



拓扑学

作者: hjw

时间: April 9, 2022



你这个学历的基米无权哈我

目录

第 1 章 拓扑空间基础	1
1.1 拓扑空间的定义	1
1.2 开集与闭集	2
第 2 章 连续映射	4
第 3 章 网与收敛	6
3.1 预序集与定向集	6
3.2 网的定义与收敛	6
第 4 章 拓扑的生成	8
4.1 拓扑族的交	8
4.2 拓扑基与子基	8
第 5 章 分离公理	11
5.1 滤子与滤基	12
5.2 正则空间与正规空间	14
第 6 章 紧致性	17
6.1 紧空间	17
第 7 章 完全正则空间与 Urysohn 引理	18
7.1 完全正则空间	18
7.2 Urysohn 引理	19
第 8 章 可分性与可数性公理	21
8.1 可分空间与稠密性	21
8.2 Lindelöf 空间与正规性	21
8.3 第二可数空间	22
8.4 可度量空间	23
第 9 章 乘积与和	28
9.1 乘积拓扑与其子基	28

第 1 章 拓扑空间基础

1.1 拓扑空间的定义

我们首先引入拓扑和拓扑空间的概念

定义 1.1 (拓扑)

设 X 为集合, 拓扑 τ 为 X 的子集族, 满足

1. $\emptyset \in \tau$ 且 $X \in \tau$;
2. 若 $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ 则 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$;
3. 若 $U_1, \dots, U_n \in \tau$ 则 $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau$

例如, 对于实数集 \mathbb{R} , 常取由所有开区间生成的标准拓扑; 将所有子集都视为开集得到离散拓扑, 这个是最大的拓扑; 而仅有 \emptyset 和 X 为开集的则称为平凡拓扑。

例题 1.1 Zariski 拓扑 对域 \mathbb{k} 上的仿射空间 \mathbb{k}^n , Zariski 拓扑定义为其闭集恰为多项式集合的零点集, 即对于任意 $S \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$, 令

$$V(S) = \{x \in \mathbb{k}^n : f(x) = 0 \text{ 对所有 } f \in S\}, \quad (1.1)$$

并以所有此类 $V(S)$ 作为闭集产生拓扑。

定义 1.2 (拓扑空间)

设 X 为集合, 若 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是一个拓扑, 则称 (X, τ) 为拓扑空间。

定义 1.3 (邻域)

对拓扑空间 (X, τ) 中的点 $x \in X$, 若 $U \in \tau$ 且 $x \in U$, 则称 U 为点 x 的一个邻域, 点 x 的所有邻域所成的集合记为 $\mathcal{N}(x)$, 即

$$\mathcal{N}(x) = \{U \in \tau : x \in U\}. \quad (1.2)$$

定义 1.4 (聚点)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 且 $A \subseteq X$, 若对任意 $x \in X$ 满足对任意邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$, 有

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \quad (1.3)$$

则称 x 为集合 A 的一个聚点。

定义 1.5 (闭包点)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 且 $A \subseteq X$, 若对任意 $x \in X$ 满足对任意邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$, 有 $U \cap A \neq \emptyset$, 则称 x 为集合 A 的一个闭包点, 集合 A 的闭包记为 \overline{A} , 并可等价地表述为

$$\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \text{ 对任意 } U \in \mathcal{N}(x)\}. \quad (1.4)$$

定义 1.6 (导集)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 且 $A \subseteq X$, 集合 A 的导集定义为所有属于 A 的聚点所构成的集合, 记为 A' , 即

$$A' = \{x \in X : (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ 对任意 } U \in \mathcal{N}(x)\}. \quad (1.5)$$

定义 1.7 (内点)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 且 $A \subseteq X$, 若对任意 $x \in X$ 存在一个邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $U \subseteq A$, 则称 x 为集合 A 的一个内点, 集合 A 的内记为 A° , 并可等价地表述为

$$A^\circ = \{x \in X : \exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } U \subseteq A\} = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}. \quad (1.6)$$

♣

注 回忆起度量空间定义的上面的东西, 我们发现二者其实是等价的, 即在度量空间 (X, d) 上由开球生成的拓扑与公理化拓扑下的内、闭、导集概念相容。

1.2 开集与闭集

定义 1.8 (开集)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 子集 $U \subseteq X$ 若对任意 $x \in U$ 存在邻域 $V \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $V \subseteq U$, 则称 U 为 X 的一个开集

♣

命题 1.1

设 (X, τ) 为拓扑空间, 且 $U \subseteq X$, 则 U 为开集当且仅当对任意 $x \in U$ 存在邻域 $V \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $V \subseteq U$.

♣

证明 左推右: 若 U 为开集, 则对任意 $x \in U$ 按照开集的定义存在邻域 $V \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $V \subseteq U$;

右推左: 若 U 为空, 则显然为开集; 若 U 非空, 则对任意 $x \in U$ 存在邻域 $V_x \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $V_x \subseteq U$, 因此

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x, \quad (1.7)$$

故 U 为开集。

命题 1.2

若 A 为闭集, 则有

$$\overline{A} = A \quad (1.8)$$

♣

证明 左推右: 先证明 $\overline{A} \subset A$, 设 $x \in \overline{A}$, 则按闭包的定义有

$$\forall U \ni x, \quad U \cap A \neq \emptyset, \quad (1.9)$$

若反设 $x \notin A$, 则由于 A 为闭集, $X \setminus A$ 为开集, 故存在开邻域 $V \ni x$ 且 $V \subset X \setminus A$, 从而 $V \cap A = \emptyset$, 与上式矛盾, 因此 $x \in A$, 于是 $\overline{A} \subset A$.

再证明 $A \subset \overline{A}$: 设 $x \in A$, 则对于任意开邻域 $U \ni x$ 有 $x \in U \cap A$, 从而 $U \cap A \neq \emptyset$, 这说明 $x \in \overline{A}$, 因此 $A \subset \overline{A}$.

右推左: 若 $\overline{A} = A$, 则对任意 $x \in X \setminus A$ 有 $x \notin \overline{A}$, 因此存在开邻域 $U \ni x$ 使得

$$U \cap A = \emptyset, \quad (1.10)$$

从而 $X \setminus A$ 为开集, 故 A 为闭集。

命题 1.3

\overline{A} 为闭集

♣

证明 设 $x \in X \setminus \overline{A}$, 则由 $x \notin \overline{A}$ 可知存在开邻域 $U \ni x$ 使得 $U \cap A = \emptyset$, 从而 $U \subset X \setminus \overline{A}$, 说明 $X \setminus \overline{A}$ 为开集, 故 \overline{A} 为闭集。

命题 1.4 \bar{A} 为包含 A 的最小闭集

证明 若 F 为任一包含 A 的闭集, 则由 $A \subset F$ 及 F 的闭性可推出 $\bar{A} \subset F$, 因此 \bar{A} 是包含 A 的最小闭集。

注

E 为含 A 的最小闭集当且仅当 $E = \bar{A}$

证明

右推左: 已经证明过了

左推右: 设 E 为含 A 的最小闭集, 则由于 \bar{A} 是包含 A 的闭集, 由最小性得 $E \subset \bar{A}$, 另一方面由 \bar{A} 为所有包含 A 的闭集的交集可得 $\bar{A} \subset E$, 因此

$$E = \bar{A}. \quad (1.11)$$

命题 1.5

若 A 为开集, 则有

$$A^\circ = A \quad (1.12)$$



证明 左推右: 由于 A 自身为开集且显然 $A \subset A$, 由 A° 作为所有包含于 A 的开集的并的定义可知 $A \subset A^\circ$, 而先前已证明 $A^\circ \subset A$, 因此 $A^\circ = A$ 。

右推左: 因为 A° 为开集且

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \quad (1.13)$$

故若 $A^\circ = A$ 则 A 为开集, 从而完成证明。

命题 1.6

A 的内点集 (记 A°) 是所有包含于 A 的最大开集



证明 记

$$A^\circ = \bigcup \{U \mid U \subset A, U \text{ 为开集}\}, \quad (1.14)$$

则作为开集并的并集 A° 本身为开集, 且对任意开集 U 若 $U \subset A$ 则有 $U \subset A^\circ$, 因此 A° 是所有包含于 A 的开集中的最大者。

注 B 为 A° 当且仅当 B 为包含于 A 的最大开集

证明 类似

命题 1.7

(X, τ) 拓扑空间, $A \subset X$, 有

$$A^\circ = A^{c-c} \text{ (习题)} \quad (1.15)$$

**命题 1.8**

A 为开集当且仅当 A^c 为闭集



证明 左推右: 若 A 为开集, 则对任意 A^c 的极限点 x , 若反设 $x \notin A^c$ 即 $x \in A$, 则由 A 的开性可取开邻域 U 使得 $x \in U \subset A$, 从而 U 与 A^c 无交以违背 x 为极限点的假设, 因此 $x \in A^c$, 即 A^c 含其所有极限点, 故 A^c 为闭集。

右推左: 设 A^c 为闭集且 $x \in A$, 则 $x \notin A^c$, 故 x 不是 A^c 的极限点, 因而存在开邻域 U 使得 $U \cap A^c = \emptyset$, 从而 $U \subset A$, 说明任意点 $x \in A$ 都有包含于 A 的开邻域, 即 A 为开集。

第2章 连续映射

本章讨论拓扑空间之间的连续映射及其性质。

定义 2.1 (连续性)

设拓扑空间 (X, \mathcal{T}_X) 与 (Y, \mathcal{T}_Y) , 映射 $f: X \rightarrow Y$ 在点 $x \in X$ 处连续, 若对任意包含 $f(x)$ 的开集 $V \in \mathcal{T}_Y$, 存在包含 x 的开集 $U \in \mathcal{T}_X$ 使得 $f(U) \subset V$ 。

命题 2.1

映射 $f: X \rightarrow Y$ 在每一点连续当且仅当对于任意开集 $V \subset Y$, 其原像 $f^{-1}(V)$ 在 X 中为开集

证明 右推左: 设任意包含 $f(x)$ 的开集 $V \in \mathcal{T}_Y$, 由假设 $f^{-1}(V)$ 在 X 中为开且包含 x , 于是取 $U = f^{-1}(V)$ 可得包含 x 的开邻域且 $f(U) \subset V$, 故 f 在 x 处连续, 因 x 为任意点, 遂得 f 在每一点连续。

命题 2.2

映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 X 上连续当且仅当对于任意闭集 $C \subset Y$, 其原像 $f^{-1}(C)$ 在 X 中为闭集。

命题 2.3

$f: X \rightarrow Y$

1. $\forall U \subset Y$, 有 $f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$
2. $\forall A, B \subset Y$ 有, $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$
3. 任意一族子集有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i). \quad (2.1)$$

4. 对于任意族 $\{U_i\}_{i \in I} \subset Y$, 有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

5. $f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$

命题 2.4

设拓扑空间 (X, \mathcal{T}_X) 与 (Y, \mathcal{T}_Y) , 映射 $f: X \rightarrow Y$, 则以下四条等价

1. 对任意点 $x \in X$, f 在 x 连续;
2. 对任意开集 $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ 在 X 中为开集;
3. 对任意闭集 $C \subset Y$, $f^{-1}(C)$ 在 X 中为闭集;
4. 若 $\forall A \subset X$, 有

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad (2.2)$$

5. $\forall B \subset Y$ 有

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) \quad (2.3)$$

证明 1,2,3 相互等价已经证明过了, 下面证明 3 和 4 等价

我们先证明 3 推 4, 要证 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, 只要证 $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, 由于 $\overline{f(A)}$ 为闭, 对于任意 $a \in A$ 有

$f(a) \in f(A) \subset \overline{f(A)}$, 故 $a \in f^{-1}(\overline{f(A)})$, 即

$$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \quad (2.4)$$

而 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 为闭集, 故包含 \overline{A} , 于是 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

接下来是 4 推 3, 那我们任取一个闭集

$$E \subset Y, \quad E \text{ 闭}, \quad (2.5)$$

要证 $f^{-1}(E)$ 闭于 X , 只要证 $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(E)$, 只要证 $f(\overline{f^{-1}(E)}) \subset E$, 这是因为, 由于 3 对任意集合 A 成立, 将 $A = f^{-1}(E)$ 代入得

$$f(\overline{f^{-1}(E)}) \subset \overline{f(f^{-1}(E))} \subset \overline{E} = E, \quad (2.6)$$

从而 $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(E)$, 即 $f^{-1}(E)$ 为闭集。

第3章 网与收敛

在一般拓扑空间中，序列的概念不足以刻画收敛性质，我们需要推广到网的概念。

3.1 预序集与定向集

定义 3.1 (预序集)

设 (Ω, \leq) 为集合 Ω 上带二元关系 \leq 的结构，如果对任意 $x, y, z \in \Omega$ 都有 (i) $x \leq x$ (自反性)，以及 (ii) $x \leq y$ 且 $y \leq z$ 蕴含 $x \leq z$ (传递性)，则称 (Ω, \leq) 为预序集

例题 3.1 比如说自然数就是一个预序集

定义 3.2 (定向集)

设 (Ω, \leq) 为预序集，如果对任意有限子集 $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Omega$ 存在 $y \in \Omega$ 使得 $x_i \leq y$ 对所有 $i = 1, \dots, n$ 成立，则称 (Ω, \leq) 为定向集。

例题 3.2 领域就是一个定向集

3.2 网的定义与收敛

定义 3.3 (网)

设 (Ω, \leq) 为定向集， X 为集合，则称任意映射 $x : \Omega \rightarrow X$ 为以 Ω 为下标的网，记作 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ ，并称每个 $\alpha \in \Omega$ 为该网的下标和位置

定义 3.4 (网的收敛)

设 (X, τ) 为拓扑空间， $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ 为以定向集 (Ω, \leq) 为下标的网，则称 (x_α) 收敛到 $x \in X$ (记作 $x_\alpha \rightarrow x$) 若对于任意包含 x 的邻域 U 存在 $\alpha_0 \in \Omega$ 使得对所有 $\alpha \in \Omega$ 若 $\alpha \geq \alpha_0$ 则 $x_\alpha \in U$ ，即满足

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \exists \alpha_0 \in \Omega \forall \alpha \in \Omega (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U). \quad (3.1)$$

命题 3.1

存在一个以邻域族 $\mathcal{N}(x)$ 为定向集的网 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ ，使得对每个 $U \in \mathcal{N}(x)$ 有 $x_U \in U$ ，并且该网收敛于 x ，即

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) x_U \in U, \quad (x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow x. \quad (3.2)$$

证明 取定向集为邻域族 $\mathcal{N}(x)$ 并以反包含关系作为偏序 (即对 $U, V \in \mathcal{N}(x)$ 令 $U \geq V$ 当且仅当 $U \subseteq V$)，对每个 $U \in \mathcal{N}(x)$ 任取 $x_U \in U$ ，则对于任意邻域 $W \in \mathcal{N}(x)$ 取 $\alpha_0 = W$ 有

$$\forall W \in \mathcal{N}(x) \exists \alpha_0 = W \in \mathcal{N}(x) \forall \alpha \in \mathcal{N}(x) (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in W), \quad (3.3)$$

从而 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow x$.

命题 3.2

设 X 为拓扑空间， $A \subseteq X$ ，则

$$x \in \overline{A} \iff \exists \text{ net } (x_\alpha)_{\alpha \in D} \subset A \text{ such that } (x_\alpha) \rightarrow x. \quad (3.4)$$

证明

若存在网 $(x_\alpha)_{\alpha \in D} \subset A$ 且 $(x_\alpha) \rightarrow x$, 则对任一邻域 $W \in \mathcal{N}(x)$ 存在 α_0 使得 $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in W$, 从而 $W \cap A \neq \emptyset$, 即 $x \in \overline{A}$;

反之, 若 $x \in \overline{A}$, 则对每一邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$ 选取一点 $x_U \in A \cap U$, 即

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \quad x_U \in A \cap U, \quad (3.5)$$

由此得到网 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \subset A$, 且对于任意 $W \in \mathcal{N}(x)$, 当 $U \subset W$ 时有 $x_U \in U \subset W$, 因此

$$(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow x, \quad (3.6)$$

从而存在所需的网, 证明完成。

命题 3.3

f 在 x 连续当且仅当对于任意收敛到 x 的网 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ 都有

$$(f(x_U))_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow f(x). \quad (3.7)$$

证明 右推左

我们首先有

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad (3.8)$$

. 因此对于任意收敛到 x 的网 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$, 由于对于任一包含 x 的集合 A 有尾部最终包含于 \overline{A} 并且 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, 其像网收敛于 $f(x)$, 即

$$(f(x_U))_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow f(x). \quad (3.9)$$

左推右: 设 f 在 x 处连续, 由 $x \in \overline{A}$, 知 $U \cap A \neq \emptyset$ 则存在来自 A 的网 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ 收敛于 x , 故由连续性其像网收敛于 $f(x)$, 即

$$(f(x_U))_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow f(x). \quad (3.10)$$

第4章 拓扑的生成

本章讨论如何从给定的集合族生成拓扑。

4.1 拓扑族的交

命题 4.1

X 为集合, 若 $(\mathcal{T}_\alpha)_\alpha$ 为 X 上的一族拓扑, 则

$$\mathcal{T} := \bigcap_{\alpha} \mathcal{T}_\alpha \quad (4.1)$$

为 X 上的拓扑, 且为包含所有 \mathcal{T}_α 的最小拓扑, 而 $\bigcup_{\alpha} \mathcal{T}_\alpha$ 未必为拓扑。

证明 具体地, 设 $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$, 则对任意 α 有 $U_i \in \mathcal{T}_\alpha$, 且由于每个 \mathcal{T}_α 对任意并运算闭合, 我们有

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_\alpha \quad (\forall \alpha), \quad (4.2)$$

从而 $\bigcup_{i \in I} U_i \in \bigcap_{\alpha} \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}$, 类似地可证有限交运算的闭合性, 故 \mathcal{T} 为拓扑且显然为包含所有 \mathcal{T}_α 的最小拓扑, 而 $\bigcup_{\alpha} \mathcal{T}_\alpha$ 未必为拓扑。

4.2 拓扑基与子基

定义 4.1 (拓扑子基)

(X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, 若由 $S \subset \mathcal{T}$, \mathcal{T} 为 S 的最小拓扑, 则称 S 为 (X, \mathcal{T}) 上的拓扑子基

命题 4.2

$f: X \rightarrow Y$, X, Y 是拓扑的, S 是 Y 的子基, 则下列两个命题等价:

1. f 连续;
2. 对任意 $S \in \mathcal{S}$, 有 $f^{-1}(S)$ 开于 X .

证明 $1 \rightarrow 2$ 显然

$2 \rightarrow 1$ 令

$$\mathcal{A} = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ 在 } X \text{ 中为开集}\} \quad (4.3)$$

只要证明 $\mathcal{A} \supset \mathcal{T}_Y$, 从而对任意 $V \in \mathcal{T}_Y$ 有 $f^{-1}(V)$ 在 X 中开, 即 f 连续。

下证 $\mathcal{A} \supset \mathcal{T}_Y$, 令 \mathcal{B} 为生成 \mathcal{T}_Y 的一组基, 任取 $V \in \mathcal{T}_Y$, 则存在指标集 I 及基元 $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$ 使得 $V = \bigcup_{i \in I} B_i$, 从而

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_X, \quad (4.4)$$

命题 4.3

若 S 为拓扑空间 (X, \mathcal{T}) 上的子基, $(x_\alpha)_\alpha$ 是 X 中的网, $x \in X$, 则以下等价

1. $x_\alpha \rightarrow x$
- 2.

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \text{ 且 } U \in S \exists \alpha_0 \in \Omega, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U. \quad (4.5)$$

证明 $1 \rightarrow 2$ 显然

$2 \rightarrow 1$ 令

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{T} \mid \exists \alpha_0 \in \Omega, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U, \} \quad (4.6)$$

下证 $\mathcal{A} = \mathcal{T}$

1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ 且 \mathcal{A} 包含由 \mathcal{S} 生成的拓扑: 拓扑 \mathcal{T} 是由子基 \mathcal{S} 生成的, 因此任意 $V \in \mathcal{T}$ 包含一个有限交

$$B = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n,$$

其中每个 $S_i \in \mathcal{S}$ 且 $x \in S_i$ 。由假设, 每个 S_i 在某一 α_i 后包含 x_α , 取 $\alpha_0 = \max \alpha_i$, 则 $\forall \alpha \geq \alpha_0$, 有 $x_\alpha \in B$ 。因此 $B \in \mathcal{A}$ 。由于 $B \subset V$ 且 \mathcal{A} 对超集封闭, 得 $V \in \mathcal{A}$, 即 $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ 。

2. \mathcal{A} 是拓扑: 由定义可见, 若 $E_i \in \mathcal{A}$, 则存在相应的 α_i 使得网最终在 E_i 中。取 $\alpha_0 = \max \alpha_i$ 可得网最终在有限交 $\cap_i E_i$ 中; 对任意族 $\{E_j\}$, 网最终在某个 E_j 中即在其并集内, 因此 \mathcal{A} 对有限交和任意并封闭, 从而 \mathcal{A} 是拓扑。

3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$: 由定义 $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ 成立, 因为每个 $E \in \mathcal{A}$ 本身就是拓扑中的开集。综上, $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ 。由 $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ 可知, 对任意邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$, 都有 $U \in \mathcal{A}$, 即网最终进入 U , 这正是 $x_\alpha \rightarrow x$ 的定义。

定义 4.2

(X, \mathcal{T}) 是拓扑空间, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 若满足对任意 $U \in \mathcal{T}$, 存在 $C \subset \mathcal{B}$ 使得

$$U = \bigcup_{B \in C} B \text{ 也记作 } U = UC \quad (4.7)$$

成立, 则称 \mathcal{B} 是 (X, \mathcal{T}) 的拓扑基

例 4.1 (X, d) 为度量空间, 定义 $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ 则 \mathcal{B} 为 (X, \mathcal{T}_d) 的一个基。其中 \mathcal{T}_d 表示由度量 d 所诱导的拓扑, 即由所有开球 $B(x, \varepsilon)$ 生成的拓扑。

证明 设 $U \in \mathcal{T}_d$, 则按定义 U 为 d -开集, 即

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ 使得 } B(x, \varepsilon_x) \subset U.$$

由此我们有

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x). \quad (4.8)$$

显然每个 $B(x, \varepsilon_x) \in \mathcal{B}$, 且该并为 U 的覆盖, 故 \mathcal{B} 为 (X, \mathcal{T}_d) 的一个基。

命题 4.4

若 \mathcal{B} 是 (X, \mathcal{T}) 的基, \mathcal{B} 是 (X, \mathcal{T}) 的子基

证明 由假设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, 且 \mathcal{T} 中任意开集均为 \mathcal{B} 中元素的并。设 \mathcal{T}' 是由 \mathcal{B} 生成的拓扑, 则:

1. 显然 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$, 且 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$;
2. 对任意 $U \in \mathcal{T}$, 由基的定义存在 $C \subset \mathcal{B}$ 使得

$$U = \bigcup_{B \in C} B, \quad (4.9)$$

而这些 B 均在 \mathcal{T}' 中, 因此 $U \in \mathcal{T}'$ 。

由此得 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ 且 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, 故 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, 从而 \mathcal{B} 亦为 (X, \mathcal{T}) 的一个子基。

命题 4.5

若 \mathcal{S} 为 (X, \mathcal{T}) 的子基, 则 $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{x\}$ 为 X 的一个基。这里 $\mathcal{S}_{f\cap}$ 为由 \mathcal{S} 取有限交得到的所有集合

证明 1. 由 \mathcal{S} 是 (X, \mathcal{T}) 的子基可知, $\mathcal{S}_{f\cap} \subset \mathcal{T}$ 且 $X \in \mathcal{T}$, 从而 $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\} \subset \mathcal{T}$ 。

2. 设

$$\mathcal{A} \triangleq \{E \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\} \text{ 使得 } E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\},$$

则由子基定义知 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ ，反之由第 1 步知 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ ，故 $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ 。

下证 $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$ 满足基的判别条件，只要证 \mathcal{A} 为由 \mathcal{S} 生成的子拓扑，具体如下：

1. 由于 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{f\cap} \subseteq \mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$ ，对任意 $E \in \mathcal{S}$ ，有 $E = E \cap E$ ，且 $E = \bigcup \{E\}$ ，因此 $E \in \mathcal{A}$ ，即 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ 。
2. 空集 \emptyset 可以表示为 $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{A}$ ，而 $X = \bigcup \{X\} \in \mathcal{A}$ ；此外， \mathcal{A} 对任意并封闭且对有限交封闭，故 \mathcal{A} 为包含 \mathcal{S} 的拓扑。

第5章 分离公理

我们现在引入分离公理的概念，用以刻画拓扑空间中点与点之间的“可分离性”。

定义 5.1 (T_0 空间 (可分离空间))

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间，若对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } y \notin U \text{ 或 } \exists V \in \mathcal{N}(y) \text{ 使得 } x \notin V, \quad (5.1)$$

则称 (X, \mathcal{T}) 为 T_0 空间 (或可分离空间)。

定义 5.2 (T_1 空间)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间，若对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } y \notin U, \quad (5.2)$$

则称 (X, \mathcal{T}) 为 T_1 空间。

注 T_1 空间等价于：对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } y \notin U \text{ 且 } \exists V \in \mathcal{N}(y) \text{ 使得 } x \notin V. \quad (5.3)$$

命题 5.1

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间，则以下条件等价：

1. X 为 T_1 空间；
2. X 的每个单点集为闭集；
3. X 的每个有限子集为闭集。

定义 5.3 (T_2 空间 (Hausdorff))

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间，若对任意 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x), \exists V \in \mathcal{N}(y) \text{ 使得 } U \cap V = \emptyset, \quad (5.4)$$

则称 (X, \mathcal{T}) 为 T_2 空间 (或 Hausdorff 空间)。

注 显然有如下包含关系：

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0. \quad (5.5)$$

即任何 Hausdorff 空间都是 T_1 空间，任何 T_1 空间都是 T_0 空间。

命题 5.2

设 (X, \mathcal{T}) 为 T_2 空间，则 X 中任意网的极限若存在必唯一。即若网 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ 满足 $x_\alpha \rightarrow x$ 且 $x_\alpha \rightarrow y$ ，则 $x = y$ 。

证明 反证法。假设 $x \neq y$ ，由于 (X, \mathcal{T}) 为 T_2 空间，存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 和 $V \in \mathcal{N}(y)$ 使得

$$U \cap V = \emptyset. \quad (5.6)$$

由于 $x_\alpha \rightarrow x$ ，存在 $\alpha_1 \in \Omega$ 使得对所有 $\alpha \geq \alpha_1$ ，有 $x_\alpha \in U$ ；

由于 $x_\alpha \rightarrow y$ ，存在 $\alpha_2 \in \Omega$ 使得对所有 $\alpha \geq \alpha_2$ ，有 $x_\alpha \in V$ 。

由定向集的性质，存在 $\alpha_0 \in \Omega$ 使得 $\alpha_0 \geq \alpha_1$ 且 $\alpha_0 \geq \alpha_2$ ，从而

$$x_{\alpha_0} \in U \text{ 且 } x_{\alpha_0} \in V, \quad (5.7)$$

即 $x_{\alpha_0} \in U \cap V$ 。但这与 $U \cap V = \emptyset$ 矛盾。

因此必有 $x = y$ ，即极限唯一。

命题 5.3

设 X 为拓扑空间，则以下条件等价：

1. X 为 T_2 空间；
2. X 具有网收敛的唯一性。



证明 (1) \Rightarrow (2)：由命题 5.2 已证。

(2) \Leftarrow (1)：反证法。假设 X 不为 T_2 空间，则存在 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$ ，使得对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$ 和 $V \in \mathcal{N}(y)$ ，都有

$$U \cap V \neq \emptyset. \quad (5.8)$$

令

$$\Lambda = \{U \cap V : U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y), U \cap V \neq \emptyset\}. \quad (5.9)$$

对于 Λ 中任意两个元素 $A, B \in \Lambda$ ，设 $A = U_1 \cap V_1$ ， $B = U_2 \cap V_2$ ，其中 $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(x)$ ， $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(y)$ 。令 $C = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$ ，则 $C \in \Lambda$ 且 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$ 。因此 Λ 在反包含序下构成定向集。

对每个 $A \in \Lambda$ ，选取 $z_A \in A$ ，得到网 $(z_A)_{A \in \Lambda}$ 。

对任意 $U_0 \in \mathcal{N}(x)$ ，取 $A_0 = U_0 \cap X \in \Lambda$ （因为 $x \in U_0$ 且 $y \in X$ ），则当 $A \subseteq A_0$ 时，有 $z_A \in A \subseteq A_0 \subseteq U_0$ ，故 $z_A \rightarrow x$ 。

同理，对任意 $V_0 \in \mathcal{N}(y)$ ，取 $B_0 = X \cap V_0 \in \Lambda$ ，可得 $z_A \rightarrow y$ 。

因此该网同时收敛到 x 和 y ，但 $x \neq y$ ，这与网收敛的唯一性矛盾。

故 X 必为 T_2 空间。

5.1 滤子与滤基

定义 5.4 (有限交性质)

设 X 为集合， $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。

称 \mathcal{F} 具有有限交性质，若对任意 $E \subseteq \mathcal{F}$ 且 E 有限，存在 $x \in X$ 使得 $x \in \bigcap E$ ，即

$$\bigcap_{A \in E} A \neq \emptyset. \quad (5.10)$$



定义 5.5 (滤子基)

设 X 为集合， $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。

若 \mathcal{F} 满足：

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ；
2. 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$ ，存在 $C \in \mathcal{F}$ 使得 $C \subseteq A \cap B$ ，

则称 \mathcal{F} 为 X 上的一个滤子基。



定义 5.6 (滤子)

设 X 为集合， $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。

若 \mathcal{F} 满足：

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ；
2. 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$ ，有 $A \cap B \in \mathcal{F}$ ；
3. (向上封闭) 对任意 $A \in \mathcal{F}$ 和 $B \subseteq X$ ，若 $B \supseteq A$ ，则 $B \in \mathcal{F}$ ，

则称 \mathcal{F} 为 X 上的一个滤子。

定义 5.7 (邻域基)

设 (X, τ) 为拓扑空间, $x \in X$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$ 。

称 \mathcal{B} 为点 x 的一个邻域基, 若对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得

$$B \subseteq U. \quad (5.11)$$

命题 5.4

设 (X, τ) 为拓扑空间, $x \in X$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$ 。则 \mathcal{B} 是点 x 的邻域基当且仅当 \mathcal{B} 是一个滤子基。

定义 5.8 (滤子收敛)

设 (X, τ) 为拓扑空间, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $x \in X$ 。

称 \mathcal{F} 收敛到 x , 记作 $\mathcal{F} \rightarrow x$, 若对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得

$$F \subseteq U. \quad (5.12)$$

命题 5.5

设 X 为 T_2 空间, \mathcal{F} 为 X 中具有有限交性质的集族。则 \mathcal{F} 的收敛点若存在必唯一, 即若 $\mathcal{F} \rightarrow x$ 且 $\mathcal{F} \rightarrow y$, 则 $x = y$ 。

证明 反证法。假设 $x \neq y$, 由于 X 为 T_2 空间, 存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 和 $V \in \mathcal{N}(y)$ 使得

$$U \cap V = \emptyset. \quad (5.13)$$

由于 $\mathcal{F} \rightarrow x$, 存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $A \subseteq U$;

由于 $\mathcal{F} \rightarrow y$, 存在 $B \in \mathcal{F}$ 使得 $B \subseteq V$ 。

因此 $A \cap B \subseteq U \cap V = \emptyset$, 即 $A \cap B = \emptyset$ 。

但这与 \mathcal{F} 具有有限交性质矛盾 (因为 $A, B \in \mathcal{F}$ 是有限子族, 其交应非空)。

故必有 $x = y$, 收敛点唯一。

命题 5.6

设 X 为拓扑空间, 则下列命题等价:

1. X 为 T_2 空间;
2. X 中网收敛的极限唯一性;
3. X 中满足有限交性质的集族收敛唯一性;
4. X 中滤子基收敛唯一性;
5. X 中滤子收敛唯一性。

证明 我们按照 $(1) \Leftrightarrow (2)$, $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$, $(4) \Rightarrow (2)$ 的顺序证明。

$(1) \Leftrightarrow (2)$: 由命题 5.3 已证。

$(1) \Rightarrow (3)$: 由命题 5.5 已证。

$(3) \Rightarrow (4)$: 显然, 因为滤子基是具有有限交性质的集族。

$(4) \Leftrightarrow (5)$: 设 \mathcal{B} 为滤子基, 则 \mathcal{B}_f 为滤子。若 $\mathcal{B} \rightarrow x$ 且 $\mathcal{B} \rightarrow y$, 则 $\mathcal{B}_f \rightarrow x$ 且 $\mathcal{B}_f \rightarrow y$ 。由滤子收敛唯一性得 $x = y$ 。反之, 滤子本身也是滤子基, 故滤子收敛唯一性蕴含滤子基收敛唯一性。

$(4) \Rightarrow (2)$: 设 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ 为 X 中的网, 且 $x_\alpha \rightarrow x$ 且 $x_\alpha \rightarrow y$ 。

令 $\mathcal{B} = \{ \{x_\beta : \beta \geq \alpha\} : \alpha \in \Omega \}$, 即 $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$ 。

可以验证 \mathcal{B} 是一个滤子基:

- $\emptyset \notin \mathcal{B}$, 因为每个 E_α 至少包含 x_α ;
- 对任意 $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{B}$, 由定向集性质存在 $\gamma \geq \alpha, \beta$, 则 $E_\gamma \subseteq E_\alpha \cap E_\beta$.
若 $x_\alpha \rightarrow x$, 则对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$, 存在 α_0 使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$ 有 $x_\alpha \in U$, 即 $E_{\alpha_0} \subseteq U$, 故 $\mathcal{B} \rightarrow x$.
同理 $\mathcal{B} \rightarrow y$. 由滤子基收敛唯一性, $x = y$.
因此所有命题等价。

定义 5.9

设 X 为集合, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. 定义

$$\mathcal{B}_\uparrow = \{E \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得 } B \subseteq E\}. \quad (5.14)$$

命题 5.7

设 \mathcal{B} 为 X 上的一个滤子基, 则 \mathcal{B}_\uparrow 为 X 上的一个滤子。

证明 需要验证 \mathcal{B}_\uparrow 满足滤子的三个条件。

- (1) 若 $\emptyset \in \mathcal{B}_\uparrow$, 则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq \emptyset$, 即 $B = \emptyset$, 这与 $\emptyset \notin \mathcal{B}$ 矛盾。故 $\emptyset \notin \mathcal{B}_\uparrow$.
- (2) 对任意 $E, F \in \mathcal{B}_\uparrow$, 存在 $B_1 \in \mathcal{B}$ 使得 $B_1 \subseteq E$, 存在 $B_2 \in \mathcal{B}$ 使得 $B_2 \subseteq F$.
由于 \mathcal{B} 为滤子基, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq B_1 \cap B_2$.
因此 $B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq E \cap F$, 即 $E \cap F \in \mathcal{B}_\uparrow$.
- (3) (向上封闭) 若 $E \in \mathcal{B}_\uparrow$ 且 $F \supseteq E$, 则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq E \subseteq F$, 故 $F \in \mathcal{B}_\uparrow$.
因此 \mathcal{B}_\uparrow 为 X 上的一个滤子。

注 此时称 \mathcal{B}_\uparrow 为包含 \mathcal{B} 的最小滤子, 或者说 \mathcal{B} 生成滤子 \mathcal{B}_\uparrow .

5.2 正则空间与正规空间

定义 5.10 (正则空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为正则空间, 若对任意 $x \in X$ 和任意闭集 $E \subseteq X$, 若 $x \notin E$, 则存在开集 U, V 使得

$$x \in U, \quad E \subseteq V \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.15)$$

命题 5.8

正则 $+T_1 \Rightarrow T_2$, 即: 若 X 为正则空间且为 T_1 空间, 则 X 为 T_2 空间。

证明 设 X 为正则且 T_1 的空间, $x, y \in X$ 且 $x \neq y$.

由于 X 为 T_1 空间, $\{y\}$ 为闭集。因为 $x \notin \{y\}$, 由正则性, 存在开集 U, V 使得

$$x \in U, \quad \{y\} \subseteq V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.16)$$

因此 $x \in U, y \in V$, 且 $U \cap V = \emptyset$, 故 X 为 T_2 空间。

定义 5.11 (T_3 空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为 T_3 空间, 若 X 既是正则空间又是 T_1 空间。

注 由命题 5.8, $T_3 \Rightarrow T_2$. 因此分离公理的层次为: $T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

命题 5.9

X 为正则空间当且仅当对任意 $x \in X$, 对任意 $V \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

证明 (\Rightarrow): 设 X 为正则空间, $x \in X, V \in \mathcal{N}(x)$.

不妨设 V 为开集 (否则取 V 的开邻域)。令 $E = V^c$, 则 E 为闭集且 $x \notin E$ 。

由正则性, 存在开集 U, W 使得 $x \in U, E \subseteq W$, 且 $U \cap W = \emptyset$ 。

因为 $U \cap W = \emptyset$, 所以 $U \subseteq W^c$ 。因此 $\overline{U} \subseteq \overline{W^c}$ 。

又因为 W 为开集, 所以 W^c 为闭集, 故 $\overline{W^c} = W^c$ 。

因为 $E \subseteq W$, 所以 $W^c \subseteq E^c = V$ 。

综上, $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$ 。

(\Leftarrow): 设条件成立, 即对任意 $x \in X$ 和 $V \in \mathcal{N}(x)$, 存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。

设 $x \in X, E$ 为闭集且 $x \notin E$ 。则 $V = E^c$ 为开集且 $x \in V$ 。

由条件, 存在开邻域 U 使得 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V = E^c$ 。

令 $W = (\overline{U})^c$, 则 W 为开集。

因为 $\overline{U} \subseteq E^c$, 所以 $E \subseteq (\overline{U})^c = W$ 。

又因为 $U \cap W = U \cap (\overline{U})^c = \emptyset$ 。

因此 $x \in U, E \subseteq W$, 且 $U \cap W = \emptyset$, 故 X 为正则空间。

定义 5.12 (正规空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为正规空间, 若对任意 A, B 为 X 中不相交的闭集, 即 $A \cap B = \emptyset$, 存在 U, V 为 X 中不相交的开集, 使得

$$A \subseteq U \quad \text{且} \quad B \subseteq V. \quad (5.17)$$

命题 5.10

X 为正规空间当且仅当对任意闭集 $A \subseteq X$, 对任意开集 $V \supseteq A$, 存在开集 U 使得 $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。

证明 (\Rightarrow): 设 X 为正规空间, A 为闭集, V 为开集且 $A \subseteq V$ 。

令 $B = V^c$, 则 B 为闭集, 且 $A \cap B = \emptyset$ 。

由正规性, 存在开集 U, W 使得 $A \subseteq U, B \subseteq W$, 且 $U \cap W = \emptyset$ 。

因为 $U \cap W = \emptyset$, 所以 $U \subseteq W^c$ 。因此 $\overline{U} \subseteq \overline{W^c}$ 。

又因为 W 为开集, 所以 W^c 为闭集, 故 $\overline{W^c} = W^c$ 。

因为 $B \subseteq W$, 所以 $W^c \subseteq B^c = V$ 。

综上, $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$ 。

(\Leftarrow): 设条件成立, 即对任意闭集 A 和开集 $V \supseteq A$, 存在开集 U 使得 $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。

设 A, B 为不相交的闭集, 即 $A \cap B = \emptyset$ 。则 $V = B^c$ 为开集且 $A \subseteq V$ 。

由条件, 存在开集 U 使得 $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V = B^c$ 。

令 $W = (\overline{U})^c$, 则 W 为开集。

因为 $\overline{U} \subseteq B^c$, 所以 $B \subseteq (\overline{U})^c = W$ 。

又因为 $U \cap W = U \cap (\overline{U})^c = \emptyset$ 。

因此 $A \subseteq U, B \subseteq W$, 且 $U \cap W = \emptyset$, 故 X 为正规空间。

定义 5.13 (T_4 空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为 T_4 空间, 若 X 既是正规空间又是 T_1 空间。

命题 5.11

正规 $+ T_1 \Rightarrow T_3$, 即: 若 X 为正规空间且为 T_1 空间, 则 X 为正则空间。

证明 设 X 为正规且 T_1 的空间, $x \in X, E$ 为闭集且 $x \notin E$ 。

由于 X 为 T_1 空间, $\{x\}$ 为闭集。因为 $\{x\} \cap E = \emptyset$, 由正规性, 存在开集 U, V 使得

$$\{x\} \subseteq U, \quad E \subseteq V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.18)$$

因此 $x \in U$, $E \subseteq V$, 且 $U \cap V = \emptyset$, 故 X 为正则空间。

由定义, X 也是 T_1 空间, 因此 X 为 T_3 空间。

第 6 章 紧致性

6.1 紧空间

定义 6.1 (紧空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为紧空间, 若对任意 \mathcal{U} 为 X 的开覆盖 (即 \mathcal{U} 为开集族且 $\bigcup \mathcal{U} = X$), 存在 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ 使得 \mathcal{V} 为 X 的覆盖且 \mathcal{V} 为有限集 (即存在有限子覆盖)。

定义 6.2 (Lindelöff 空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为 Lindelöff 空间, 若对任意开覆盖, 存在可数子覆盖。

注 Lindelöff 空间有时也称为完全可数紧空间。其定义等价于: 任意开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 都存在可数子集 $\{U_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\alpha_n} = X$ 。

定义 6.3 (可数紧空间)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 称 (X, τ) 为可数紧空间, 若对任意可数开覆盖, 存在有限子覆盖 (即 CA_2)。

定义 6.4 (序列紧空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为序列紧空间, 若 X 中的每个序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 都有收敛子序列。

命题 6.1

$CA_2 \Rightarrow$ Lindelöff 空间, 即可数紧空间必为 Lindelöff 空间。

证明 设 X 为可数紧空间, \mathcal{U} 为 X 的任意开覆盖。

由已知, X 为 CA_2 空间, 即 X 为第二可数空间, 存在可数拓扑基 \mathcal{B} 。

由命题 8.3, 存在 $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\overline{\mathcal{B}}$ 覆盖 X 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 \mathcal{U} 。

因为 \mathcal{B} 可数, 所以 $\overline{\mathcal{B}}$ 也可数。

由引理 8.1, 由于 $\overline{\mathcal{B}}$ 可数且加细 \mathcal{U} , 存在 \mathcal{U} 的可数子族覆盖 X 。

因此 X 为 Lindelöff 空间。

命题 6.2

$CA_2 \Rightarrow$ 可分, 即第二可数空间必为可分空间。

证明 设 X 为第二可数空间, \mathcal{B} 为 X 的可数拓扑基, 且 $\phi \neq \mathcal{B}$ (即 \mathcal{B} 非空)。

对每个 $B \in \mathcal{B}$, 取 $\alpha_B \in B$ 。

令 $D = \{\alpha_B : B \in \mathcal{B}\}$ 。

则 D 为可数集 (可数集 \mathcal{B} 的像)。

下证 $\overline{D} = X$ 。

对任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U , 由于 \mathcal{B} 为拓扑基, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$ 。

因为 $\alpha_B \in B \subseteq U$, 所以 $\alpha_B \in U \cap D$, 即 $U \cap D \neq \emptyset$ 。

因此 $x \in \overline{D}$ 。

由 x 的任意性, $\overline{D} = X$ 。

故 X 为可分空间。

第7章 完全正则空间与 Urysohn 引理

7.1 完全正则空间

定义 7.1 (完全正则空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为完全正则空间, 若对任意 $x \in X$ 和闭集 $F \subseteq X$ 且 $x \notin F$, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(F) \subseteq \{1\}$.

命题 7.1

完全正则的 \Rightarrow 正则, 即: 若 X 为完全正则空间, 则 X 为正则空间。

证明 设 $x \in X$, F 为闭集且 $x \notin F$.

由完全正则性, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(F) \subseteq \{1\}$.

令

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right). \quad (7.1)$$

因为 f 连续, $[0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 1]$ 在 $[0, 1]$ 中为开集, 故 U, V 为开集。

因为 $f(x) = 0 \in [0, \frac{1}{2})$, 所以 $x \in U$ 。

因为 $f(F) \subseteq \{1\} \subseteq (\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $F \subseteq V$ 。

因为 $[0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$, 所以 $U \cap V = \emptyset$ 。

因此 X 为正则空间。

定义 7.2 ($T_{3\frac{1}{2}}$ 空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间, 若 X 既是完全正则空间又是 T_1 空间。

定义 7.3

设 X 为拓扑空间, 称 X 为完全正规空间, 若对任意 A, B 为不相交闭集, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$, 则称 X 满足 Urysohn 可分离性。

命题 7.2

若 X 满足 Urysohn 可分离性, 则 X 正规。

证明 设 A, B 为不相交闭集。

由 Urysohn 可分离性, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

令

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right). \quad (7.2)$$

因为 f 连续, $[0, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 1]$ 在 $[0, 1]$ 中为开集, 故 U, V 为开集。

因为 $f(A) \subseteq \{0\} \subseteq [0, \frac{1}{2})$, 所以 $A \subseteq U$ 。

因为 $f(B) \subseteq \{1\} \subseteq (\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $B \subseteq V$ 。

因为 $[0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$, 所以 $U \cap V = \emptyset$ 。

因此 X 为完全正则空间。

7.2 Urysohn 引理

引理 7.1 (Urysohn 引理的构造)

设 $\Lambda \rightarrow [0, 1]$ 为有序对等, 且 $\lambda \in \Lambda$ 。设 X 为拓扑空间, $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 为 X 中一族开集满足: 对任意 $\alpha, \beta \in \Lambda$, 若 $\alpha < \beta$, 则 $U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta$, 且 $U_1 = X$ 。则定义 $f: X \rightarrow [0, 1] \forall x$,

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\} \quad (7.3)$$

为连续函数。

证明 设 $c \in [0, 1]$, 需证明 $f^{-1}([0, c))$ 与 $f^{-1}((c, 1])$ 均为 X 中开集。

证明 $f^{-1}([0, c))$ 为开集:

$$\{x : f(x) < c\} = \{x : \exists \alpha \in \Lambda \text{ 且 } \alpha < c \text{ 使得 } x \in U_\alpha\} \quad (7.4)$$

$$= \bigcup_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha < c}} U_\alpha \quad (7.5)$$

这是开集的并, 故为开集。

证明 $f^{-1}((c, 1])$ 为开集:

对于 $\inf > c$, 即 $f(x) > c$, 则对任意 $\alpha < c$ 均有 $x \notin U_\alpha$ 。

$$\{x : f(x) > c\} = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ c < \alpha}} \overline{U_\alpha}^c \quad (7.6)$$

通过如下推理: 若 $f(x) > c$, 则 $\inf\{\alpha : x \in U_\alpha\} > c$, 因此 $\exists \alpha \in \Lambda$ 且 $c < \alpha < f(x)$ 使得 $x \notin U_\alpha$ 。由于 $\overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta$ 对任意 $\beta > \alpha$, 可知 $x \notin \overline{U_\alpha}$, 即 $x \in \overline{U_\alpha}^c$ 。

反之, 若 $x \in \overline{U_\alpha}^c$ 对某 $\alpha > c$, 则 $x \notin \overline{U_\alpha}$, 由 $U_\gamma \subseteq \overline{U_\gamma} \subseteq U_\alpha$ 对 $\gamma < \alpha$, 可知 $\forall \gamma < \alpha$ 有 $x \notin U_\gamma$, 因此 $\inf\{\beta : x \in U_\beta\} \geq \alpha > c$, 即 $f(x) > c$ 。

因此 $\{x : f(x) > c\}$ 为开集的并, 故为开集。

综上, f 为连续函数。

定理 7.1 (Urysohn 引理)

设 X 为正规空间, A, B 为 X 中不相交闭集。则存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

证明 设 A, B 为不相交闭集, 即 $A \cap B = \emptyset$ 。

由正规性, 存在开集 $U_{\frac{1}{2}}$ 使得

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c. \quad (7.7)$$

令 $\Lambda = \{\frac{m}{2^n} : n, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n\}$ 为 $[0, 1]$ 中的二进有理数。

通过归纳法, 对所有 $\alpha \in \Lambda \cap [0, 1)$, 构造开集 U_α 使得: 对任意 $\alpha, \beta \in \Lambda$ 且 $\alpha < \beta$, 有

$$A \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta. \quad (7.8)$$

具体构造如下: 假设对所有分母为 2^n 的 $\alpha \in \Lambda$ 已构造 U_α 。对分母为 2^{n+1} 的 $\alpha = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$, 由正规性, 存在开集 U_α 使得

$$\overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_{\frac{k+1}{2^n}}. \quad (7.9)$$

令 $U_1 = X$ 。则 $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 满足引理 7.1 的条件。

定义 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 为

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}. \quad (7.10)$$

由引理 7.1, f 为连续函数。

对 $x \in B$, 因为 $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c$, 所以 $x \notin \overline{U_{\frac{1}{2}}}$, 因此对所有 $\alpha \in \Lambda \cap [0, 1)$, 有 $x \notin U_\alpha$ (由嵌套性质)。故 $f(x) = 1$ 。

对 $x \in A$, 因为 $A \subseteq U_\alpha$ 对所有 $\alpha \in \Lambda \cap (0, 1]$, 所以 $f(x) = 0$ 。

因此 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

推论 7.1

$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$, 即: 若 X 为 T_4 空间, 则 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间。

证明 由 T_4 空间的定义, X 为正规空间且为 T_1 空间。

设 $x \in X$, B 为闭集且 $x \notin B$ 。

由 T_1 性质, 单点集 $\{x\}$ 为闭集。

因为 $\{x\} \cap B = \emptyset$, 由 Urysohn 引理 (定理 7.1), 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

因此 X 为完全正则空间。

结合 X 为 T_1 空间, 故 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间。

推论 7.2

正则 + 正规 \Rightarrow 完全正则, 即: 若 X 既是正则空间又是正规空间, 则 X 为完全正则空间。

证明 设 $x \in X$, B 为闭集且 $x \notin B$ 。

由正则性, 存在开集 U, V 使得 $x \in U$, $B \subseteq V$, 且 $U \cap V = \emptyset$ 。

因此 $x \in U \subseteq V^c$, 即 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V^c = B^c$ (这里 $\overline{U} \subseteq V^c$ 因为 $U \cap V = \emptyset$)。

由于 $\{x\}$ 和 B 为不相交闭集 ($\{x\} \subseteq \overline{U}$ 且 $\overline{U} \subseteq B^c$), 由 Urysohn 引理 (定理 7.1) 和正规性, 存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(\{x\}) = \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

因此 X 为完全正则空间。

第 8 章 可分性与可数性公理

8.1 可分空间与稠密性

定义 8.1 (稠密)

设 X 为拓扑空间, $D \subseteq X$. 称 D 在 X 中稠密, 若 $\overline{D} = X$.

定义 8.2 (可分空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为可分空间, 若 X 中存在可数稠密子集, 即存在可数集 $D \subseteq X$ 使得 $\overline{D} = X$.

例题 8.1 以下是可分空间的例子:

1. \mathbb{R}^n 是可分的, 令 $D = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$, 则 D 可数且 $\overline{D} = \mathbb{R}^n$.
2. 可分空间的可分子空间也是可分的。

8.2 Lindelöff 空间与正规性

命题 8.1

正则 + Lindelöff \Rightarrow 正规, 即: 若 X 既是正则空间又是 Lindelöff 空间, 则 X 为正规空间。

证明 设 A, B 为不相交闭集。

对每个 $a \in A$, 由正则性, 存在开邻域 U_a 使得 $a \in U_a$ 且 $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ 。

对每个 $b \in B$, 由正则性, 存在开邻域 V_b 使得 $b \in V_b$ 且 $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$ 。

由于 A, B 为闭集且 X 为 Lindelöff 空间, 由命题 8.2, 存在可数序列 $(U_n)_{n=1}^\infty$ 为 A 的开覆盖, 满足对所有 n , 有 $\overline{U_n} \cap B = \emptyset$ 。

类似地, 存在可数序列 $(V_n)_{n=1}^\infty$ 为 B 的开覆盖, 满足对所有 n , 有 $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ 。

定义新的开集序列:

$$U_n^* = U_n \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

$$V_n^* = V_n \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \dots \cup \overline{U_n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.2)$$

则 U_n^* 和 V_n^* 均为开集 (开集减去有限个闭集的并)。

令

$$U^* = \bigcup_{n=1}^\infty U_n^*, \quad V^* = \bigcup_{n=1}^\infty V_n^* \quad (8.3)$$

则 U^*, V^* 为开集。

证明 $A \subseteq U^*$:

对任意 $a \in A$, 存在 n 使得 $a \in U_n$ 。由于 $\overline{V_k} \cap A = \emptyset$ 对所有 k , 所以 $a \notin \overline{V_k}$ 对所有 $k \leq n$ 。因此 $a \in U_n^* \subseteq U^*$ 。

证明 $B \subseteq V^*$:

类似地, 对任意 $b \in B$, 存在 n 使得 $b \in V_n$, 且 $b \notin \overline{U_k}$ 对所有 $k \leq n$, 因此 $b \in V_n^* \subseteq V^*$ 。

证明 $U^* \cap V^* = \emptyset$:

对任意 $n, m \in \mathbb{N}$, 不失一般性设 $n \leq m$ 。则

$$U_n^* \cap V_m^* = \left(U_n \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{V_k} \right) \cap \left(V_m \setminus \bigcup_{k=1}^m \overline{U_k} \right) \subseteq U_n \cap (\overline{U_n})^c = \emptyset \quad (8.4)$$

因为 $n \leq m$, 所以 $\overline{U_n} \subseteq \bigcup_{k=1}^m \overline{U_k}$, 从而 $V_m^* \subseteq (\overline{U_n})^c$ 。

因此 $U^* \cap V^* = \emptyset$ 。

故 X 为正规空间。

命题 8.2

若 X 为 Lindelöff 空间, A 为 X 中闭集, 则对 A 的任意开覆盖 \mathcal{U} (即由 X 中开集组成且覆盖 A), 存在 \mathcal{U} 的可数子覆盖覆盖 A 。

证明 设 X 为 Lindelöff 空间, A 为闭集, \mathcal{U} 为 A 的开覆盖, 即 $\bigcup \mathcal{U} \supseteq A$ 。

考虑 X 的开覆盖 $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$ 。

由 Lindelöff 性质, 存在可数子覆盖覆盖 X 。

若 A^c 在该子覆盖中, 则去掉 A^c 后, 剩余的可数个 \mathcal{U} 中的开集仍覆盖 A 。

若 A^c 不在该子覆盖中, 则该子覆盖本身就是 \mathcal{U} 的可数子覆盖, 覆盖 X , 因此也覆盖 A 。

综上, 存在 \mathcal{U} 的可数子覆盖覆盖 A 。

8.3 第二可数空间

定义 8.3 (第二可数空间)

设 X 为拓扑空间, 称 X 为第二可数空间 (即 CA_2 空间), 若 X 存在可数拓扑基。

定义 8.4 (加细)

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。称 \mathcal{B} 为 \mathcal{A} 的加细, 若对任意 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $A \subseteq B$ 。

命题 8.3

若 \mathcal{B} 为 X 的拓扑基, \mathcal{U} 为 X 的开覆盖, 即 $\bigcup \mathcal{U} = X$, 则存在 $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$, 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 \mathcal{U} 。

引理 8.1

设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 为 X 的覆盖 (不要求是拓扑基), 且 \mathcal{A} 加细 \mathcal{B} 。若 \mathcal{A} 可数, 则存在可数的 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 使得 \mathcal{B}' 覆盖 X 。

证明 设 \mathcal{A}, \mathcal{B} 均为 X 的覆盖, \mathcal{A} 加细 \mathcal{B} , 且 \mathcal{A} 可数。

由加细的定义, 对每个 $A \in \mathcal{A}$, 存在 $B_A \in \mathcal{B}$ 使得 $A \subseteq B_A$ 。

令 $\mathcal{B}' = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ 。

则 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 。

因为 \mathcal{A} 可数, 所以 $\mathcal{B}' = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ 也是可数的 (可数集的像)。

且

$$\bigcup \mathcal{B}' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B_A \supseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X \quad (8.5)$$

因此 \mathcal{B}' 是 \mathcal{B} 的可数子族且覆盖 X 。

8.4 可度量空间

定义 8.5 (可度量空间)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, 称 X 为可度量空间。若满足: $\exists d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ (伪) 度量, 使得:

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T} \quad (8.6)$$

性质 若 X 为一个可度量空间, 则以下等价

1. X 为 CA_2 的。
2. X 为可分空间。
3. X 为 Lindelöff 空间。

证明 $1 \Rightarrow 2$: 设 $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 为 X 的可数拓扑基 (定义 8.3)。对每个非空 B_n 取一点 $x_n \in B_n$, 令 $D = \{x_n : B_n \neq \emptyset\}$, 则 D 可数。任取非空开集 U , 存在基元 $B_n \subset U$, 故 $x_n \in D \cap U \neq \emptyset$, 从而 $\overline{D} = X$ (定义 8.2), 即 X 可分。

$1 \Rightarrow 3$: 令 \mathcal{U} 为 X 的任一开覆盖。由命题 8.3, 存在 $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ 使得 $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$ 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 \mathcal{U} 。因 \mathcal{B} 可数, $\overline{\mathcal{B}}$ 亦可数。由引理 8.1, 存在 \mathcal{U} 的可数子族覆盖 X , 故 X 为 Lindelöff 空间。

命题 8.4 (基的等价刻画)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 。则以下等价:

1. \mathcal{B} 是 (X, \mathcal{T}) 的拓扑基;
2. 对任意 $U \in \mathcal{T}$ 与任意 $x \in U$, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subset U$ 。

证明 $(1) \Rightarrow (2)$: 设 $U \in \mathcal{T}$ 。由基的定义, 存在 $C \subset \mathcal{B}$ 使得 $U = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ 。取 $x \in U$, 则存在 $C \in \mathcal{C}$ 使 $x \in C$, 且 $C \subset U$, 令 $B = C$ 即得。

$(2) \Rightarrow (1)$: 设 $U \in \mathcal{T}$, 令 $\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} : B \subset U\}$ 。一方面 $\bigcup \mathcal{C} \subset U$; 另一方面, 任意 $x \in U$, 由 (2) 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使 $x \in B \subset U$, 故 $x \in \bigcup \mathcal{C}$ 。于是 $U \subset \bigcup \mathcal{C}$, 从而 $U = \bigcup \mathcal{C}$ 。

证明 (补充: $2 \Rightarrow 1$ 与 $3 \Rightarrow 1$, 度量空间情形)

$2 \Rightarrow 1$: 设 (X, d) 可分, 取可数稠密集 D 。对 $x \in D$ 与 $n \in \mathbb{N}^*$, 记 $B_{x,n} = B(x, 1/n)$, 并令

$$\mathcal{B} = \{B_{x,n} : x \in D, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

则 \mathcal{B} 为可数族。任取开集 U 与 $y \in U$, 取 $\varepsilon > 0$ 使 $B(y, \varepsilon) \subset U$ 。取 n 使 $2/n < \varepsilon$, 由 D 稠密可取 $x \in D \cap B(y, 1/n)$ 。则 $y \in B(x, 1/n)$ 且对任意 $z \in B(x, 1/n)$ 有 $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$, 故 $B(x, 1/n) \subset B(y, \varepsilon) \subset U$ 。由命题 8.4 知 \mathcal{B} 为可数基, 故 X 为 CA_2 。

$3 \Rightarrow 1$: 设 (X, d) 为 Lindelöff。对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 考虑半径 $1/n$ 的开球族

$$\mathcal{U}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\},$$

它覆盖 X 。由 Lindelöff 性质, 存在可数子族 $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{U}_n$ 覆盖 X 。令 $\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$, 则 \mathcal{B} 可数。任取开集 U 与 $y \in U$, 取 $\varepsilon > 0$ 使 $B(y, \varepsilon) \subset U$, 并取 n 使 $2/n < \varepsilon$ 。因 \mathcal{B}_n 覆盖 X , 存在 $B(x, 1/n) \in \mathcal{B}_n$ 使 $y \in B(x, 1/n)$ 。同理得 $B(x, 1/n) \subset B(y, \varepsilon) \subset U$ 。故由命题 8.4, \mathcal{B} 为可数基, X 为 CA_2 。

命题 8.5 (紧的基刻画)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, \mathcal{B} 为 X 的一组拓扑基。则以下等价:

1. X 为紧空间;
2. 对任意子族 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$, 若 $\bigcup \mathcal{U} = X$, 则存在有限子族 $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ 使得 $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$ 。

证明 $(1) \Rightarrow (2)$: 显然。由基元素构成的覆盖亦为开覆盖, 紧性蕴含存在有限子覆盖。

$(2) \Rightarrow (1)$: 任取开覆盖 \mathcal{V} 。由命题 8.3, 存在 $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ 使得 $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$ 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 \mathcal{V} 。由 (2) 可取有限子族 $\overline{\mathcal{B}}_0 \subset \overline{\mathcal{B}}$ 覆盖 X 。对每个 $B \in \overline{\mathcal{B}}_0$, 取相应的 $V_B \in \mathcal{V}$ 使得 $B \subset V_B$, 则 $\{V_B : B \in \overline{\mathcal{B}}_0\}$ 为 \mathcal{V} 的有限子覆盖, 故 X 紧。

命题 8.6 (紧的等价刻画：闭集的有限交性质)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间。以下命题等价：

1. X 为紧空间；
2. 对任意闭集族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ，若 \mathcal{F} 具有有限交性质（即任意有限子族的交非空），则

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$

证明 (1) \Rightarrow (2)：设 \mathcal{F} 为闭集族且具有有限交性质。若反设 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ ，则其补开的族 $\mathcal{U} := \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$ 为 X 的开覆盖。由紧性，存在有限子覆盖 $\{F_i^c\}_{i=1}^n$ ，则

$$X = \bigcup_{i=1}^n F_i^c \iff \bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset,$$

这与 \mathcal{F} 的有限交性质矛盾，故应有 $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ 。

(2) \Rightarrow (1)：设 \mathcal{U} 为 X 的开覆盖。令闭集族 $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ ，则 \mathcal{F} 具有有限交性质且若反设 \mathcal{U} 无有限子覆盖，则对任意有限子集 $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ ，有

$$U_1 \cup \dots \cup U_n \neq X \iff (X \setminus U_1) \cap \dots \cap (X \setminus U_n) \neq \emptyset,$$

因而 \mathcal{F} 具有有限交性质。由 (2) 得

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset \iff X \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset,$$

与 \mathcal{U} 为覆盖矛盾。故 \mathcal{U} 必有有限子覆盖， X 紧。

定义 8.6 (滤子与滤子基的接触点)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间。

1. 若 \mathcal{F} 为 X 上的滤子，称 $x \in X$ 为 \mathcal{F} 的接触点，若 $\forall A \in \mathcal{F}$ 均有 $x \in \overline{A}$ 。等价地 $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$ 。
2. 若 \mathcal{B} 为 X 上的滤子基，称 $x \in X$ 为 \mathcal{B} 的接触点，若 $\forall B \in \mathcal{B}$ 均有 $x \in \overline{B}$ 。等价地 $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ 。

命题 8.7 (紧的等价刻画：滤子/滤子基的接触点)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间，则以下等价：

1. X 为紧空间；
2. X 中任意滤子基都有接触点；
3. X 中任意滤子都有接触点。

证明 (2) \Leftrightarrow (3)：若 \mathcal{B} 为滤子基，记其生成的滤子为 \mathcal{B}_\uparrow 。则对任意 x ，

$$x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \iff \forall F \in \mathcal{B}_\uparrow \exists B \in \mathcal{B} (B \subset F \text{ 且 } x \in \overline{B} \subset \overline{F}) \iff x \in \bigcap_{F \in \mathcal{B}_\uparrow} \overline{F}.$$

故两者的接触点集合一致。

(1) \Rightarrow (2)：设 X 紧且 \mathcal{B} 为滤子基。闭集族 $\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$ 具有有限交性质；由命题 8.6 得 $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \neq \emptyset$ ，取其中一点即为接触点。

(2) \Rightarrow (1)：反证。若 X 不紧，取无有限子覆盖的开覆盖 \mathcal{U} ，令闭集族 $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ ，则 \mathcal{F} 具有有限交性质且

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset.$$

定义由 \mathcal{F} 的有限交组成的族

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n F_i : F_i \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

则 \mathcal{B} 为滤子基，且每个 $B \in \mathcal{B}$ 为闭集。由 (2) 存在接触点 $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ ，矛盾。故 X 紧。

定义 8.7 (超滤子)

设 X 为非空集合, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 为 X 上的一个滤子。称 \mathcal{U} 为 X 上的一个超滤子 (极大滤子), 若满足: 对任意 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, 只要 $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{A}$, 则 \mathcal{A} 不是 X 上的滤子。

命题 8.8 (超滤子引理)

任意 X 上的滤子 \mathcal{F} 均可扩张为一个超滤子 $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ 。

证明 令

$$\mathcal{C} = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ 是 } X \text{ 上的滤子且 } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\},$$

以包含关系为序。任一链 $\{\mathcal{G}_i\}$ 的并 $\mathcal{G}_* = \bigcup_i \mathcal{G}_i$ 仍为滤子: $\emptyset \notin \mathcal{G}_*$; 对有限交与向上封闭性逐一验证可得, 故每条链有上界。由 Zorn 引理, 存在极大元 \mathcal{U} , 即所求超滤子。

命题 8.9 (超滤子的等价性质)

设 \mathcal{U} 为 X 上的滤子。则以下命题等价:

1. \mathcal{U} 是 X 上的超滤子 (极大滤子);
2. 对任意 $A \subseteq X$, 有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^c \in \mathcal{U}$;
3. 对任意 $A, B \subseteq X$, 若 $A \cup B \in \mathcal{U}$, 则 $A \in \mathcal{U}$ 或 $B \in \mathcal{U}$;
4. 对任意 $U \subseteq X$, 若对所有 $F \in \mathcal{U}$ 有 $U \cap F \neq \emptyset$, 则 $U \in \mathcal{U}$ 。

证明 (1) \Rightarrow (2): 对任意 $A \subseteq X$, 若 $A \notin \mathcal{U}$, 欲证 $A^c \in \mathcal{U}$ 。由 (1) 超滤子定义, $\mathcal{U} \cup \{A\}$ 不能生成滤子 (否则 \mathcal{U} 不极大), 故不具有限交性质, 即存在 $F \in \mathcal{U}$ 使

$$A \cap F = \emptyset \implies F \subseteq A^c.$$

由滤子向上封闭性得 $A^c \in \mathcal{U}$ 。故对任意 A , 必有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^c \in \mathcal{U}$ 。

(2) \Rightarrow (3): 设 $A, B \subseteq X$ 且 $A \cup B \in \mathcal{U}$ 。由 (2) 知 $A \in \mathcal{U}$ 或 $B \in \mathcal{U}$ 。反设 $A \notin \mathcal{U}$ 且 $B \notin \mathcal{U}$, 则由 (2) 得 $A^c, B^c \in \mathcal{U}$, 从而

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{U}.$$

与 $A \cup B \in \mathcal{U}$ 及滤子不含 \emptyset 矛盾。

(3) \Rightarrow (4): 设 $U \subseteq X$ 满足对任意 $F \in \mathcal{U}$ 均有 $U \cap F \neq \emptyset$ 。因 \mathcal{U} 为滤子, $X \in \mathcal{U}$, 而 $X = U \cup U^c$, 由 (3) 得 $U \in \mathcal{U}$ 或 $U^c \in \mathcal{U}$ 。若 $U^c \in \mathcal{U}$, 则 $U \cap U^c = \emptyset$, 与假设矛盾, 故 $U \in \mathcal{U}$ 。

(4) \Rightarrow (1): 反证。若 \mathcal{U} 不是超滤子, 则存在滤子 \mathcal{U}' 满足 $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$ 。取 $U \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$ 。对任意 $F \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$, 因 \mathcal{U}' 为滤子, 有 $U \cap F \neq \emptyset$ (否则 $\emptyset \in \mathcal{U}'$ 矛盾)。由 (4) 得 $U \in \mathcal{U}$, 矛盾。故 \mathcal{U} 为超滤子。

定义 8.8 (滤子的收敛)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间。称滤子 \mathcal{F} 在 $x \in X$ 收敛, 记为 $\mathcal{F} \rightarrow x$, 若对任意 x 的邻域 U , 有 $U \in \mathcal{F}$ 。

命题 8.10 (超滤子的接触点与收敛)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, \mathcal{U} 为 X 上的超滤子, $x \in X$ 。则以下等价:

1. x 为 \mathcal{U} 的接触点;
2. $\mathcal{U} \rightarrow x$ 。

证明 (1) \Rightarrow (2): 设 x 为 \mathcal{U} 的接触点。取 x 的任意邻域 U 。由接触点定义, $\forall F \in \mathcal{U}$ 有 $U \cap F \neq \emptyset$ 。若 $U \notin \mathcal{U}$, 因 \mathcal{U} 为超滤子, 必有 $U^c \in \mathcal{U}$, 与 $U \cap U^c = \emptyset$ 矛盾, 故 $U \in \mathcal{U}$ 。于是 $\mathcal{U} \rightarrow x$ 。

(2) \Rightarrow (1): 若 $\mathcal{U} \rightarrow x$, 则 \forall 邻域 $U \in \mathcal{U}$ 。任取 $F \in \mathcal{U}$, 由滤子对有限交封闭, $U \cap F \in \mathcal{U}$, 故 $U \cap F \neq \emptyset$ 。于是 $x \in \overline{F}$ 。因 $F \in \mathcal{U}$ 任意, 得 $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{U}} \overline{F}$, 即 x 为 \mathcal{U} 的接触点。

命题 8.11 (紧的等价刻画：极大滤子的接触点)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间，则以下等价：

1. X 为紧空间；
2. X 中任意滤子基都有接触点；
3. X 中任意滤子都有接触点。
4. X 中任意极大滤子都有接触点。
5. X 中任意极大滤子收敛

证明 (3) \Rightarrow (4)：极大滤子本身是滤子，显然成立。

(4) \Leftrightarrow (5)：由命题 8.10，对任意极大滤子 \mathcal{U} 与点 x ， x 为 \mathcal{U} 的接触点当且仅当 $\mathcal{U} \rightarrow x$ 。于是“任意极大滤子有接触点”当且仅当“任意极大滤子收敛”。

(4) \Rightarrow (3)：任取滤子 \mathcal{F} 。由超滤子引理 8.8，存在极大滤子 $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ 。由 (4) 取 x 使 x 为 \mathcal{U} 的接触点。因 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ ，对任意 $A \in \mathcal{F}$ 亦有 $x \in \overline{A}$ ，故 x 为 \mathcal{F} 的接触点。

命题 8.12 (滤子收敛的邻域基刻画)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间， $x \in X$ ，令 \mathcal{B}_x 为 x 的邻域基。对任意滤子 \mathcal{F} ，有

$$\mathcal{F} \rightarrow x \iff \forall B \in \mathcal{B}_x, \exists F \in \mathcal{F} \text{ 使 } F \subseteq B.$$

证明 (\Rightarrow) 设 $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。任取 $B \in \mathcal{B}_x$ ，则 B 为 x 的邻域，故 $B \in \mathcal{F}$ ，取 $F = B$ 即得 $F \subseteq B$ 。

(\Leftarrow) 设对任意 $B \in \mathcal{B}_x$ ，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $F \subseteq B$ 。任取 x 的邻域 U ，由邻域基性质，取 $B \in \mathcal{B}_x$ 使 $B \subseteq U$ 。于是存在 $F \in \mathcal{F}$ 满足 $F \subseteq B \subseteq U$ 。由滤子向上封闭性， $U \in \mathcal{F}$ 。故 $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。

命题 8.13 (滤子收敛的邻域子基刻画)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间， $x \in X$ 。设 \mathcal{S} 为 x 的邻域子基，即令

$$\mathcal{S}_x = \{U \in \mathcal{S} : x \in U\}, \quad \mathcal{B}_x = \left\{ \bigcap_{i=1}^n U_i : n \in \mathbb{N}^*, U_i \in \mathcal{S}_x \right\} \cup \{X\},$$

则 \mathcal{B}_x 为 x 的邻域基。对任意滤子 \mathcal{F} ，有

$$\mathcal{F} \rightarrow x \iff \forall U \in \mathcal{S} (x \in U \Rightarrow \exists F \in \mathcal{F} \text{ 使 } F \subseteq U).$$

证明 (\Rightarrow) 若 $\mathcal{F} \rightarrow x$ ，则每个 x 的邻域 U 都在 \mathcal{F} 中，尤其对任意 $U \in \mathcal{S}_x$ ，有 $U \in \mathcal{F}$ ，取 $F = U$ 即得 $F \subseteq U$ 。

(\Leftarrow) 设对任意 $U \in \mathcal{S}_x$ ，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使 $F \subseteq U$ 。取 \mathcal{B}_x 为由 \mathcal{S}_x 的有限交与 $\{X\}$ 生成的邻域基。任取 $B \in \mathcal{B}_x$ ：

- 若 $B = X$ ，任取 $F \in \mathcal{F}$ ，则 $F \subseteq X = B$ ；
- 若 $B \neq X$ ，则 $B = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ ($n \geq 1, U_i \in \mathcal{S}_x$)。对每个 i 取 $F_i \in \mathcal{F}$ 使 $F_i \subseteq U_i$ ；
- 由滤子对有限交封闭， $F = \bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$ 且 $F \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = B$ 。

于是对任意 $B \in \mathcal{B}_x$ ，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使 $F \subseteq B$ 。由命题 8.12 知 $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。

命题 8.14 (紧的子基刻画 (Alexander 子基定理))

设 \mathcal{S} 为 X 的子基。则 X 紧当且仅当：对任意 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ ，若 \mathcal{U} 覆盖 X ，则存在有限子集 $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{U}$ 亦覆盖 X 。

证明 (\Rightarrow) 显然：紧空间的任意开覆盖（特别是由子基元素组成的覆盖）都有有限子覆盖。

(\Leftarrow) 假设对任意子基覆盖都有有限子覆盖。取任意超滤子 \mathcal{U} 于 X 。若 \mathcal{U} 不收敛，则对每个 $x \in X$ ，由命题 8.13，可取 $U_x \in \mathcal{S}$ 且 $x \in U_x$ 使 $U_x \notin \mathcal{U}$ 。由超滤子性质（命题 8.9 的 (2)）知 $U_x^c \in \mathcal{U}$ 。于是 $\{U_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{S}$ 构成 X 的子基覆盖。由假设取有限多项 U_{x_1}, \dots, U_{x_n} 覆盖 X ，则

$$\bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^c = \emptyset.$$

然而每个 $U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$, 且超滤子对有限交封闭, 故 $\bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$, 与滤子不含空集矛盾。故任意超滤子必收敛。由命题 8.11 中 (5) 与 (1) 的等价性, 得 X 紧。

定义 8.9 (网)

设 Λ 为定向集, $x: \Lambda \rightarrow X$ 。称 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 为 X 中的网。

定义 8.10 (子网)

设 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 为 X 中的网。若存在定向集 Γ 与映射 $\theta: \Gamma \rightarrow \Lambda$, 满足

1. θ 保序;
2. $\theta(\Gamma)$ 在 Λ 中无界, 即对任意 $\alpha \in \Lambda$, 存在 $\beta_0 \in \Gamma$, 使得 $\beta \geq \beta_0 \Rightarrow \theta(\beta) \geq \alpha$,

则称 $(x_{\theta(\beta)})_{\beta \in \Gamma}$ 为 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 的子网。等价地, 可记为 $x \circ \theta: \Gamma \rightarrow X$ 。

第9章 乘积与和

9.1 乘积拓扑与其子基

命题 9.1 (乘积拓扑的刻画)

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为拓扑空间族。记

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : \forall \alpha, x_\alpha \in X_\alpha\}.$$

对每个 α 定义投影

$$p_\alpha : \prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma \rightarrow X_\alpha, \quad (x_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} \mapsto x_\alpha.$$

令

$$\mathcal{S} \equiv \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{p_\alpha^{-1}(U) : U \subseteq X_\alpha \text{ 为开集}\}.$$

则由子基 \mathcal{S} 生成的拓扑 τ 使得每个投影 p_α 连续；且若 τ' 是 $\prod_{\alpha} X_\alpha$ 上的拓扑并使所有 p_α 连续，则 $\tau \subseteq \tau'$ 。因此 τ 是使所有投影连续的最小拓扑（即乘积拓扑）。

证明 对任意 α 与 X_α 中开集 U ，有 $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S} \subseteq \tau$ ，故 p_α 连续。若 τ' 使所有 p_α 连续，则对每个开集 $U \subseteq X_\alpha$ 均有 $p_\alpha^{-1}(U) \in \tau'$ ，于是 $\mathcal{S} \subseteq \tau'$ 。由“由子基生成的最小拓扑”的定义知 $\tau \subseteq \tau'$ 。证毕。

注 对命题 9.1 中的子基 \mathcal{S} ，其有限交族 $\mathcal{S}_{f\cap}$ 构成乘积拓扑的一个基。具体地，若取有限多指标 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 及开集 $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ ，则

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_n) = \prod_{\gamma \in \Lambda} V_\gamma,$$

其中 $V_{\alpha_i} = U_i$ ，而当 $\gamma \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 时取 $V_\gamma = X_\gamma$ 。因此“盒子”形集合

$$\left\{ \prod_{\gamma \in \Lambda} V_\gamma : V_\alpha \text{ 为开集仅在有限多 } \alpha, \text{ 其余 } V_\gamma = X_\gamma \right\}$$

是乘积拓扑的一个基。特别地，当 Λ 有限（如 $\{1, \dots, n\}$ ）时，基可写为

$$\{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \subseteq X_i \text{ 为开集}\}.$$

命题 9.2 (推论：乘积拓扑的子基)

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为拓扑空间族。则在 $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 上，集合族

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{p_\alpha^{-1}(U) : U \subseteq X_\alpha \text{ 开}\}$$

是乘积拓扑的一个子基。

证明 由命题 9.1，乘积拓扑恰为包含上述集合族的最小拓扑，故该集合族为其子基。

命题 9.3 (推论：有限乘积的基)

设 X_1, \dots, X_n 为拓扑空间， B_i 为 X_i 的一组基。则

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \in B_i (i = 1, \dots, n)\}$$

为 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 的乘积拓扑的一组基。

证明 任取开盒 $V_1 \times \cdots \times V_n$ 与点 (x_1, \dots, x_n) 。由 B_i 为基，存在 $U_i \in B_i$ 使 $x_i \in U_i \subseteq V_i$ 。则 $(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq V_1 \times \cdots \times V_n$ 。配合上文的“盒子基”描述可知该族满足基的判别条件，因而为一组基。

命题 9.4 (连续满射下 Lindelöff 性保持)

设 $f: X \rightarrow Y$ 连续且满射。若 X 为 Lindelöff 空间，则 Y 为 Lindelöff 空间。

证明 任取 Y 的开覆盖 \mathcal{U} 。则其拉回族

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

为 X 的开覆盖 (连续性保证开性, 满射保证覆盖)。由 X 的 Lindelöff 性, 存在可数子族 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ 使 $\{f^{-1}(U_n)\}$ 覆盖 X 。于是

$$Y = f(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(f^{-1}(U_n)) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$

即 $\{U_n\}$ 为 \mathcal{U} 的可数子覆盖, Y 为 Lindelöff。

定理 9.1 (Tychonoff 定理)

若每个 X_α 均为紧空间, 则赋以乘积拓扑的笛卡尔积

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$$

亦为紧空间。

证明 取任意超滤子 \mathcal{F} 于 $\prod_{\alpha} X_\alpha$ 。对每个 α , 考虑投影 $p_\alpha: \prod_{\gamma} X_\gamma \rightarrow X_\alpha$ 。则 $p_\alpha(\mathcal{F})$ 为 X_α 上的超滤子; 由 X_α 的紧性 (见命题 8.11 的等价刻画), 存在点 $x_\alpha \in X_\alpha$ 使得

$$p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow x_\alpha.$$

令 $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} \in \prod_{\gamma} X_\gamma$ 。

下证 $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。由上文关于乘积拓扑“盒子基”的描述, 只需证: 对任意指标 α 与含 x_α 的开集 $U \subseteq X_\alpha$, 有 $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ 。事实上, 由 $p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow x_\alpha$ 与滤子收敛的定义, 存在 $E \in p_\alpha(\mathcal{F})$ 使 $E \subseteq U$; 按像滤子的定义, $p_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ 且 $p_\alpha^{-1}(E) \subseteq p_\alpha^{-1}(U)$, 由滤子的向上封闭性得 $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ 。进而对任意有限族 $\{(\alpha_i, U_i)\}_{i=1}^n$ (每个 U_i 为 x_{α_i} 的开邻域), 由滤子对有限交封闭性,

$$\bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}.$$

这些有限交构成 x 的一组基邻域, 故 \mathcal{F} 包含 x 的全部基邻域, 从而 $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。

因任意超滤子于 $\prod_{\alpha} X_\alpha$ 上皆收敛, 依命题 8.11 的等价性知 $\prod_{\alpha} X_\alpha$ 紧。

定义 9.1 (子空间拓扑)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, $Y \subseteq X$ 。定义

$$\mathcal{T}|_Y \equiv \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

为 Y 上的子空间拓扑。称 $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ 为 (X, \mathcal{T}) 的子空间。

命题 9.5 (度量子空间)

设 (X, d) 为度量空间, $Y \subseteq X$ 。记 $d_Y: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ 为限制度量 $d|_{Y \times Y}$, 则由 d 在 X 上诱导的拓扑 \mathcal{T}_d 限制到 Y 上, 与由限制度量 d_Y 在 Y 上诱导的拓扑 \mathcal{T}_{d_Y} 相同, 即

$$\mathcal{T}_d|_Y = \mathcal{T}_{d_Y}.$$

命题 9.6 (Lindelöff 子空间的刻画)

设 X 为拓扑空间, $\Omega \subseteq X$ 。则下列条件等价:

1. Ω 在子空间拓扑 $\mathcal{T}|_\Omega$ 下为 Lindelöff 空间;

2. 对任意由 X 中开集组成的族 \mathcal{U} 且 $\bigcup \mathcal{U} \supseteq \Omega$, 存在可数子族 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ 使得 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supseteq \Omega$ 。

证明 (1) \Rightarrow (2): 设 Ω 为 Lindelöff 子空间, 取 X 中开集族 \mathcal{U} 覆盖 Ω 。令

$$\mathcal{V} \equiv \{U \cap \Omega : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{T}|_{\Omega}.$$

则 \mathcal{V} 为 Ω 的开覆盖 (子空间拓扑意义下)。由 Ω 的 Lindelöff 性, 存在可数子族 $\{U_n \cap \Omega\}_{n \in \mathbb{N}}$ 覆盖 Ω , 从而 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ 为所需可数子覆盖。

(2) \Rightarrow (1): 设条件 (2) 成立, 取 Ω 的任意开覆盖 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}|_{\Omega}$ 。对每个 $V \in \mathcal{V}$, 由子空间拓扑定义, 存在 X 中开集 U_V 使 $V = U_V \cap \Omega$ 。令 $\mathcal{U} \equiv \{U_V : V \in \mathcal{V}\}$, 则 \mathcal{U} 为 X 中开集族且覆盖 Ω 。由条件 (2), 存在可数子族 $\{U_{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 覆盖 Ω , 从而 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{U_{V_n} \cap \Omega\}$ 为 \mathcal{V} 的可数子覆盖。故 Ω 为 Lindelöff 子空间。

引理 9.1 (管状邻域引理)

设 X, Y 为拓扑空间, $\alpha \in X$, $K \subseteq Y$ 紧。若 $\Omega \subseteq X \times Y$ 为开集且 $\{\alpha\} \times K \subseteq \Omega$, 则存在 α 的开邻域 $B \subseteq X$ 与 K 的开邻域 $U \subseteq Y$ 使得

$$\{\alpha\} \times K \subseteq B \times U \subseteq \Omega.$$

证明 对每个 $k \in K$, 点 $(\alpha, k) \in \Omega$ 。由 Ω 的开性与乘积拓扑的基, 存在 X 中开集 $B_k \ni \alpha$ 与 Y 中开集 $U_k \ni k$ 使 $B_k \times U_k \subseteq \Omega$ 。则 $\{U_k : k \in K\}$ 为 K 的开覆盖; 由 K 的紧性, 存在有限子覆盖 $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$ 覆盖 K 。令

$$B \equiv \bigcap_{i=1}^n B_{k_i}, \quad U \equiv \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}.$$

则 B 为 α 的开邻域 (有限交), U 为 K 的开邻域 (包含 K)。对任意 $(\beta, y) \in B \times U$, 存在 i 使 $y \in U_{k_i}$, 且 $\beta \in B \subseteq B_{k_i}$, 从而 $(\beta, y) \in B_{k_i} \times U_{k_i} \subseteq \Omega$ 。故 $\{\alpha\} \times K \subseteq B \times U \subseteq \Omega$ 。

命题 9.7 (基在子空间中的限制仍为基)

设 (X, \mathcal{T}) 为拓扑空间, \mathcal{B} 为 X 的一组基, $Y \subseteq X$ 。则

$$\mathcal{B}|_Y \equiv \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

为 $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ 的一组基。

证明 任取 $\Omega \in \mathcal{T}|_Y$ 与 $y \in \Omega$ 。存在 $U \in \mathcal{T}$ 使 $\Omega = U \cap Y$ 且 $y \in U$ 。由 \mathcal{B} 为 X 的基, 存在 $B \in \mathcal{B}$ 使 $y \in B \subseteq U$ 。则 $y \in B \cap Y \subseteq U \cap Y = \Omega$, 且 $B \cap Y \in \mathcal{B}|_Y$ 。由基判别定理知 $\mathcal{B}|_Y$ 为 $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ 的基。

命题 9.8 (子空间的乘积等于乘积的子空间)

设 (X, \mathcal{T}) 与 (Y, \mathcal{S}) 为拓扑空间, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ 。则在 $A \times B$ 上有

$$(\mathcal{T}|_A) \otimes (\mathcal{S}|_B) = (\mathcal{T} \otimes \mathcal{S})|_{A \times B}.$$

证明 记两边拓扑分别为 τ_1 与 τ_2 。考察恒等映射 $\text{id}_{A \times B} : (A \times B, \tau_1) \rightarrow (A \times B, \tau_2)$ 。

为证 id 连续, 只需验证其对于一个乘积基闭合: 对任意 $U \in \mathcal{T}$, $V \in \mathcal{S}$, 有

$$(U \cap A) \times (V \cap B) = (U \times V) \cap (A \times B),$$

右式为 τ_2 的基元 (矩形与 $A \times B$ 的交), 故 id 连续。

反向连续性同理: 对 τ_2 的基元 $(U \times V) \cap (A \times B)$, 其像即 $(U \cap A) \times (V \cap B)$, 属 τ_1 的基元, 故 id^{-1} 连续。由此 $\tau_1 = \tau_2$ 。

引理 9.2 (乘积中的常值截面连续)

设拓扑空间 X, Y , 取 $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ 。定义

$$\eta_{x_0} : Y \rightarrow X \times Y, y \mapsto (x_0, y), \quad \xi_{y_0} : X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y_0).$$

则 η_{x_0} 与 ξ_{y_0} 均连续。



证明 对乘积基元 $U \times V$ ($U \subset X, V \subset Y$ 开), 有 $\eta_{x_0}^{-1}(U \times V) = \begin{cases} V, & x_0 \in U, \\ \emptyset, & x_0 \notin U, \end{cases}$ 与 $\xi_{y_0}^{-1}(U \times V) = \begin{cases} U, & y_0 \in V, \\ \emptyset, & y_0 \notin V. \end{cases}$ 皆为开集, 故两映射连续。

推论 9.1 (联合连续蕴含偏连续)

若 $f: X \times Y \rightarrow Z$ 在 (x_0, y_0) 处连续, 则 $y \mapsto f(x_0, y): Y \rightarrow Z$ 在 y_0 连续, 且 $x \mapsto f(x, y_0): X \rightarrow Z$ 在 x_0 连续。



证明 由引理 9.2, η_{x_0}, ξ_{y_0} 连续, 故复合 $f \circ \eta_{x_0}$ 与 $f \circ \xi_{y_0}$ 连续, 即得结论。

命题 9.9 (乘积的泛性质 (坐标映射判别连续))

设空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 与空间 Z 。给定映射 $f_\alpha: Z \rightarrow X_\alpha$ ($\forall \alpha$), 则存在唯一映射

$$f: Z \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \quad z \mapsto (f_\alpha(z))_{\alpha \in \Lambda},$$

满足 $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ 。且 f 连续当且仅当每个 f_α 连续。



证明 若 g 亦满足 $p_\alpha \circ g = f_\alpha$, 则 $p_\alpha(g(z)) = p_\alpha(f(z))$ 对所有 α , 故 $g(z) = f(z)$ 。

若 f 连续, 则 $f_\alpha = p_\alpha \circ f$ 为连续。

反之, 若每个 f_α 连续, 对任意 α 与 X_α 中开集 U , 有

$$f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U)) = (p_\alpha \circ f)^{-1}(U) = f_\alpha^{-1}(U)$$

为 Z 中开集。乘积拓扑由子基 $\{p_\alpha^{-1}(U)\}$ 生成, 故 f 连续。

注 上述命题中的坐标映射满足 $\forall \alpha: f_\alpha = p_\alpha \circ f$ 。

命题 9.10 (坐标连续推出乘积映射连续)

设空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 与 $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 。若对每个 α , 映射 $f_\alpha: X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ 连续, 定义

$$\prod_{\alpha} f_\alpha: \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha, \quad (x_\alpha)_\alpha \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_\alpha,$$

则 $\prod_{\alpha} f_\alpha$ 连续。



证明 对任意 $\beta \in \Lambda$, 有交换恒等式

$$p_\beta \circ \left(\prod_{\alpha} f_\alpha \right) = f_\beta \circ p_\beta.$$

右端为连续映射复合, 故左端连续。由命题 9.9 (坐标判别: g 连续 $\iff p_\alpha \circ g$ 连续 $\forall \alpha$), 得 $\prod_{\alpha} f_\alpha$ 连续。

定义 9.2 (拓扑和 (不交并))

设一族两两不交的拓扑空间 $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 。记集合不交并

$$\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

在该并集上定义拓扑 τ , 使每个包含映射

$$i_\alpha: X_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$$

连续且为嵌入 (即 $i_\alpha: X_\alpha \rightarrow i_\alpha(X_\alpha)$ 为同胚) 的最大拓扑。约定记号

$$\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \equiv \left(\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \tau \right),$$

并在需要时亦记 $\tau = \mathcal{T}_{\sqcup}$ 。称 $(\sqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \tau)$ 为拓扑和。

命题 9.11 (拓扑和的显式刻画)

有

$$\mathcal{T}_{\sqcup} = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha} : U_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha} (\forall \alpha) \right\}.$$

证明 记右侧集合族为 \mathcal{J} 。先证 \mathcal{J} 为拓扑并使每个 i_{α} 连续：对任意 $\Omega = \sqcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \mathcal{J}$ ，有 $i_{\alpha}^{-1}(\Omega) = U_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}$ ，故 i_{α} 连续。显然 \mathcal{J} 对任意并封闭；且

$$\left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cap \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap V_{\alpha}) \in \mathcal{J},$$

故 \mathcal{J} 为拓扑。

因 \mathcal{T}_{\sqcup} 是使所有 i_{α} 连续的最大拓扑，得 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}_{\sqcup}$ 。

反之，任取 $\Omega \in \mathcal{T}_{\sqcup}$ ，则 $i_{\alpha}^{-1}(\Omega) = \Omega \cap X_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}$ 。令 $U_{\alpha} = \Omega \cap X_{\alpha}$ ，则

$$\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (\Omega \cap X_{\alpha}) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha} \in \mathcal{J}.$$

故 $\mathcal{T}_{\sqcup} \subseteq \mathcal{J}$ ，两者相等。

引理 9.3 (嵌入引理)

设 X 为拓扑空间， $(Y_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$ 为拓扑空间族。令

$$f: X \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_{\alpha}, \quad x \mapsto (f_{\alpha}(x))_{\alpha \in \Lambda},$$

其中 $f_{\alpha} \equiv p_{\alpha} \circ f$ 。则

1. f 连续当且仅当每个 f_{α} 连续。等价地，对任意 $x_0 \in X$ ， f 在 x_0 连续当且仅当每个 f_{α} 在 x_0 连续；
2. 若 f 为单射，则族 $\{f_{\alpha}\}$ 分离 X 的点：对任意 $x \neq y$ ，存在 α 使 $f_{\alpha}(x) \neq f_{\alpha}(y)$ ；
3. 若 $\{f_{\alpha}\}$ 分离 X 的点和闭集，则 $f: X \rightarrow f(X)$ 为开映射。

证明 取任意开集 $U \subseteq X$ 与点 $x \in U$ 。由假设族 $\{f_{\alpha}\}$ 分离点与闭集，应用于闭集 U^c 与点 x ，存在指标 α 与 Y_{α} 中开邻域 $V_{\alpha} \ni f_{\alpha}(x)$ 使得 $f_{\alpha}(U^c) \subseteq V_{\alpha}^c$ 。因而 $f(x) \in p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \cap f(X)$ 。对任意 $x' \in X$ ，若 $f(x') \in p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \cap f(X)$ ，则 $f_{\alpha}(x') \in V_{\alpha}$ ，从而 $x' \notin U^c$ ；于是 $x' \in U$ ，并且 $f(x') \in f(U)$ 。故有

$$p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \cap f(X) \subseteq f(U).$$

其中 $p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha})$ 为乘积空间中的开集，故其与 $f(X)$ 的交在子空间 $f(X)$ 中开。于是 $f(U)$ 在 $f(X)$ 中对每点 $f(x)$ 含有开邻域，故 $f(U)$ 为 $f(X)$ 的开集。命题 (3) 得证。

命题 9.12 (子空间中的闭包)

设 $A \subseteq Y \subseteq X$ 。则在子空间 Y 中 A 的闭包满足

$$\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y,$$

其中右侧闭包在 X 中取。

证明 “ \subseteq ”：设 $y \in \overline{A}^Y$ 。则对任意 Y 中开邻域 $B \in \mathcal{N}_Y(y)$ ，有 $B \cap A \neq \emptyset$ 。取 X 中开集 U 使 $B = U \cap Y$ ，得 $U \cap A \neq \emptyset$ ，故 $y \in \overline{A}$ ，进而 $y \in \overline{A} \cap Y$ 。“ \supseteq ”：设 $y \in \overline{A} \cap Y$ 。任取 $B \in \mathcal{N}_Y(y)$ ，写作 $B = U \cap Y$ 且 $U \in \mathcal{T}$ 开。由 $y \in \overline{A}$ 知 $U \cap A \neq \emptyset$ ，故 $B \cap A \neq \emptyset$ ，从而 $y \in \overline{A}^Y$ 。

推论 9.2

对任意 $A \subseteq X$, A 在 \bar{A} 中稠密。等价地,

$$\overline{\bar{A}} = \bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}.$$

推论 9.3

若 $\Omega \subseteq X$ 且 $\Omega \subseteq \bar{A}$, 则 A 在 Ω 中稠密, 即

$$\overline{A}^\Omega = \bar{A} \cap \Omega = \Omega.$$

定义 9.3 (可度量化空间)

设拓扑空间 (X, \mathcal{T}) . 若存在度量 $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ 使由 d 诱导的拓扑 \mathcal{T}_d 与 \mathcal{T} 相同, 即 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$, 则称 (X, \mathcal{T}) 为可度量化 (metrizable). 其中

$$\mathcal{T}_d \equiv \{U \subseteq X : \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B_d(x, \varepsilon) \subseteq U\}.$$

定义 9.4 (完备可度量化空间)

设拓扑空间 (X, \mathcal{T}) . 若存在度量 $d: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ 使 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ 且度量空间 (X, d) 完备, 则称 (X, \mathcal{T}) 为完备可度量化 (completely metrizable).

命题 9.13 (同胚不变性)

若 X 与 Y 同胚, 则 X 可完备度量化当且仅当 Y 可完备度量化。

证明 设 $h: X \rightarrow Y$ 为同胚。先证 “ \Rightarrow ”。若 X 可完备度量化, 则存在完备度量 d_X 使 $\mathcal{T}_{d_X} = \mathcal{T}_X$ 。定义

$$d_Y(y_1, y_2) \equiv d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)), \quad y_1, y_2 \in Y.$$

则 $h: (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ 为等距同胚, 因而 $\mathcal{T}_{d_Y} = \mathcal{T}_Y$ 。取任意 (Y, d_Y) 的 Cauchy 列 (y_n) , 则 $(x_n) = (h^{-1}(y_n))$ 满足

$$d_X(x_n, x_m) = d_Y(y_n, y_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

故 (x_n) 为 (X, d_X) 的 Cauchy 列, 完备性给出 $x_n \rightarrow x$ 。由 h 的等距连续性, $y_n = h(x_n) \rightarrow h(x)$, 从而 (Y, d_Y) 完备。于是 Y 可完备度量化。反向 “ \Leftarrow ” 同理, 取同胚 $h^{-1}: Y \rightarrow X$ 即得。

定义 9.5 (等价度量)

设 X 为集合, d_1, d_2 为 X 上度量。称 d_1 与 d_2 一致等价, 若恒等映射

$$\text{id}: (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

为一致同胚。

命题 9.14 (有界化度量与原度量等价)

设 d 为 X 上度量, 定义

$$d_b(x, y) \equiv \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in [0, 1).$$

则 d_b 为 X 上度量, 且 $\mathcal{T}_{d_b} = \mathcal{T}_d$, 因而 d 与 d_b 等价。

证明 度量性: 显然 $d_b(x, y) = d_b(y, x)$, 且 $d_b(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$ 。对三角不等式, 记 $g(t) = t/(1+t)$, 则对任意 $a, b \geq 0$,

$$g(a) + g(b) - g(a+b) = \frac{ab}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \geq 0,$$

故 $g(a+b) \leq g(a) + g(b)$ 。由 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ 与 g 单调性得

$$d_b(x, z) = g(d(x, z)) \leq g(d(x, y) + d(y, z)) \leq g(d(x, y)) + g(d(y, z)) = d_b(x, y) + d_b(y, z).$$

拓扑等价: g 严格增且 $g^{-1}(s) = s/(1-s)$ ($0 \leq s < 1$)。于是对任意 $0 < \varepsilon < 1$,

$$B_{d_b}(x, \varepsilon) = \{y : d_b(x, y) < \varepsilon\} = \{y : d(x, y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\} = B_d\left(x, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right),$$

两拓扑相同。

引理 9.4 (可数积的度量化)

设 X_n ($n \in \mathbb{N}$) 皆为可度量化空间, 则其乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ (赋以乘积拓扑) 可度量化。

证明 对每个 n 取与 X_n 拓扑相容的度量 d_n 。由命题 9.14 可不失一般性假设 $d_n \leq 1$ 。定义

$$d((x_n), (y_n)) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

则 d 为度量: 对任意 $(x_n), (y_n), (z_n)$, 由每个 d_n 的三角不等式逐项相加得

$$d((x_n), (y_n)) \leq d((x_n), (z_n)) + d((z_n), (y_n)).$$

若每个 (X_n, d_n) 完备, 则 d 亦完备。任取 d -Cauchy 列 $((x_n^k)_{k \in \mathbb{N}})_{n \in \mathbb{N}}$ 。由

$$2^{-i} d_i(x_i^k, x_i^\ell) \leq d((x_n^k)_n, (x_n^\ell)_n) \xrightarrow{k, \ell \rightarrow \infty} 0,$$

知对每个 i , $(x_i^k)_k$ 为 (X_i, d_i) 的 Cauchy 列。由完备性, 存在 $x_i \in X_i$ 使 $x_i^k \rightarrow x_i$ 。记 $x = (x_i)_i$ 。

取任意 $\varepsilon > 0$ 。先选 N 使 $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$ 。再为 $1 \leq i \leq N$ 取 $\delta_i > 0$, 令 $\sum_{i=1}^N 2^{-i} \delta_i < \varepsilon/2$ 。由 $x_i^k \rightarrow x_i$, 对每个 $i \leq N$ 存在 K_i 使 $k \geq K_i$ 时 $d_i(x_i^k, x_i) < \delta_i$ 。令 $K = \max\{K_1, \dots, K_N\}$, 则 $k \geq K$ 时

$$d((x_n^k)_n, x) = \sum_{i=1}^N 2^{-i} d_i(x_i^k, x_i) + \sum_{n>N} 2^{-n} d_n(x_n^k, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $((x_n^k)_n)_k$ 于 d 收敛到 x , d 完备。记 $p_i : \prod X_n \rightarrow X_i$ 为坐标投影。注意

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \geq \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) \quad (\forall i),$$

故 $p_i : (\prod X_n, d) \rightarrow (X_i, d_i)$ 连续。从而

$$\text{id} : (\prod_n X_n, d) \longrightarrow (\prod_n X_n, \mathcal{T}_\Pi)$$

连续 (乘积拓扑由各 p_i 生成)。

取任意 (x_n) 与 $\varepsilon > 0$ 。选 N 使 $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$ 。由 $d_n \leq 1$ 得

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall (y_n)).$$

为 $1 \leq i \leq N$ 取 $\delta_i > 0$, 使 $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \delta_i < \varepsilon/2$ 。令

$$U \equiv B_{d_1}(x_1, \delta_1) \times \cdots \times B_{d_N}(x_N, \delta_N) \times \prod_{n>N} X_n,$$

则 U 是乘积拓扑的基本开邻域。对任意 $(y_n) \in U$,

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $U \subseteq B_d((x_n), \varepsilon)$ 。因而

$$\text{id} : (\prod_n X_n, \mathcal{T}_\Pi) \longrightarrow (\prod_n X_n, d)$$

于 (x_n) 连续, 任意点同理。

综上, $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\Pi$, 故 $\prod X_n$ 可度量化。

定理 9.2 (乘积中的网收敛判别)

设 $\{X_i\}_{i \in I}$ 为一族拓扑空间。令 $((x_i^\alpha)_{i \in I})_\alpha$ 为 $\prod_{i \in I} X_i$ 中的一网, 且 $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ 。则

$$(x_i^\alpha)_{i \in I} \longrightarrow (x_i)_{i \in I} \iff \forall i \in I, x_i^\alpha \longrightarrow x_i \text{ 于 } X_i.$$



证明 “ \Rightarrow ”: 各坐标投影 $p_i: \prod X_i \rightarrow X_i$ 连续, 故由连续映像保持极限, $p_i((x_i^\alpha)_i) = x_i^\alpha \rightarrow p_i((x_i)_i) = x_i$ 。

“ \Leftarrow ”: 设对每个 $i \in I$ 有 $x_i^\alpha \rightarrow x_i$ 。为证 $((x_i^\alpha)_i)$ 在乘积空间中收敛, 只需验证它对乘积拓扑的任一子基开集最终落入。取任意 $i_0 \in I$ 与 x_{i_0} 的开邻域 $U \subset X_{i_0}$, 则由 $x_{i_0}^\alpha \rightarrow x_{i_0}$, 存在 β , 使得对所有 $\alpha \succeq \beta$, $x_{i_0}^\alpha \in U$ 。这当且仅当

$$(x_i^\alpha)_{i \in I} \in p_{i_0}^{-1}(U) \quad (\forall \alpha \succeq \beta),$$

即该网最终落入子基开集 $p_{i_0}^{-1}(U)$ 。由子基生成开集, 遂该网在乘积拓扑下收敛到 $(x_i)_i$ 。

定义 9.6 (波兰空间)

称拓扑空间 X 为波兰空间 (Polish space), 若 X 可分且完全可度量化, 即存在完备度量 d 使由 d 诱导的拓扑与 X 的原拓扑一致 (记作 $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_d$)。亦即 X 为可分完全可度量化空间。

**定理 9.3 (Urysohn 嵌入定理的等价刻画)**

设拓扑空间 X , 记 $I = [0, 1]$ 与 $I^\omega = [0, 1]^\mathbb{N}$ 。以下命题等价:

1. X 为第二可数的 T_3 空间;
2. X 为可分度量空间;
3. X 同胚于某个可分度量空间的子空间;
4. X 同胚于某个波兰空间的子空间;
5. X 可嵌入 I^ω 。

此外, I^ω 为波兰空间。

**证明**

$1 \Rightarrow 5$

第二可数 \Rightarrow Lindelöf; 而 $T_3 + \text{Lindelöf} \Rightarrow T_4$ (正规), 故可用 Urysohn 引理。取 X 的可数基 \mathcal{B} 。令

$$\Lambda \equiv \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U} \subset V\}.$$

对每个 $(U, V) \in \Lambda$, 由 Urysohn 引理取连续映射

$$f_{U,V}: X \rightarrow [0, 1] \quad \text{满足} \quad f_{U,V}(\overline{U}) \subset \{0\}, \quad f_{U,V}(V^c) \subset \{1\}.$$

定义

$$\Theta: X \longrightarrow [0, 1]^\Lambda, \quad \Theta(x) \equiv (f_{U,V}(x))_{(U,V) \in \Lambda}.$$

各 $f_{U,V}$ 连续, 故 Θ 连续; 且 Λ 可数, $[0, 1]^\Lambda \cong I^\omega$ 。

分离性质: 任意 $x \in X$ 与闭集 $F \subset X$ 且 $x \notin F$, 由正则性与基可选 $U, V \in \mathcal{B}$ 使 $x \in U, \overline{U} \subset V$ 且 $F \subset V^c$, 于是

$$f_{U,V}(x) = 0, \quad f_{U,V}(F) \subset \{1\}.$$

因而 $\Theta(x) \notin \Theta(F)$, 即该函数族将点与闭集分离, 故 Θ 为嵌入, X 与 $\Theta(X)$ 同胚, 遂 X 可嵌入 I^ω 。

其余方向: $5 \Rightarrow 4$ 因 I^ω 为波兰空间; $4 \Rightarrow 2$ 因波兰空间为可分度量, 子空间仍为可分度量; $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$ 显然; $2 \Rightarrow 1$ 因度量空间为 T_3 且可分 \Rightarrow 第二可数。