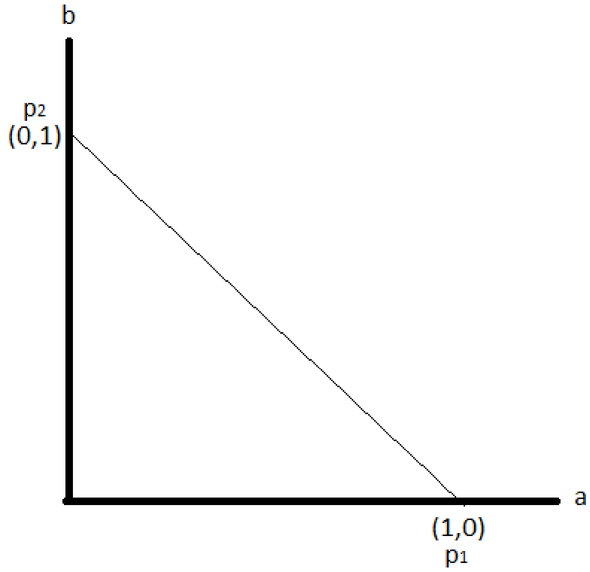
הוכחה לכך שקיימים שני מספרים a,b (נניח ששניהם בין 0 ל-1 ו-a+b=1),
כך שאם נכפיל את התועלות של סוכן 1 ב-a ואת התועלות של סוכן 2 ב-b, ואז נמצא שידוך ממקסם משקל בכל קטגוריה בנפרד, התוצאה תהיה EF1.
! עבור שני אנשים ומספר כללי k של קטגוריות.

נסתכל על הקו הבא, המתאר את אוסף כל זוגות המשקלים a,b שסכומם 1:



- נניח לצורך פשטות שתמיד יש שתי מטלות בלבד מכל קטגוריה - כלומר שידוך ממש.

<u>הגדרה 1:</u> x_i = הפרש התועלות של סוכן 1 בקטגוריה i, מוגדר כתועלת שלו על פני מטלה מס' 2 בקטגוריה i, פחות התועלת שלו על פני מטלה מס' 1 בקטגוריה זו.
באופן סימטרי, y_i = הפרש התועלות של סוכן 2 בקטגוריה i.

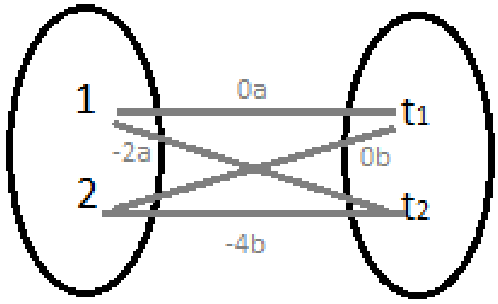
<u>דוגמה 2:</u> חישוב הפרש התועלות

	C1, task 1	C1, task 2	C2, task 1	C2, task 2
agent 1	0	-2	-2	-1
agent 2	0	-4	-4	0

אזי: $x_1 = -2-0 = -2$
$x_2 = -1-2 = -3$
$y_1 = -4-0 = -4$
$y_2 = 0-(-4) = 4$

<u>הגדרה 3:</u> $G_{c,a,b}$ = גרף דו צדדי מלא, שגודל כל צד בו הוא 2: הקודקודים בצד אחד מייצגים את שני הסוכנים 1,2 והקודקודים בצד שני מייצגים את המטלות מקטגוריה C_c, שהן t_1, t_2.
המשקל על צלע (i, t_j) בין סוכן i למטלה מס' j בקטגוריה c הוא התועלת (המקורית) של i על פני מטלה j, כפול a אם $i = 1$ וכפול b אם $i = 2$.

<u>דוגמה 4:</u> גרף $G_{1,a,b}$ עבור הנתונים מדוגמה 2



<u>טענה 5:</u> נגדיר את סדרה A להיות סדרת כל הקטגוריות ממוינות לפי יחסי ההפרשים $\frac{x}{y}$.
נעלה במעלה הקו ב"קפיצות" שנקבעות ע"י פתרון המשוואה $ax_i = by_i = (1 - a)y_i$ עבור כל קטגוריה i ב-A משמאל לימין. אזי השינוי בהקצאות שיקבל כל סוכן על פי שידוך מקסימלי ב-$G_{i,a,b}$ הוא קטגוריה אחת בלבד - אם סוכן 1 קיבל קודם את המטלה ה"טובה" יותר, כעת סוכן 2 יקבל אותה, ו-1 את ה"גרועה".

- במקרה שלשני השידוכים אותו הערך, ניתן את המטלה לסוכן 1 (כדי שתהיה התקדמות).
- אם יש $x > 1$ קטגוריות עם יחס זהה של הפרשי התועלות, נוסיף למשקל ax_i עבור $x - 1$ קטגוריות i כלשהן ערך קטן כלשהו $\epsilon > 0$, כדי שסוכן 1 יקבל את כל החפצים מהקטגוריות הללו. (ונשמור על התכונה ש"קופצים" בקטגוריה אחת).

- עבור כל נקודה (a_0, b_0) על הקו, בכל פעם, עבור כל קטגוריה i בנפרד, נבצע חלוקה הנקבעת ע"י השידוך המקסימלי על גרף G_{i,a_0,b_0}.
- ברור כי בנקודה p_1 סוכן 1 לא מקנא בסוכן 2, ובנקודה p_2 סוכן 2 לא מקנא בסוכן 1.
- כמו כן ברור כי כאשר מוצאים חלוקה ע"י מקסום המשקלים (ממקסמים פונקציה עולה כלשהי), תיווצר חלוקה חסרת-מעגלים (ובפרט יעילה פרטו), ולכן בכל אחת מהנקודות על קו זה רק אחד מהסוכנים מקנא בסוכן האחר - לא יכול להיות ששניהם מקנאים.
- בגלל שני הדברים הללו, חייבת להיות נקודה בה סוכן 2 עובר ממצב שהוא מקנא למצב שהוא לא מקנא, כי בקיצון השני (נקודה 0,1), הוא לא מקנא.
- לפי טענה 5 כל פעם מתחלפת קטגוריה אחת, ולכן הקנאה תהיה בקטגוריה אחת בלבד - ובגלל למה 6 שתוכח למטה, זה אומר גם במטלה אחת.

<u>האלגוריתם למציאת הנקודה המתאימה:</u>

- נתחיל מנקודה p_1.
- אם בנקודה זו החלוקה היא $EF1$, סיימנו.
- נסתכל על הקטגוריות i בהן סוכן 2 מקנא בסוכן 1 (אלו הקטגוריות בהן שני הסוכנים רוצים את אותו הדבר), ונמיין אותן (בסדר לא יורד) לפי יחס ההפרשים בין התועלות של השחקנים, $\frac{x_i}{y_i}$.
- עבור כל קטגוריה ברשימה:
  - נחשב את a ו-b לפי פתרון המשוואה: $ax_i = (1 - a)y_i$

- נקצה את המטלות ע"פ שידוך מקסימלי ב-$G_{i,a,b}$, כאשר אם יש שני שידוכים אפשריים, נקצה את את המטלה המועדפת יותר לסוכן 2. ואם יש כמה קטגוריות עם אותו ערך של (a, b), נשאיר את כל המטלות המועדפות מכל הקטגוריות אצל סוכן 1, פרט לקטגוריה אחת (כדי שנקפוץ בקטגוריה אחת בלבד).
- נמשיך בתהליך זה עד שנגיע לחלוקה $EF1$.

-- מובן כי יש החלפה בקטגוריה אחת, אבל השאלה היא אם קטגוריה אחת משמעותה גם החלפה במטלה אחת. הלמה הבאה אומרת שכן.

<u>למה 6:</u> ע"פ האלגוריתם, החלפה בקטגוריה אחת לעולם לא יכולה "להקפיץ" את מצבו של סוכן 1 ממצב של חוסר קנאה למצב של קנאה בשני חפצים. (זה מוכיח שבהכרח האלגוריתם ייעצר, כי נגיע ל-EF1).

<u>הוכחת למה 6:</u>

נניח שההקצאה הנוכחית הינה $A_1 = \{a_1, ..., a_k\},\ A_2 = \{b_1, ..., b_k\}$

נניח שאנו בקטגוריה C_t (ברשימה הממויינת), וכי ערכי a ו-b נבחרו כך שתהיה כעת החלפה בקטגוריה זו.

נשים לב שאם אנו מתכוונים להחליף את המטלות מהקטגוריה הזו, בהכרח בהחלפה של כל הקטגוריות הקודמות ברשימה הממויינת טרם הגענו לחלוקה EF1, אחרת האלגוריתם כבר היה נעצר.
נשים לב גם שמכיוון שהתחלנו בנקודה p1 והתקדמנו משם, הקנאה הנוכחית היא של סוכן 2 בסוכן 1, וסוכן 1 כמובן לא מקנא - כי אין מעגלי קנאה.
נסמן ב-t_1 ו-t_2 את המטלות מקטגוריה C_t.

ברור כי שני הסוכנים מעדיפים את אותה המטלה מקטגוריה זו, אחרת הקטגוריה הזו לא הייתה נכנסת לרשימה. נניח בה"כ שזו t_1, כלומר: $u_1(t_1) > u_1(t_2)$, וכנ"ל לגבי u_2.

לפי מהלך האלגוריתם, בהכרח t_1 נמצאת כעת אצל סוכן 1. ההחלפה תתן את t_2 לסוכן 1 ואת t_1 לסוכן 2.

נניח בשלילה כי ההחלפה בקטגוריה C_t תיצור קנאה של סוכן 1 ביותר ממטלה אחת.

כדי שזה יקרה, צריך שיתקיימו התנאים הבאים:

1. סוכן 1 מקנא בסוכן 2 לאחר ההחלפה, ולא קיימת מטלה בסל של סוכן 1 שאם הוא יסיר אותה הוא כבר לא יקנא (גם לאחר הסרת כל מטלה, סוכן 1 עדיין מקנא), ובפרט הסרת המטלה ה"כבדה" ביותר.
$$\forall j \in [k]:\ u_1(\{\{A_1 \backslash \{t_1\}\} \cup \{t_2\}\} \backslash \{a_j\}) < u_1(\{A_2 \cup \{t_1\}\} \backslash \{t_2\})$$
2. באופן דומה, עד כה (לפני ההחלפה) סוכן 2 קינא בסוכן 1 ביותר ממטלה אחת (כי כמו שציינתי קודם, אחרת האלגוריתם היה נעצר כבר)
$$\forall i \in [k]:\ u_2(A_2 \backslash \{b_i\}) < u_2(A_1)$$

מכיוון שאנחנו דנים בהעדפות אדיטיביות, נפשט את המשוואות, כך:
1. תהי a_j המטלה ה"כבדה" ביותר בסל החדש של סוכן 1.
$$u_1(A_1) - u_1(t_1) + u_1(t_2) - u_1(a_j) < u_1(A_2) + u_1(t_1) - u_1(t_2)$$
2. תהי b_i המטלה ה"כבדה" ביותר בסל הישן של סוכן 2 (A_2)
$$u_2(A_2) - u_2(b_i) < u_2(A_1)$$

משוואות נוספות: בדפים הסרוקים...

רעיונות לדוגמאות נגדיות:

1. אם $a_j = t_2$, אז נקבל: $u_1(A_1) - u_1(t_1) < u_1(A_2) + u_1(t_1) - u_1(t_2)$

מכיוון ש-$u_1(A_1) \geq u_1(A_2)$, כי 1 לא קינא עד עכשיו:

$u_1(A_2) + u_1(t_1) - u_1(t_2) \leq u_1(A_1) + u_1(t_1) - u_1(t_2)$ ולכן:

$$u_1(A_1) - u_1(t_1) < u_1(A_1) + u_1(t_1) - u_1(t_2)$$

$$-u_1(t_1) < u_1(t_1) - u_1(t_2) \quad / \cdot (-1)$$

$$u_1(t_1) > u_1(t_2) - u_1(t_1)$$

$$2u_1(t_1) > u_1(t_2)$$

$$u_1(t_1) > \frac{u_1(t_2)}{2}$$

כלומר אולי אפשר לנסות למצוא דוגמה נגדית כזו:

- המטלה ה"כבדה" ביותר היא מהקטגוריה שהורסת את ה-EF1
- למטלה זו יש תועלת גדולה מהתועלת של המטלה השנייה בקטגוריה זו חלקי 2.

2. => יודעים כבר שהעברת מטלה אחת יכולה ליצור קנאה ב-2 חפצים
=> האפקט של העברת מטלה אחת שקול לאפקט של החלפת המטלה הזו עם מטלה (שהייתה אצל סוכן 1) ששני הסוכנים מעריכים כ-0.
=> ננסה למצוא דוגמה נגדית כזו.

3. לבדוק מצב שיחס ההפרשים של 2 הקטגוריות האחרונות זהה -- לא טוב , כי אפשר לשלוט על כך שקטגוריה אחת תשתנה באופן מלאכותי (הוספתי לאלגוריתם כבר).

<u>הערה:</u> ההוכחה הזו זהה גם עבור חלוקת chores, כי במקרה הזה בנקודה p_1 למשל, מכפילים את כל התועלות של סוכן 2 ב-0, ואת התועלות של סוכן 1 ב-1 (כלומר הן נשארות אותו הדבר). לאחר מכן מוצאים שידוך ממקסם משקל - מה שייתן לסוכן 2 את כל המטלות ולכן אין סיכוי ש-1 יקנא בו.
באופן סימטרי עבור p_2.

ככל שנעלה מ-p_1 למעלה על הקו, סוכן 2 יקבל פחות ופחות מטלות עד שבשלב כלשהו יקנא בסוכן 1 במטלה אחת בלבד, ועוד צעד אחד - הקנאה תתחלף כך שסוכן 1 יקנא בלכל היותר מטלה אחת.