

הגדרה: EF1 לגבי מטלות ולגבי סחורות

תהי $A = (A_1, A_2)$ הקצאה EF1 עבור קבוצה של שני סוכנים. לפי ההגדרה, שני הסוכנים מקנאים זה בזה בלכל היותר פריט אחד. כלומר, לכל $i, j \in \{1, 2\}$ מתקיים עבור פריט כלשהו a (ובפרט זה שהתועלת שלו בערך מוחלט היא הגדולה ביותר):
עבור מטלות: $u_i(A_i \setminus a) \geq u_i(A_j)$
עבור סחורות: $u_i(A_i) \geq u_i(A_j \setminus a)$

טענה 1: במקרה של שני שחקנים, כל שיפור פרטו על חלוקה EF1 משאיר את החלוקה EF1.

הוכחה:

תהי חלוקה A בה כל הפריטים מחולקים בין הסוכנים. אם A יעילה פרטו סיימנו. לכן נניח שהיא פרטו-נשלטת, כלומר קיים לה שיפור פרטו. בפרט קיים פריט a שניתן להעביר מסוכן 1 לסוכן 2 (בה"כ) כך שמצבו של אחד הסוכנים ישתפר, ומצבו של הסוכן השני לא ייפגע.

נחלק למקרים:

- מקרה א': תועלות הסוכנים הן אי שליליות (הפריטים הם goods)
אם כן, פריט זה בהכרח חייב להיות שווה 0 עבור סוכן 1 (וגדול מ-0 עבור סוכן 2, כי אחרת זה לא שיפור). ואז סוכן 2 משפר את התועלת שלו.
נחלק ל-3 מקרים:
- 1 מקנא ב-2:
לאחר השיפור, מבחינת 1 התועלת שלו לא קטנה, ושל 2 לא גדלה, **החפץ של 1 קינא בו קודם נשאר אצל 2, והחפץ החדש שהועבר ל-2 לא יגרור קנאה של 1**. לכן החלוקה עדיין EF1.
2 בוודאי לא מקנא עכשיו ב-1, כי הוא לא קינא קודם, והתועלת שלו גדלה אפילו.
 - 2 מקנא ב-1:
מבחינת 1 לא שינינו את התועלת שלו.
מבחינת 2 התועלת שלו גדלה, לכן או שהוא כבר לא מקנא (כי העברנו את החפץ שהוא קינא בו קודם) או שהוא עדיין מקנא (החפץ הזה נשאר שם), אבל זה לכל היותר בפריט 1 כמו קודם.
 - גם 1 מקנא ב-2 וגם 2 מקנא ב-1:
בעיני 1 התועלות של שני הסוכנים לא השתנו, לכן הוא עדיין יקנא ב-2 בכל היותר פריט 1 לאחר החלוקה.
בעיני 2, ההסבר כמו למעלה.

מקרה ב': תועלות הסוכנים הן אי חיוביות (הפריטים הם chores)
אם כן, הפריט שמועבר צריך להיות בעל תועלת בדיוק 0 עבור סוכן 2, ובעל תועלת שלילית עבור סוכן 1. ואז סוכן 1 משפר את התועלת שלו.
המקרים:

- 1 מקנא ב-2:
אחרי ההעברה הוא עדיין יקנא בפריט 1 לכל היותר, או שיפסיק לקנא. 2 עדיין לא מקנא כי בעיניו כלום לא השתנה.
- 2 מקנא ב-1:

מבחינתו כלום לא השתנה, הוא עדיין יקנא. 1 לא קינא מקודם אז וודאי לא עכשיו.

- מקנאים זה בזה:

1 ממשיך לקנא או כבר לא, 2 - בעיניו כלום לא השתנה.

מקרה ג: תועלות הסוכנים כלליות (עבור כל פריט, כל סוכן יכול להעריך אותו בצורה חיובית/שלילית/0) אם קיים שיפור פרטו, כלומר מוצר שאפשר להעביר מסוכן 1 לסוכן 2 כך שמצבו של אחד מהם ישתפר ומצבו של השני לא ייפגע, אז זה חייב להיות חפץ שהתועלת שלו שלילית עבור 1 ואי שלילית עבור 2, או חפץ שהתועלת שלו 0 עבור 1 וחיובית עבור 2. המקרים האלו זהים למה שהוכחתי למעלה. בכל שיפור פרטו, יכול להיות שהגענו כבר למצב פרטו-אופטימלי, או שעוד לא ואז נצטרך למצוא שיפור פרטו נוסף. ומכיוון שכל שיפור פרטו מקיים שהחלוקה נשארת EF1, אז החלוקה הסופית היא EF1.

• התייחסות מיוחדת לאילוצי קיבולת:

תהי $A = (A_1, A_2)$ הקצאה EF1 עבור קבוצת שני סוכנים.

נגדיר $feasible\ pareto - improvement$: שיפור פרטו כך שההקצאה לאחריו הינה $feasible$.

אם A הקצאה PO, או שלא קיים לה $feasible\ pareto - improvement$ סיימנו.

לכן נניח שקיים לה שיפור כזה, ואז זה בדיוק אותו דבר כמו למעלה.

טענה 2: טענה זהה לטענה 1, רק עבור 3 סוכנים.

הפרכה:

אינטואיציה להפרכה: אי אפשר להניח שמבצעים בכל פעם שיפור פרטו עבור שני סוכנים ואז להמשיך, כי אז יכול להיות שההעברה גרמה לסוכן שלישי לקנא ביותר מפריט אחד באחד הסוכנים.

דוגמה נגדית:

	פריט 1	פריט 2
סוכן 1	0	0
סוכן 2	3	1
סוכן 3	5	5

תהי הקצאה $A = (A_1, A_2, A_3)$ כאשר $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{\}$.

זוהי הקצאה EF1 כי:

1 לא מקנא באף אחד, כי בעיניו כל הפריטים שווים 0.

2 מקנא ב1 בפריט אחד: 1.

3 מקנא ב1 וב-2 אבל בפריט אחד.

שיפור פרטו להקצאה:

להעביר את פריט 1 מ1 ל-2, ואז שיפרנו את מצבו של 2 כי עכשיו הוא בתועלת של 4 מבחינתו, לא "קלקלנו" ל1 שחושב שהכל 0, ולא "קלקלנו" ל-3, כי התועלת שלו נשארה 0.

אבל עכשיו סוכן 3 מקנא בסוכן 2 בשני פריטים!

- שאלה: האם ההפרכה עבור 3 סוכנים מפריכה את הטענה במקרה הכללי? ..

טענה 3: תהי חלוקה A על פני קבוצה של $n \geq 2$ סוכנים, שהיא $EF1$ ואינה PO . אזי תמיד קיים שיפור פרטו כך ש- A עדיין תהיה $EF1$.

(פתוחה)

- בדוגמה הנ"ל קיים שיפור כזה: אם מעבירים את פריט 1 לסוכן 3, ואז 1 עדיין לא מקנא, 3 כבר לא מקנא באף אחד, ו-2 מקנא עכשיו ב-3 במקום ב-1 בפריט הבודד שלו.
(זה רק שיפור פרטו אבל עדיין לא PO , כי אפשר ש-2 ו-3 יחליפו בין החפצים שלהם).

תיקון להוכחה של טענה 1:

אי אפשר להניח שקיים חפץ שניתן להעביר בין הסוכנים, כי יכול להיות שלא קיים כזה אבל יש החלפה בין פריטים שתתן הקצאה פרטו-דומיננטית על הקצאה A .
אבל ההוכחה היא אותו דבר, רק שמוסיפים את המקרה שיש שיפור פרטו ע"י החלפת מוצרים: במקרה הזה מכיוון שזה שיפור פרטו, אחד הסוכנים מעדיף את הפריט של הסוכן השני, והסוכן השני מעדיף את הפריט של הסוכן הראשון, או אדיש לגביו.
במקרה זה, אם ההקצאה הייתה $EF1$ קודם, אז היא $EF1$ גם עכשיו (עבור 2 סוכנים), כי רק שיפרנו או שלא שינינו להם את התועלות.