סיכום נוסחאות
קורס אלגוריתמי ניווט ושערוך מיקום תשפ"ב

מסנן היסטוגרמה

הסתברות מותנית: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

חוק בייס: $P(H|E) = \frac{P(E|H)\cdot P(H)}{P(E)}$

כלל השרשרת: $P(X, Y, Z) = P(X|Y.Z)\cdot P(Y|Z)\cdot P(Z)$

חוק בייס עם שני evidences (הרחבה): $P(H|E_1, E_2) = \frac{P(E_1|H,E_2)\cdot P(H|E_2)}{P(E_1|E_2)}$

חוק ההסתברות השלמה: $P(B) = P(B|A)\cdot P(A) + P(B|\bar{A})\cdot P(\bar{A})$

הרחבה ליותר משני מאורעות משלימים: $P(B) = \sum_{A_i\in A} P(B|A_i)P(A_i)$

אנטרופיה: $H(X) = -\sum_{x} P(x)\cdot log(P(x))$, כאשר X הוא משתנה מקרי, ו-x מסמל ערך אפשרי שלו.

השערת (הנחת) מרקוב: $P(X_t|Z_{1:t}, U_{1:t}, m) = P(X_t|X_{t-1}, Z_t, U_t, m)$

מסנן קלמן במימד אחד

kalman gain (מעין ממוצע משוקלל): $KG = \frac{E_{estimation}}{E_{estimation}+E_{measurement}} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$, $0 \le KG \le 1$

שערוך בזמן t (נוסחה לחישוב): $Est_t = Est_{t-1} + KG[Meas_t - Est_{t-1}]$

הטעות במדידה בזמן t: $E_{est_t} = [1 - KG](E_{est_{t-1}})$, כאשר $E_{est_t} = \sigma_{est_t}^2$

פונקציית ה-PDF של התפלגות גאוסיאנית: $N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

הכפלת גאוסיאנים (μ_1, σ_1 עם μ_2, σ_2): נותנת התפלגות גאוסיאנית חדשה עם הפרמטרים

$$\mu_3 = \frac{\mu_1\cdot\sigma_2^2+\mu_2\cdot\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\ \sigma_3^2 = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}}$$

דרך שקולה: $\mu_3 = \mu_1 + KG(\mu_1 + \mu_2),\ \ \sigma_3^2 = \sigma_1^2 - KG\cdot\sigma_1^2$

חיבור גאוסיאנים (קונבולוציה - תנועה במסנן קלמן): תזוזה של μ_2 עם חוסר ודאות σ_2 כאשר המיקום הנוכחי מתואר ע"י σ_1, μ_1, תתן התפלגות גאוסית עם $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ ו- $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

מסנן קלמן בכמה מימדים

משוואות התנועה עם מהירות קבועה: $s = v \cdot t$, או $X_t = X_0 + \Delta t \cdot v$

משוואות התנועה עם תאוצה קבועה: $a_t = a_o$

$$V_t = \int_0^t a(t)dt = a_o \cdot \Delta t + V_0$$

$$X_t = \int_0^t V(t)dt = V_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_o \cdot \Delta t^2 + X_0$$

- אצלנו $X_0 = X_{t-1}$ ואז Δt יהיה השינוי בזמן מהמדידה האחרונה.

נוסחת חישוב ה-variance של משתנה: $\sigma_x^{\ 2} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)^2}{N}$ כאשר σ_x היא השונות של X.

נוסחת ה-covariance בין שני משתנים: $\sigma_x\sigma_y = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}-x_i)(\bar{y}-y_i)}{N}$

- ככל שהערך המוחלט של ה-cov גדול יותר, המשתנים קשורים יותר, וככל שהוא קטן יותר - להפך.

מטריצת ה-variance-covariance בשני מימדים: $P = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x\sigma_y \\ \sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$

- מטריצה ריבועית וסימטרית.
- האלכסון הראשי מתאר את השונות של המשתנים, והאלכסון המשני מתאר את הקורלציה ביניהם.

וקטור המצב ומטריצת חוסר הודאות של מערכת בשני מימדים: $\mu = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$

בכמה מימדים: $\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \sigma_1\sigma_3 & \dots & \sigma_1\sigma_n \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3 & \dots & \sigma_2\sigma_n \\ \sigma_3\sigma_1 & \sigma_2\sigma_3 & \sigma_3^2 & \dots & \sigma_3\sigma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_n\sigma_1 & \dots & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$

- Σ מתארת את חוסר הוודאות במערכת. בתחילת השאלה כל האיברים שהם לא באלכסון הראשי = 0, כי מניחים שאין קשר בין המשתנים, כלומר הם ב"ת.

שלב ה-prediction:

מהירות קבועה:

מטריצת F (מתארת את המודל הדינאמי של המערכת) כאשר וקטור המצב הוא $\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}$: $F = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- אם הפרש הזמנים בין מדידה למדידה משתנה, כל פעם נשנה את Δt למשהו אחר.

אם וקטור המצב מכיל מידע על שני מימדים: $\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix}$ אז מטריצת F תהיה $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

עדכון וקטור המצב: $\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_k$, כלומר $X_{k+1} = F \cdot X_k$

עדכון מטריצת P: $P_{k+1} = F \cdot P_k \cdot F^T$

אם מוסיפים גם חוסר ודאות בתזוזה: $P_{k+1} = F \cdot P_k \cdot F^T + Q$

במקרה שיש שינויים נוספים במערכת:

עדכון וקטור המצב: $\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_k + Bu$, B = מטריצת הבקרה ו-u = וקטור הבקרה.

למשל במקרה של תאוצה קבועה ותנועה במימד אחד: $\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ \Delta t \end{bmatrix} \cdot a_o$

תנועה בדו מימד ותאוצה קבועה בכל ציר:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

המרה ממרחב המצב למרחב החיישן: $\mu_{expected} = H_k \cdot X_k \qquad \Sigma_{expected} = H_k \cdot P_k \cdot H_k^T$

כאשר H היא מטריצת ההמרה (ממירה את וקטור המצב ממרחב המצב למרחב החיישן). אם היא שווה למטריצת היחידה, המרחבים זהים (יש חיישן עבור כל אחד מהמשתנים בוקטור המצב).

שלב ה-measurement:

Z_k = וקטור המדידה (במרחב החיישן), R_k = מטריצת הרעש במדידה (גם כאן מניחים שהקורולציות = 0).

איחוד בין התוצאות (שקול להכפלת גאוסיאנים במימד אחד) כאשר 0 = השערוך, 1 = המדידה:

kalman gain (מטריצה): $KG = \Sigma_1(\Sigma_1 + \Sigma_2)^{-1}$

וקטור המצב החדש: $\mu' = \mu_1 + KG(\mu_2 - \mu_1)$

מטריצת חוסר הוודאות החדשה: $\Sigma' = \Sigma_1 - KG \cdot \Sigma_1$

המרה ממרחב החיישן למרחב המצב: $KG = P_k \cdot H_k^T(H_k P_k H_k^T + R_k)^{-1}$

$$X_k' = X_k + KG(Z_k - H_k X_k)$$

$$P_k' = P_k - KG \cdot H_k \cdot P_k$$

מסנן קלמן מורחב (EKF)

חיישן LIDAR - חישוב המרחק בין הרובוט לבין האובייקט: $R = \frac{c \cdot t}{2}$, כאשר c היא מהירות האור, t הוא הזמן שלקח לקרן הלייזר לחזור חזרה אלינו.

העברה לקורדינטות קרטזיות במרחב: $R = range = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\phi = eleration = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\theta = azimut = cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{R}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

פיתוח טיילור (קירוב פונקציה לטור פולינומים אינסופי): $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$

כאשר מפתחים סביב נקודה a: $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. בד"כ $a = \mu$ כי שם יש הכי הרבה דגימות.

הרחבה: $h(x) = h(\mu) + \frac{\partial h(\mu)}{\partial x}(x - \mu)$

מטריצת היעקוביאן: $$H_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \frac{\partial h_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

מטריצת מעבר בין וקטורים (שאין ביניהם התמרה לינארית).

ניתן להשתמש בה למעבר ממרחב המצב (X) למרחב החיישן (Z): $Z = H_j \cdot X$ עבור חיישנים כמו LIDAR,

כאשר מגדירים את המשתנים של ה-LIDAR כ-hים ואת המשתנים של וקטור המצב כ-xים.

חיישן RADAR - העברה לקורדינטות במרחב: $\rho = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ (מרחק מהאובייקט)

$\phi = tg^{-1}(P_y/P_x)$ (זוית לאובייקט)

$\dot{\rho} = \frac{P_x V_x + P_y V_y}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}$ (מהירות רדיאלית)

שגיאת ה-$RMSE$: $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{Est} - x_i^{True})^2}$

מסנן חלקיקים

התפלגויות לא פרמטריות: סט החלקיקים $\chi = \{< x_j, w_j >\}_{j=1,...,J}$ (x = ההיפותזה, w = המשקל),

פונקצית הצפיפות $p(x) = \sum_{j=1}^{J} w_j \delta_{x_j}(x)$ (δ=0 חוץ מב-x בו היא שווה ל-∞).

הגרלת חלקיקים: $0 < x < x_{max}$, $0 < y < y_{max}$, $0 < \theta < 2\pi$

משוואות התנועה בהנחה ש-$\theta_f = \theta_0$: $x_f = x_0 + v \cdot \Delta t \cdot cos(\theta_0)$

$$y_f = y_0 + v \cdot \Delta t \cdot sin(\theta_0)$$

משוואות התנועה בהנחה ש-$\theta_f \neq \theta_0$, כלומר $\theta_f = \theta_0 + \dot{\theta}\Delta t$:

$$x_f = x_0 + \frac{v}{\dot{\theta}}(sin(\theta_0 + \dot{\theta}\Delta t) - sin(\theta_0))$$

$$y_f = y_0 + \frac{v}{\dot{\theta}}(cos(\theta_0) - cos(\theta_0 + \dot{\theta}\Delta t))$$

rotation matrix (התמרות הומוגניות): $$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_p \\ \sin\theta & \cos\theta & y_p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{bmatrix}$$

כאשר x_m, y_m הם הקורדינטות האמיתיות של ה-landmarks במרחב (במפה).

x_c, y_c הם הקורדינטות של ה-landmark ביחס למיקום של החלקיק (כאילו החלקיק בראשית הצירים).

x_p, y_p הם הקורדינטות האמיתיות של החלקיק במרחב (נתון).

θ היא הזווית של החלקיק.

bayesian weight function (פונקצית משקל עם זכרון שעוזרת לעבוד עם מספר קטן של חלקיקים):

$$weight(x_t^{[k]}) = k \cdot sense(x_t^{[k]}) + (1 - k) \cdot weight(x_{t-1}^{[k]})$$

חישוב השגיאה (עבור כל רכיב בוקטור, למשל θ,x,y):

MSE: $\dfrac{\sum_{i=1}^{M} w_i \sqrt{(P_i - true)^2}}{\sum_{i=1}^{M} w_i}$, או המרחק בערך מוחלט של החלקיק הטוב ביותר מהאמת: $|P_{best} - true|$

Controllers

smoothing algorithm - יש למזער את: $(x_i + y_i)^2$ וגם את $(y_i - y_{i+1})^2$:

$(x_i + y_i)^2 + \alpha(y_i - y_{i+1})^2$ ככל ש-α גדל ← הדרך חלקה יותר, α קטן ← הדרך קרובה למקורית.

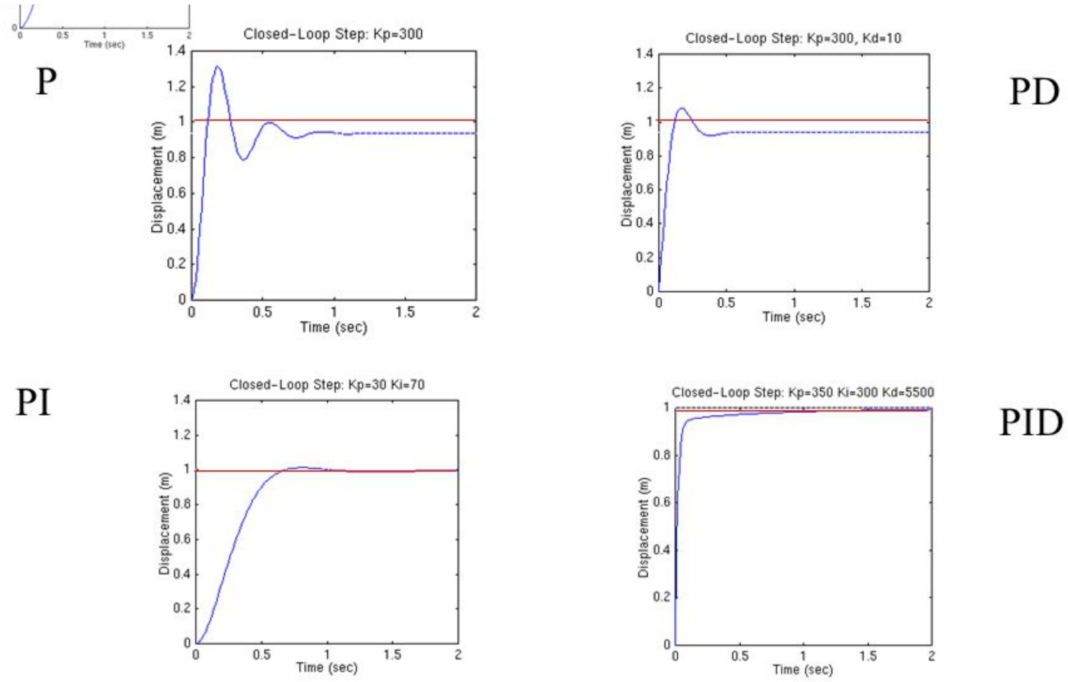
עם gradient descent העדכון הוא: $y_i = y_i + \alpha(x_i - y_i)$ ו- $y_i = y_i + \beta(y_{i-1} + y_{i+1} - 2y_i)$

בקר	נוסחה ל-α (זווית ההיגוי)	בעיה
P	$\alpha = -\tau_P \cdot CTE$	עושה overshoot, כלומר נדנודים כל הדרך על מנת לחזור למסלול
PD	$\alpha = -\tau_P \cdot CTE - \tau_D \frac{d}{dt} \cdot CTE$ $\frac{d}{dt} \cdot CTE = \frac{CTE_t - CTE_{t-1}}{\Delta t}$	אם יש נטייה בגלגלים לכיוון מסוים והם לא ממש ישרים, יכול לא להתכנס למסלול
PID	$\alpha = -\tau_P \cdot CTE - \tau_D \cdot \frac{d}{dt} CTE - \tau_I \cdot \sum CTE$ Proportional Differential Integral	

רכיב P: קובע את הזווית שצריך כדי להתקרב למסלול בצורה פרופורציונלית ל-CTE. ככל שהוא גדול יותר, התגובה חדה יותר ביחס לטעות ולכן במסלול יהיו "נדנודים" בקצב מהיר יותר.
רכיב D: הרכיב המרסן של P, אשר לוקח בחשבון את השינוי של ה-CTE לאורך זמן. בעצם כאשר הוא מזהה שהטעות קטנה עם הזמן, הוא גורם להגה להתיישר בצורה פרופורציונלית לשינוי ובכך מוריד את הנדנודים ויוצר דרך חלקה יותר, אבל יכולה להיות עדיין רחוקה מהמסלול אם יש נטייה בגלגלים. חשוב לציין כי רכיב זה

לא בהכרח מבטל את ה-overshoot, אלא רק את ה-marginal unstable (התנועה הסינוסית). הוא יכול לבטל את ה-overshoot אם נגדיל אותו מאוד ונקטין את p מאוד.

רכיב I: משנה את הזווית בהתאם לאינטגרל, כלומר לשטח שנמצא בין המכונית לבין המסלול. כך אם השטח גדול, נבין שצריך להתקרב למסלול.



twiddle algorithm (אלגוריתם למציאת ה-דים האופטימליים)