(2)

a)

z.z. $f((1-\tau)x + \tau y) \leq (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$

Zeigen, dass $f(x) = \|x\|$ konvex ist, Anhand der Definition von Konvexität.

Seien $x, y \in S$ und $\tau \in [0,1]$ beliebig aber fest. Dann gilt:

$$f((1-\tau)x + \tau y) = \|(1-\tau)x + \tau y\| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|(1-\tau)x\| + \|\tau y\| \overset{\tau, (1-\tau) \geq 0}{=} (1-\tau)\|x\| + \tau\|y\| = (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$$

b)

Wir zeigen zwei Richtungen: Sei zuerst f eine konvexe Funktion.

Seien $(x_1, t), (x_2, t) \in \text{epi} f$ beliebig. Dann gilt, dass für $\tau \in [0,1]$

$(x_3, t) \in \text{epi} f$ gilt, mit $x_3 := (1-\tau)x_1 + \tau x_2$.

Denn $(x_3, t) \in \text{epi} f$ genau dann, wenn $f(x_3) \leq t$. Sei o.B.d.A. $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Da $f(x_3) = f((1-\tau)x_1 + \tau x_2) \overset{f \text{ konvex}}{\leq} (1-\tau) f(x_1) + \tau f(x_2) \overset{f(x_1) \leq f(x_2)}{\leq} (1-\tau) f(x_2) + \tau f(x_2) = f(x_2) \leq t$, folgt

dass epi f konvex ist.

Für die zweite Richtung sei epi$f$ eine konvexe Menge.

Seien $(x, t_x), (y, t_y) \in \text{epi} f$, $\tau \in [0,1]$. Dann gilt:

Es ex. ein $z := (1-\tau)x + \tau y$, $t_z \in \mathbb{R}$ mit $(z, t_z) \in \text{epi} f$, da epi$f$ konvex ist.

Insbesondere gilt für $t_x := f(x)$, $t_y := f(y)$, da $f(x) \underset{\text{Bed. für } x \in \text{epi} f}{\leq} t_x \overset{\text{Wahl von } t_x}{=} f(x)$ gilt.

Also ist $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi} f$.

Damit folgt, dass $z = (1-\tau)x + \tau y$ und $t_z = (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$.

Da $(z, t_z) \in \text{epi} f$ gilt somit $f(z) \leq t_z$

also $f((1-\tau)x + \tau y) \leq (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$, also f konvex.

2c)

„$\Rightarrow$"

Es gilt $f((1-\tau)x+\tau y) \leq (1-\tau)f(x) + \tau f(y)$ (für $\tau \in (0,1)$)

Sind $t_1, t_2 \in S_{x,v}$, dann gilt $(\tau t_1 + (1-\tau)t_2) \in S_{x,v}$

denn S ist konvex und

$$x + (\tau t_1 + (1-\tau)t_2)v = \tau \underbrace{(x+t_1 v)}_{\in S} + (1-\tau)\underbrace{(x+t_2 v)}_{\in S}.$$

Seien $x \in S$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $t_1, t_2 \in S_{x,v}$ bel. aber fest, sowie $\tau \in (0,1)$

$$\Rightarrow g_{x,v}(\tau t_1 + (1-\tau)t_2) = f(x + (\tau t_1 + (1-\tau)t_2)v)$$
$$\overset{\text{Konvexität von } f}{\leq} \tau f(x+t_1 v) + (1-\tau) f(x+t_2 v)$$
$$= \tau g_{x,v}(t_1) + (1-\tau) g_{x,v}(t_2)$$

Also f konvex $\Rightarrow \forall x \in S \wedge \forall v \in \mathbb{R}^n : g_{x,v}$ konvex

„$\Leftarrow$" Sei $x \in S$, $v \in \mathbb{R}^n$ bel. aber fest.

Wie in der Hinrichtung gezeigt gilt $((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \in S_{x,v}$ insbesondere gilt jedoch auch $0 \in S_{x,v}$, da $x \in S$.

Es folgt wegen

$$g_{x,v}((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \overset{\text{Konvexität von } g_{x,v}}{\leq} (1-\tau) g_{x,v}(t_1) + \tau g_{x,v}(t_2)$$

$$\overset{\text{Definition } g_{x,v}}{\Leftrightarrow} f(x + ((1-\tau)t_1 + \tau t_2)v) \leq (1-\tau) f(x+t_1 v) + \tau f(x+t_2 v)$$

weil $x + ((1-\tau)t_1 + \tau t_2)v = (1-\tau)(x+t_1 v) + \tau(x+t_2 v)$

und $t_1 = t_2 = 0$ f ist konvex ∎

③ a)

a) Zeigen, dass der Schnitt konvexer Mengen C_i eine konvexe Menge ist.

Da $x_1, x_2 \in \bigcap_{i\in I} C_i$ gilt $x_1, x_2 \in C_i$ für alle $i \in I$.

Da jede Menge C_i konvex ist, folgt, dass

für bel. $\lambda \in [0,1]$ $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$ in allen C_i enthalten ist.

Damit ist es aber auch im Schnitt der C_i enthalten,

wodurch $\bigcap_{i\in I} C_i$ konvex ist. $\blacksquare$

b)

z.z. für konvexe $f_i : S \to \mathbb{R}$, $i \in I$ gilt, dass

$f := \sup_{x\in S} f_i$ konvex ist.

Da die $(f_i)_{i\in I}$ konvex sind, sind nach 1b) die epigraphen $(\text{epi } f_i)_{i\in I}$ ebenfalls konvex.

Es gilt $\text{epi } f = \bigcap_{i\in I} \text{epi } f_i$. Mit a) folgt, dass $\text{epi } f$ konvex ist,

und mit 1b), dass f konvex ist. $\blacksquare$

3a.c.) z.Z. f_i strikt konvex $\forall i \in I$ mit I endlich $\Rightarrow f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x)$ strikt konvex.

1.) I endlich $\Rightarrow f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) = \max_{i \in I} f_i(x)$

Auf einer endlichen Menge gilt: „sup = max"

2.) Für die strikte Konvexität von f ist folgendes zu zeigen:

$f((1-\tau)x + \tau y) < f(x)(1-\tau) + \tau \cdot f(y)$ dies ist äquivalent zu:

$$\max_{i \in I} f_i((1-\tau)x + \tau y) < (1-\tau) \max_{i \in I} f_i(x) + \tau \cdot \max_{i \in I} f_i(y) \quad (*)$$

3.) Zu zeigen ist die Ungleichung $(*)$:

$$\max_{i \in I} f_i((1-\tau)x + \tau y) \underset{a.}{=} f_k((1-\tau)x + \tau y) \underset{b.}{<} (1-\tau) f_k(x) + \tau \cdot f_k(y) \underset{c.}{\leq} (1-\tau) \max_{i \in I} f_i(x) + \tau \cdot \max_{i \in I} f_i(y)$$

a.) I ist endlich $\Rightarrow \exists k \in I$, sodass diese Gleichheit a. gilt

b.) f_k ist laut Voraussetzung strikt konvex, da $k \in I$

c.) Abschätzung nach oben durch: $f_{k \in I}(z) \leq \max_{i \in I} f_i(z)$

$\Rightarrow f$ ist strikt konvex $\square$

3b) $a,b \geq 0,\ p,q > 0,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

zZ: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Betrachten zunächst $a,b > 0$ und substituieren nun $a = e^t,\ b = e^s$ mit $t,s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad e^t e^s \leq \frac{e^{pt}}{p} + \frac{e^{qs}}{q}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{t+s} \leq \frac{e^{pt}}{p} + \frac{e^{qs}}{q} \qquad (*)$$

nutzen nun die Konvexität der e-Funktion:

Für alle $x,y \in \mathbb{R}$ und $\tau \in (0,1)$ gilt

$$e^{(1-\tau)x + \tau y} \leq (1-\tau)e^x + \tau e^y$$

Wähle $\tau := \frac{1}{q} \Rightarrow (1-\tau) = \frac{1}{p}$

und $x := pt,\ y := qs$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{e^{\frac{1}{p}pt + \frac{1}{q}qs}}_{= e^{t+s}} \leq \frac{1}{p}e^{pt} + \frac{1}{q}e^{qs}$$

$\Leftrightarrow \ (*)$

Für den Fall $a=0,\ b=0$ gilt

$$0 \cdot 0 \leq \frac{0^p}{p} + \frac{0^q}{q} \Leftrightarrow 0 \leq 0$$

und für $a=0,\ b>0$ gilt

$$0 \cdot b \leq \frac{0^p}{p} + \frac{b^q}{q} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{b^q}{q}$$

(Analog $b=0,\ a>0$)

Somit gilt die Ungleichung für $a,b \geq 0,\ p,q > 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.