②

a)

z.z. $f((1-\tau)x + \tau y) \leq (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$

Zeigen, dass $f(x) = \|x\|$ konvex ist, Anhand der Definition von Konvexität.

Seien $x, y \in S$ und $\tau \in [0,1]$ beliebig aber fest. Dann gilt:

$$f((1-\tau)x + \tau y) = \|(1-\tau)x + \tau y\| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|(1-\tau)x\| + \|\tau y\| \overset{\tau, (1-\tau) \geq 0}{=} (1-\tau)\|x\| + \tau\|y\| = (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$$

b)

Wir zeigen zwei Richtungen: Sei zuerst f eine konvexe Funktion.

Seien $(x_1, t), (x_2, t) \in \operatorname{epi} f$ beliebig. Dann gilt, dass für $\tau \in [0,1]$

$(x_3, t) \in \operatorname{epi} f$ gilt, mit $x_3 := (1-\tau)x_1 + \tau x_2$.

Denn $(x_3, t) \in \operatorname{epi} f$ genau dann, wenn $f(x_3) \leq t$. Sei o.B.d.A. $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Da $f(x_3) = f((1-\tau)x_1 + \tau x_2) \overset{f \text{ konvex}}{\leq} (1-\tau) f(x_1) + \tau f(x_2) \overset{f(x_1) \leq f(x_2)}{\leq} (1-\tau) f(x_2) + \tau f(x_2) = f(x_2) \leq t$, folgt

dass $\operatorname{epi} f$ konvex ist.

Für die zweite Richtung sei $\operatorname{epi} f$ eine konvexe Menge.

Seien $(x, t_x), (y, t_y) \in \operatorname{epi} f$, $\tau \in [0,1]$. Dann gilt:

Es ex. ein $z := (1-\tau)x + \tau y$, $t_z \in \mathbb{R}$ mit $(z, t_z) \in \operatorname{epi} f$, da $\operatorname{epi} f$ konvex ist.

Insbesondere gilt für $t_x := f(x)$, $t_y := f(y)$, da $f(x) \underset{\text{Bed. für } x \in \operatorname{epi} f}{\leq} t_x \overset{\text{Wahl von } t_x}{=} f(x)$ gilt.

Also ist $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \operatorname{epi} f$.

Damit folgt, dass $z = (1-\tau)x + \tau y$ und $t_z = (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$.

Da $(z, t_z) \in \operatorname{epi} f$ gilt somit $f(z) \leq t_z$

also $f((1-\tau)x + \tau y) \leq (1-\tau) f(x) + \tau f(y)$, also f konvex.