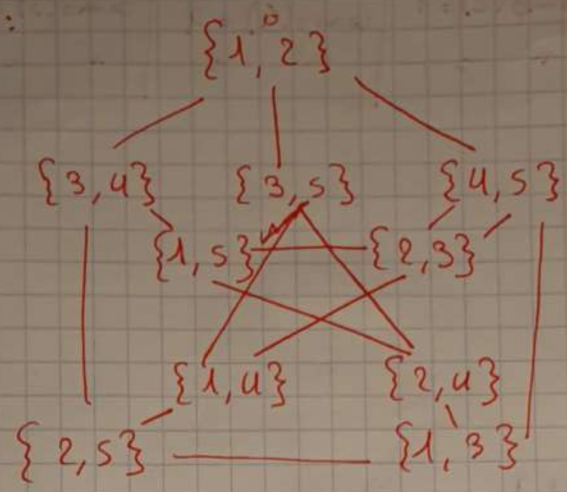
Exercice 1 :

Graphe Petersen :



Echelle de Mobius :

1 : {4, 5, 6} ; 2 : {5, 6, 7} 3 : {6, 7, 8} 4 : {7, 8}

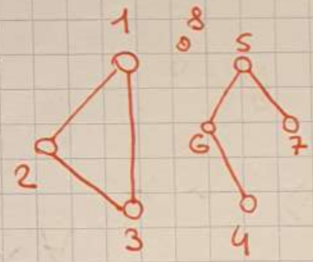
5 : {1, 2, 8} , 6 : {1, 2, 3} , 7 : {2, 3, 4} , 8 : {3, 4, 5}

Exercice 2 :

Entrée : $G(V(G), E(G))$

avec $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$

$E(G) = \{12, 65, 46, 31, 23, 57\}$



	1 2	~~6 5~~	4 6	3 1	6 5
comp(1) = 1	comp(1) = 1	comp(1) = 1	comp " "	" "	comp(1) = 1
⋮	comp(2) = 1	comp(2) = 1	comp(6) = 4	comp(3) = 1	comp(2) = 1
⋮	comp(3) = 3	"	comp(7) = 7	" "	comp(3) = 1
comp(8) = 8	⋮	comp(5) = 4	comp(8) = 8		comp(4) = 4
	comp(8) = 8	comp(6) = 4			comp(5) = 4
		comp(8) = 8			comp(6) = 4
					comp(7) =

~~12~~	1 2	4 6	3 1	5 7	2 3
comp(1) = 1	comp(1) = 1	" "	" "	" "	" "
comp(2) = 2	comp(2) = 1	comp(6) = 4	comp(3) = 1	comp(7) = 5	~~comp(3) = 1~~
⋮	" "	" "	" "	" "	
comp(8) = 8					

6 5

comp(1) = 1
(2) = 1
(3) = 1

comp(4) = 4
(5) = 4
(6) = 4
(7) = 4

comp(8) = 8

Exercice 3 :

a) Un graphe est regulier-1 $\Leftrightarrow$ est un couplage

$\Rightarrow$

Supposons que G soit regulier-K alors

$\forall v \in V(G)\ d_G(v) = k$ et donc $|N_G(v)| = K$

Or $|N_G(v)| = 1 \Leftrightarrow$ est un couplage

$\Leftarrow$ pareil

b " " - 2 $\Leftrightarrow$ est une union disjointe de cycle.

$\Rightarrow$ " "

$\forall v \in V(G)\ d_G(v) = 2 = |N_G(v)| = 2$

Soit $v_1 \in V(G)$, $d_G(v_1) = |N_G(v_1)| = 2$

$v_2 \in N_G(v_1)$, " "

⋮

$v_m \in N_G(v_{m-1})$ "

⋮

Comme G est un graphe finit

$v_1 \in V(G)$ Fin

Le cycle ainsi mis en exergue sera nommé C_1 pour la suite de la preuve

I Soit $C_1 \subseteq G$ tq $\forall c \in C_1, d_{C_1}(c) = 2$ (2-regulier) d'après ($\Diamond$)

II $\forall v_k \in C_1 \quad E(C_1) = \bigcup_{k \geq 0}^{n} \{ v_k v_{k+1}, v_k v_{n+1-k} \}$

avec $n = |V(C_1)|$ (Disjoint)

Donc d'après (I) et (II) C_1 est un cycle 2-regulier disjoint du "reste" du graphe.

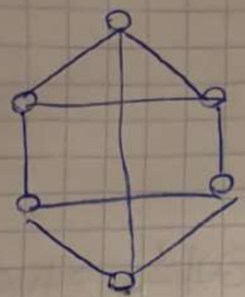
Pour $G' = G - C_1$ il en va de $\hat{m}$

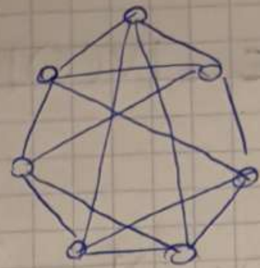
$\vdots$

$G^{(n)} = G^{(n-1)} - C_{n-1}$ car G est finit donc

Soit G tq $G = \bigcup_{k=0}^{n} C_k$ avec n : nb de cycle 2 regulier

$\left(\text{et } \bigcap_{k=0}^{n} C_k = \emptyset \quad , \forall C_k \in G, d(C_k) = 2|E(C_k)| \right)$

c. 

d. 

Ex 4 :

a. $|E(G)| = \underline{|V(G)|(|V(G)|-1)} = n^2 - n$

b. Soit C_1 et C_2 tq ?

- $C_1 \subseteq G$ et $\forall X, Y \in V(C_1)\ \exists \mu_1(X, Y)$
- $C_2 \subseteq G$ et " " μ_2

Alors $|E(G)| = |E(C_1)| + |E(C_2)|$

(si $C_1 \cup C_2 = \emptyset$ sinon voir a.))

or $E(C_1) = \dfrac{V_{C_1}^2 - V_{C_1}}{2}$ et $E(C_2) = \dots$

$$|E(G)| = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}$$

c. $$|E(G)| = \sum_{k=1}^{c} \frac{n_k(n_k-1)}{2} = \sum_{k=1}^{c} \frac{n_k^2}{2} - \frac{n_k}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{c} n_k^2\right) - \frac{V(G)}{2}$$

Maximum d'arête dans un Graphe K composé :

Pour la demonstration qui suit nous noterons

~~ensemble~~

ENTRÉE

- n le nombre de sommet de G $n = |V(G)|$

- C l'ensemble des C_i composante de G :

$$\forall C_i \in C, \underbrace{C_i \subseteq G}_{\text{sous-graphe}} \text{ et } \underbrace{\forall X, Y \in V(C_i) \; \exists \mu_i(X,Y)}_{\text{connexe}}$$

- n_i nombre de sommet de C_i : $n_i = |V(C_i)|$

C_i : i ème composante de G

Pour Rappel G est un graphe simple non orienté

~~Petit~~ ~~But~~ On trouve assez naturellement que

$\forall v_1 \in V(G)$ il existe $|V(G)| - |v_1|$ manière différente de le rattaché a un autre element de $V(G)$

Or $|V(G)| = n$ donc $|E(G)| \leq n(n-1)$

But : En considerant l'ensemble C on deduit que

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{K} |E(C_i)| = \sum_{i=1} n_i(n_i - 1)$$

Trouvons un majorant à $|E(G)|$, on la notera $\max(|E(G)|) \doteq M_c$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} n_i(n_i - 1) \leq M_c} \leftarrow \text{But}$$

A savoir : $\sum_{i=1}^{K} n_i = n$

Debut Preuve :

On $\sum_{i=1}^{K}(m_i - 1) = m - K \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)\right)^2 = (m-K)^2$

$$\left(\sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)\right) = \sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)\sum_{j=1}^{K}(m_j - 1) = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}(m_i - 1)(m_j - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)^2 + 2\sum_{i,j\in[1,K],\, i\neq j}(m_i - 1)(m_j - 1)$$

Donc

$$(\diamond)\quad \underbrace{\sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)^2}_{1} + \underbrace{\sum_{1\leq i<j<K}\left((m_i - 1)(m_j - 1)\right)}_{2} = m^2 - 2mK + K$$

$(\diamond)$ est Maximum pour m_M definit comme suit :

Soit $M \in [\![1, K]\!]$ $m_M = m - K$ (pour le cycle C_M : $V(C_M) = m_M$)

(Pour les autres cycles :)

$\forall\, 1 \leq i \leq K$ et $i \neq M$ $|V(C_i)| = 1$ soit $m_i = 1$

Ainsi $|V(G)|$:

$m = m_M + \sum m_i$ / on respecte toujours la propriété de base

En considerant "l'hypothèse" sur les m_i l'expression 2) est toujours nulle donc plus generalement nous pouvons écrire

$$\sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)^2 + \delta = m^2 - 2mK + K \quad \text{or} \quad \delta << \sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)^2$$

donc $\sum_{i=1}^{K}(m_i - 1)^2 \leq m^2 - 2mK + K \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{K} m_i^2 - 2m_i + 1 \leq m^2 - 2mK + K$

$$\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) - 2\sum_{i=1}^{K} n_i + K \leq n^2 - 2nK + K^2$$

(Δ) $$\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) \leq n^2 - 2nK + K^2 - K + 2n \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{K} n_i = n\right)$$

nous avons majoré $\sum_{i=1}^{K}(n_i^2)$ revenons à la formule :

$$(|E(G)|) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i(n_i-1)) \leq M_c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i^2 - n_i) \leq M_c \quad \text{~~or d'après (Δ)~~ :}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{K} n_i^2 - \sum_{i=1}^{K} n_i\right) \leq M_c \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} n_i^2 - \frac{1}{2}n \leq M_c$$

D'après (Δ) :

$$-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - 2nK + K^2 - K + 2n - n\right)$$

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}\left((n-K)^2 + (n-K)\right)$$

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}(n-K+1)(n-K)$$

Conclusion :

$$\max |E(G)| = \frac{1}{2}(n-K+1)(n-K) \text{ pour}$$

max atteint quand $\exists C_i \in G$ tq $V(C_i) = V(G) - K$ (avec K nb de composante dans G)