微分几何应试版教材

作者：Huang

时间：May 16, 2025

目录

第 1 章 曲线论

1.1 求弧长参数/弧长

求弧长参数，三步走

1. 求 $\vec{r}'$
2. 求 $|\vec{r}'|$
3. 求积分 $\int |\vec{r}'|\, dt$

例题 1.1 将圆柱螺线 $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 化为弧长参数

证明 三步走

1. 求导数 $\vec{r}'$:
   对参数 t 求导得:
   $$\vec{r}'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$
2. 求模长 $|\vec{r}'|$:
   计算导数的模:
   $$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$
3. 求弧长参数 s:
   积分模长得到弧长:
   $$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t$$
   解得 $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$，代入原参数方程得:
   $$\vec{r}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),\ a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right),\ \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

例题 1.2 求双曲螺线 $\vec{r} = (a\cosh t, a\sinh t, at)$ 的弧长参数表示。

证明 三步走

1. 求导数 $\vec{r}'$:
   对参数 t 求导得:
   $$\vec{r}'(t) = (a\sinh t,\ a\cosh t,\ a)$$
2. 求模长 $|\vec{r}'|$:
   利用双曲恒等式 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$:
   $$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2\cosh^2 t + a^2} = a\sqrt{2\cosh^2 t} = a\sqrt{2}\cosh t$$
3. 求弧长参数 s:
   积分模长得到弧长:
   $$s(t) = \int_0^t a\sqrt{2}\cosh\tau\, d\tau = a\sqrt{2}\sinh t$$
   反解得 $t = \sinh^{-1}\left(\dfrac{s}{a\sqrt{2}}\right)$，代入原方程得弧长参数化表示:
   $$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{a^2 + \frac{s^2}{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}},\ a\sinh^{-1}\left(\frac{s}{a\sqrt{2}}\right)\right)$$

例题 1.3 求旋轮线 $\vec{r} = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ 在 $0 \le t \le 2\pi$ 时的弧长。

证明 三步走:

1. 求导数 $\vec{r}'$:
   对参数 t 求导得:
$$\vec{r}'(t) = (a(1-\cos t),\ a\sin t)$$
2. 求模长 $|\vec{r}'|$:
   利用三角恒等式 $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$:
$$|\vec{r}'(t)| = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = 2a\sin(t/2)$$
3. 求总弧长:
   积分模长得总弧长:
$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin(t/2)\,dt = [-4a\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8a$$

1.2 切平面和法平面

切线方程的坐标表示:
$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$
法平面方程的坐标表示:
$$[x-x(t_0)]x'(t_0)+[y-y(t_0)]y'(t_0)+[z-z(t_0)]z'(t_0)=0$$

例题 1.4 求圆柱螺线 $\vec{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程

证明 三步走:

1. 求导向量:
$$\vec{r}'(t) = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$$
2. 求 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的点和切向量:
$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{b\pi}{3}\right), \quad \vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, b\right)$$
3. 写切线方程:
$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z-\frac{b\pi}{3}}{b}$$

例题 1.5 对于圆柱螺线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$,求它在 $(1,0,0)$ 时的切线与法平面。

证明 三步走:

1. 确定参数 t:
   由 $x=1$ 得 $\cos t=1 \Rightarrow t=0$,对应点 $(1,0,0)$
2. 求导向量:
$$\vec{r}'(t) = \{-\sin t,\ \cos t,\ 1\} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'(0)=(0,1,1)$$
3. 切线方程:
$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$$
4. 法平面方程:
   法向量为 $\vec{r}'(0)=(0,1,1)$,方程为:
$$0(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0 \quad \Rightarrow \quad y+z=0$$

例题 1.6 求三次挠曲线 $\vec{r}=\{at, bt^2, ct^3\}$ 在 t_0 时的切线和法平面。

证明 三步走：

1. 求导向量：

$$\vec{r}'(t) = \{a, 2bt, 3ct^2\}$$

2. 求 t_0 处的点和切向量：

$$\vec{r}(t_0) = \{at_0, bt_0^2, ct_0^3\}, \quad \vec{r}'(t_0) = \{a, 2bt_0, 3ct_0^2\}$$

3. 切线方程：

$$\frac{x - at_0}{a} = \frac{y - bt_0^2}{2bt_0} = \frac{z - ct_0^3}{3ct_0^2}$$

4. 法平面方程：

$$a(x - at_0) + 2bt_0(y - bt_0^2) + 3ct_0^2(z - ct_0^3) = 0$$

1.3 主法线、副法线、密切平面、从切平面

定义 1.3.1 (Frenet 标架)

设 r 为正则曲线，s 为弧长参数。

- 记 $T(s) = r'(s)$（自动为单位向量）
- 注意到 $|T(s)|^2 = 1 \Rightarrow T(s)' \cdot T(s) = 0$
- 若 $r'(s) \neq 0$，则令 $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$，最后令 $B(s) = T(s) \times N(s)$。

在 $r'(s) \neq \vec{0}$ 的地方总是可以定义以下坐标系 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$，称其为曲线 r 的 Frenet 标架。♣

定义 1.3.2 (主法线)

设正则曲线 $r(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$，则：

- 向量 $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$ 称为曲线在 s 处的主法线向量。
- 主法线方向是曲线弯曲方向的正交单位化结果。

♣

定义 1.3.3 (副法线)

在 Frenet 标架中：

- 向量 $B(s) = T(s) \times N(s)$ 称为曲线在 s 处的副法线向量。
- 副法线方向由右手法则确定，且 $B(s)$ 始终垂直于密切平面。

♣

定义 1.3.4 (密切平面)

在 Frenet 标架 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$ 中：

- 由切向量 $T(s)$ 和主法线向量 $N(s)$ 张成的平面称为密切平面。
- 密切平面方程为：$(X - r(s)) \cdot B(s) = 0$，即所有与副法线正交的点构成的平面。

♣

定义 1.3.5 (从切平面)

对于 Frenet 标架 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$：

- 由切向量 $T(s)$ 和副法线向量 $B(s)$ 张成的平面称为从切平面（亦称矫正平面）。
- 从切平面方程为：$(X - r(s)) \cdot N(s) = 0$，即所有与主法线正交的点构成的平面。

♣

定义 1.3.6 (法平面)

- 由主法线 $N(s)$ 和副法线 $B(s)$ 张成的平面称为法平面。
- 法平面方程为：$(X - r(s)) \cdot T(s) = 0$，即所有与切线正交的点构成的平面。♣

例题 1.7 求 $\vec{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 在 $(1,0,0)$ 处的法平面、副法线、密切平面、主法线及从切平面。

证明

1. 确定参数 t 值由 $\cos t = 1$ 且 $\sin t = 0$，得 $t = 0$，对应点 $(1,0,0)$。
2. 计算 **Frenet** 标架：

   (a). 切向量 $\vec{T}$：

   $$\vec{r}'(t) = \{-\sin t, \cos t, 1\} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'(0) = \{0, 1, 1\}$$

   单位化得：

   $$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

   (b). 主法线 $\vec{N}$：计算二阶导数：

   $$\vec{r}''(t) = \{-\cos t, -\sin t, 0\} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}''(0) = \{-1, 0, 0\}$$

   单位化得主法线方向：

   $$\vec{N} = \frac{\vec{r}''(0)}{\|\vec{r}''(0)\|} = \{-1, 0, 0\}$$

   (c). 副法线 $\vec{B}$：

   $$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

3. 几何对象方程：

   (a). 切线方程：
   方向向量 $\vec{r}'(0) = \{0, 1, 1\}$，过点 $(1,0,0)$：

   $$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad 或 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

   (b). 法平面方程：
   法向量为 $\vec{r}'(0)$，方程为：

   $$0(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z = 0$$

   (c). 主法线方程：
   方向向量 $\vec{N} = \{-1, 0, 0\}$，过点 $(1,0,0)$：

   $$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \quad 或 \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

   (d). 副法线方程：
   方向向量 $\vec{B} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，过点 $(1,0,0)$：

   $$x = 1, \quad \frac{y}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

   (e). 密切平面方程：
   法向量为 $\vec{B}$，方程为：

   $$0(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = y$$

(f). 从切平面方程：
法向量为 $\vec{N}$，方程为：

$$-1(x-1)+0(y-0)+0(z-0)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

1.4 曲率挠率

定义 1.4.1 (曲率)

我们称 $k(s)=|T'(s)|=|r''(s)|$ 为曲线的曲率。♣

定义 1.4.2 (挠率)

$$\tau(s)=-B'(s)\cdot N(s)$$

♣

对于一般参数 t

$$\begin{aligned} k(t) &= k(s)=T'(s)\cdot N(s) \\ &= \frac{|r'\times r''|}{|r'|^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau(s)=-B'(s)\cdot N(s) \\ &= \frac{[r',r'',r''']}{|r'\times r''|^2}. \end{aligned}$$

例题 1.8 求 $\vec{r}=\{a(3t-t^3),3at^2,a(3t+t^3)\}$ 的曲率和挠率。