Aufgabe 2

Gruppe 1 = { Claussen, Fynn-Ole 770712
Kohlhammer, Mika 779098
Fischer, Johann 779072 }

a)

1) $\inf_{x \in S_1} f_1(x)$ ist ein endlich dimensionales, unrestringiertes, glattes LP.

2) $\inf_{x \in S_2} f_2(t)$ ist ein unendlich dimensionales glattes Problem

3) $\inf_{x \in S_3} f_3(x)$ ist ein endlich dimensionales, restringiertes, glattes Problem

4) $\inf_{x \in S_4} f_4(x)$ ist ein diskretes (Kombinatorisches) endlich dimensionales restringiertes Problem

5) $\inf_{x \in S_5} f_5(x)$ ist ein endlich dimensionales, restringiertes, glattes QP.

b)

i) $g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig, $g(x) \xrightarrow{\|x\| \to \infty} \infty$

z.z. $\mathrm{Lev}_{\leq \alpha}\, g$ ist kompakt für $\alpha \in \mathbb{R}$:

1) zeigen $\mathrm{Lev}_{\leq \alpha}\, g$ ist abgeschlossen. Da $\mathrm{Lev}_{\leq \alpha}\, g(x) = g^{-1}((-\infty, \alpha])$ ist, g eine stetige Funktion ist und $(-\infty, \alpha]$ abgeschlossen ist, ist $g^{-1}((-\infty, \alpha])$, also $\mathrm{Lev}_{\leq \alpha}\, g$ abgeschlossen.

2) zeigen $\mathrm{Lev}_{\leq \alpha}\, g$ ist beschränkt:

Es gilt $g(x) \to \infty$, wenn $\|x\| \to \infty$. Damit existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sodass $g(x) > \alpha$ für alle x für die gilt: $\|x\| \geq \|x_0\|$.

Damit ist $\mathrm{Lev}_{\leq \alpha}$ beschränkt und mit 1) auch abgeschlossen, also kompakt.

$\blacksquare$

ii)

$$g(x) = \frac{x_1^2+2x_2^2+x_3^2}{1+|x_1-x_3|}$$

Da $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} g(x) = \lim\limits_{\|x\|\to\infty} \dfrac{\overbrace{x_1^2+2x_2^2+x_3^2}^{\text{wächst quadratisch}}}{1+\underbrace{|x_1-x_3|}_{\text{wächst max. linear}}} = \infty$

und $g(x)$ stetig ist, kann man die Aussage aus i) anwenden.
Somit ist $\text{Lev}_{\leq\alpha}\, g(x)$ für bel. aber festes $\alpha \in \mathbb{R}$ kompakt.
Wähle nun $\alpha := g(0)$, dann ist $\text{Lev}_{\leq\alpha}\, g(x) \neq \emptyset$.
Da $\text{Lev}_{\leq\alpha}\, g$ nichtleer und kompakt ist, sowie g stetig, nimmt g auf $\text{Lev}_{\leq\alpha}$ ein Minimum an. Mit Satz 1.2.1 folgt die Behauptung. $\blacksquare$

Aufgabe 3

a)

i) $f(x) = 42,\ x \in \mathbb{R}$ hat $\operatorname{argmin}\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \mathbb{R}$

ii) $f(x) = x^4,\ x \in \underbrace{[-2,-1] \cup [1,2]}_{=:S}$ hat $\operatorname{argmin}\limits_{x\in S} f(x) = \{-1, 1\}$

iii) $f(x) = (\pi + x)^2,\ x \in \mathbb{Z}$ hat $\operatorname{argmin}\limits_{x\in\mathbb{Z}} f(x) = \{-3\}$

iv) $f(x) = \log(-x),\ x \in \mathbb{R}_{<0}$ hat kein Minimum, da für $x \uparrow 0$ $f(x) \longrightarrow -\infty$.

v) $f(x) = |x+1| + |x-1|,\ x \in \mathbb{R}$ hat $\operatorname{argmin}\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = [-1, 1]$

vi) $f(x) = \left\| x - \binom{1}{2} \right\|_2,\ x \in \mathbb{R}^2$ hat $\operatorname{argmin}\limits_{x\in\mathbb{R}^2} f(x) = \left\{\binom{1}{2}\right\}$

vii) $f(x) = x_1 + x_2,\ x_1, x_2 > 0$ hat keinen Minimierer, da $f(x) \downarrow 0$ für $x_1, x_2 \downarrow 0$.

viii) $f(x) = x_1 + x_2,\ \underbrace{x \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \|x\|_2 = 1}_{=:S}$ hat $\operatorname{argmin}\limits_{x\in S} f(x) = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T \right\}$

b)

Wir widerlegen die Behauptung durch ein Gegenbeispiel:

Wähle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \to \begin{cases} 1 & \text{für } x<0 \\ e^{-x^3} & \text{für } x\geq 0 \end{cases}$ mit $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ -3x^2\cdot e^{-x^3} & x\geq 0 \end{cases}$

dann gilt:

$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ -6x\cdot e^{-x^3} + 9x^4\cdot e^{-x^3} & \text{für } x\geq 0 \end{cases}$ ist eine stetige Funktion und

$f(x)$ damit zweimal stetig diff.-bar. Außerdem gilt, dass $f(x)$ in $x_0=-2$ einen lokalen Minimierer hat, da für $\varepsilon\leq 1$ gilt: $f(x_0)=1\leq 1=f(y)$ mit $y\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$.

$f(x)\in[0,1]\ \forall x\in\mathbb{R}$ ist also beschränkt und hat mit $f(x)\xrightarrow{x\to\infty} 0$ ein glob. Infimum, aber kein Minimum.

$\blacksquare$