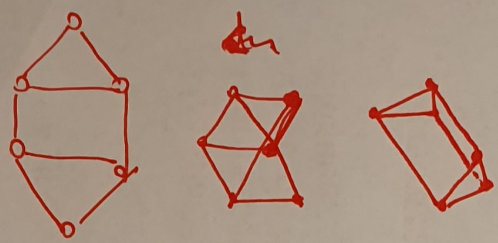
Ex 3 :

c.



d. 3 reg 7 somet : Impossible

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E| \text{ or } 7*3 \neq 2K$$

avec $K = |E|$

Ex 4 :

a. $$|E(G)| = \frac{|V(G)|(|V(G)|-1)}{2}$$

b. ~~|E(G)| =~~ (perdu dans l'abime du temps)

c. VOIR DEMO PERSO

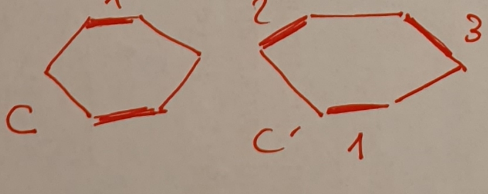
Ex 5 :

a "C = {chemin opposé de xy_1 à xy_n}" : Moi

b. $O(V(G)) + O(|E(G)|) \Leftrightarrow O(n+m)$ 2 for loop sur V(G) et E(G)

c. Couplage maximal étendu

d.



sur C pas opti

Maximum d'arête dans un Graphe K composé :

Pour la demonstration qui suit nous noterons

ENTRÉE

~~...~~

- n le nombre de sommet de G $n = |V(G)|$
- C l'ensemble des C_i composante de G :

$$\forall C_i \in C, \underbrace{C_i \subseteq G}_{\text{sous-graphe et connexe}} \text{ et } \underline{\forall X, Y \in V(C_i)\ \exists \mu_i(X,Y)}$$

- n_i nombre de sommet de $\underline{C_i}$: $n_i = |V(C_i)|$

i ème composante de G

Pour Rappel G est un graphe simple non orienté

~~But~~ ~~But~~ On trouve assez naturellement que

$\forall V_1 \in V(G)$ il existe $|V(G)| - |V_1|$ manière différente de le rattaché a un autre element de $V(G)$

Or $|V(G)| = n$ donc $|E(G)| \leq n(n-1)$

But : En considerant l'ensemble C on deduit que

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{K} |E(C_i)| = \sum_{i=1}^{K} n_i(n_i - 1)$$

Trouvons un majorant à $|E(G)|$, on la notera $\max(|E(G)|) \doteq M_C$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} n_i(n_i - 1) \leq M_C} \leftarrow \text{But}$$

A savoir : $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$

Debut Preuve :

$$\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)=m-K \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)\right)^2=(m-K)^2$$

On

$$\left(\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)\right)=\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)\sum_{j=1}^{K}(m_j-1)=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(m_i-1)(m_j-1)$$

$$=\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)^2+2\sum_{i,j\in[1,K],\,i\neq j}(m_i-1)(m_j-1)$$

Donc

$$(\diamond)\quad \underbrace{\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)^2}_{1}+\underbrace{\sum_{1\leq i<j<K}\left((m_i-1)(m_j-1)\right)}_{2}=m^2-2mK+K$$

$(\diamond)$ est Maximum pour m_M definit comme suit :

Soit $M\in[\![1,K]\!]$ $m_M=m-K$ (pour le cycle C_M : $V(C_M)=m_M$)

(Pour les autres cycles :)

$\forall\, 1\leq i\leq K$ et $i\neq M$ $|V(C_i)|=1$ soit $m_i=1$

Ainsi $|V(G)|$:

$m=m_M+\sum m_i$ / on respecte toujours la propriété de base

En considerant "l'hypothèse" sur les m_i l'expression 2) est toujours nulle donc plus generalement nous pourrons écrire

$$\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)^2+\delta=m^2-2mK+K \text{ or } \delta<<\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)^2$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{K}(m_i-1)^2\leq m^2-2mK+K \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{K}m_i^2-2m_i+1\leq m^2-2mK+K$

$$\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) - 2\sum_{i=1}^{K} n_i + K \leq n^2 - 2nK + K^2$$

(Δ) $$\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) \leq n^2 - 2nK + K^2 - K + 2n \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{K} n_i = n\right)$$

nous avons majoré $\sum_{i=1}^{K}(n_i^2)$ revenons à la formule:

$$(|E(G)|) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i(n_i-1)) \leq M_c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i^2 - n_i) \leq M_c$$ ~~or d'après (Δ)~~:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{K} n_i^2 - \sum_{i=1}^{K} n_i\right) \leq M_c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} n_i^2 - \frac{1}{2}n \leq M_c$$

D'après (Δ):

$$-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - 2nK + K^2 - K + 2n - n\right)$$

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}\left((n-K)^2 + (n-K)\right)$$

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}(n-K+1)(n-K) \quad \blacksquare$$

Conclusion :

$$\max |E(G)| = \frac{1}{2}(n-K+1)(n-K) \text{ pour}$$

max atteint quand $\exists C_i \in G$ tq $V(C_i) = V(G) - K$ (avec K nb de composante dans G)

Correction :

Preuve :

Si C n'est pas max

1) $\exists\, xy \notin C$ / x non adj à $\forall e \in E(C)$

Or si 1) alors $x_c = 0$ et $y_c = 0$ donc l'algo aurait ajouté xy à C.

Soit G tq Algo $|C| < |C'|$

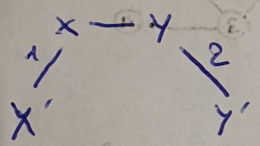
Montrons que $|C| \geq \frac{|Opt|}{2}$ avec Opt : couplage de taille maximale.

et C : un couplage retourné par AlGO

Soit une arête $xy \in C$

Toute arête de C touche au plus 2 arêtes de Opt.

$x_1y_1 \in Opt$ ou $x_2y_2 \in Opt$ sinon AlGO aurait pris x_1y_1 ou x_2y_2



Plus formellement comme C maximal, $\forall e \in E(C)$ est adj à une arête de C (sinon ça impliquerait que C != maximal)

Ainsi

$$|Opt| \leq 2|C| \Rightarrow |C| \geq \frac{|Opt|}{2}$$

? $d(x_0) = 0$ alors retourner[x_0]

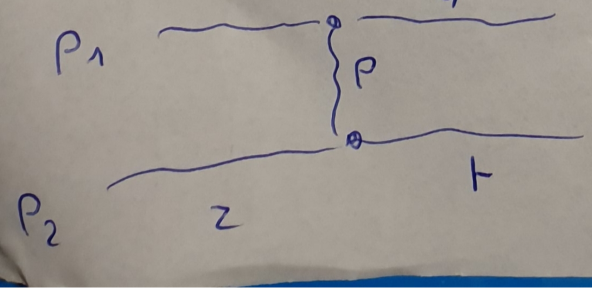
: Soit $y \in$ Voisin(x_0)

Renvoyer Ajout(x_0, CheminMax ($G \setminus x_0, y$))

Montrons que 2 ch de lg max est au moins 1 sommet en commun

Par l'absurde

P_1 et P_2 de longueur L sont sommet commun



$x + y = L \quad z + t = L$

$(x+p+t) + (z+p+y) = 2L + 2p > 2L$

Forcement 1 des deux chemins de longueur > L

$\Rightarrow$ contredit "P_1 et P_2 lg max