<u>חלוקה הוגנת של קורסים</u>
<u>סיכום ביניים מסודר (כולל הוכחות והפרכות)</u>

<u>המטרה:</u> לבדוק האם קיימת חלוקה הוגנת ויעילה כאשר ההעדפות אדיטיביות ויש אילוצי קיבולת (עם/ בלי זריקת חפצים)

<u>דברים שגילינו:</u>

1. במקרה של שני שחקנים, כל שיפור פארטו על חלוקה EF1 נותן חלוקה EF1. (כל סוגי ההעדפות - חיובית, שליליות או שילוב שלהן).
<u>הערה:</u> ההוכחה נכונה גם כאשר יש אילוצי קיבולת.

הוכחה:

תהי $A = (A_1, A_2)$ הקצאה $EF1$ עבור קבוצה של שני סוכנים, בה כל הפריטים כבר מחולקים.
לפי ההגדרה, שני הסוכנים מקנאים זה בזה בלכל היותר פריט אחד.

אם החלוקה יעילה פרטו סיימנו. לכן נניח שהיא פרטו-נשלטת, כלומר קיים לה שיפור פרטו.
נגדיר שיפור פרטו כ"החלפה" בין שתי קבוצות של פריטים $a_1 \subseteq A_1,\ a_2 \subseteq A_2$ (יכולות להיות גם קבוצה ריקה), כך שמצבו של אחד הסוכנים ישתפר, ומצבו של השני לא ייפגע.
בפרט: $\forall i \in \{1, 2\}: u_i(a_{3-i}) \geq u_i(a_i)$ (הקבוצה שעברה אליו מהשני שווה יותר בעיניו מאשר הקבוצה שעברה לשני ממנו, או שהוא אדיש ביניהן).

נחלק לכמה מקרים:
- נניח בה"כ כי סוכן 1 לא קינא בסוכן 2 ע"פ חלוקה A, אז $u_1(A_1) \geq u_1(A_2)$.
לאחר השיפור:
$u_1((A_1\backslash a_1) \cup a_2) = u_1(A_1) - u_1(a_1) + u_1(a_2) \geq u_1(A_2) - u_1(a_2) + u_1(a_1) = u_1((A_2\backslash a_2) \cup a_1)$
כלומר הוא לא מקנא גם לאחר השיפור.
- נניח בה"כ כי סוכן 1 קינא בסוכן 2 בפריט אחד ע"פ חלוקה A, כלומר קיים פריט כלשהו a כך ש: עבור מטלות: $u_1(A_1\backslash\{a\}) \geq u_1(A_2)$, ועבור סחורות: $u_1(A_1) \geq u_1(A_2\backslash\{a\})$.
מטלות:
אם $a \in a_1$, אז מכיוון ש$u_1(a_2) \geq u_1(a_1)$, ו-$u_1(A_1) - u_1(a) \geq u_1(A_2)$:
- $u_1((A_1\backslash a_1) \cup a_2) = u_1(A_1) - u_1(a_1) + u_1(a_2) \geq$
$u_1(A_2) - u_1(a) - u_1(a_2) + u_1(a_1) = u_1((A_2\backslash a_2) \cup a_1) + u_1(a)$ -

כמעט אותו חישוב כמו קודם יראה כי שסוכן 1 כבר לא יקנא בסוכן 2, רק שהקבוצה שלפני החלוקה כבר לא גדולה או שווה, אלא גדולה אם שווה רק אם מורידים את חפץ a.
ואם $a \notin a_1$, אז מתקיים:
$u_1(((A_1\backslash\{a\})\backslash a_1) \cup a_2) = u_1(A_1) - u_1(a) - u_1(a_1) + u_1(a_2)$
שזה גדול/ שווה מ: $u_1(A_2) - u_1(a_2) + u_1(a_1) = u_1((A_2\backslash a_2) \cup a_1)$
מסקנה: בהקצאה החדשה שלו (לאחר שיפור הפרטו), הוא עדיין מקנא בלכל היותר פריט אחד (ויכול להיות שהוא כבר לא מקנא בכלל, תלוי עד כמה a_2 יותר שווה בעיניו..)

סחורות:

אם $a \in a_2$, אז אותו החישוב מהמקרה הראשון יראה כי סוכן 1 כבר לא מקנא בסוכן 2.

אם $a \notin a_2$, אז $u_1((A_1 \backslash a_1) \cup a_2) = u_1(A_1) - u_1(a_1) + u_1(a_2)$ בהכרח גדול/ שווה ל:
$u_1((A_2 \backslash \{a\} \backslash a_2) \cup a_1) = u_1(A_2) - u_1(a) - u_1(a_2) + u_1(a_1)$.

מכיוון שניתן לבצע שיפורי פרטו עד שמגיעים לחלוקה PO, וכל שיפור משאיר את החלוקה EF1, אז בסופו של דבר נוכל להגיע לחלוקה סופית שהיא EF1 וגם PO.

מ.ש.ל

מבחינת קושי חישוב של שיפור פרטו:

מהמאמר "$Efficient\ Reallocation\ under\ Additive\ and\ Responsive\ Preferences$" ($Theorem\ 1,\ Corollary\ 1$) גילינו כי מציאת שיפור פרטו היא בעיה NP- קשה, אפילו עבור שני סוכנים, ולכן לא ניתן למצוא אלגוריתם יעיל באופן הזה.

- צריך לבדוק האם אותה רדוקציה עובדת גם כאשר יש מגבלה על כמות, כלומר אם זה עדיין נשאר NP- קשה. אם זה עדיין NP- קשה, לעבור לשאלה הבאה.

  נניח שישנן l קטגוריות של פריטים: $\{C_1, ..., C_l\}$. נגדיר לכל קטגוריה $h \in [l]$ מגבלת כמות - k_h המקיימת: $\frac{|C_h|}{n} \le k_h$ (במקרה הזה $n = 2$).
  נוכל לבחור תמיד $l = 1$ (כלומר כל הפריטים שייכים לקטגוריה אחת), $k_1 = t + 1$, וכל שאר הדברים (הסוכנים, הפריטים וההעדפות) נשארים בדיוק כפי שהוגדרו ברדוקציה שם, ואז אותה רדוקציה בדיוק תעבוד.

- לבדוק האם קיים אלגוריתם פולינומיאלי כלשהו (בלי שיפורי פרטו) אשר מוצא חלוקה $EF1$ ויעילה פרטו, כשמדובר בשני סוכנים.

  במאמר "$Fair\ allocation\ of\ combinations\ of\ indivisible\ goods\ and\ chores$" ב- $THEOREM\ 8$ הוצג אלגוריתם המוצא חלוקה הוגנת ויעילה של קומבינציה של $good$ ו- $chores$ עבור שני סוכנים ב-$O(m^2)$ כאשר m= מספר הפריטים.
  יש דוגמת הרצה במסמך אחר.

- כעת צריך ליישם אלגוריתם דומה לזה שבמאמר עבור אילוצי קיבולת. אפילו עבור שני אנשים בלבד.

  <u>רעיון:</u> (שני סוכנים)
  להוסיף לכל קטגוריה h, $|C_h|$ פריטים "dummy" שהם טובים עבור ה-winner, וה-loser אדיש לגביהם. (למשל: ה-utility של סוכן 1 על פני כל אחד מהפריטים הללו = 1, ושל סוכן 2 = 0).
  כמו כן, להגדיל את הקיבולת k_h של כל אחד מהפריטים ל-$|C_h| + k_h$ (מגדילים במספר הפריטים החדשים שהוספנו).

כעת, נשתמש באותו אלגוריתם ונראה שהוא עדיין עובד, וגם שהוא שומר על מגבלות הקיבולת.

2. במקרה של שלושה שחקנים, זה כבר לא מתקיים.

אינטואיציה:
עבור שלושה שחקנים, ייתכן שקיים שיפור פרטו ע"י העברת קבוצת חפצים מסוכן 1 לסוכן 2, אשר משפר את מצבו (את הutility) של לפחות אחד משניהם, ובאחרים לא פוגע.
אם כך, אמנם בין 1 ל-2 לא תהיה קנאה מעבר לפריט 1, כפי שהוכח למעלה, אך הסוכן השלישי כבר יכול להתחיל לקנא במישהו אשר הוא לא קינא בו קודם (או לקנא בו כבר ביותר מפריט 1).

דוגמה נגדית:

	פריט 1	פריט 2
סוכן 1	0	0
סוכן 2	3	1
סוכן 3	5	5

תהי הקצאה $A = (A_1, A_2, A_3)$ כאשר $A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{\}$.

זוהי הקצאה EF1 כי:
1 לא מקנא באף אחד, כי בעיניו כל הפריטים שווים 0.
2 מקנא ב1 בפריט אחד: 1.
3 מקנא ב1 וב-2 אבל בפריט אחד.

שיפור פרטו להקצאה:
להעביר את פריט 1 מ1 ל-2, ואז שיפרנו את מצבו של 2 כי עכשיו הוא בתועלת של 4 מבחינתו, לא "קלקלנו" ל1 שחושב שהכל 0, ולא "קלקלקנו" ל-3, כי התועלת שלו נשארה 0.

אבל עכשיו סוכן 3 מקנא בסוכן 2 בשני פריטים!

מבחינת קושי חישוב: הוכח שמציאת שיפור פרטו היא בעיה NP-קשה (במקרה הכללי).

3. *<u>טענה:</u> תהי חלוקה A על פני קבוצה של $n \geq 2$ סוכנים, שהיא EF1 ואינה PO. אזי תמיד **קיים** שיפור פרטו כך ש- A עדיין תהיה EF1.*

תהיות:

- האם תמיד קיים מצב PO? כן, כי יש אלגוריתמים שמוצאים חלוקה כזו (בלי להתחשב בהוגנות).
- האם תמיד ניתן להגיד שהמצב הזה הוא שיפור פרטו לכל חלוקה שהיא? לא, כי יכול להיות שבמצב הנוכחי סוכן i כלשהו מרוויח משהו, ולפי החלוקה הPO הוא לא מקבל כלום, לכן זה לא יכול להיות שיפור פרטו לסיטואציה הזו כי אף אחד לא יכול להפסיד מהשיפור!
- אבל האם ניתן להגיד שתמיד אחת מהחלוקות הPO מהווה שיפור פרטו למצב הנוכחי?

ניסיון הפרכה:

אני רוצה מצב בו **כל** שיפורי הפרטו יגרמו לכך שאחד הסוכנים כבר יקנא ביותר מחפץ אחד.
בשביל זה צריך למצוא קודם חלוקה EF1 בה כל סוכן מקנא במישהו בדיוק בחפץ 1, ואז להראות שכל שיפור גורם לאחד מהם לקנא באחד אחר בעוד חפץ.
אבל אם כולם מקנאים בכולם בחפץ כלשהו, אז אפשר לעשות החלפות בין הפריטים ואז אף אחד לא יקנא. כמו שראינו, אם יש מעגל קנאה אז אפשר לבטל את הקנאה.

	פריט 1	פריט 2	פריט 3
סוכן 1	10	0	0
סוכן 2	0	10	10
סוכן 3	0	15	10

תהי הקצאה $A = (A_1, A_2, A_3)$ כאשר $A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\},\ A_3 = \{3\}$.

	פריט 1	פריט 2	פריט 3
סוכן 1	0	4	1
סוכן 2	10	0	1

סוכן 3	10	5	0

אם אי אפשר לא לפגוע בסוכן מסוים, כלומר הוא לא יכול "להשתתף" בשיפור, אז בפרט הוא לא מקנא, ואפילו חושב שמה שהוא קיבל זה הכי טוב.