סיכום רעיונות:
Optimal Reallocation under Additive and Ordinal Preferences

המאמר מדבר על מצב שבו לסוכנים כבר יש אובייקטים שחולקו להם, ויש להם העדפות כלשהן על האובייקטים הללו, וכעת רוצים לשפר את המצב.

למצוא חלוקה שהיא Pareto-Optimal בלי להתחשב בכלום זה קל, אבל כמובן שכאן רוצים למצוא מצב שהוא Pareto-Optimal ומתחשב ב-individual rationality. דוגמה למצב כזה הוא מצב שהוא Pareto-dominating על המצב הנוכחי.
** הערה: הכוונה שלהם ב-individual rationality היא שמצבו של אף סוכן לא נהיה גרוע יותר לאחר ההחלפה/ הסחר.

מבחינת סיבוכיות:
הבעיה המדוברת קרובה מאוד לבעיה של בדיקה האם מצב קיים הוא יעיל-פרטו (מוכח ב-$Lemma\ 1$).
ולכן, אם לבדוק האם חלוקה מסוימת היא יעילה-פרטו זה בעיה NP-קשה, אז למצוא חלוקה שהיא גם Pareto-Optimal וגם individual rationality גם היא NP-קשה.
מהסיבה הזו מתמקדים במאמר בבעיית בדיקת Pareto-Optimality של הקצאה מסוימת.

סימונים:
$N = \{1, . . . , n\}$ קבוצת הסוכנים.
$O = \{o_1, . . . , o_m\}$ קבוצת החפצים.
לכל סוכן יש העדפות על פני O. יחס ההעדפה טרנזיטיבי ורפלקסיבי.
$E_i^1, ..., E_i^{k_i}$ הן k_i קבוצות שמוכלות ב-O והאיברים בכל אחת מהן מייצגים קבוצת איברים שסוכן i אדיש ביניהם. בנוסף, עבור $k < l$, הוא מעדיף (strictly prefers) את כל האובייקטים מ-E_i^k מאשר אובייקטים מ-E_i^l. כלומר הקבוצות מסודרות מהאיברים המועדפים ביותר לפחות מועדפים.
לכל סוכן יכולה להיות גם פונקציית utility u_i, שנותנת ערך לכל $o \in O$ כך ש: סוכן אדיש בין o ל-o' אמ"ם $u_i(o) = u_i(o')$, והוא מעדיף ממש את o על פני o' אמ"ם $u_i(o) > u_i(o')$.
מניחים שלכל אובייקט בעיני כל סוכן יש ערך חיובי ($u_i(o) > 0$), ושההעדפות אדיטיביות.
הקצאה $p = (p(1), . . . , p(n))$ היא חלוקה של O ל-n חלקים, באשר $p(i)$ מסמל את הפריטים שהוקצו לסוכן ה-i.
χ = קבוצת כל ההקצאות האפשריות.

הגדרות:
- הקצאה $p \in \chi$ היא $individually\ rational$ עבור הקצאה התחלתית $e \in \chi$ אם מתקיים $u_i(p(i)) \geq u_i(e(i))$ לכל i.
- הקצאה $p \in \chi$ היא $Pareto\ dominated$ ע"י הקצאה אחרת $q \in \chi$, אם:
  1) לכל סוכן $i \in N$: $u_i(q(i)) \geq u_i(p(i))$
  2) לפחות לסוכן אחד מתקיים: $u_i(q(i)) > u_i(p(i))$
- הקצאה היא $Pareto\ optimal$ אמ"ם היא לא $Pareto\ dominated$ ע"י אף הקצאה אחרת.
- רלוונטי רק להעדפות קרדינליות: ה-$social\ welfare$ של הקצאה p היא $SW(p) = \sum_{i \in N} u_i(p(i))$

חלק 1:

Setting: העדפות קרדינליות (מספריות) אדיטיביות.

תוצאות: testing Pareto optimality של הקצאה נתונה:
- עבור מספר בלתי מוגבל של סוכנים, זה strongly coNP-complete, אפילו כאשר כל סוכן מקבל בדיוק 2 פריטים. ($Theorem\ 2$).
- כאשר מספר הסוכנים הוא קבוע, מציגים pseudo-polynomial-time algorithm($Theorem\ 3$).
  מראים אלגוריתם לינארי כאשר ההעדפות הן לקסיקוגרפיות.
  מראים גם אלגוריתם פולינומיאלי כאשר ההעדפות דיכוטומיות והערכים של הutilities הם α או β.

חלק 2:

Setting: העדפות אורדינליות (סדר), על פני עצמים בודדים, שהן additively separable.

שוקלים 2 גרסאות של Pareto-Optimality:
1) possible Pareto optimality
2) necessary Pareto optimality

עבור שתיהן מציגים אפיון מסוים שמוביל לאלגוריתמים פולינומיאליים לבדיקה האם הקצאה נתונה מקיימת את התכונה הזו.

תוצאות: testing Pareto optimality של הקצאה נתונה:
- עבור $n = 2$ עם $identical\ ordinal\ preferences$ זה $weakly\ coNP - complete$ ($Theorem\ 1$).
  מסקנה ישירה: עבור $n = 2$, חישוב של $individually\ rational\ and\ Pareto\ optimal\ assignment$ הוא $weakly\ NP - hard$. ($Corollary\ 1$).

מסקנה רלוונטית אלינו:
מציאת שיפור פרטו היא בעיה NP- קשה, ולכן למרות שהראינו קיום עבור 2 סוכנים (כלומר שכל שיפור פרטו על חלוקה יעילה פרטו ישאיר אותה יעילה פרטו), לא ניתן להשתמש בזה בפועל בתור אלגוריתם, כי זו בעיה קשה.