Graphe:

Un Graphe est définit comme suit:

$$G = (V(G), E(G))$$

l'Ordre

V(G): ~~est~~ l'ensemble des sommets de G ; v(G): nombre de sommets

la taille

E(G): l'ensemble des arêtes de G ; e(G): nombre d'arêtes

~~Ainsi que: $\psi_G(e) = \{u,v\}$ definit sur E(G)~~

Ainsi que ψ_G definit sur E(G)

$$\psi_G : E(G) \to V(G)$$

$$\boxed{\forall e \in E(G),\ \{u,v\} \in V(G)\ \text{tq}\ \psi_G(e) = \{u,v\}}$$

u, v non distinct. Le lit e relie u et v, avec u et v les extrémités de e.

(Representation Graphique (Dessin):
Sommet = point , arête = ligne.)

Les extrémités d'une arête sont dites incidentes et vice versa

L'ensemble des ~~sommets~~ voisins d'un sommet v dans un graphe G est noté $N_G(v)$.

Une arête dont les extrémités sont identiques est appelée une boucle.

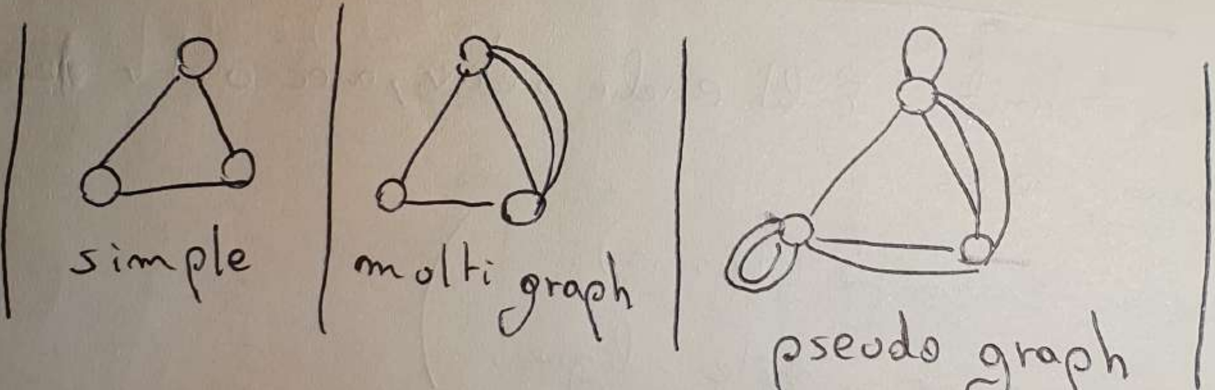
Deux liens ayant la même paire d'extrémités sont appelés des arêtes parallèle.

Un Graphe est fini si son ensemble de sommet et d'arêtes le sont eux aussi $(V(G)$ et $E(G))$.

Un graphe nul est un graphe sans sommet. (0)

Un graphe avec 1 sommet est dit trivial (1)   1 > ⇒ non trivial

Un ensemble V et un ensemble E de sous-ensemble à 2 élements de V définissent un graphe simple (V, E), où les extrémités d'une arête uv sont précisement les sommets v et u.
On peut donc se passer de la fonction d'incidence dans ces cas ci, en renommant chaque arête par la paire de ses extrémités.



$2mk + 2k \quad 2m(k-1)$
$2(m+1)k \quad k(m+2)$
$= 2k\cancel{2m} + km + 2$

Un graphe complet est un graphe simple dans lequel 2 sommets quelconque sont toujours adjacents.

Un graphe vide est un graphe dans lequel il n'y a pas de sommets adjacents $\{\Leftrightarrow E(G) = \emptyset\}$.

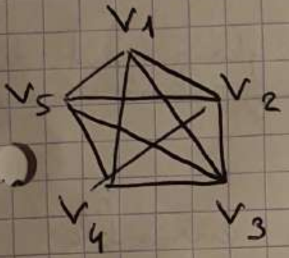
Un graphe biparti si son ensemble de sommets peut être partitionné en 2 sous ensemble X et Y de façon à ce que toute les arêtes ait une extremité dans X et dans Y.

On appelle ~~la~~ partition (X, Y) : bipartition du graphe et X et Y ses parties.

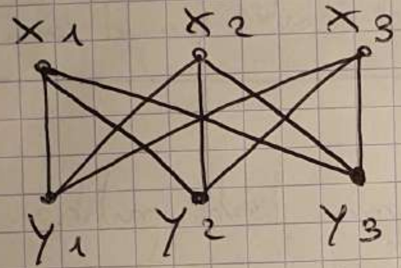
graphe biparti notation $G[X, Y]$

Si $G[X, Y]$ est simple et <u>tout sommet de X est relié à tout sommet de Y</u> le graphe est dit <u>complet biparti</u>.

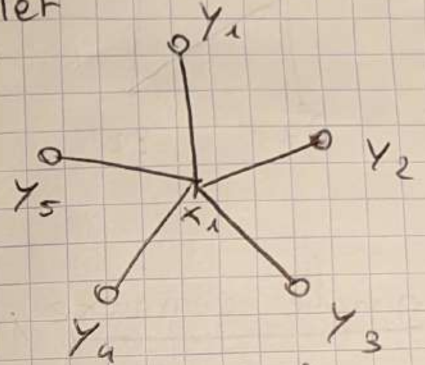
Ex : graphe biparti Complet



graphe complet



graphe biparti + complet



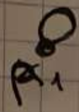
Etoile*
(avec $|X| = 1$)

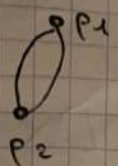
* : Etoile est un graphe biparti complet $G[X, Y]$
avec : $|X| = 1$ ou $|Y| = 1$.

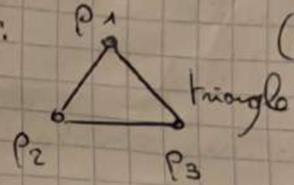
Un <u>chemin</u> est <u>un graphe simple</u> dont les sommets ~~dont~~ ~~les so~~ peuvent être rangés suivant un ordre linéaire de telle manière que <u>2 sommets adjacent sont consécutif dans l'ordre</u>.

De même un <u>cycle</u> sur 3 sommets ou plus (triangle $\geq n$) est un <u>graphe simple</u> dont les sommets peuvent être rangés suivant un ordre cyclique de manière à ce que 2 sommet adj sont consécutif dans l'ordre et non adj sinon.

Ex : <u>cycle</u>

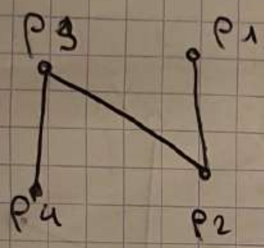
(1) : 

(2) : 

(3) : 

(4) quadri (5) : penta

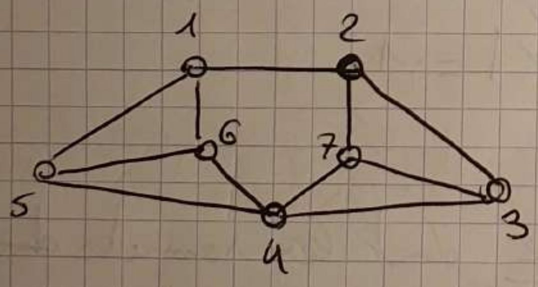
Ex : <u>chemin</u>

(3) : 

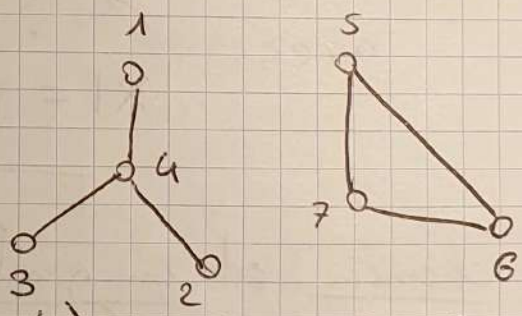
Nota Bene :

Tout graphe peut être dessiné sur une surface de façon à ce que ses arêtes ne s'intersectent qu'en leur extrémités (un tel dessin est appelé : plongement du graphe sur la surface)

Un <u>graphe connexe</u>, si pour toute partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensemble non-vides X et Y, il existe une arête avec une extrémité dans X et une extrémité dans Y, dans le cas contraire le <u>graphe est séparé</u>.



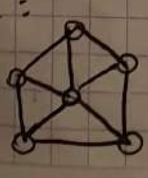
a) graphe connexe



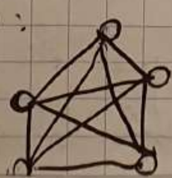
b) graphe séparé

Un graphe qui peut être dessiné dans le plan de telle manière que les arêtes s'intersectent uniquement en des points correspondant à leur extrémités communes est un <u>graphe planaire</u>, un tel dessin est un <u>plongement planaire</u> du graphe

planaire :



pas planaire :



(Autre représentation) **Matrice d'Incidence et d'Adjacence :**

Soit G un graphe d'ensemble de sommet V et d'ensemble d'arêtes E.

- matrice d'incidence est la matrice $n \times m$ $M_G := (m_{ve})$

  m_{ve} : nb de fois où le sommet v et l'arête e sont incidents (0, 1 ou 2). Avec n : nb sommet et $m = |E(G)|$: nb arête

- matrice d'adjacence est la matrice $n \times n$ $A_G := (a_{ve})$

  a_{ve} : nb d'arêtes reliant les sommets

On stocke souvent matrice ~~adjacence~~ adjacence car arêtes_nb >> nb_sommets.

$M_{G} \gg A_G$

Pour graphe simple :

pour chaque sommet v, les voisins de v sont listés selon ordre quelconque, liste d'adjacence du graphe $(N(v) : v \in V)$.

Pour graphe Biparti :

Comme pas arêtes reliant 2 parties =>

$G[X, Y]$ avec $X := \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ $Y := \{y_1, \ldots y_s\}$

matrice d'adjacence biparti : $r \times s$ $B_G = (b_{ij})$ où

b_{ij} : nb arête reliant x_i et y_i.

Degré des Sommets :

Noté $d_G(v)$ il est le nombre d'arêtes de G incidentes avec v $v \in V(G)$. Si graphe simple = nb voisin.

sommet degré 0 : sommet isolé

$\delta(G)$ et $\Delta(G)$ degré min et max des sommets de G

$d(G)$ degré moyen, $\frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v)$.

Th : Pour tout graphe G,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

colonne de M

Corollaire : Dans tout graphe, le nombre de sommet de degré impair et pair.

Un graphe G est k-regulier si $d(v) = k \quad \forall v \in V$; un graphe regulier est un graphe k-regulier pour un certain k.

ex : graphe ~~biparti~~ complet n sommet est $(n-1)$ regulier.

graphe biparti complet avec k sommets dans chaque partie est k- regulier.

graphe 3-reguliers très complexe : graphe cubique (+ très utilisé th graphe, remarquable).

Soos - Graphe : Pour obtenir un plus petit graphe que G 2 méthode :

(◇) Operation de suppression d'arête et suppression de sommet (+ H arête incidentes à v)

$G \setminus e$ $\qquad$ $G - v$

sous-graphe à arête supprimer $\quad$ " $\quad$ " sommet

ex de ss graphe

Def : si $V(F) \subseteq V(G)$, $E(F) \subseteq E(G)$ ~~et φ_F~~

ψ_F est la restriction de ψ_G à $E(F)$

Alors $F \subseteq G$. (G contient F)

Tout sous-graphe de G peut être obtenu par appli successive (◇)

Sur-graphe nul sous-graphe tout graphe

NB : si G est sommet transitif H sous graphe obtenu via $\overset{*}{G-v}$ sont isomorphe
arêtes $\qquad$ $G-e$

Un ~~sous~~-graphe d'un graphe G est un graphe H qui contient G en tant que sous-graphe.

Sur-graphe : inverse sous graphe (graphe H qui contient G, G sous graphe de H)

sous/sur graphe propre $\subset$ ≠ $\subseteq$

Detection cycle

Theorème Soit G un graphe dans lequel tous les sommet est de degré au moins 2. Alors G contient un cycle

Démo : voir git.

Un chemin maximal = chemin qui ne peut-être étendu en aucun autre chemin plus long en ses 2 extremités

Def Soit $\mathcal{F}$ une famille de sous graphe de G. Alors F est maximal dans $\mathcal{F}$ si aucun membre de $\mathcal{F}$ ne contient proprement F

Resp min, Resp chemin min max

* : designe H sous graphe de G (G-v et G-e)

Par ex : ∄ sous graphe connexe ensemble alors les membre max de ∄ sont les composantes de G.

Tout cycle d'un graphe est un cycle max car aucun cycle n'est contenu dans un autre.

longueur plus long cycle = circonférence et longueur plus petit = maille.

Sous-graphe couvrant :

sous-graphe obtenu par suppression d'arêtes uniquement.

Soit G' sgc alors $\boxed{V(G) = V(G') \text{ mais } E(G) \supseteq E(G')}$

$G' = G \setminus S$ avec S ensemble ~~sommet~~ arête supprimé.

Tout graphe simple est sous-graphe c d'un graphe complet.

sur-graphe couvrant ⇒ ajout arête : $G + S \neq G / S$

Soit G et H 2 graphes ; en ajoutant les arêtes reliant tout sommet sommet de G et H, on obtient le joint de G et H dénoté $G \vee H$.

$C_n \vee K_1$ avec K_1 sommet isolé = roue ~~(cf Wagner graph)~~ à n rayon noté W_n

Ajouter sommet aussi au graphe $G + x$

Chemin et cycle couvrant = cycle / chemin hamiltonien

sous graphe k-reg couvrant = k-facteur

Sous-graphe induit : suppression sommet uniquement $G - X$ (avec X ens sommet sup)
$Y = V - X$ sgi : $G[Y]$

Sous graphe induit (suite)

Th Erdös ∀ graphe a un sgi dont le degré min est relativement grand.

Th 2.4 :

∀ graphe de degré moyen au moins $2k$ ou k est un entier > 0 a un sous graphe induit de degré min au moins $k+1$.

Sous graphe induit avec liste arête : $G[S]$; $E \setminus S$: supprimer arête puis supprime sommet isolé

Graphe et sous graphe valué :

graphe valué : où arête possède un coût : ∀ arête a un réel $w(e)$ qui lui est associé (nom poids).

Et (G, w) ~~le~~ graphe valué associé.

avec $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, vecteur dont coord indexées par l'ensemble d'arête E de G ; l'ensemble de tel vecteur est noté $\mathbb{R}^E$ ou $\mathbb{Q}^E$ quand coût rationnel.

$w(F)$ avec F sous graphe de G, alors $w(F) = \sum_{e \in E(F)} w(e)$