Definition 6: Une relation R de E vers F est appelée relation binaire si et seulement si $E = F$. On dit alors que R est une relation binaire dans E

Definition 7: Soient E un ensemble, R une relation binaire dans E, $A \subset E$.
La relation binaire dans A, notée R_A, définie par

$$\forall (x, y) \in A^2, \ x R_A y \Leftrightarrow x R y$$

est appelée relation induite par R sur A

Definition 8: Une relation binaire R dans un ensemble E est dite:

- Reflexive, si et seulement si : $\forall x \in E, \ x R x$

- Symetrique, si et seulement si, $\forall (x, y) \in E^2, \ x R y \Rightarrow y R x$

- Antisymetrique, si et seulement si, $\forall (x, y) \in E^2, \ \begin{cases} x R y \\ y R x \end{cases} \Rightarrow x = y$

- Transitive, si et seulement si, $\forall (x, y, z) \in E^3, \ \begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow x R z$

Structure algebrique :

① Lois de composition interne

A) Definition :

Definition 1 : On appelle loi de composition interne (lci) sur un ensemble E toute application $E \times E$ dans E (interne)

NB : une lci sur E est souvent notée $* : E \times E \to E$

$(x, y) \to x * y$

$(E, *)$

② Associativité, Commutativité

Definition 2 : Une loi interne $*$ dans un ensemble E est dite associative si est seulement si :

$$\forall (x,y,z) \in E^3, (x*y)*z = x*(y*z)$$

Exemple :

① l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ est associatives

② la loi internes $* : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}$

$(x,y) \longmapsto \frac{x+y}{2}$ n'est pas associative

Preuve :

Avec

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

$((-1)*0)*1 = \frac{1}{4}$

$(-1)*(0*1) = -\frac{1}{4}$

$(E, *)$ Magma + propriété supplementaire : associativité

$\downarrow$

Demi-groupe : Magma associatif.

2) Associativité, Commutativité

Notation : Soient E un ensemble, $*$ ou $\cdot$ ou $+$ une loi interne associative dans E, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in E$ et $x \in E$, on note

$$\mathop{\huge *}_{i=1}^{n} x_i = x_1 * x_2 * \dots * x_n \quad \text{(General)}$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 x_2 \dots x_n \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$x^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} \quad \text{(General)}$$

$$x^n = \underbrace{x x \dots x}_{n \text{ fois}} \qquad n x = \underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ fois}}$$

$x * y = y * x$

x et y commutent

(cas particulier à x et y)

Definition : Une loi interne $*$ dans un ensemble E est dite Commutative si est seulement si

$$\forall (x,y) \in E^2, \ x * y = y * x$$

Addition est la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont commutative (dans tous les ensembles inclus dans $\mathbb{C}$ aussi)

La soustraction dans $\mathbb{C}$ n'est pas commutative $\not\Rightarrow$ (dans tous ensembles inclus dans $\mathbb{C}$ aussi

Proposition 1 Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et commutative notée $+$. Alors

$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_m) \in E^m, \forall (y_1, \dots, y_m) \in E^m$

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$\forall (m, p) \in (\mathbb{N}^*)^2, \forall (x_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p} \in E^{mp}$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)$$

3) Element réguliers

Definition a : Soient E un ensemble muni d'une loi interne $*$, $a \in E$

1) On dit que a est regulier (simplifiable) à gauche pour $*$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, (a * x = a * y \Rightarrow x = y)$$

2) On dit que a est regulier à droite pour $*$ si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2, (x * a = y * a \Rightarrow x = y)$$

3) On dit que a est regulier pour $*$ si et seulement si a est regulier à gauche et à droite pour $*$, c.à.d

$$\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} (a * x = a * y \Rightarrow x = y) \\ (x * a = y * a \Rightarrow x = y) \end{cases}$$

Exemple :

Dans $\mathbb{C}$: $x + 2 = y + 2$
$x = y$

$(\mathbb{N}, +)$ $\quad 2+0=2$

4) Element neutre

Definition 5 : Soient E un ensemble muni d'une loi interne, $e \in E$

1) On dit que e est neutre à gauche pour $*$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \ e * x = x$$

2) " " à droite " "

$$\forall x \in E, \ x * e = x$$ (inutile si loi déjà commutative)

3) On dit que e est neutre pour $*$, si et seulement si e est

$$\forall x \in E, \ \begin{cases} e * x = x \\ x * e = x \end{cases}$$ (vrai, 1 seule suffit si loi commutative)

$* : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

$(x, y) \longmapsto y$

$2 * 3 = 3$

$2 * 5 = 5$

$3 * 2 = 2$

$\Rightarrow$ Neutre à gauche

Notation : Si E est un ensemble muni d'une loi interne $*$ admettant un neutre noté e, alors, pour tout x de E, on note : $x^0 = e$

Proposition 2 : Si e, e' sont neutres pour $*$ dans E, alors (Suppose existence)

$$e = e'$$ (unicité)

5) Element symetrisables

Definition : Soit E un ensemble muni d'une loi interne $*$ est admettant un neutre e.

Un element x de E est dit symetrisable pour $*$ si et seulement si il escisbe au moins un element y de E tel que $x * y = y * x = e$. Un tel element est appelé un symetrique de x pour $*$. $\{\exists y \in E \;/\; x*y = y*x = e\}$

$(\mathbb{Z}, +)$ 0 neutre pour $+$

$2+(-2) = (-2)+2 = 0$, 2 symetrisable

$(E, *)$ Magma

Associative $\Rightarrow$ Demi-groupe
+
Neutre $\Rightarrow$ Monoïde

$(\mathbb{N}, +)$
$+$: associative
0 : element neutre pour addition
Donc $(\mathbb{N}, +)$ Monoïde

~~Si un element est symetrisable~~

(Travail sur Monoïde)

Proposition 3 : Soient E un ensemble munie d'une loi interne $*$ associative et admettant un neutre (/unifaire), $x \in E$
Si x est symetrisable pour $*$, alors x admet un et un seul symétrique

Algèbre sur un corps commutatif

Monoïde

Notation : Soient E un ensemble muni d'une loi interne $*$, associative et admettant un neutre, x un élément de E symétrisable par $*$, le symétrique de x est noté $sym(x)$ ou x^{-1}, et appelé aussi inverse. Lorsque la loi est notée $+$, le symétrique de x est noté $-x$ et appelé opposé de x.

$E \to E$ $\quad$ $f \circ f^{-1} = Id_E$, $f^{-1} \circ f = Id_E$ $\Rightarrow$ bijective*

$f \circ Id_E = Id_E \circ f = f$

* : Ensemble muni de la composé (forcement ensemble applicat bijective) = Monoïde

Ensemble bijection E dans E

Proposition 4 : Soient E un ensemble muni d'une loie interne $*$ associative et admettant un neutre (/Monoïde), $x, y \in E$

Si x et y sont symétrisable par $*$ alors $x * y$ est symétrisable par $*$ et $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$

6) Distributivité

$K(a+b) = Ka + Kb$

Définition 7 : Soient E un ensemble, $*$, T deux lois internes dans E

1) On dit que T est distributive à gauche sur $*$ si et seulement si

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\,T\,(y * z) = (x\,T\,y) * (x\,T\,z)$$

2) " " à droite sur $*$ si e

$$\forall (x,y,z) \in E^3,\ (y * z)\,T\,x = (y\,T\,x) * (z\,T\,x)$$

3) On dit que T est distributive sur $*$, si et seulement si T est distributive à gauche et à droite sur $*$.

1) Dans $\mathbb{R}$, la multiplication est distributive sur l'addition

2) Pour l'ensemble X, chacune des deux lois, $\cap$, $\cup$ est distributive sur les deux lois $\cap$, $\cup$ dans $\mathcal{P}(X)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

distribution commutative

7) Morphisme (Homomorphisme)

$f : (E, *) \to (F, T)$

Definition 8 : Etant donné 2 ensembles munies de lois internes $(E, *)$ (F, T) on appelle morphisme de $(E, *)$ dans (F, T) toute application $f : E \to F$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x * y) = f(x)\, T\, f(y)$$

Un endomorphisme de $(E, *)$ est un morphisme de $(E, *)$ sur $(E, *)$

Un isomorphisme est un morphisme bijectif

Un automorphisme de $(E, *)$ est un endomorphisme bijectif de $(E, *)$

1) L'application $\ln : \mathbb{R}^+_* \to \mathbb{R}$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*_+, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$ $\quad x \longmapsto \ln x$

$$\underbrace{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}_{\text{Morphisme + bijectif}}$$

Proposition 5 :

1) Si $f : (E, *) \to (F, T)$ et $g : (F, T) \to (G, \perp)$ sont 2 morphismes alors $g \circ f : E \to G$ est un morphisme de $(E, *)$ dans $(G, \perp)$

2) Pour tout $(E, *)$, $Id_E : E \to E$, $x \mapsto x$ est un automorphisme de $(E,*)$

3) Si $f : (E,*) \to (F, T)$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \to E$ est un isomorphisme de (F, T) sur $(E,*)$

8) Extension d'une loi interne

Definition 9 : Soient X un ensemble, E un ensemble muni d'une loi interne $*$, on peut munir E^X (ensemble des applications de X dans E), d'une loi interne, encore notée $*$ définie par :

$$\forall f, g \in E^X, \forall x \in E, (f * g)(x) = f(x) * g(x)$$

$X = \mathbb{R} = E$

$\underbrace{(\mathbb{R}, +)}_{\text{les réels}} \xrightarrow{\text{extension}} \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (application)

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + g(x)$

$(\mathbb{R}, \times) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $\quad$ $f(x)g(x)$

loi interne à $\mathbb{R}$

Ensemble des suites : $(\mathbb{R}, +) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Extension à E^X de la loi $*$ de E

Ex: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \longmapsto 2x+3$

$f : E \to F$ injective
$\iff \forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

But : $\forall x, x' \in \mathbb{R}, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

$\forall x, x' \in \mathbb{R}, f(x) = f(x') \Rightarrow 2x+3 = 2x'+3$
$\Rightarrow 2x = 2x'$
$\Rightarrow x = x'$

Ex:
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \to (2x, x+y)$

But: $\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2, (f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow (x,y) = (x',y'))$

$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = f(x',y') \Rightarrow (2x, x+y) = (2x', x'+y') \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2x' \\ x+y = x'+y' \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ x'+y = x'+y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (x',y')$

Ex pl