数值分析

作者：Huang

目录

第 1 章 引论

1.1 数值运算的误差估计

我们有如下相对误差限估计公式

$$
\begin{aligned}
|e_r^*(y)| &= \left|\frac{e^*(y)}{f(x^*)}\right| \\
&= \left|\frac{f(x^*)-f(x)}{x^*-x}\cdot\frac{x^*}{f(x^*)}\cdot\frac{x^*-x}{x^*}\right| \\
&\approx \left|\frac{x^*\cdot f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\cdot\left|e_r^*(x)\right|
\end{aligned}
$$

若是多变量

1.2 有效数字与绝对误差、相对误差之间的关系

定理 1.1

若 x^* 有 n 位有效数字，则其相对误差 E_r^* 满足

$$
\varepsilon_r^* \le \frac{1}{2a_1}10^{-(n-1)}
$$

第 2 章 插值多项式

2.1 拉格朗日插值多项式及其余项

定义 2.1 (拉格朗日插值多项式)

$$\sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

定理 2.1 (误差余项)

设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上 $n+1$ 阶可微,$L_n(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$上的n 次插值多项式,插值节点为$\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a, b]$, 则$\forall x \in [a, b]$, 有

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$,$\xi \in (a, b)$, 且依赖于$x$.

2.2 牛顿插值多项式

2.2.1 差商的性质

定理 2.2 (n 阶均差与导数的关系)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

第 3 章 数值积分与数值微分

3.1 牛顿-科特斯公式

定义 3.1 (梯形公式, 代数精度为 1)

$$T = I_1 = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

余项为

$$R_T = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 = O(b-a)^3$$

♣

定义 3.2 (Simpson 公式, 代数精度为 3)

$$S = I_2 = \frac{1}{6}(b-a)[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

余项为

$$R_S = -\frac{b-a}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\eta)$$

♣

定义 3.3 (科特斯公式, 代数精度为 5)

$$C = I_4 = \frac{1}{90}(b-a)[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)]$$

余项为

$$R_C = R(I_4) = \int_a^b R_4(x)dx = -\frac{2(b-a)}{945}(\frac{b-a}{4})^6 f^{(6)}(\eta)$$

♣

3.2 复合求积公式

定义 3.4 (复合梯形公式, 代数精度为 1)

$$T = I_1 = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)]$$

余项为

$$R_T = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)(h)^2 = O(b-a)^3$$

♣

定义 3.5 (Simpson 公式, 代数精度为 3)

$$S = [f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})+f(b)]$$

余项为

$$R_S = -\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta)$$

♣

3.3 高斯求积公式

这个刷题为主

第 4 章 解线性方程组的直接方法

4.1 高斯消去法及高斯列主元消去法

高斯消去法的计算量

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{1}{3}n$$

4.2 矩阵的三角分解

定理 4.1

A 的顺序主子式全都不为零，则 A 可以分解为单位下三角矩阵 L 与上三角矩阵 U 的乘积，且这种分解是唯一的。

类似的，我们也有

定理 4.2

设 A 为对称正定矩阵。则一定存在一个主对角元全是正数的下三角阵 L, 使得

$$A = LL^T$$

且这种分解是唯一的

4.3 条件数

定义 4.1

设 A 为非奇异阵，称数 $cond(A)_v = \left\|A^{-1}\right\|_v \|A\|_v\,(v = 1, 2或\ \infty)$ 为矩阵 A 的条件数。

第 5 章 解线性方程组的迭代法

5.1 三种迭代法的迭代公式

定义 5.1 (雅克比迭代法)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i)$$

用矩阵表示即为

$$X^{(k+1)} = BX^{(k+1)} + f, B = D^{-1}(L+U), f = D^{-1}b$$

定义 5.2 (高斯-赛德尔迭代法)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}]$$

用矩阵表示即为

$$X^{(k+1)} = BX^{(k+1)} + f, B = (D-L)^{-1}U, f = (D-L)^{-1}b$$

定义 5.3 (SOR 迭代法)

用矩阵表示即为

$$X^{(k+1)} = BX^{(k+1)} + f, B = (D-\omega L)^{-1}((1-\omega)L + \omega U), f = \omega(D-\omega L)^{-1}b$$

定理 5.1

若线性方程组 AX=b 的系数矩阵 A 为严格对角占优矩阵，则解该方程组的 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法均收敛

定理 5.2

迭代格式 $X^{(k+1)} = BX^{(k)} + f$ 收敛的充要条件为：$\rho(B) < 1$

定理 5.3

设 A 可逆，且 $a_{ii} \neq \mathbf{0}$, 松弛法从任意 $\vec{x}^{(0)}$ 出发收敛 $\Rightarrow 0 < \omega < 2$ 。

第 6 章 非线性方程与方程组的数值解法

6.1 二分法二分次数与预定精度之间的关系

$$| x^* - x_k | \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^{k+1}}$$

6.2 不动点迭代法收敛发散情况

定理 6.1 (不动点迭代法解的存在唯一性定理)

设$\varphi(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ 满足以下两个条件：

(1) 对任意$x \in [a, b]$有$a \leq \varphi(x) \leq b$

(2) 存在正数$L < 1$, 使对任意的$x \in [a, b]$, 有

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$$

则$\varphi(x)$ 在$[a, b]$上存在唯一的不动点x^*

且存在下述误差估计

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0|$$

定理 6.2

设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连续，且 $|\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代格式局部收敛。

第 7 章 常微分方程初值问题数值解法