③ a)

a) Zeigen, dass der Schnitt konvexer Mengen C_i eine konvexe Menge ist.

Da $x_1, x_2 \in \bigcap_{i\in I} C_i$ gilt $x_1, x_2 \in C_i$ für alle $i \in I$.

Da jede Menge C_i konvex ist, folgt, dass

für bel. $\tau \in [0,1]$ $(1-\tau)x_1 + \tau x_2$ in allen C_i enthalten ist.

Damit ist es aber auch im Schnitt der C_i enthalten,

wodurch $\bigcap_{i\in I} C_i$ konvex ist. ∎

b)

z.z. für konvexe $f_i : S \to \mathbb{R}$, $i \in I$ gilt, dass

$f := \sup_{x\in S} f_i$ konvex ist.

Da die $(f_i)_{i\in I}$ konvex sind, sind nach 1b) die epigraphen $(\text{epi } f_i)_{i\in I}$ ebenfalls konvex.

Es gilt $\text{epi } f = \bigcap_{i\in I} \text{epi } f_i$. Mit a) folgt, dass epi f konvex ist,

und mit 1b), dass f konvex ist. ∎