Graphe :

Un Graphe est définit comme suit :

$$G = (V(G), E(G))$$

$V(G)$: ~~un~~ l'ensemble des sommets de G ; $v(G)$: nombre de sommets (l'Ordre)

$E(G)$: l'ensemble des arêtes de G ; $e(G)$: nombre d'arêtes (la taille)

~~Ainsi que : $\psi_G(e) = \{u,v\}$ définit sur $E(G)$~~

Ainsi que ψ_G définit sur $E(G)$

$$\psi_G : E(G) \to V(G)$$

$$\boxed{\forall e \in E(G), \{u,v\} \in V(G) \text{ tq } \psi_G(e) = \{u,v\}}$$

u, v non distinct. Le lit e relie u et v, avec u et v extrémités de e.

(Représentation Graphique (Dessin) :
Sommet = point , arête = ligne.)

Les extrémités d'une arête sont dites incidentes et vice versa

L'ensemble des ~~sommets~~ voisins d'un sommet v dans un graphe G est noté $N_G(v)$.

Une arête dont les extrémités sont identiques est appelée une boucle.

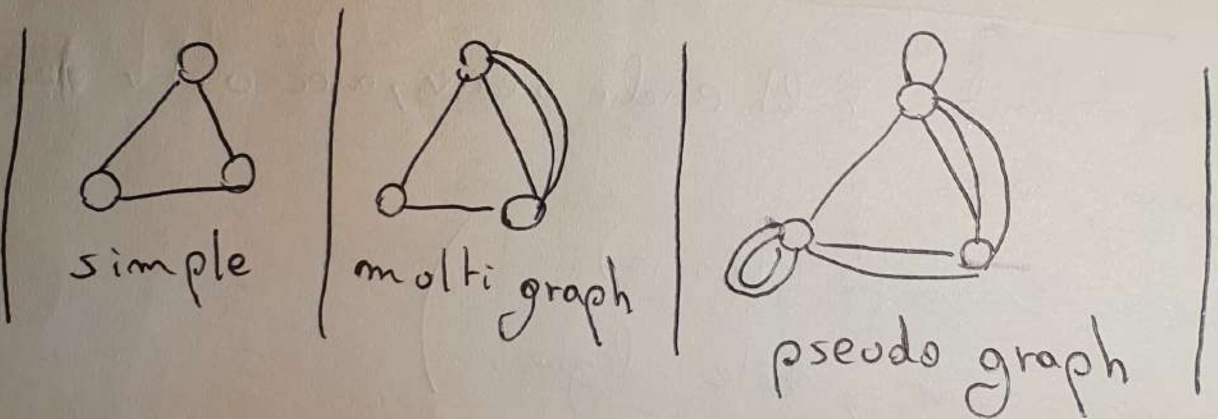
Deux liens ayant la même paire d'extrémités sont appelés des arêtes parallèle.

Un <u>Graphe est fini</u> si son ensemble de sommet et d'arêtes le sont eux aussi (V(G) et E(G)).

Un <u>graphe nul</u> est un graphe sans sommet. (0)

Un graphe avec 1 sommet est dit <u>trivial</u> (1) 1 > ⇒ non trivial

Un ensemble V et un ensemble E de sous-ensemble à 2 elements de V définissent un <u>graphe simple</u> (V, E), où les extrémités d'une arête ov sont précisement les sommets v et o.
On peut donc se passer de la fonction d'incidence dans ces cas ci, en renommant chaque arête par la paire de ses extrémités.



$2mk + 2k \quad 2m(k-1)$
$2(m+1)k \quad k(m+2)$
$= 2k\cancel{2m} + km + 2$

Un <u>graphe complet</u> est un graphe simple dans lequel 2 sommets quelconque sont toujours adjacents.

Un <u>graphe vide</u> est un graphe dans lequel il n'y a pas de sommets adjacents {⇔ $E(G) = \emptyset$ }.

Un <u>graphe biparti</u> si son ensemble de sommets peut être partitionné en 2 sous ensemble X et Y de façon à ce que toute les arêtes ait une extremité dans X et dans Y.

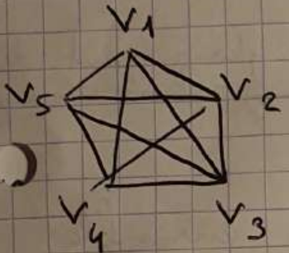
On appelle ~~la~~ partition (X, Y) : bipartition du graphe et X et Y ses parties.

graphe biparti notation $G[X, Y]$

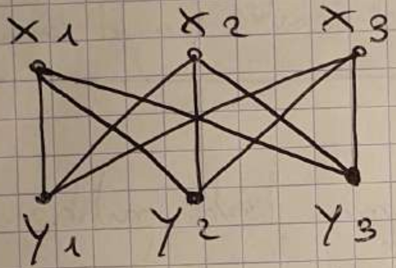
Si $G[X, Y]$ est simple et tout sommet de X est relié à tout sommet de Y le graphe est dit complet.

biparti.

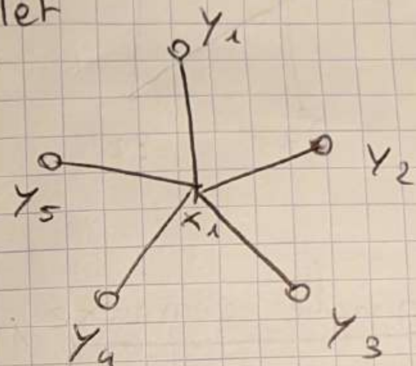
Ex : graphe biparti complet



graphe complet



graphe biparti + complet



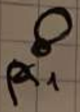
Etoile*
(avec $|X| = 1$)

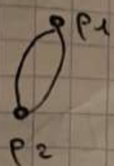
*: Etoile est un graphe biparti complet $G[X, Y]$
avec : $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

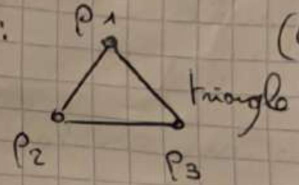
Un chemin est un graphe simple dont les sommets ~~dont~~ ~~les so~~ peuvent être rangés suivant un ordre linéaire de telle manière que 2 sommets adjacent sont consécutifs dans l'ordre.

De même un cycle sur 3 sommets ou plus (triangle $\geq n$) est un graphe simple dont les sommets peuvent être rangés suivant un ordre cyclique de manière à ce que 2 sommet adj sont consécutifs dans l'ordre et non adj sinon.

Ex : <u>cycle</u>

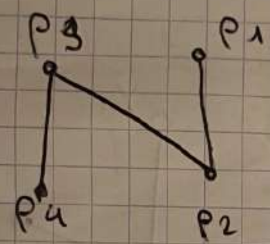
(1) : 

(2) : 

(3) : 

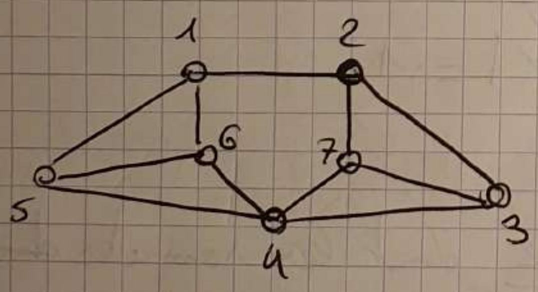
(4) quadri (5) : penta

Ex : <u>chemin</u>

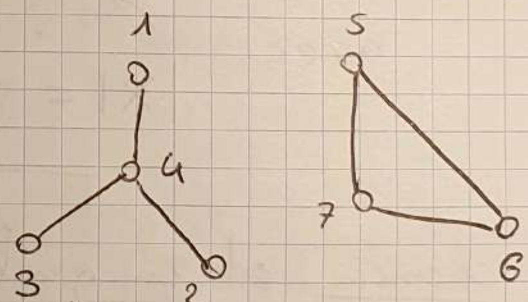
(3) : 

> <u>Nota Bene :</u>
> Tout graphe peut être dessiné sur une surface de façon à ce que ses arêtes ne s'intersectent qu'en leur extrémités (un tel dessin est appelé : plongement du graphe sur la surface

Un <u>graphe connexe</u>, si pour toute partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensemble non-vides X et Y, il existe une arête avec une extrémité dans X et une extrémité dans Y, dans le cas contraire le <u>graphe est séparé</u>.



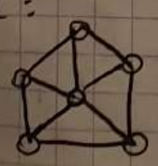
a) graphe connexe



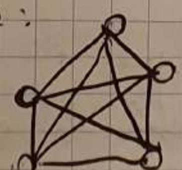
b) graphe séparé

Un graphe qui peut être dessiné dans le plan de telle manière que les arêtes s'intersectent uniquement en des points correspondant à leur extrémités communes est un <u>graphe planaire</u>, un tel dessin est un <u>plongement planaire</u> du graphe

planaire :



pas planaire :



(Autre représentation) <u>Matrice d'Incidence et d'Adjacence</u> :

Soit G un graphe d'ensemble de sommet V et d'ensemble d'arêtes E.

- <u>matrice d'incidence</u> est la matrice $n \times m$ $M_G := (m_{ve})$

  m_{ve} : nb de fois où le sommet v et l'arête e sont incidents (0, 1 ou 2). Avec n : nb sommet et $m = |E(G)|$: nb arête

- <u>matrice d'adjacence</u> est la matrice $n \times n$ $A_G := (a_{ve})$

  a_{ve} : nb d'arêtes reliant les sommets

On stocke souvent matrice ~~adjacence~~ car arêtes_nb >> nb_sommets.

$M_G \gg A_G$

Pour graphe simple :

pour chaque sommet v, les voisins de v sont listés selon ordre quelconque, <u>liste d'adjacence</u> du graphe $(\underline{N(v)} : v \in V)$.

Pour graphe Biparti :

Comme pas arêtes reliant 2 parties ⇒

$G[X, Y]$ avec $X := \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ $Y := \{y_1, \dots y_s\}$

<u>matrice d'adjacence biparti</u> : $r \times s$ $B_G = (b_{ij})$ où

b_{ij} : nb arête reliant x_i et y_i.

Degré des Sommets :

Noté $d_G(v)$ il est le nombre d'arêtes de G incidentes avec $v \in V(G)$. Si graphe simple = nb voisin.

sommet degré 0 : <u>sommet isolé</u>

$\delta(G)$ et $\Delta(G)$ degré min et max des sommets de G

$d(G)$ degré moyen, $\frac{1}{n}\sum_{v\in V} d(v)$.

Th : Pour tout graphe G,

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m$$

colonne de M

Corollaire : Dans tout graphe, le nombre de sommet de degré impair est pair.

Un graphe G est k-regulier si $d(v) = k$ $\forall v \in V$; un graphe regulier est un graphe k-regulier pour un certain k.

ex : graphe ~~biparti~~ complet n sommet est $(n-1)$ regulier.

graphe biparti complet avec k sommets dans chaque partie est k-regulier.

graphe 3-reguliers très complexe : graphe cubique (+ très utilisé th graphe, remarquable).

Soos-Graphe :

($\diamond$) Operation de suppression d'arête et suppression de sommet

$G \setminus e$ $\qquad\qquad$ $G - v$

soos-graphe à arête supprimer $\qquad$ " $\qquad$ " sommet

Def :

si $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$ ~~et φ_F~~

ψ_F est la restriction de ψ_G à $E(F)$

Alors $F \subseteq G$.

Tout sous-graphe de G peut être obtenu par appli successive ($\diamond$)

Sou-graphe nul sous-graphe tout graphe

Un ~~sous~~ graphe d'un graphe G est un graphe H qui contient G en tant que sous-graphe.

sous/sur graphe propre $\subset \neq \subseteq$

Detection cycle

Theorème Soit G un graphe dans lequel tous les sommet est de degré au moins 2. Alors G contient un cycle

Démo : voir git.

Un chemin maximal = chemin qui ne peut-être étendu en aucun autre chemin plus long en ses 2 extremités

Def Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous graphe de G. Alors F est maximal dans $\mathcal{F}$ si aucun membre de $\mathcal{F}$ ne contient proprement F

Resp min, Resp chemin min max

Par ex : ∄ sous graphe connexe ensemble alors les membre max de ∄ sont les composantes de G.

Tout cycle d'un graphe est un cycle max car aucun cycle n'est contenu dans un autre.

Longueur plus long cycle = <u>circonférence</u> et longueur plus petit = <u>maille</u>

Sous-graphe couvrant :

sous-graphe obtenu par <u>suppression d'arêtes</u> uniquement.

Soit G' sgc alors $V(G) = V(G')$ mais $E(G) \supseteq E(G')$

$G' = G \setminus S$ avec S ensemble ~~sommet~~ arête supprimé.

Tout graphe simple est sous-graphe c d'un graphe complet.

sur-graphe couvrant ⇒ ajout arête : $G + S \neq G / S$

Soit G et H 2 graphes ; en ajoutant les arêtes reliant tout sommet sommet de G et H, on obtient le <u>joint</u> de G et H dénoté $G \vee H$.

$C_n \vee K_1$ avec K_1 sommet isolé = roue ~~(cf Wagner graph)~~ à n rayon noté W_n

Ajouter sommet aussi au graphe $G + v$

Chemin et cycle couvrant = cycle / chemin hamiltonien

sous graphe k-reg couvrant = K-facteur