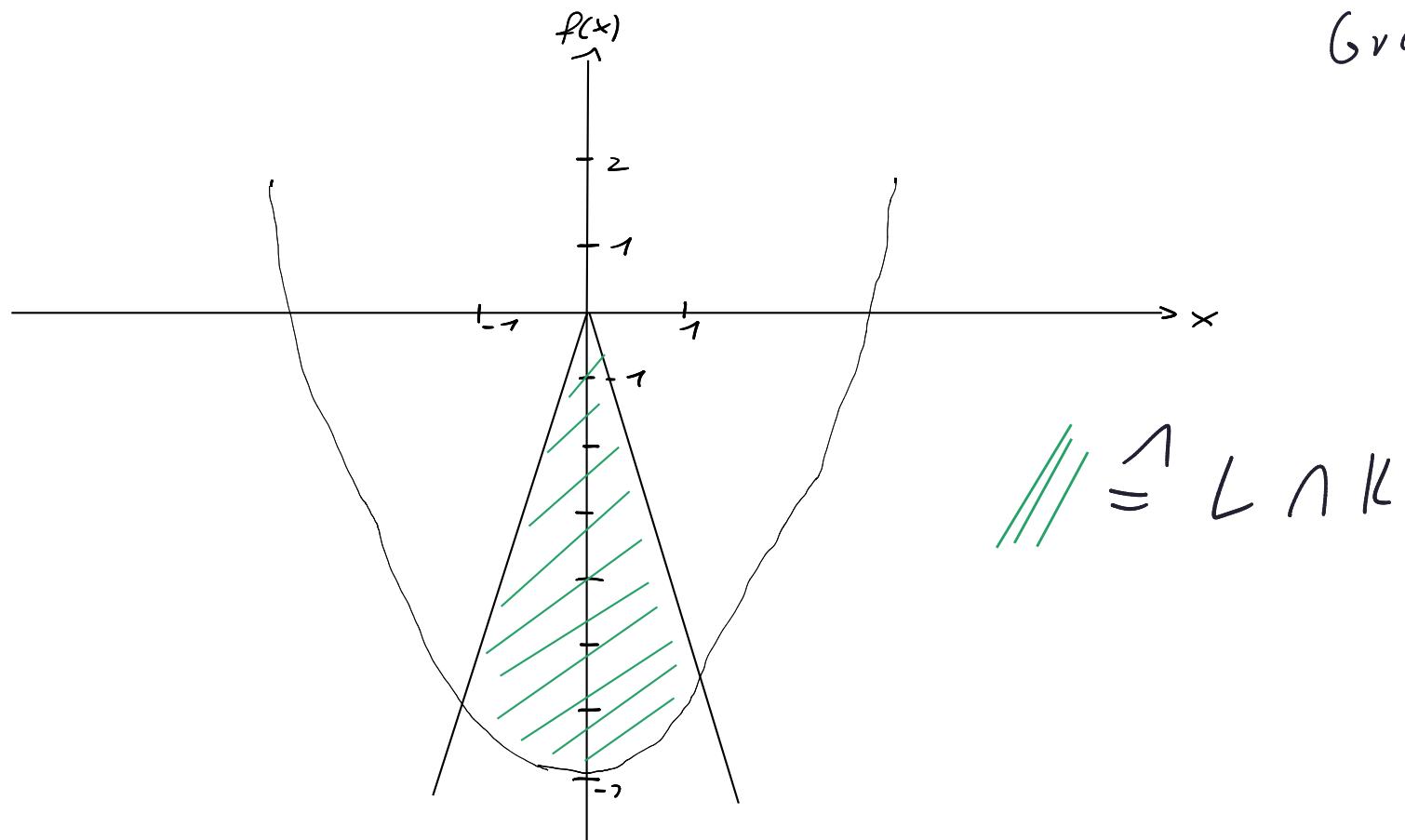


A1

Gruppe 1

a)



b) Wir zeigen, dass S konvex ist, indem wir zeigen, dass L und K konvex sind, wodurch $S = L \cap K$ nach Satz — ebenfalls konvex ist.

Wir zeigen nun, dass K konvex ist, indem wir zeigen, dass h eine konvexe Funktion ist. Nach Satz ist K dann konvex.

Seien dafür nun $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0, 1]$, dann gilt:

$$\begin{aligned} h((1-\tau)x + \tau y) &= 2 \| (1-\tau)x + \tau y \|_2^2 - 7 \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} 2 \left(\| (1-\tau)x \|_2 + \| \tau y \|_2 \right)^2 - 7 \\ &= 2 \left(\| (1-\tau)x \|_2^2 + \underbrace{\| (1-\tau)x \|_2 \cdot \| \tau y \|_2}_{\geq 0} + \| \tau y \|_2^2 \right) - 7 \leq 2 \| (1-\tau)x \|_2^2 + 2 \| \tau y \|_2^2 - (1-\tau) \cdot 7 - \tau \cdot 7 \end{aligned}$$

$$\stackrel{\tau_1, \tau_2 \geq 0}{=} (1-\tau)(2 \|x\|_2^2 - 7) + \tau(2 \|y\|_2^2 - 7) = (1-\tau)h(x) + \tau h(y). \text{ Damit ist } h \text{ konvex.}$$

Wir zeigen nun, dass L konvex ist.

Seien dafür $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in L, \tau \in [0, 1]$ beliebig. Sei zusätzlich obdt $t_1 \geq t_2$. Dann gilt:

(x_3, t_3) mit $x_3 := (1-\tau)x_1 + \tau x_2$ ist Element von L , denn:

$$\|x_3\|_2 = \|(1-\tau)x_1 + \tau x_2\|_2 \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|(1-\tau)x_1\|_2 + \|\tau x_2\|_2 \stackrel{\tau_1, \tau_2 \geq 0}{=} (1-\tau)\|x_1\|_2 + \tau\|x_2\|_2 \leq (1-\tau) \frac{-t_1}{5} + \tau \frac{-t_2}{5} \stackrel{\downarrow}{\leq} -\frac{t_2}{5}$$

Damit ist $(x_3, t_3) \in L$



$$c) f(y) = \left(\sum_{i=0}^n y_i^2 \right) + (y_{n+1} + 5)^2$$

$$\nabla f(y) = \begin{pmatrix} 2y_1 \\ 2y_2 \\ \vdots \\ 2y_n \\ 2y_{n+1} + 10 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{genau dann, wenn } y = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ mit } t = -5, x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\nabla^2 f(y) = 2 I$ spd ist, ist der kritische Punkt $(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix})$ ein Minimum.

Es gilt $(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}) \in L$, da $\|x\|_2 = \|0\|_2 = 0 < 1 = -\frac{-5}{5} = -\frac{t}{5}$ und $(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}) \in K$, da $h(x) = -7 < -5 = t$. Damit ist $(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}) \in S = L \cap K$, weswegen f auf S einen Minimierer hat.

d) Satz 1.4.13 liefert:

S konvex $\Rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n | Ax + b \in S\}$ ist konvex

$$g((1-\tau)x + \tau y) = f(A((1-\tau)x + \tau y) + b) = f((1-\tau)(Ax + b) + \tau(Ay + b))$$

f konvex

$$\leq (1-\tau)f(Ax + b) + \tau f(Ay + b) = \underline{(1-\tau)g(x) + \tau g(y)}$$

A2

a)

i) Zeigen, dass $-(\log(x))$ strikt konvex ist:

Da $\nabla^2 -\log(x) = \left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, folgt die Behauptung mit Satz 1.4.11 4).

Es gibt kein Minimum, nur ein Infimum bei $x \rightarrow \infty$.

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 - 8x_1 + x_2^2 + 6x_2 + 67$$

ii)

$$f((1-\tau)x + \tau y) = ((1-\tau)x_1 + \tau y_1)^2 - 8((1-\tau)x_1 + \tau y_1) + ((1-\tau)x_2 + \tau y_2)^2 + 6((1-\tau)x_2 + \tau y_2) + 67$$

D-ungl.

$$\begin{aligned} &\leq (1-\tau)x_1^2 + \tau y_1^2 - (1-\tau)8x_1 + 8\tau y_1 + (1-\tau)x_2^2 + \tau y_2^2 + 6(1-\tau)x_2 + 6\tau y_2 + (1-\tau) \cdot 67 + \tau \cdot 67 \\ &= (1-\tau)x_1^2 - (1-\tau)8x_1 + (1-\tau)x_2^2 + 6(1-\tau)x_2 + (1-\tau)67 + \tau y_1^2 + 8\tau y_1 + \tau y_2^2 + 6y_2 + \tau \cdot 67 \\ &= (1-\tau)f(x) + \tau f(y) \end{aligned}$$

Damit ist $f_1(x, y)$ strikt konvex.

Kritischer Punkt ist $(4, -3)$ da $\nabla f(x) = (2x_1 - 8, 2x_2 + 6)^T$

iii) f nimmt ein Minimum an, da $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ s.p.d. Da f konvex ist, ist das Minimum global

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 5 - 2x_1 + 3x_2$$

$$f_3((1-\tau)x + \tau y) = 5 - 2((1-\tau)x_1 + \tau y_1) + 3((1-\tau)x_2 + \tau y_2)$$

$$\begin{aligned} &= \tau \cdot 5 + (1-\tau) \cdot 5 - 2(1-\tau)x_1 - 2\tau y_1 + 3(1-\tau)x_2 + 3\tau y_2 \\ &= (1-\tau) \cdot 5 - 2(1-\tau)x_1 + 3(1-\tau)x_2 + \tau \cdot 5 - 2\tau y_1 + 3\tau y_2 \\ &= (1-\tau)f(x) + \tau f(y) \end{aligned}$$

Da hier nur Gleichheit gilt, ist f_3 konvex, aber nicht strikt konvex.

Es gibt keine kritischen Punkte, da $\nabla f(x) = (3, 8) \neq 0$.

Es gibt auch kein Minimum, nur ein Inf. bei $x \rightarrow (\infty, -\infty)$

b) Seien $m, k \in \mathbb{N}$

i) Für Sublineare Konvergenz benötigen wir g_k zusätzliche Iterationen, da gilt:

$$\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} = \frac{1}{k} = 10^{-m}$$
$$(\Rightarrow) \frac{1}{10^k} = 10^{-(m+1)}$$
$$\text{und } \frac{1}{10^k} = \frac{\|e^{k+g_k}\|}{\|e^0\|} \text{ gilt.}$$

Es benötigt $\log_p\left(\frac{1}{10}\right)$ um eine weitere Stelle Genauigkeit zu erreichen, denn:

ii) $\frac{\|e^k\|}{\|e^0\|} = p^k = 10^{-m}$

$$(\Rightarrow) p^{k+\bar{k}} \frac{p^k}{10} = 10^{-(m+1)}$$

$$\Rightarrow \bar{k} = \log_p\left(\frac{1}{10}\right)$$

iii) Für quadratische Konvergenz benötigen wir $k=1$ Iterationen, um eine zusätzliche Nachkommastelle zu erhalten, da ein quadratisch konvergentes Verfahren in jedem Schritt so viel Genauigkeit hat, wie in allen bisherigen Schritten zusammen und mehr ist.

c)

Wir wählen hier das Verfahren mit sublinearer Konvergenz, da $\|e^k\| = \frac{42}{k} = 0.1$ für $k=420$ gilt (d.h. das Verfahren benötigt 420 Iterationen bis $\|e^k\| = 0.1$ gilt).

Das lineare Verfahren benötigt 533 Schritte, da gilt:

$$0.1 = 21 (0.99)^k$$

$$(\Rightarrow) \frac{1}{210} = (0.99)^k$$

$$(\Rightarrow) k = 532,032721$$