# 弱收敛,强收敛

## 原空间上的收敛

**强收敛与弱收敛**

**定义**

*强收敛*
设 X 为赋范空间，若 $\|x_n - x\| \to 0$，则称 $x_n$ 强收敛到 x，记为 $x_n \to x$。

*弱收敛*
设 X 为赋范空间，若对于任意 $f \in X'$，有 $f(x_n) \to f(x)$，则称 $x_n$ 弱收敛到 x，记为 $x_n \rightharpoonup x$ 或 $x = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$，称 x 为弱极限。

**性质**

若 $x_n \to x$，则:

1. 弱极限唯一
2. 其任意子列均强收敛到 x
3. $x_n : n \geq 1$ 为有界集

*证明要点*

1. 根据不唯一，则对于任意 f，都有 f(x) = f(y)；而 Hahn-Banach 告诉我们只要 x 和 y 不相等，就存在 f 使它们区分开。
2. 对于任意 f，子列也自然满足上述定义。
3. 考虑范数泛函，$\sup_n |f(x_n)(f)| = \sup_n |f(x_n)|$ 有限，则 $\|x_n\| = \|f(x_n)\|$ 有限。

**强弱收敛的关系**

1. 强收敛必定弱收敛
2. 在有限维赋范空间中，强收敛与弱收敛等价

*证明要点*

1. $|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|\|x_n - x\|$
2. 有限维赋范空间必存在 Hamel 基，定义一组泛函输出 Hamel 基系数，由于系数收敛，则数列收敛。

*注*
如果是可分无穷维 Hilbert 空间，则强收敛和弱收敛不相同。考虑标准正交基 $e_n$，对于任何向量 $f$，都可以写成 $f(x) = \langle x, x_0\rangle$；而由 Bessel 不等式，可以得到 $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_0, e_n\rangle|^2 \leq \|x_0\|^2$，由此可以知道 $\lim_{n\to\infty} f(e_n) = 0$，即弱 $e_n \to 0$。而 $\|e_n\| = 1$，则此 $e_n \nrightarrow 0$。

**弱收敛的等价关系**
$x_n \rightharpoonup x$ 等价于 $\sup_{n\geq 1} \|x_n\| < \infty$ 并且存在完全集 $M \subset X'$，使得任取 $f \in M$，有 $f(x_n) \to f(x)$。

*证明反向*

1. 前者根据前面的性质就可以得到，后者根据定义之间得到。
2. 根据完全集的定义，对于任意一个线性泛函 f，都能找到一个 span(M) 中的序列逼近它，应用三角不等分解，就可以说明 $f(x_n) \to f(x)$。

**例子**
考虑 $X = l^2, X' = l^2$，$M = \{f_i \in X' : f_i(x) = \langle e_i, x\rangle = x_i\}$ 为 X 的完全集。在此情况下，$x_n \rightharpoonup x$ 等价条件的第二项变成了 $x_i^{(n)} \to x_i$，即数列依坐标收敛到 x。

# 原空间上线性泛函的收敛

**定义**

设 X 为赋范空间，$f_n, f \in X'$，如果任取 $x \in X$，都有 $f_n(x) \to f(x)$，则称 $f_n$ 弱星收敛到 f，记弱星极限为 $f = w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$。

**性质**

若 $f = w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$，则：

1. 弱星极限唯一；
2. 其任意子列均弱收敛到 f；
3. 若 X 为 Banach 空间，则 $\{f_n : n \geq 1\}$ 为在 $X'$ 中为有界集。

*证明*
前两点显然；最后一点利用一致有界性定理可得 $\sup|f_n(x)| < \infty \Rightarrow \sup\|f_n\| < \infty$。

**性质：弱星收敛的等价关系**
$f = w^*\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n$ 等价于 $\sup_{n\geq 1}\|f_n\| < \infty$ 并且存在完全集 $M \subset X$，使得任取 $x \in M$，有 $f_n(x) \to f(x)$。

*证明*
证明方法类似。

# 线性算子的收敛

**定义：一致收敛**
设 X, Y 为赋范空间，$T_n \in B(X, Y)$，T 为 X 到 Y 的线性算子，如果 $\|T_n - T\| \to 0$ 则称 $T_n$ 一致收敛到 T。

**定义：强收敛**
设 X, Y 为赋范空间，$T_n \in B(X, Y)$，T 为 X 到 Y 的线性算子，如果 $T_n(x) \to T(x), \forall x \in X$ 则称 $T_n$ 强收敛到 T。

**定义：弱收敛**
设 X, Y 为赋范空间，$T_n \in B(X, Y)$，T 为 X 到 Y 的线性算子，如果 $f(T_n x) \to f(Tx), \forall x \in X, f \in Y'$ 则称 $T_n$ 弱收敛到 T。

**例**
考虑 $T_n : l^2 \to l^2, (x_1, x_2, \cdots) \to (0, \cdots, 0, x_1, x_2, \cdots)$（后移了前面的n个零），这是子空间的投影算子。

1. 这是子空间收敛 0，也是弱收敛到 0。
2. 因为 $\|T_n x\| = \|\sum_{k>n} x_k e_k\| \leq \|x\|(\sum_{k>n}|e_k|^2)^{1/2} = 0$，因此收敛，但是 $\|T_n x\| = \|x\|_n \nrightarrow 0$，因此不一致收敛。

**例**
考虑 $T_n : l^2 \to l^2, (x_1, x_2, \cdots) \to (0, x_1, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$，这是子空间的加倍 n 项运算，这是子空间收敛 0，也是弱收敛到 0。

*证明*

首先验证出线性算子 $\|T_n\| = 1$ 因此内积空间中有 $\|T_n x\| \le \|x\|$。
对于任意 $x \in l^2$，有 $T_n x \in l^2$，而 $\|T_n x\| = (\|x_1\|^2 + \sum_{k>n} \|x_k\|^2)^{1/2} \to 0$，因此强收敛，也是 $\|T_n\| = 1$，因此不一致收敛。

*证明*

首先验证线性，这是子空间的投影算子，因此是线性的。
对于任意 $x \in l^2$，有 $T_n x \in l^2$，而 $\|T_n x\| = (\|x_1\|^2 + \sum_{k>n} \|x_k\|^2)^{1/2} \to (x_1, \cdots)$，这是子空间收敛到零，因此是线性算子不强收敛到任何算子。

*证明*

首先验证线性，这是子空间的投影算子，因此是线性的。
对于任意 $x \in l^2$，有 $\|T_n\| = n$，因此这是子空间不强收敛到 $T = \infty$，不强收敛到有界算子。

**性质：前三者的关系**

线性空间算子的一致收敛必然导致强收敛的存在，但是反过来不一定成立。

**性质：弱收敛**

对于有限维，弱收敛和强收敛是等价的，因为有限维中两个范数等价。

**性质：Banach 空间中的弱收敛**

设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，线性空间算子 $T_n$ 弱收敛到算子 T，则 $\|T\| \le \sup_{n\ge1} \|T_n\| < \infty$。

*证明*

对于任意 $x \in X$，由于弱收敛，对于任意 $f \in Y'$，由弱收敛的定义，存在 Hahn-Banach 定理中的一个泛函 $f(T_n x) \to f(Tx)$，那么 $f(T_n x)$ 有界。因此
$\|T\| = \sup_{f\in Y'} \|f(Tx)\| \le \sup_{f\in Y'} \|f(Tx)\| \le \|f\|\|Tx\|\|x\| \le \|x\|$。

**性质：Banach 空间中的弱收敛**

设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，线性空间算子 $T_n$ 弱收敛到算子 T，则 $\sup_{n\ge1} \|T_n\| < \infty$ 且存在完全集 $M \subset Y'$，使得对任意 $x \in X$，有 $T_n(x) \to T(x), \forall x \in M$。