Grammaire Algebrique :

Une grammaire algébrique est un quadruple $G = < X, V, P, S >$

- X est un <u>alphabet terminal</u>
- V est un alphabet disjoint de X, dit <u>alphabet non terminal</u>
- S est <u>un element</u> designé de V, appelé <u>l'axiome</u> de la grammaire.
- P est un <u>sous-ensemble</u> fini de $V \times (X \cup V)^*$

X : lettre terminal V : contraire X P : <u>règle de production</u> de la grammaire

Si $(S, m) \in P$ S est le membre de gauche est m le membre de droite avec $m \in (X \cup V)^*$ de la règle.

Def 2 :

Soit $G = < X, V, P >$ une grammaire alge. Un mot $u \in (X \cup V)^*$ se derive directement en un mot $v \in (X \cup V)^*$ selon G ssi

$$u = u_1 S u_2, \quad v = u_1 m u_2 \text{ et } (S, m) \in P$$

$u \underset{G}{\rightarrow} v$

évite ambiguité ⇒ se derive direct selon G

La relation "se derive directement ~~selon G~~ en" est la fermeture reflexive et transitive de $\rightarrow$:

Soit $\exists K \in \mathbb{N}$ tq $\exists u = u_0, u_1, \ldots, u_K = v$ et $\forall i < K$

$u_i \to u_{i+1}$

$(u_0, u_1, \dots, u_k)$ s'appelle dérivé de u en v

$u_0 \to u_1 \to u_2 \dots \to u_k$; k s'apelle la ordre de la dérivation

et l'on note $u \overset{k}{\Rightarrow} v$ (cours k : longueur de la chaîne de dérivations

Def 3 :

Soit $G = \langle X, V, P, S \rangle$ une gram algé. On apelle <u>langage engendré</u> par G, et l'on note $L_G(S)$, le langage :

$$L_G(S) = \{ u \in X^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} u \}$$

On apelle <u>langage élargi</u> engendré par G, et l'on note $\widehat{L_G}(S)$, le langage :

$$\widehat{L_G}(S) = \{ u \in (X \cup V)^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} u \}$$

Lemme Fondamental

Si $u_1 u_2 \overset{k}{\Rightarrow} v$ alors $v = v_1 v_2$ avec $u_1 \overset{k_1}{\Rightarrow} v_1$, $u_2 \overset{k_2}{\Rightarrow} v_2$

$k_1 + k_2 = k$

Preuve : Par recurrence sur k.

- si $k = 0$ si $u_1 u_2 = v$ alors $v = v_1 v_2$ avec $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$

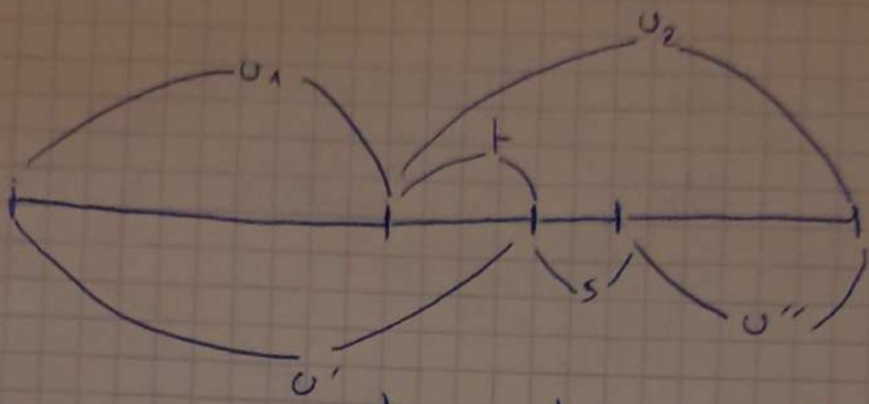
Evident

- prouvons le avec $K = 1$

$u_1 u_2 \to v$ par déf : $u_1 u_2 = u' S u''$,
$v = u' m u''$ et $S \to m \in P$

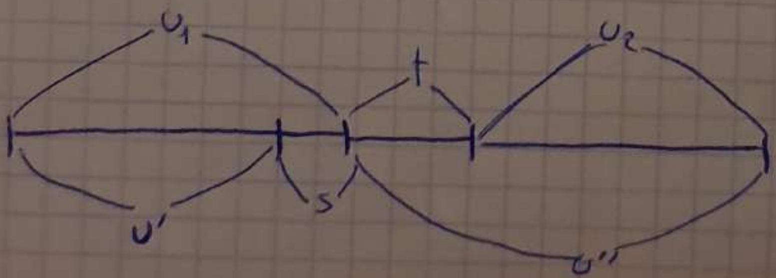
Deux cas :

- si $|u'| \geq |u_1|$ on a $u' = u_1 t$ et $u_2 = t S u''$



On pose $v_1 = u_1$ et $v_2 = t m u''$. On a bien $u_1 \xrightarrow{0} v_1$ et $u_2 \xrightarrow{1} v_2$, $v = v_1 v_2$ et $0 + 1 = 1$

- si $|u'| < |u_1|$ on a, symétriquement, $u_1 = u' S t$ et $u'' = t u_2$



On pose $v_1 = u' m t$ et $v_2 = u_2$. On a bien $u_1 \xrightarrow{1} v_1$ et $u_2 \xrightarrow{0} v_2$, $v = v_1 v_2$ et $1 + 0 = 1$

Hérédité :

- Supposons le lemme vrai pour toutes dérivations d'ordre inférieur à K, et montrons qu'il est encore vrai pour l'ordre K, $K > 0$:

$u_1 u_2 \xrightarrow{K} v$ donc $u_1 u_2 \xrightarrow{K-1} w \to v$

on [illegible] de u en v [illegible]

D'après l'hypothèse de recurrence, $w = w_1 w_2$ avec $u_1 \xrightarrow{h_1} w_1$, $u_2 \xrightarrow{h_2} w_2$, $h_1 + h_2 = K - 1$ et ~~$w_1 w_2$~~ $\Rightarrow v$.

$h_1 + h_2 = K - 1$ et $w_1 w_2 \Rightarrow v$.

D'après la dém facile pour l'ordre 1, $v = v_1 v_2$ avec

$w_1 \xrightarrow{1_1} v_1$, $w_2 \xrightarrow{1_2} v_2$, $1_1 + 1_2 = 1$.

On a donc $u_1 \xrightarrow{h_1 + 1_1} v_1$, $u_2 \xrightarrow{h_2 + 1_2} v_2$, $h_1 + 1_1 + h_2 + 1_2 = K$