שינוי $ALGO$ 1 מהמאמר $Fair\ Division\ Under\ Cardinality\ Constraints$ כך שיחזיר חלוקה $EF1$ לגבי מטלות:
(מתוקן)

- כשמדובר במטלות, לכל סוכן $i \in [n]$ ולכל מטלה $t \in [m]$: $v_i(t) \le 0$.

- הגדרת $EF1$ על מטלות:
הקצאה $A = (A_1, A_2, ..., A_n) \in F$ היא $EF1$ אמ"ם לכל זוג סוכנים $i, j \in [n]$ קיימת מטלה $t \in A_i$ כך ש: $v_i(A_i \setminus \{t\}) \ge v_i(A_j)$.
כלומר, אם כל סוכן i יכול לבחור להוריד מטלה מהסל שלו כך שלא יקנא יותר באף סוכן אחר, אז ההקצאה היא $EF1$.
(הקנאה של הסוכנים מוגבלת בערך המינימלי של utility, בעיני i, של חפץ בסל של עצמו).

לדעתי יש כאן כמה מקרים שצריך להתייחס אליהם (בשונה מ-goods):

1. אם יוצא שהראשון בסדר בוחר מטלה אחרון (כלומר מספר המטלות חלקי מספר הסוכנים מותיר שארית 1), אז הראשון בסדר הוא דווקא זה שנדפק. כי הוא חייב לקחת עוד מטלה אחת אחרי כולם.
זה שונה מgoods כי שם הוא הרוויח מזה שנשארה עוד סחורה.
2. אבל אם יש שארית, שגדולה מ1, אז ייתכן שהסוכנים הבאים יידפקו יותר. כי המטלה שתישאר תהיה "גרועה" יותר גם ביניהם. (יכול להיות כולם חוץ מהאחרון - אחרת לא הייתה שארית).
3. אבל אם מספר המטלות הוא כפולה של הסוכנים, אז שמרנו על התכונה שהראשון הכי מרוויח, והאחרון הכי נדפק.

לכן: אני אקח את הרעיון של המאמר Fair allocation of combinations of indivisible goods and chores, של הוספת k מטלות dummy שלכל אחד מהסוכנים יש עבורן utility=0. וכך נקבל תמיד מספר שמתחלק בח.
! הערה: במאמר המטלות האלו שימשו אותם למטרה אחרת.
כדי למנוע מצב שבסיבוב של הקצאת הgoods, יהיה סוכן שלא חושב שאלו באמת דברים טובים. כלומר יש לו utility שלילי לגבי הסחורות שנשארו. אז הסוכן הזה יכול לקחת סחורה dummy שלא תורמת ולא מזיקה לו. ובכל מקרה מובטח שעבור כל סחורה שם, יהיה סוכן שיש לו תועלת חיובית ממש עליה, כי אחרת היא לא הייתה נכנסת לO^+מלכתחילה.

אבחנה נוספת: התכונה הזו צריכה להיות על כל קטגוריה בנפרד! מכיוון שמפעילים את round-robin כל פעם מחדש לגבי כל קבוצת מטלות מקטגוריה אחרת.
כלומר הk שיתווסף כדי להשלים לחn, יהיה עבור כל קטגוריה בנפרד. אז נוסיף אותו בround-robin.

<u>אלגוריתם round-robin על מטלות:</u>

קלט: $< C, [n], (v_i)_{i'} \sigma >$ כאשר C= קבוצת המטלות מקטגוריה מסוימת. צריך להקצות את כולן.

- נניח כי $|C| = an - k$ עבור $k \in \{0,..., n - 1\}$.
- ניצור k מטלות dummy שלכל סוכן יש עבורן utility=0 ונוסיף אותן לC. (כלומר עכשיו $|C| = an$, ומובטח שתמיד הסיבוב יסתיים בסוכן האחרון).
- אתחול:
  - לכל סוכן $i \in [n]$ סל ריק: $B_i = \Phi$
  - קבוצת המטלות שלא הוקצו: $M \leftarrow$C
- כל עוד $M \neq \Phi$:
  - עבור כל $i \in [n]$:
    - הגדר $t_{\sigma(i)} \in argmax_{t\in M} v_{\sigma(i)}(t)$
    - עדכן $B_{\sigma(i)} \leftarrow B_{\sigma(i)} \cup \{t_{\sigma(i)}\}$.
    - $M \leftarrow M \setminus \{t_{\sigma(i)}\}$
    - אם $M = \Phi$ צא.
- החזר את $B = \{B_1,..., B_n\}$ ללא המטלות ה-dummy

<u>האלגוריתם החדש:</u>

- אתחל הקצאה $A^0 = (A^0_1,..., A^0_n)$ עם $A^0_i = \Phi$ לכל $i \in [n]$.
- קבע סדר שרירותי על הסוכנים: $\sigma = (\sigma(1),..., \sigma(n))$.
- עבור $h \in [1, l]$:
  - קבע את B^h להיות ההקצאה שחוזרת מ-round robin (כששולחים אליו את C_h).
  - לכל $i \in [n]$ עדכן: $A^h_i \leftarrow A^{h-1}_i \cup B^h_i$ (מוסיפים למה שהוקצה לו עד עכשיו את ההקצאה של הקטגוריה הנוכחית - לפי round-robin).
  - עדכן את הגרף T_A (כפי שהוגדר במאמר של רוהיט - On Approximate Envy-Freeness for Indivisible Chores and Mixed Resources) להיות חסר מעגלים.
  - עדכן את σ להיות סדר טופולוגי על הגרף. ** אולי צריך להפוך את הסדר הטופולוגי
- החזר את A^l.

אינטואיציה לנכונות:

במאמר של רוהיט הוכח כי פירוק מעגל כלשהו ב-$top\ trading\ graph$ משמר את תכונת הEF1.
למעשה, מכיוון שבגרף הזה כל סוכן מצביע על הסל הכי מועדף בעיניו, כל סוכן שמעורב בהחלפה מקבל לאחריה את הסל הכי מועדף עליו, ולכן לא יקנא באף סוכן אחר בסיבוב הבא!

אז כל פירוק של מעגל ב-T_A שומר על ה-EF1, ואז כש-T_A הוא חסר מעגלים, אפשר לקבוע את σ כסדר טופולוגי על הגרף ולתת לסוכנים ש"הכי מקנאים" לבחור ראשונים את המטלה המועדפת עליהם.

- מכיוון שדאגנו לכך שהקצאת המטלות מכל קטגוריה תסתיים בסוכן האחרון ב-σ אז שמרנו על התכונה שמי שבוחר ראשון הכי מרוויח והאחרון הכי פחות.

לאחר הפגישה עם המנחים גילינו כי האלגוריתם לא עובד ...

<u>ניסיון הפרכה:</u>

הדוגמה הקטנה ביותר המעניינת היא עבור 3 סוכנים, 2 קטגוריות (מטלות, עם אילוצי קיבולת).
(צ"ל דוגמה למצב בו אין הקצאה EF1. במילים אחרות: עבור כל חלוקה רוצים שיהיה מישהו שיקנא במישהו אחר ביותר מחפץ 1)

	מטלה 1	מטלה 2	מטלה 3	מטלה 4	מטלה 5	מטלה 6
סוכן 1						
סוכן 2						
סוכן 3						

אילוצי הקיבולת: המטלות הכחולות - מקסימום 1
המטלות הכתומות - מקסימום 1
בגלל אילוצי הקיבולת, כל סוכן חייב לקבל 2 מטלות בדיוק - אחת מכל קטגוריה.

אם סוכן i מקנא בסוכן j ביותר מחפץ אחד, אז זה אומר בעצם שסוכן i צריך להוריד 2 מטלות לפחות מעצמו (שזה הכל במקרה הזה) ואז הוא לא יקנא ב-j. זה יכול לקרות רק אם **לכל** מטלה $c \in A_i$:
$u_i(c) < u_i(A_j)$

צריך שבכל חלוקה $A = (A_!, A_2, A_3)$ כאשר $A_1 = \{a_!, a_2\},\ A_2 = \{b_1, b_2\},\ A_3 = \{c_1, c_2\}$ יקרה אחד מהתרחישים הבאים:

1. $u_1(a_1) < u_1(b_1) + u_1(b_2)$ ---- סוכן 1 מקנא בסוכן 2
$u_1(a_2) < u_1(b_1) + u_1(b_2)$
2. $u_1(a_1) < u_1(c_1) + u_1(c_2)$ ---- סוכן 1 מקנא בסוכן 3
$u_1(a_2) < u_1(c_1) + u_1(c_2)$