ADA 3

Enero-Mayo 2020

LIS

Solución

1. Una caja contiene 24 bombillas de luz, de las cuales cuatro son defectuosas, se selecciona al azar cuatro sin reemplazamiento. Si se define la variable aleatoria X: número de defectuosas encontradas de los cuatro seleccionados, determinar la función de densidad de X.

Solución:

El rango de X es: {0,1,2,3,4}

$$P(X=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{20}{4}}{\binom{24}{4}}=\frac{4845}{10626},\quad P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{20}{3}}{\binom{24}{4}}=\frac{4560}{10626},\quad P(X=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{20}{2}}{\binom{24}{4}}=\frac{1140}{10626},$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{20}{1}}{\binom{24}{4}}=\frac{80}{10626},\quad P(X=4)=\frac{\binom{4}{4}}{\binom{24}{4}}=\frac{1}{10626}$$

lo anterior puede escribirse como como:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{4}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{24}{4}} & si \quad x=0,1,\ 2,\ 3,4\\ 0 & de\ \ otro\ \ \text{modo}\end{cases}$$

i) Donde se observa que $f(x)>0$ en x=0, 1,2,3,4 y

$f(x)=0$ si $x\neq 0,1,2,3,4$

Por lo que se cumple i)

ii) $\sum_{x=0}^{4}\frac{\binom{4}{x}\binom{4}{4-x}}{\binom{24}{4}}=1$ por comprobar

$$\sum_{x=0}^{4}\frac{\binom{4}{x}\binom{4}{4-x}}{\binom{24}{4}}=\frac{1}{\binom{24}{4}}\sum_{x=0}^{4}\binom{4}{x}\binom{4}{4-x}=\frac{1}{\binom{24}{4}}\left[\binom{4}{0}\binom{20}{4}+\binom{4}{1}\binom{20}{3}+\binom{4}{2}\binom{20}{2}+\binom{4}{3}\binom{20}{1}+\binom{4}{4}\binom{20}{0}\right]$$

$$=\frac{1}{10626}[4845+4560+1140+80+1]=\frac{1}{10626}[10626]=1$$

Entonces $f(x)$ es una función de densidad

2. Dada la función de densidad de X:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{4}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{24}{4}} & si \quad x=0,1,\ 2,\ 3,4\\ 0 & de\ \ otro\ \ \text{modo}\end{cases}$$

a) Determine la función de distribución acumulada de X

b) Usando la distribución Acumulada de X determine P(2≤X≤3), P(2≤X<3), P(1.5<X≤2.5)

c) Usando la función de densidad de X determine P(2≤X≤3), P(2≤X<3), P(1.5<X≤2.5)

Solución:

a) Se puede observar del ejercicio 1 que el Rango de la v.a X es {0,1,2,3,4} y se tiene sus probabilidades respectivas. Del cual se deduce la función de distribución acumulada siguiente:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x < 0 \\ \frac{4845}{10626} \quad si\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{9405}{10626} \quad si\ \ 1 \leq x < 2 \\ \frac{10545}{10626} \quad si\ \ 2 \leq x < 3 \\ \frac{10625}{10626} \quad si\ \ 3 \leq x < 4 \\ 1 \quad si \quad x > 4 \end{cases}$$

b) $P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - \lim_{n\to\infty}(2-h) = \frac{10625}{10626} - \frac{9405}{10626} = \frac{1220}{10626}$

$P(2 \leq X < 3) = \lim_{n\to\infty}(3-h) - \lim_{n\to\infty}(2-h) = \frac{10545}{10626} - \frac{9405}{10626} = \frac{1140}{10626}$

$P(1.5 < X \leq 2.5) = F(2.5) - F(1.5) = \frac{10545}{10626} - \frac{9405}{10626} = \frac{1140}{10626}$

c) $P(2 \leq X \leq 3) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1140}{10626} + \frac{80}{10626} = \frac{1220}{10626}$

$P(2 \leq X < 3) = P(X=2) = \frac{1140}{10626}$

$P(1.5 < X \leq 2.5) = P(X=2) = \frac{1140}{10626}$

3. De las personas que llegan a un banco de sangre, 1 de 3 tiene tipo sanguíneo O^+. Considere tres donantes seleccionados aleatoriamente para el banco de sangre. Si la variable aleatorias es X: Número de donantes con sangre de tipo O^+

a) Determine la función de distribución acumulada de X.

b) Determine $P(2 < X < 3)$ usando la función de distribución acumulada

c) Si Z=2-3X determine E(Z) y V(Z)

Solución:

O+: La persona tiene tipo de sangre O+

X: Número de personas que tiene el tipo de sangre O+

El rango de X : 0,1,2,3 y sus probabilidades respectivas son:

$P(X=0) = \frac{2}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$,

$P(X=1) = 3\frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{2}{3} = \frac{4}{9} = \frac{12}{27}$,

$P(X=2) = 3\frac{2}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9} = \frac{6}{27}$

$P(X=3) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x < 0 \\ \frac{8}{27} & si \; 0 \le x < 1 \\ \frac{20}{27} & si \; 1 \le x < 2 \\ \frac{26}{27} & si \; 2 \le x < 3 \\ 1 & si \;\; x \ge 3 \end{cases}$$

b) $P(2 < X < 3) = \lim_{0<h\to 0} F_X(3-h) - F_X(2) = 26/27 - 26/27 = 0$

c) $Z = 2 - 3X$

$E(Z) = E(2-3X) = 2 - 3E(X) = 2 - 3(1) = -1$

Pues: $E(X) = \sum_{x=0}^{3} xP(X=x) = 0\frac{8}{27} + (1)\frac{12}{27} + (2)\frac{6}{27} + (3)\frac{1}{27} = \frac{27}{27} = 1$

$V(Z) = V(2-3X) = V(-3X) = (-3)^2 V(X) = 9\left(\frac{18}{27}\right) = 6$

Determinando $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{45}{27} - 1 = \frac{18}{27}$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 P(X=x) = 0^2\frac{8}{27} + (1^2)\frac{12}{27} + (2^2)\frac{6}{27} + (3^2)\frac{1}{27} = \frac{12+24+9}{27} = \frac{45}{27}$$

Entonces $E(Z) = -1 \quad y \quad V(Z) = 6$

4. Supóngase que la función de densidad de v.a. X es la siguiente:

$f_X(x) = ce^{-2x} I_{(0,\infty)}(x)$.

a) Determinar el valor de c.
b) Determinar la función de distribución acumulada de X
c) Determinar P(1<X<4) usando la función de distribución acumulada
d) Determinar P(1<X<4) usando la función de densidad

Solución:

a) $\int_0^\infty ce^{-2x}dx = c\int_0^\infty e^{-2x}dx = c\left(-\tfrac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^\infty\right) = c(\tfrac{1}{2}) = 1 \to c = 2 \quad \to f_X(x) = 2e^{-2x} I_{(0,\infty)}(x)$

b) Si $x \le 0$ $\quad F(x) = 0$ <0

Si $x > 0$ $\quad F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x 2e^{-2x}dx = 2\int_0^x e^{-2x}\,dx = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^x = [-e^{-2x}]_0^x =$

$= -e^{-2x} + 1 = 1 - e^{-2x}$

Entonces $F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \le 0 \\ 1 - e^{-2x} & si \; x > 0 \end{cases}$

c) $P(1 < X < 4) = F(4) - F(1)$ Ya que X es v.a contínua

$= \left(1 - e^{-2(4)}\right) - \left(1 - e^{-2(1)}\right) = 1 - e^{-8} - 1 + e^{-2} = e^{-2} - e^{-8}$

$= 0.135335 - 0.0003355 = 0.13499$

d) $P(1 < X < 4) = \int_1^4 2e^{-2x}dx = 2\int_1^4 e^{-2x}\,dx = 2\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_1^4 = [-e^{-2x}]_1^4 = \left(1 - e^{-2(4)}\right) - \left(1 - e^{-2(1)}\right)$

$= 1 - e^{-8} - 1 + e^{-2} = e^{-2} - e^{-8} = 0.135335 - 0.0003355 = 0.13499$

5. Supóngase que se tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & para \quad x\le 0\\ x^2/9 & para \quad 0<x\le 3\\ 1 & para\ x>3\end{cases}$$

a) Determine $P(-1< X \le 1.5)$, $P(1/2 < X < 4)$ empleando $F_X(x)$

b) Determínese la Función de densidad de X

c) Determine esperanza y varianza de X

e) Determine la media de $Y = 5 - 3X^2$

Solución:

a) $P(-1< X \le 1.5) = F(1.5) - F(-1) = \frac{(1.5)^2}{9} - 0 = \frac{(1.5)^2}{9} = \frac{1}{4}$ ya que X es variable aleatoria continua.

$P(1/2 < X < 4) = \lim_{0<h\to 0} F_X(4-h) - F_X(1/2) = 1 - \frac{(1/2)^2}{9} = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

b) $f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = 2x/9$. Entonces:

$$f_X(x)=\begin{cases}2x/9 & para \quad 0<x\le 3\\ 0 & de\ otro\ modo\end{cases}$$

c) $E(X) = \int_0^3 x\frac{2x}{9}dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2 dx = \frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right] = \frac{2}{27}(27) = 2$

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2\frac{2x}{9}dx = \frac{2}{9}\int_0^3 x^3 dx = \frac{2}{9}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^3\right] = \frac{9}{2} = 4.5$$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 4.5 - 4 = 0.5$

$$E(X) = 2 \quad y \quad V(X) = 0.5$$

e) Se desea $E(Y) = E(5 - 3X^2) = 5 - 3E(X^2) = 5 - 3(4.5) = -8.5$

6. Sea X una variable aleatoria, considere que la siguiente función es una función de distribución acumulada. Determinar el valor de C

$$\Rightarrow F_x(x) = \begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ C\ x(4-x^3) & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

Solución: Se sabe que F(1)=1 ya que X es una variable aleatoria continua:

$F(1) = C\ x(4-x^3) = C(4-1) = 3C = 1$ entonces C=1/3

$$\Rightarrow F_x(x) = \begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ \frac{1}{3}\ x(4-x^3) & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

7. Sea X una v.a donde la función de distribución es es dada por:

$$F_x(x)=\begin{cases}0 & si \quad x<0\\ x^2+0.2 & si \quad 0\le x<0.5\\ x & si \quad 0.5\le x<1\\ 1 & si \quad x\ge 1\end{cases}$$

Determine P(X<0.7), P(0.2<X<0.75)

Solución:

$P(X < 0.7) = \lim_{0<h\to 0} F(0.7-h) = 0.7$

$P(0.2 < X < 0.7) = \lim_{0<h\to 0} F(0.7-h) - F(0.2) = 0.7 - (0.2^2 + 0.2) = 0.7 - 0.24 = \frac{23}{50} = 0.46$

8. Supóngase que la función de densidad de la variable aleatoria es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x^3) & para\ 0 < x < 1 \\ 0 & de\ o.m. \end{cases}$$

Determina:

a) P(x<1/2), P(1/4<x<3/4), P(x>1/3), FX(1/3), FX(1.5)

b) Determine la función de distribución acumulada FX(x)

Solución:

a)

$$P\left(x < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{1/2} \tfrac{4}{3}(1-x^3)\,dx = \int_{0}^{1/2} \tfrac{4}{3}(1-x^3)\,dx = \frac{4}{3}\int_{0}^{1/2} (1-x^3)\,dx = \frac{4}{3}\left(\int_{0}^{1/2} 1dx - \int_{0}^{1} x^3\,dx\right) = \frac{4}{3}\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right]$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{48} = \frac{32-1}{48} = \frac{31}{48} = 0.6458$$

$$P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \tfrac{4}{3}(1-x^3)\,dx = \frac{4}{3}\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left[\frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)\right] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^4 =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{27}{64}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{256}\right) = \frac{2}{3} - \frac{27}{256} + \frac{1}{768} = \frac{512-81+1}{768} = \frac{432}{768} = \frac{9}{16} = 0.5625$$

$$P\left(x > \frac{1}{3}\right) = \int_{1/3}^{1} \tfrac{4}{3}(1-x^3)\,dx = \left[\left(\tfrac{4}{3}\right)x - \left(\tfrac{1}{3}\right)x^4\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = \left(\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{9} + \frac{1}{243} = \frac{136}{243} = 0.5597$$

$$F_x(1/3) = P\left(x \le \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(x > \frac{1}{3}\right) = 1 - 0.559 = 0.4403$$

$$F_x(1.5) = P(x \le 1.5) = F(1.5) = 1$$

b) Para si $0 < x < 1$

$$F_x(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \tfrac{4}{3}(1-x^3)\,dx = \left[\left(\tfrac{4}{3}\right)x - \left(\tfrac{1}{3}\right)x^4\right]_0^x$$

$$= \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}x^4 = \frac{x(4-x^3)}{3}$$

$$\Rightarrow F_x(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \le 0 \\ \dfrac{x(4-x^3)}{3} & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x \ge 1 \end{cases}$$