דוגמת הרצה: Algorithm 2 במאמר
On Approximate Envy-Freeness for Indivisible Chores and Mixed Resources

במאמר הוצגה דוגמה נגדית המראה כי ההכללה של אלגוריתם גרף הקנאה לגבי מטלות (כפי שהוצגה במאמר $Fair\ allocation\ of\ combinations\ of\ indivisible\ goods\ and\ chores$) אינה עובדת. הסיבה היא שכאשר מפרקים מעגל, מישהו במעגל יכול לקבל סל שהוא טוב יותר עבורו, אבל עם מטלות קטנות יותר. כלומר, למרות ש*גודל* הקנאה שלו באחרים יקטן, אבל כבר אי אפשר לבטל אותה ע"י העברת מטלה אחת לאחר.

מושגים בהם משתמשים באלגוריתם:

- sink: סוכן שאינו מקנא באף אחד אחר. כלומר זה שאין ממנו צלעות יוצאות בגרף הקנאה. אליו נרצה להקצות את המטלה החדשה.
  קיום סוכן כזה מובטח אם לא קיימים בגרף מעגלי קנאה. אך ראינו שאם בוחרים מעגל קנאה אקראי בגרף אותו נרצה לפרק, התכונה של EF1 לא בהכרח נשמרת.
- G_A : גרף הקנאה עבור הקצאה A, כלומר גרף מכוון בו יש צלע מ- a_i ל- a_j אמ"ם סוכן i מקנא בסוכן j
- T_A : (top-trading graph) הוא תת-גרף של G_A שקודקודיו הם הסוכנים, והצלע (i, k) מסמנת שהסל שסוכן i הכי מעדיף (בצורה weakly) הוא A_k (כלומר זה של סוכן k).

<u>הקלט:</u> N = קבוצת הסוכנים, M = קבוצת המטלות, V = פונקציות ההעדפות.
<u>הפלט:</u> הקצאה A שהיא EF1

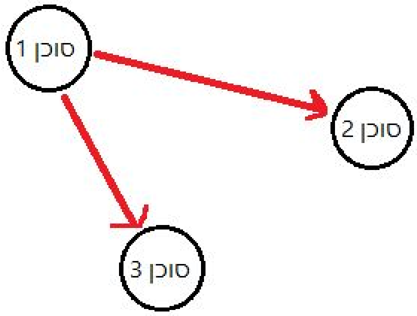
1. מאתחלים עבור כל סוכן הקצאה ריקה $A = (\Phi, ..., \Phi)$
2. עבור כל מטלה $c \in M$:
   - אם אין סוכן שהוא sink ב- G_A (בהכרח יש מעגל קנאה ב- T_A), אז:
     - נגדיר C = מעגל כלשהו מ- T_A.
     - $A \leftarrow A^C$ (כלומר מעדכנים את ההקצאות בכיוון הקנאה במעגל).
   - בחר סוכן k שהוא sink ב- G_A
   - עדכן: $A_k \leftarrow A_k \cup \{c\}$

דוגמת הרצה:

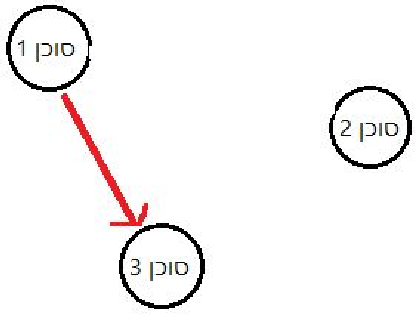
	מטלה 1	מטלה 2	מטלה 3	מטלה 4	מטלה 5
סוכן 1	1-	4-	5-	0	2-
סוכן 2	0	0	1-	0	8-
סוכן 3	0	5-	3-	2-	1-

אתחול: $A = (\Phi,\ \Phi,\ \Phi)$

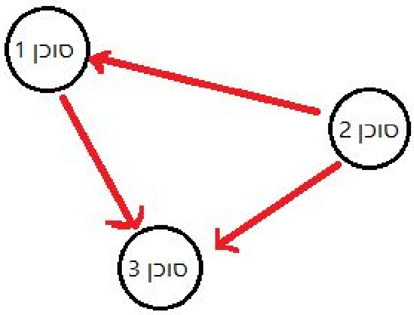
מטלה 1: מקצים לסוכן 1: $A = (\{1\},\ \Phi,\ \Phi)$
איך נראה G_A:



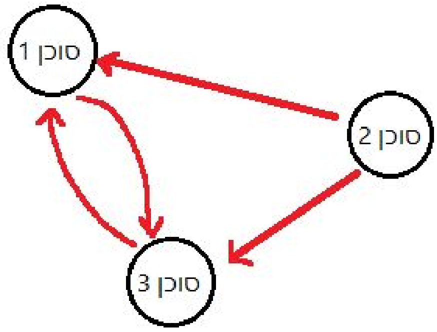
מטלה 2:
יש sinks: סוכנים 2,3
נקצה את מטלה 2 לסוכן 2: $A = (\{1\},\ \{2\},\ \Phi)$
G_A:



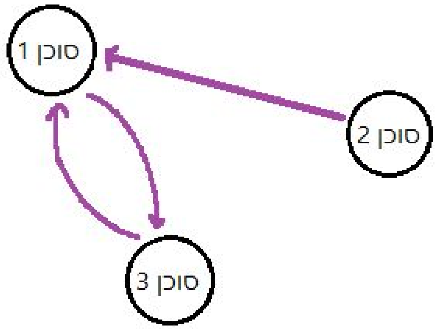
מטלה 3:
sinks: סוכנים 2,3
נקצה את מטלה 3 לסוכן 2: $A = (\{1\},\ \{2,3\},\ \Phi)$
G_A:



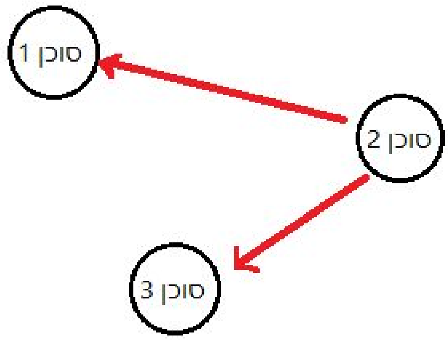
מטלה 4:
sinks: סוכן 3 בלבד
נקצה את מטלה 4 לסוכן 3: $A = (\{1\},\ \{2,3\},\ \{4\})$
כעת סוכן 2 עדיין מקנא בסוכן 3 כי הוא חושב שהחפץ שהוקצה לו שווה 0. סוכן 3 לא מקנא ב-2. הסוכנים 1 ו-3 מקנאים זה בזה: 1 חושב שיש ל-3 תועלת של 0 גם לאחר ההקצאה, לכן ממשיך לקנא בו, וסוכן 3 חושב שיש ל-1 תועלת של 0. ולעומת זאת, כל אחד חושב שיש לו תועלת שלילית ממש.
G_A:



מטלה 5: כעת אין סוכן שהוא sink ב- G_A, לכן נסתכל על T_A :
סוכן 1 הכי מעדיף את הסל של 3 (כי הוא בכלל לא מקנא ב-2)
סוכן 2 הכי מעדיף את הסל של 1 או של 3, נבחר את 1 (כי הסל של 1 בעיניו שווה 0, והסל של 3 גם כן).
סוכן 3 הכי מעדיף את הסל של 1 (כי הוא בכלל לא מקנא ב-2)
לכן T_A נראה כך:



נבחר את מעגל C להיות: $\{a_1, a_3\}$
עדכון ההקצאות בכיוון הקנאה במעגל: $A = (\{4\},\ \{2,3\},\ \{1\})$
G_A כעת:



לכן נקצה את מטלה 5 לסוכן 1 למשל, שהוא $sink$: $A = (\{4,5\},\ \{2,3\},\ \{1\})$

זוהי ההקצאה הסופית. היא EF1 מכיוון שהקנאה הקיימת היא לכל היותר בפריט אחד:
סוכן 1 מקנא ב-3 בלבד, אבל אם הוא יוריד מהסל שלו את פריט 5 הוא כבר לא יקנא.
סוכן 2 מקנא ב-3 בלבד, אך אם הוא יעביר אליו את מטלה 3 הוא כבר לא יקנא.
סוכן 3 לא מקנא כלל.