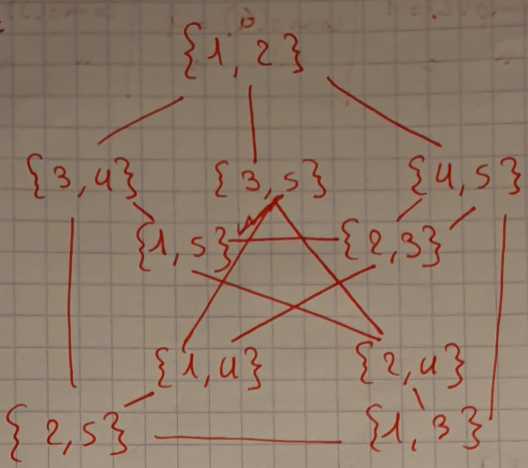
Exercice 1 :

Graphe Petersen :

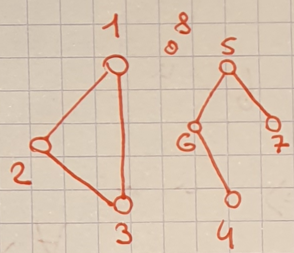


Echelle de Mobius :

1 : {4, 5, 6} ; 2 : {5, 6, 7} 3 : {6, 7, 8} 4 : {7, 8}

5 : {1, 2, 8} , 6 : {1, 2, 3} , 7 : {2, 3, 4} , 8 : {3, 4, 5}

Exercice 2 :



Entrée : $G(V(G), E(G))$

avec $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$

$E(G) = \{12, 65, 46, 31, 23, 57\}$

comp(1) = 1
⋮
comp(8) = 8

1 2
comp(1) = 1
comp(2) = 1
comp(3) = 3
⋮
comp(8) = 8

6 5
comp(1) = 1
comp(2) = 1
" "
comp(5) = 4
comp(6) = 4
⋮
comp(8) = 8

4 6
" "
comp(6) = 4
comp(7) = 7
comp(8) = 8

3 1
" "
comp(3) = 1
" "

6 5
comp(1) = 1
comp(2) = 1
comp(3) = 1
comp(4) = 4
comp(5) = 4
comp(6) = 4
comp(7) =

12	1 2	4 6	3 1	5 7	2 3
comp(1) = 1	comp(1) = 1	"	"	"	"
comp(2) = 2	comp(2) = 1	comp(6) = 4	comp(3) = 1	comp(7) = 5	~~comp(3) = 1~~
⋮	"	"	"	"	
comp(8) = 8					

6 5

comp(1) = 1
(2) = 1
(3) = 1

comp(4) = 4
(5) = 4
(6) = 4
(7) = 4

comp(8) = 8

mb C

Exercice 3 :

a) Un graphe est regulier-1 $\Leftrightarrow$ est un couplage

$\Rightarrow$ Supposons que G soit regulier-K alors

$\forall v \in V(G)$ $d_G(v) = k$ et donc $|N_G(v)| = K$

Or $|N_G(v)| = 1 \Leftrightarrow$ est un couplage

$\Leftarrow$ pareil

b " " - 2 $\Leftrightarrow$ est une union disjointe de cycle.

$\Rightarrow$ " "

$\forall v \in V(G)$ $d_G(v) = 2 = |N_G(v)| = 2$

Soit $v_1 \in V(G)$, $d_G(v_1) = |N_G(v_1)| = 2$

$v_2 \in N_G(v_1)$, " "

⋮

$v_m \in N_G(v_{m-1})$ "

⋮

Comme G est un graphe finit

$v_1 \in V(G)$ Fin

Le cycle ainsi mis en exergue sera nommé C_1 pour la suite de la preuve

I Soit $C_1 \subseteq G$ tq $\forall c \in C_1, d_{C_1}(c) = 2$ (2-regulier)
d'après ($\Diamond$)

II $\forall v_K \in C_1 \quad E(C_1) = \bigcup_{K \geqslant 0}^{n} \{V_K V_{K+1}, V_K V_{n+1-K}\}$

avec $n = |V(C_1)|$ (Disjoint)

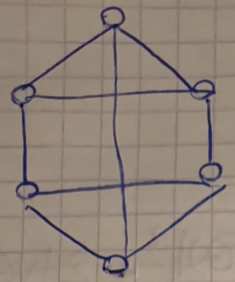
Donc d'après (I) et (II) C_1 est un cycle 2-regulier disjoint du "reste" du graphe.

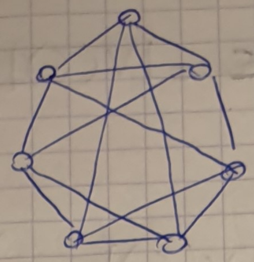
Pour $G' = G - C_1$ il en va de m̂

$G^{(n)} = G^{(n-1)} - C_{n-1}$ car G est finit donc

Soit G tq $G = \bigcup_{K=0}^{n} C_K$ avec n : nb de cycle 2 regulier

$\left(\text{et } \bigcap_{K=0}^{n} C_K = \emptyset \quad , \forall C_K \in G, d(C_K) = 2|E(C_K)| \right)$

c. 

d. 

Ex 4 :

a. $|E(G)| = \dfrac{|V(G)|(|V(G)| - 1)}{} = n^2 - n$

b. Soit C_1 et C_2 tq ?

- $C_1 \subseteq G$ et $\forall X, Y \in V(C_1)\ \exists\, \mu_1(X, Y)$
- $C_2 \subseteq G$ et " " μ_2

Alors $|E(G)| = |E(C_1)| + |E(C_2)|$

$($si $C_1 \cup C_2 = \emptyset$ sinon voir a.$)$)

or $E(C_1) = \dfrac{V_{C_1}^{\ 2} - V_{C_1}}{2}$ et $E(C_2) = \dots$

$$|E(G)| = \frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}$$

c. $|E(G)| = \displaystyle\sum_{K=1}^{c} \frac{n_K(n_K - 1)}{2} = \sum_{K=1}^{c} \frac{n_K^{\,2}}{2} - \frac{n_K}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{K=0}^{c} n_K^{\,2}\right) - \frac{V(G)}{2}$$

Maximum d'arête dans un Graphe K composé :

ENTRÉE

Pour la demonstration qui suit nous noterons

~~ensemble~~

- m le nombre de sommet de G $\quad m = |V(G)|$
- C l'ensemble des C_i composante de G :

$$\forall C_i \in C \, , \; \underbrace{C_i \subseteq G}_{\text{sous-graphe}} \text{ et } \underbrace{\forall X, Y \in V(C_i) \; \exists \mu_i(X,Y)}_{\text{connexe}}$$

sous-graphe et connexe + max (oublié)

- m_i nombre de sommet de C_i : $m_i = |V(C_i)|$

C_i : i ème composante de G

Pour Rappel G est un graphe simple non orienté

~~Début But~~ On trouve assez naturellement que

$\forall v_1 \in V(G)$ il existe $|V(G)| - |v_1|$ manière différente de le rattaché a un autre element de $V(G)$

Or $|V(G)| = m$ donc $|E(G)| \leq m(m-1)$

But : En considerant l'ensemble C on deduit que

$$|E(G)| = \sum_{i=1}^{K} |E(C_i)| = \sum_{i=1}^{K} m_i(m_i - 1)$$

Trouvons un majorant à $|E(G)|$, on la notera $\max(|E(G)|) \doteq M_c$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{K} m_i(m_i - 1) \leq M_c} \leftarrow \text{But}$$

A savoir : $\sum_{i=1}^{K} m_i = m$

$$\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) - 2\sum_{i=1}^{K} n_i + K \leq n^2 - 2nK + K^2$$

$$(\Delta)\quad \sum_{i=1}^{K}(n_i^2) \leq n^2 - 2nK + K^2 - K + 2n \quad \left(\text{car } \sum_{i=1}^{K} n_i = n\right)$$

nous avons majoré $\sum_{i=1}^{K}(n_i^2)$ revenons à la formule :

$$(|E(G)|) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i(n_i-1)) \leq M_c$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i^2 - n_i) \leq M_c \quad \text{~~or d'après (Δ)~~}:$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{K} n_i^2 - \sum_{i=1}^{K} n_i\right) \leq M_c \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K} n_i^2 - \frac{1}{2}n \leq M_c$$

D'après (Δ) :

$$-\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}(n_i^2) \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - 2nK + K^2 - K + 2n - n\right)$$

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}\left((n-K)^2 + (n-K)\right)$$

$$|E(G)| \leq \frac{1}{2}(n-K+1)(n-K) \quad \blacksquare$$

Conclusion :

$$\max |E(G)| = \frac{1}{2}(n-K+1)(n-K) \text{ pour}$$

max atteint quand $\exists C_i \in G$ tq $V(C_i) = V(G) - K$ (avec K nb de composante dans G)