Un graphe acyclique connexe est un arbre. D'après cette déf nous pouvons affirmer que chaque composante d'un graphe acyclique est un arbre. C'est pour cette raison que l'on peut nommer les ~~arbres~~ graphes acyclique des forêts.

Donc :

- Dans un arbre deux sommets quelconques sont connectés par exactement 1 chemin.
  Ce chemin est noté xTy avec $(x, y) \in V^2$

Remarque : $\forall$ arbre contient un sommet de degré au plus 1 sinon d'après Th 2 si tout sommet degré ≥ 2 alors graphe cyclique.

Dépts Arbre non trivial doit contenir ≥ 1 sommet de degré exactement 1.
Un tel sommet est appelé une feuille.

Tout arbre non trivial à au moins 2 feuilles.

Si x est une feuille et T un arbre, le sous-graphe : $T - x$ est un arbre tq :

$$v(T-x) = v(T) - 1 \quad \text{et} \quad e(T-x) = e(T) - 1$$

Un arbre trivial ne contient qu'un nœud / pas d'arête

Théorème 4.3 Si T est un arbre, alors $e(T) = v(T) - 1$

Arbre enracinés et branchements :

Un arbre enraciné $T(x)$ est un arbre T avec un sommet spécifique appelé la racine de T.

Une orientation d'un arbre enraciné dans laquelle tout sommet sauf la racine est de degré entrant 1 est appelé branchement.

Un arbre enraciné, ou branchement de racine x est appelé un x-arbre ou x-branchement, resp.
(bijection entre x-arbre et x-branchement)

La racine de ce branchement est une source. Puisque la somme des degrés entrants d'un digraphe est égal au nb de ses arcs, qui dans le cas d'un branchement B vaut $v(B) - 1$ (cf Th 4.3)

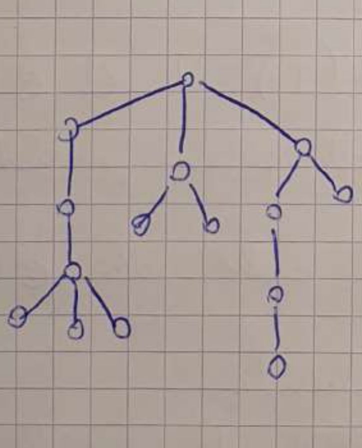
∀ sommet d'un branchement est atteignable depuis sa racine par un <u>unique</u> chemin dirigé.

Dans ∀ digraphe l'atteignabilité depuis un sommet peut s'exprimer en terme de branchement.

Th 4.4 :

Soit x un sommet d'un digraphe D, et soit X l'ensemble des sommets de D qui sont atteignable depuis x. Alors, dans D, il y a un x-branchement ayant X pour ensemble de sommets.

Ex branchement



A noter :
Les arbres sur les graphes peuvent mettre en évidence des propriétés structurelle intéressantes

Arbre couvrant :

Un <u>sous-arbre</u> est un arbre qui est un sous-graphe. De même si un sous-arbre est un sous graphe couvrant il est dit ss arbre couvrant.

Si un graphe G a un <u>arbre couvrant</u> T alors G est connexe.
D'autre part si G est connexe mais n'a pas d'arbre T alors G\e est un <u>sous graphe couvrant</u> (avec e une arête d'un cycle de G), non séparatrice)
Remarque : en répétant l'opération on obtient un certain T qui est l'arbre couvrant.

Tant que ∃ une arête e non séparatrice faire T=G\e
retourne T.

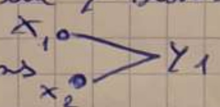
Th 4.6 : Un graphe est connexe ssi il a un arbre couvrant.

Th 4.7 : Un graphe est biparti ssi il ne contient pas de cycle impair.

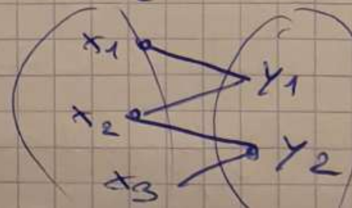
Demo : 1) graphe biparti ssi chacune de ses <u>compo</u> est biparti
2) contient cycle impair si l'une de ses <u>compo</u> en contient au moins une

Donc Th sur graphe biparti = sur compo du graphe = graphe connexe. Donc :
Soit G un graphe biparti connexe noté G[X,Y]
Alors les sommets sont connectés par des chemins impair dans des parties différentes et de longueur paire dans la même partie
Car si parties ≠ alors soit x un sommet de X lié a un Y dans Y

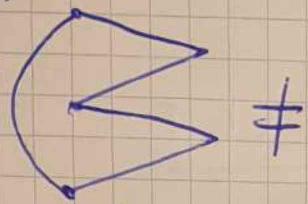
$x_1 \to Y_1 \to x_2$ longueur 2 × 1 car 2 partitions



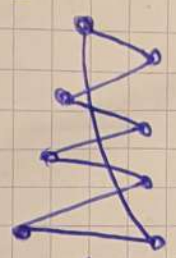
$x_1 \to Y_1 \to x_2 \to Y_2 \to x_3$ longueur 2 × 2



Donc soit C un cycle quelconque dans G, il passe alternativement entre X et Y (2K) et après rejoints un $x \in X$ ou $y \in Y$ donc $2K+1$ ex :



non biparti con arêtes 2 extremités non enrelles impair



biparti cycle pair

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que G soit un graphe connexe sans cycle impair

D'après Th 4.6 alors G est un arbre couvrant T. Soit r la ~~un sommet~~ racine de T créons U et V de la manière suivante :

- U contient r et tous les sommets de T se trouvant à un nombre pair d'arêtes de r.
- V contient les sommets de T se trouvant à un nombre impair d'arêtes de r : $V(G) - V(T)$

1) Nous savons que $\forall$ (sommet)^2 dans T il existe un unique ~~chemin~~
De plus U et V disjoint par construction

Mais toujours aucune garantie sur U : $\exists$ arête reliant 2 sommet de U

Or $\forall x, y \in U$ ou V chemin dans T toujours pair (relié 2 pair $\Rightarrow 2K$ et impair 2 K aussi } car doit conserve parité)

Si on ajoute une arête e on obtient un cycle de longueur impair $(2K \underset{|e|}{\underline{+1}})$ ce qui est impossible par hypothèse.

Il n'est donc pas possible d'avoir des sommets x et y reliés en " court - circuit ". 2) $\forall$ arête du graphe relient des sommets de U à des sommets de V, ce qui achève de montrer que G est biparti
1)