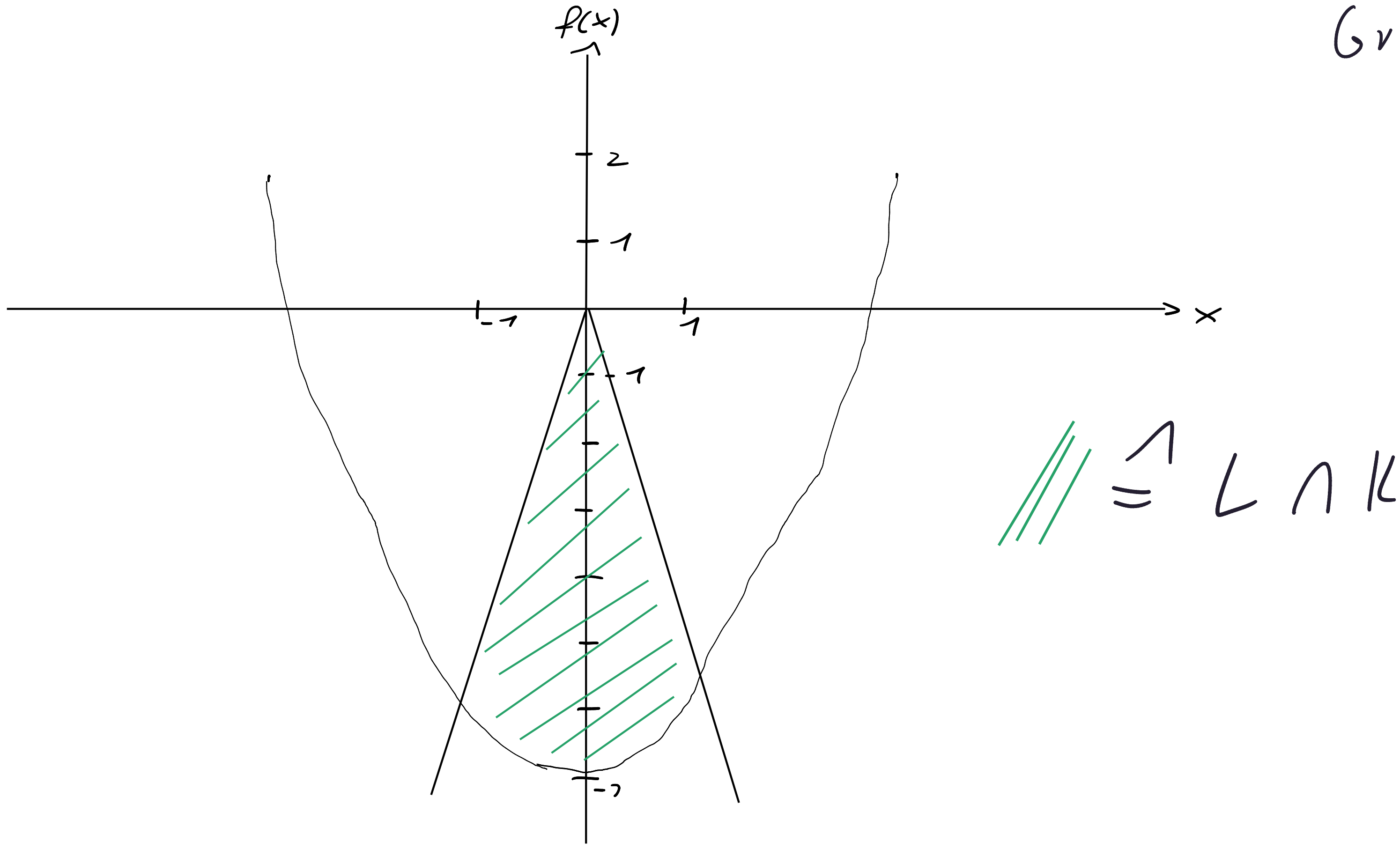
A1

Gruppe 1

a)



b) Wir zeigen, dass S konvex ist, indem wir zeigen, dass L und K konvex sind, wodurch $S = L \cap K$ nach Satz —— ebenfalls konvex ist.

Wir zeigen nun, dass K konvex ist, indem wir zeigen, dass h eine konvexe Funktion ist. Nach Satz ist K dann konvex.

Seien dafür nun $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0,1]$, dann gilt:

$$h((1-\tau)x + \tau y) = 2\,\|(1-\tau)x + \tau y\|_2^2 - 7 \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} 2\left(\|(1-\tau)x\|_2 + \|\tau y\|_2\right)^2 - 7$$

$$= 2\Big(\|(1-\tau)x\|_2^2 + \underbrace{\|(1-\tau)x\|_2 \cdot \|\tau y\|_2}_{\geq 0} + \|\tau y\|_2^2\Big) - 7 \leq 2\,\|(1-\tau)x\|_2^2 + 2\,\|_2\,\tau y\|_2^2 - (1-\tau)\cdot 7 - \tau \cdot 7$$

$$\overset{\tau,\,1-\tau \geq 0}{=} (1-\tau)(2\|x\|_2^2 - 7) + \tau(2\|y\|_2^2 - 7) = (1-\tau)h(x) + \tau h(y).$$

Damit ist h konvex.

Wir zeigen nun, dass L konvex ist.

Seien dafür $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in L$, $\tau \in [0,1]$ beliebig. Sei zusätzlich oBdA $t_1 \geq t_2$. Dann gilt:

(x_3, t_3) mit $x_3 := (1-\tau)x_1 + \tau x_2$ ist Element von L, denn:

$$\|x_3\|_2 = \|(1-\tau)x_1 + \tau x_2\|_2 \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|(1-\tau)x_1\|_2 + \|\tau x_2\|_2 \overset{\tau,\,1-\tau \geq 0}{=} (1-\tau)\|x_1\|_2 + \tau\|x_2\|_2 \leq (1-\tau)\frac{-t_1}{5} + \tau\frac{-t_2}{5} \overset{t_1 \geq t_2}{\leq} -\frac{t_2}{5}$$

Damit ist $(x_3, t_3) \in L$

■

c) $f(y) = \left(\sum_{i=0}^{n} y_i^2\right) + (y_{n+1}+5)^2$

$$\nabla f(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \vdots \\ 2y_n \\ 2y_{n+1}+10 \end{pmatrix} = 0$$ genau dann, wenn $y = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ mit $t=-5$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Da $\nabla^2 f(y) = 2\,\underline{I}$ spd ist, ist der kritische Punkt $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ ein Minimum.

Es gilt $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in L$, da $\|x\|_2 = \|0\|_2 = 0 < 1 = -\frac{-5}{5} = -\frac{t}{5}$ und $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in K$, da $h(x) = -7 < -5 = t$. Damit ist $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in S = L \cap K$, weswegen f auf S einen Minimierer hat.

d)

Satz 1.4.13 liefert:

S konvex $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax+b \in S\}$ ist konvex

$\underline{g((1-\tau)x+\tau y)} = f(A((1-\tau)x+\tau y)+b) = f((1-\tau)(Ax+b)+\tau(Ay+b))$

$\underset{f \text{ konvex}}{\underline{\leq}} (1-\tau)f(Ax+b) + \tau f(Ay+b) = \underline{(1-\tau)g(x) + \tau g(y)}$

A2

a)

i) Zeigen, dass $-\log(x)$ strikt konvex ist:

Da $\nabla^2 -\log(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, folgt die Behauptung mit Satz 1.4.11 4).

Es gibt kein Minimum, nur ein Infimum bei $x \to \infty$.

$$f_1\left(\binom{x_1}{x_2}\right) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 6x_2 + 67$$

ii)

$$f((1-\tau)x + \tau y) = ((1-\tau)x_1 + \tau y_1)^2 - 8((1-\tau)x_1 + \tau y_1) + ((1-\tau)x_2 + \tau y_2)^2 + 6((1-\tau)x_2 + y_2) + 67$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (1-\tau)x_1^2 + \tau y_1^2 - (1-\tau)8x_1 + 8\tau y_1 + (1-\tau)x_2^2 + \tau y_2^2 + 6(1-\tau)x_2 + 6y_2 + (1-\tau)\cdot 67 + \tau \cdot 67$$

$$= (1-\tau)x_1^2 - (1-\tau)8x_1 + (1-\tau)x_2^2 + 6(1-\tau)x_2 + (1-\tau)67 + \tau y_1^2 + 8\tau y_1 + \tau y_2^2 + 6y_2 + \tau \cdot 67$$

$$= (1-\tau)f(x) + \tau f(y)$$

Damit ist $f_1(x,y)$ strikt konvex.

Kritischer Punkt ist $(4,-3)$ da $\nabla f(x) = (2x_1 - 8, 2x_2 + 6)^T$

f nimmt ein Minimum an, da $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ s.p.d. Da f konvex ist, ist das Minimum global

iii)

$$f_3\left(\binom{x_1}{x_2}\right) = 5 - 2x_1 + 3x_2$$

$$f_3((1-\tau)x + \tau y) = 5 - 2((1-\tau)x_1 + \tau y_1) + 3((1-\tau)x_2 + \tau y_2))$$

$$= \tau \cdot 5 + (1-\tau)\cdot 5 - 2(1-\tau)x_1 - 2\tau y_1 + 3(1-\tau)x_2 + 3\tau y_2$$

$$= (1-\tau)\cdot 5 - 2(1-\tau)x_1 + 3(1-\tau)x_2 + \tau \cdot 5 - 2\tau y_1 + 3\tau y_2$$

$$= (1-\tau)f(x) + \tau f(y)$$

Da hier nur Gleichheit gilt, ist f_3 konvex, aber nicht strikt konvex.

Es gibt keine kritischen Punkte, da $\nabla f(x) = (3, 8) \neq 0$.

Es gibt auch kein Minimum, nur ein Inf. bei $x \to (\infty, -\infty)$

b) Seien $m, k \in \mathbb{N}_1$

i) Für sublineare Konvergenz benötigen wir $9k$ zusätzliche Iterationen, da gilt:

$$\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} = \frac{1}{k} = 10^{-m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10k} = 10^{-(m+1)}$$

$$\text{und } \frac{1}{10k} = \frac{\|e^{k+9k}\|}{\|e^0\|} \text{ gilt.}$$

Es benötigt $\log_p\left(\frac{1}{10}\right)$ um eine weitere Stelle Genauigkeit zu erreichen, denn:

ii) $$\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} = p^k = 10^{-m}$$

$$\Leftrightarrow p^{k+\bar{k}} \frac{p^k}{10} = 10^{-(m+1)}$$

$$\Rightarrow \bar{k} = \log_p\left(\frac{1}{10}\right)$$

iii) Für quadratische Konvergenz benötigen wir $k=1$ Iterationen, um eine zusätzliche Nachkommastelle zu erhalten, da ein quadratisch konvergentes Verfahren in jedem Schritt so viel Genauigkeit hat, wie in allen bisherige Schritten zusammen und $m \in \mathbb{N}_1$ ist.

c) Wir wählen hier das Verfahren mit sublinearer Konvergenz, da $\|e^k\| = \frac{42}{k} = 0.1$ für $k = 420$ gilt (d.h. das Verfahren benötigt 420 Iterationen bis $\|e^k\| = 0.1$ gilt.

Das lineare Verfahren benötigt 533 Schritte, da gilt:

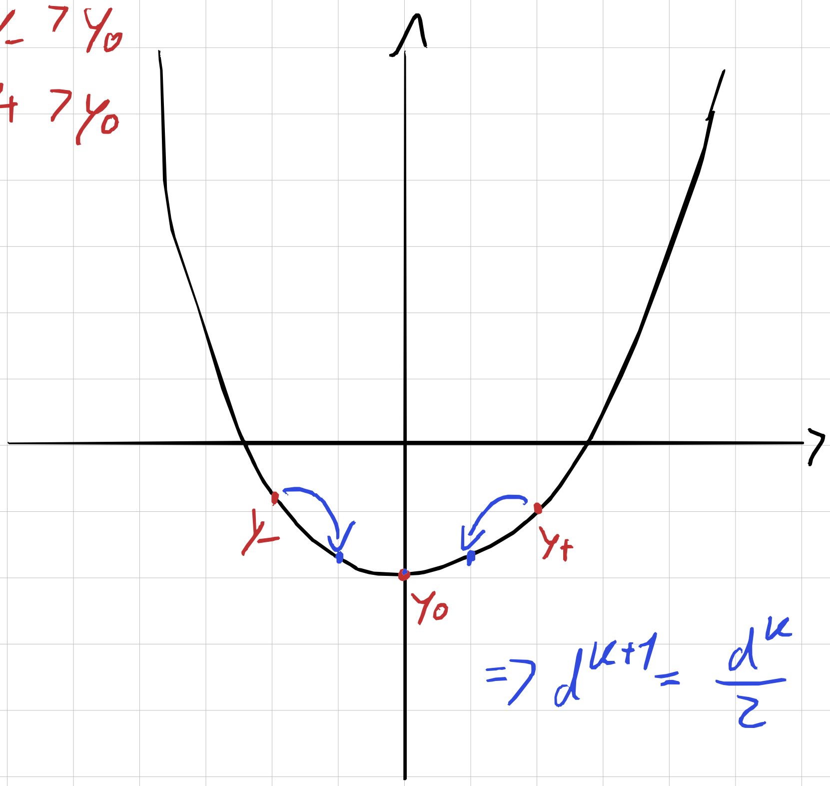
$$0.1 = 21\,(0.99)^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{210} = (0.99)^k$$

$$\Leftrightarrow k = 532{,}032721$$

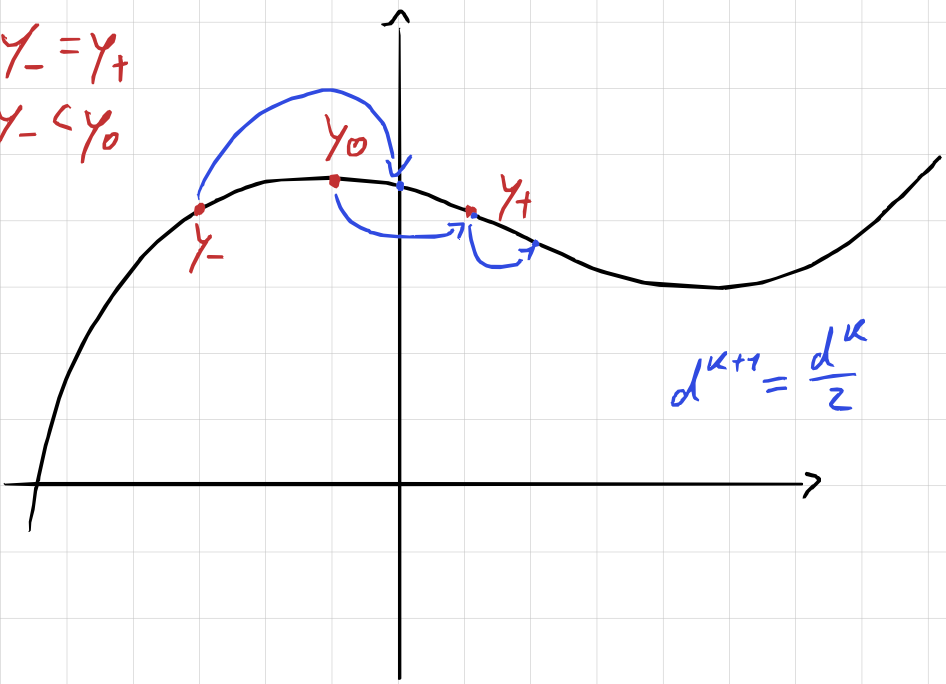
A3 a)

$y_- > y_0$
$y_+ > y_0$



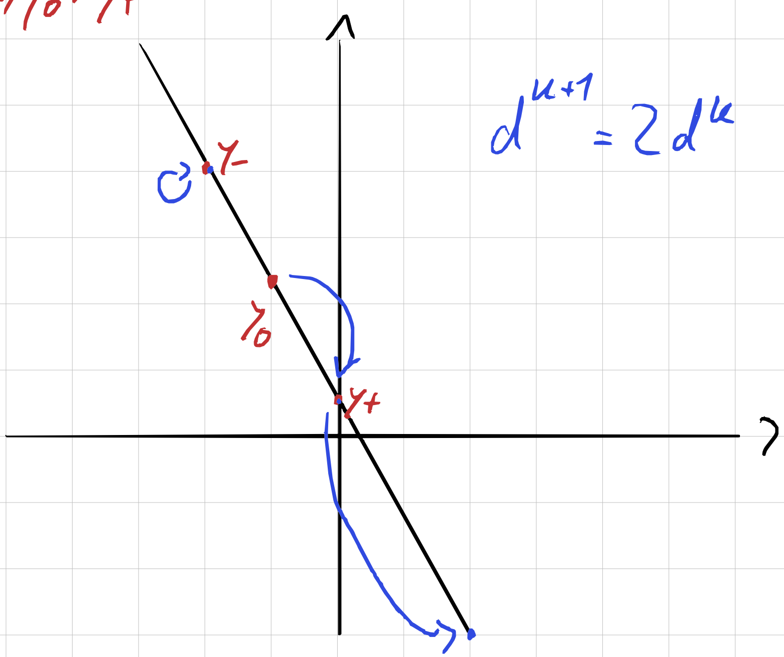
$\Rightarrow d^{k+1} = \frac{d^k}{2}$

$y_- = y_+$
$y_- < y_0$



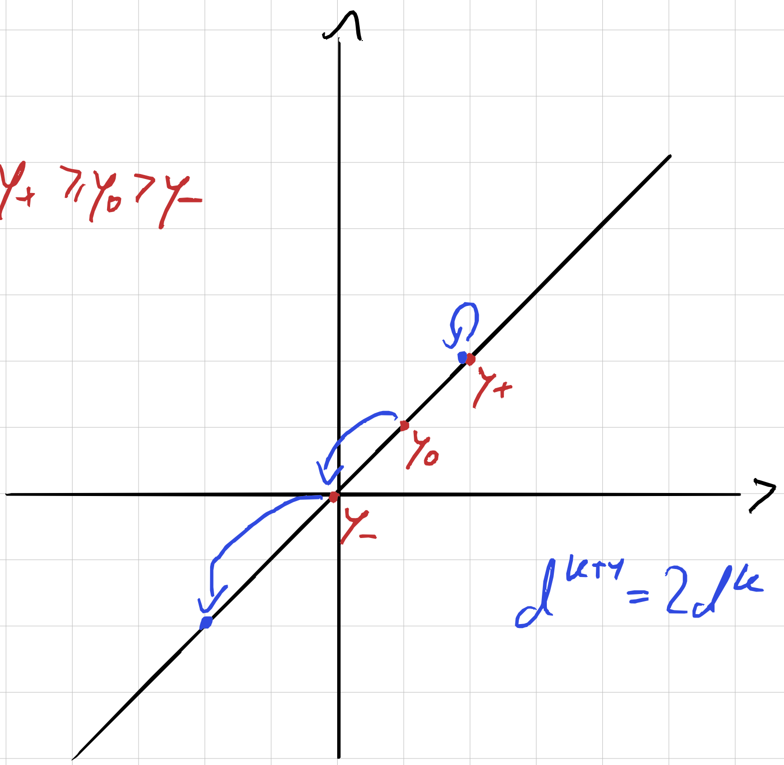
$d^{k+1} = \frac{d^k}{2}$

$y_- \geq y_0 > y_+$



$d^{k+1} = 2d^k$

$y_+ \geq y_0 > y_-$



$d^{k+1} = 2d^k$

Aufgabe 3

g.) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $n \geq 2$ beliebig mit $n \in \mathbb{N}$

Durch $x_- := x^k - d^k$ und $x_+ = x^k + d^k$ durchläuft das iterative Verfahren die Funktion f lediglich für die Gerade, die durch $x^k - d^k$ und $x^k + d^k$ verläuft.

Man reduziert das Minimierungsproblem also zwangsläufig auf den Schnitt der Funktion, der wiederum von ~~x~~ x^0 und d^0 abhängt.

Das iterative Verfahren ist daher nur geeignet für den Fall, dass $S \subset \mathbb{R}^n$ durch Vorüberlegungen oder Bedingungen auf diese Gerade eingeschränkt wurde.