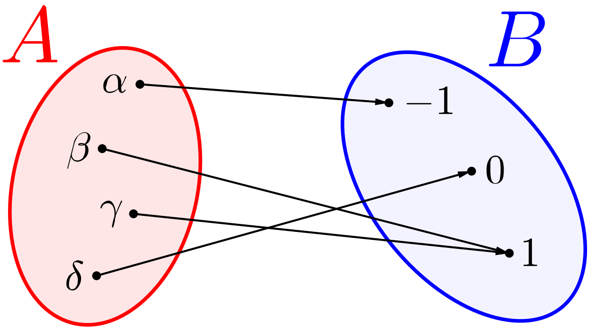
Sea $f : A \to B$ una aplicación. Diremos que f es **inyectiva** *si $\forall a, b \in A$, $f(a) = f(b) \to a = b$. Dicho de otra forma, f es inyectiva si f siempre lleva elementos distintos de A a elementos distintos de B.*



Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

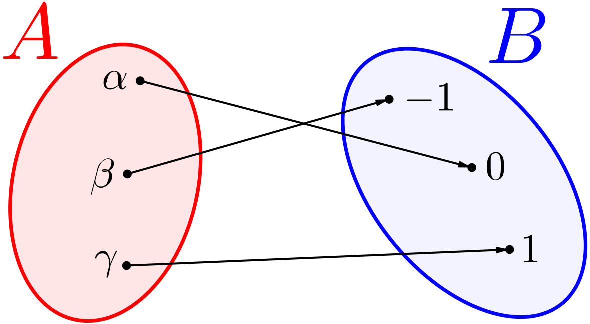
Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se dice que f es **sobreyectiva** *o* **suprayectiva** *si $f(A) = B$ o, lo que es lo mismo, $\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$. Es decir, f es sobreyectiva cuando cada elemento de B tiene asociado al menos un elemento de A mediante f.*



Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se dice que f es **biyectiva** *si f es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente. Esta condición se traduce matemáticamente como $\forall b \in B\ \exists! a \in A : f(a) = b$.*



Teoría de conjuntos (parte II)

Ejemplos

1. $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$. *Es inyectiva.*
2. $f : [-1, 1] \to [0, 1]$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Es sobreyectiva.*
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^3$. *Es biyectiva.*

Teorema

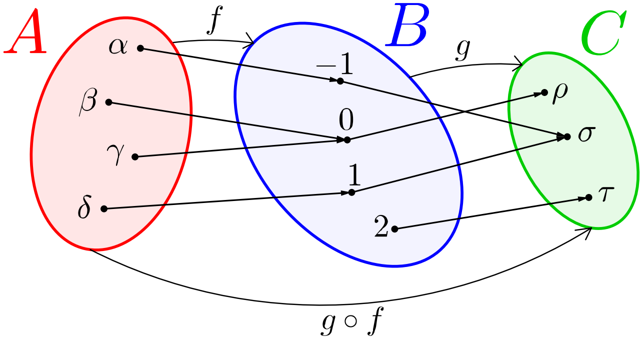
Sean A, B *conjuntos finitos y sea* $f : A \to B$ *una aplicación. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Si* f *es inyectiva, entonces* $|A| \leq |B|$.
2. *Si* f *es sobreyectiva, entonces* $|A| \geq |B|$.
3. *Si* f *es biyectiva, entonces* $|A| = |B|$.

Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

Sean A, B, C conjuntos cualesquiera, $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Entonces puede considerarse la **composición** *de g con f, $g \circ f : A \to C$ definida de la siguiente forma: dado $a \in A$ $(g \circ f)(a) = g(f(a)) \in C$.*



Teoría de conjuntos (parte II)

Ejemplo

Sean

- $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,
- $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $g(x) = e^x$.

1. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = e^{\sqrt{x}}$.
2. $(f \circ g) = f(g(x)) = f(e^x) = \sqrt{e^x} = e^{x/2}$.

Teorema

Sean A, B, C tres conjuntos cualesquiera y $f : A \to B$, $g : B \to C$ aplicaciones.

1. *Si f, g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*
2. *Si f, g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*
3. *Si f, g son biyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.*

Teoría de conjuntos (parte II)

Definición

Sea A un conjunto cualquiera. La aplicación **identidad** $\mathrm{Id}_A : A \to A$ *es aquella que viene dada por* $\mathrm{Id}_A(a) = a \ \forall a \in A$.

Teorema

Sean A, B dos conjuntos cualesquiera. Entonces $f : A \to B$ es biyectiva si y sólo si $\exists! g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ y $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. La aplicación (única) g suele denotarse por $g = f^{-1}$ y recibe el nombre de **aplicación inversa**.

Ejemplo

Sean $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{\rho, \sigma, \tau\}$ y $f : A \to B$ dada por $f(\alpha) = \tau$, $f(\beta) = \sigma$ y $f(\gamma) = \rho$. Entonces $f^{-1} : B \to A$ cumple $f^{-1}(\rho) = \gamma$, $f^{-1}(\sigma) = \beta$ y $f^{-1}(\tau) = \alpha$.

Combinatoria

Definición

Una **permutación sin repetición** *de un conjunto A de n elementos diferentes consiste en cualquier ordenación que se pueda hacer con éstos, teniendo en cuenta que el orden de secuenciación importa.*
El número de ordenaciones posible viene dado por la expresión

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Ejemplo

Sea $A = \{a, b, c, d\}$. Queremos cuántas permutaciones pueden realizarse con los elementos de A (por ejemplo, $abcd$, $bdca$ y $dabc$ son tres de ellas). Como $|A| = 4$, se tiene por la expresión anterior, tomando $n = 4$, que $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Definición

Dados n elementos de r tipos diferentes, con n_i el número de elementos de tipo i, $1 \leq i \leq r$, una **permutación** *con repetición consiste en una reordenación cualquiera de estos elementos, donde el el total de posibilidades viene dado por*

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}.$$

Ejemplo

Reordenaciones posibles con las letras de la palabra $aabbbc$. $r = 3$ elementos diferentes: las letras a, b y c. $n_1 = 2$. $n_2 = 3$. $n_3 = 1$. Por tanto, el resultado es $P_6^{2,3,1} = \frac{6!}{2! \cdot 3! \cdot 1!} = 60$.

Definición

Una **variación sin repetición** *consiste en tomar k elementos dentro de un conjunto de n elementos y contar las posibles elecciones, teniendo en cuenta que no pueden elegirse más de una vez un mismo elemento y que, a diferencia de las combinaciones, el orden de elección importa. El número de posibilidades es, en este caso,*

$$V_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ejemplo

Posibles números de dos cifras que pueden formarse con el conjunto de cifras $\{1, 2, 3, 4\}$: $V_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$.

Definición

Una **variación con repetición** *consiste en tomar k elementos dentro de un conjunto de n elementos y contar las posibles elecciones, teniendo en cuenta que, en este caso, puede elegirse más de una vez un mismo elemento y que el orden de elección importa. El número de posibilidades es, en este caso,*

$$VR_{n,k} = \overbrace{n \cdot n \cdots n}^{k \text{ veces}} = n^k.$$

Ejemplo

Posibles números de dos cifras que pueden formarse con el conjunto de cifras $\{1, 2, 3, 4\}$, *pudiendo utilizarse cada una más de una vez:* $VR_{4,2} = 4^2 = 16$.

Definición

Una **combinación sin repetición** *consiste en tomar k elementos dentro de un conjunto de n elementos y contar las posibles elecciones, teniendo en cuenta que no se puede elegir más de una vez un mismo elemento y que, además, el orden de elección no importa. En este caso, el número de posibilidades es*

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Ejemplo

Posibles grupos de 3 letras dentro del conjunto de 4 letras $\{a, b, c, d\}$:
$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4.$

Definición

Una **combinación con repetición** *consiste en tomar k elementos dentro de un conjunto de n elementos y contar las posibles elecciones, teniendo en cuenta que, en este caso, puede elegirse más de una vez un mismo elemento y que, de nuevo, el orden de elección no importa. En este caso, el número de posibilidades es*

$$CR_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!}.$$

Ejemplo

Posibles grupos de 3 *letras dentro del conjunto de* 4 *letras* $\{a, b, c, d\}$, *admitiendo repetición:* $CR_{4,3} = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = 20.$

Funciones booleanas

- Recordemos que $p \to q \equiv \overline{p} + q$.
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$, luego $p \leftrightarrow q \equiv (\overline{p} + q) \cdot (p + \overline{q})$, por lo que simplificando $p \leftrightarrow q \equiv p \cdot q + \overline{p} \cdot \overline{q}$.
- Cualquier fórmula lógica puede expresarse empleando como únicos conectores la conjunción (producto), la disyunción (suma) y la negación (**álgebras de Boole**).

Definición

Una **función booleana** *es una aplicación* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$, *donde* $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ *es el* **conjunto binario**. *Se denota* $\mathcal{F}_n$ *al conjunto formado por todas las funciones booleanas de* n *variables, es decir:*

$$\mathcal{F}_n = \{f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B} \mid f \text{ aplicación}\}.$$

Funciones booleanas

Ejemplos

1. $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $f(x) = x$.
2. $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$, $f(x) = \overline{x}$.
3. $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $f(x, y) = x + y$.
4. $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $f(x, y) = x \cdot y$.
5. $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $f(x, y) = \overline{x} + y$.
6. $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$, $f(x, y) = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}$.
7. $f : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$, $f(x, y, z) = \overline{x} \cdot z + y$.

Puertas lógicas

Definición

Una **puerta lógica** *es un operador que transforma uno o dos valores de entrada binarios, x, y, en un valor binario de salida, en función de x, y. Por tanto, una puerta lógica puede verse como elemento de $\mathcal{F}_n$, con $n = 1$ o $n = 2$.*

Existen un total de siete puertas lógicas:

- OR
- AND
- XOR
- NOT
- NOR
- NAND
- XNOR

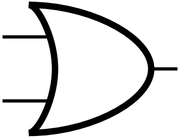
Puerta OR: se trata de la puerta lógica que combina un par de valores $x, y \in \mathbb{B}$ según la tabla de operaciones siguiente:

OR	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	0	1
$x = 1$	1	1

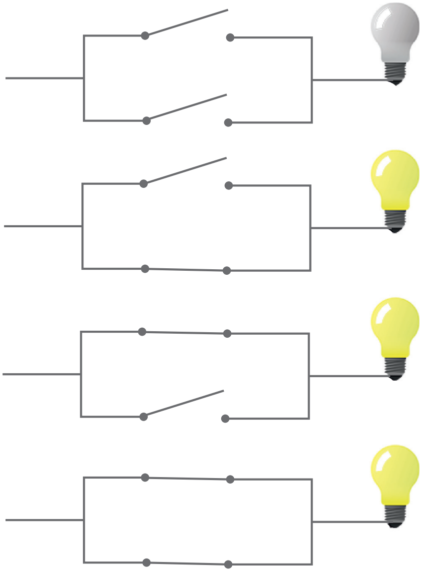
Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_2$:

$$f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}, \quad f(x, y) = x + y.$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



Puertas lógicas



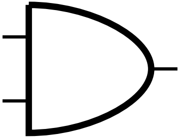
Puerta AND: se trata de la puerta lógica que combina un par de valores $x, y \in \mathbb{B}$ según la tabla de operaciones siguiente:

AND	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	0	0
$x = 1$	0	1

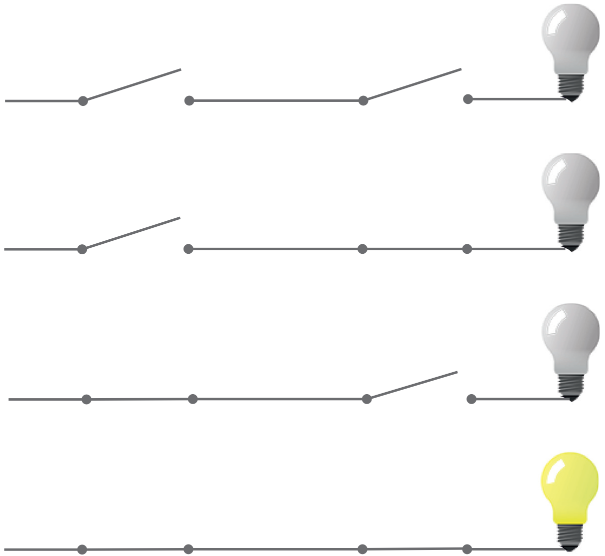
Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_2$:

$$f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}, \quad f(x, y) = x \cdot y.$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



Puertas lógicas



Puertas lógicas

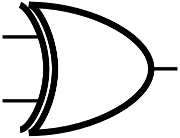
Puerta XOR: se trata de la puerta lógica que combina un par de valores $x, y \in \mathbb{B}$ según la tabla de operaciones siguiente:

XOR	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	0	1
$x = 1$	1	0

Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_2$:

$$f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}, \quad f(x, y) = (\overline{x} + \overline{y}) \cdot (x + y).$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



Puertas lógicas

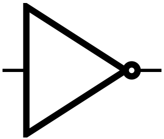
Puerta NOT: se trata de la puerta lógica que invierte el estado de un valor binario $x \in \mathbb{B}$:

NOT	
$x = 0$	1
$x = 1$	0

Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_1$:

$$f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}, \quad f(x) = \overline{x}.$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



Puertas lógicas

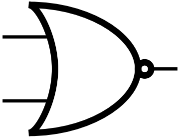
Puerta NOR: se trata de la puerta lógica que combina un par de valores $x, y \in \mathbb{B}$ según la tabla de operaciones siguiente:

NOR	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	1	0
$x = 1$	0	0

Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_2$:

$$f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}, \quad f(x, y) = \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



Puertas lógicas

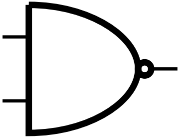
Puerta NAND: se trata de la puerta lógica que combina un par de valores $x, y \in \mathbb{B}$ según la tabla de operaciones siguiente:

NAND	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	1	1
$x = 1$	1	0

Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_2$:

$$f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}, \quad f(x, y) = \overline{x} + \overline{y}.$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



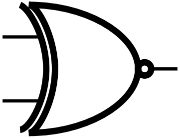
Puerta XNOR: se trata de la puerta lógica que combina un par de valores $x, y \in \mathbb{B}$ según la tabla de operaciones siguiente:

XNOR	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	1	0
$x = 1$	0	1

Esta puerta lógica puede interpretarse como la siguiente función booleana de $\mathcal{F}_2$:

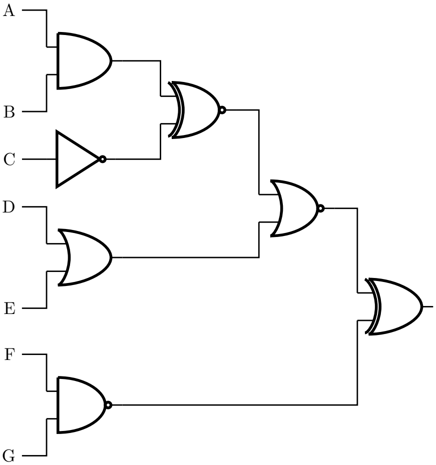
$$f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}, \quad f(x, y) = x \cdot y + \overline{x} \cdot \overline{y}.$$

Se representa mediante el siguiente símbolo:



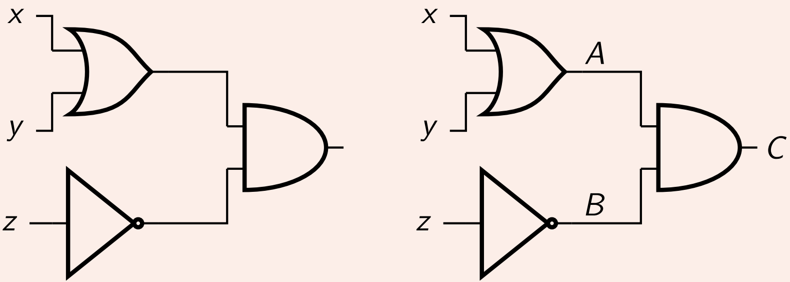
Circuitos lógicos

Las puertas lógicas pueden combinarse entre sí para formar **circuitos lógicos**, los cuales pueden interpretarse como elementos de $\mathcal{F}_n$.



Ejemplo

Consideremos el circuito lógico siguiente:



La función booleana asociada a este circuito es $f \in \mathcal{F}_3$ *dada por*

$$f(x, y, z) = (x + y) \cdot \overline{z}.$$

¡Muchas gracias!

Universidad Internacional de Valencia

Contacto:

amilcar.perez@professor.universidadviu.com