2

b)

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + x^T b + c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot b_i + c$$

Allgemeine Ableitung nach $1 \leq k \leq n$ ist somit:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} A x = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cdot x_k \cdot x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot x_j \cdot x_k = \frac{1}{2}(Ax)_k + \frac{1}{2}(A^T x)_k$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} x^T b = b_k$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = \frac{1}{2}(Ax) + \frac{1}{2}(A^T x) + b$$

stationäre Punkte sind die $x \in \mathbb{R}^n$,

die $0 = \nabla f(x)$ erfüllen, also für die gilt:

$$\frac{1}{2}(A + A^T)x + b = 0. \quad (1)$$

Da $A + A^T$ nicht invertierbar sein muss, kann es mehrere oder auch keine $x \in \mathbb{R}^n$ geben, die (1) erfüllen.

Die Menge der stationären Punkte ist: $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2}(A^T + A)x = -b\}$

③

a)

Nutzen $\log_\alpha(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(\alpha)}$ für $\alpha > 0$ $(*)$

$h(x) = f(g(x))$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$f(x) = \log_\alpha(x) \overset{(*)}{=} \ln(x) \cdot \frac{1}{\ln(\alpha)}$ $\quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i}$

Damit sind

$\nabla f(x) = f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(\alpha)}$

und

$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ e^{x_2} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{pmatrix}$

Und somit: $\nabla h(x) = \nabla g(x) \cdot \nabla f(g(x)) = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ \vdots \\ e^{x_n} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} \cdot \ln(\alpha)}$

$\nabla h(x)$ kann nie 0 sein, da $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ gilt. ▨

(3)

b) Zur Lösung betrachten wir dies als Ausgleichsproblem und nutzen Aussagen zur Singulärwertzerlegung:

Da $\text{Rang}(A) < n$ und damit $\text{Rang}(A^T) < n$ folgt:

$\text{Rang}(A^TA) < n$. Damit ist das LGS $A^TAx = A^Tb$ (1)

Es ist $A^TA \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Da $\text{Rang}(A) < n$, ist mindestens ein Eigenwert von A^TA gleich 0, d.h. ein Singulärwert von A ist 0. Damit ist $\text{Rang}(\Sigma) \leq n-1$ und damit hat die Moore-Penrose Pseudoinverse $A^+ = V\Sigma U^H$ $\text{Rang} \leq n-1$.

Sei nun $x^* = A^+ b$ eine Lösung von (1) mit mindestens einem Freiheitsgrad. Sei dieser an Stelle j.

Nehmen wir nun an, $x^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ wäre ein strikter lokaler Minimierer, d.h.

$f(x^*) < f(y)$, $\|x^* - y\| < \varepsilon$ Wählen $\hat{x} = x^* + e_j \cdot \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann gilt $\hat{x}$ ist Minimierer von $\|Ax - b\|_2$, d.h. $f(x^*) = f(\hat{x})$, aber $\|\hat{x} - x^*\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ - Widerspruch. $\blacksquare$

c) z.z. $\langle \nabla f(g(s)), g'(s) \rangle = 0$.

$\langle \nabla f(g(s)), g'(s) \rangle = (g'(s))^T \cdot \nabla f(g(s)) = \nabla f(g(s)) = 0$, denn:

Auf jeder Kurve $g(s)$ ist f konstant (per Definition), Daher ist $\nabla(f(g(s))) = 0$ in jedem Punkt. $\blacksquare$