1.1

这类规划问题，为了方便计算，我们采取变量替换

$$u=\frac{x+|x|}{2},v=\frac{x-|x|}{2} \tag{1.1}$$

然后就转变为了常规的线性规划问题，此时有

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1\\1 & -1 & 1 & -3\\1 & -1 & -2 & 3\end{pmatrix}(u+v)=\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

此时题目的问题变为，在(1.2)的约束条件下，求解

$$\min(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)(u-v) \tag{1.3}$$

代码如下：

```
clc,clear

c=[1:4]';

b=[0,1,-1/2]';

a=[1,-1,-1,1;1,-1,1,-3;1,-1,-2,3];

prob=optimproblem;

u=optimvar('u',4,'LowerBound',0);

v=optimvar('v',4,'LowerBound',0);

prob.Objective=sum(c'*(u+v));

prob.Constraints=a*(u-v)==b;

[sol,fval.flag,out] =solve(prob)

x=sol.u-sol.v
```

得出的结果如下：

```
fval =

  包含以下字段的 struct:

    flag: 1.2500
```

```
x =

    0.2500
         0
         0
   -0.2500
```

1.2

这是题基于实际问题的线性规划我们可以这样假设：

不妨设 $x_1$，$x_2$ 为分别用 $A_1$,$A_2$ 加工产品 I 的件数，$x_3$，$x_4$，$x_5$ 为分别用 $B_1$,$B_2$，$B_3$ 加工产品 I 的件数，$x_6$，$x_7$ 为分别用 $A_1$,$A_2$ 加工产品 II 的件数，由题意，$x_6+x_7$ 为用 $B_1$ 加工产品 II 的件数，此时我们题目便转化为了求

$$\begin{gathered}\max(1.25-0.25)(x_1+x_2)+(2-0.35)(x_6+x_7)+(2.8-0.5)x_8 \\ -\frac{300}{6000}(5x_1+10x_6)-\frac{321}{10000}(7x_2+9x_7+12x_8) \\ -\frac{250}{4000}(6x_3+8x_6+8x_7)-\frac{783}{7000}(x_4+11x_8)-\frac{200}{4000}\times 7x_5\end{gathered} \tag{1.4}$$

使得

$$\begin{cases}5x_1+10x_6\leq 6000\\ 7x_2+9x_7+12x_8\leq 10000\\ 6x_3+8x_6+8x_7\leq 4000\\ 4x_4+11x_8\leq 7000\\ 7x_5\leq 4000\\ x_1+x_2=x_3+x_4+x_5\\ x_1,x_2,\cdots,x_8\geq 0\end{cases} \tag{1.5}$$

代码如下：

```
clc, clear
c=[1-5*300/6000,1-321*7/10000,-6*250/4000,-4*783/7000,-200*7/4000,1.65-0.5-8*250/4000,1.65-321*9/10000-8*250/4000,2.3-321*12/10000-11*783/7000]';
b=[6000,10000,4000,7000,4000]';
a=[5,0,0,0,0,10,0,0;
```

```
    0,7,0,0,0,0,9,12;
    0,0,6,0,0,8,8,0;
    0,0,0,4,0,0,0,11;
    0,0,0,0,7,0,0,0];
prob = optimproblem('ObjectiveSense','max')
x = optimvar('x',8,'LowerBound',0);
prob.Objective = sum(c.*x);
prob.Constraints.con1 = a*x<=b;
prob.Constraints.con2 =
x(1)+x(2)-x(3)-x(4)-x(5)==0;
[sol,fval,flag,out]=solve(prob)
xx=sol.x
```

结果如下：

```
xx =

   1.0e+03 *

    1.2000
    0.2300
         0
    0.8586
    0.5714
         0

fval =

   1.1466e+03
```

1.3

容易求得

$$t=\frac{4r-40g-2}{rg} \tag{1.6}$$

由此我们可以求得 g 关于 t 的函数以及 r 关于 t 的函数

$$t=\frac{3-20g}{g}\,(0\leq g\leq 0.15) \tag{1.7}$$

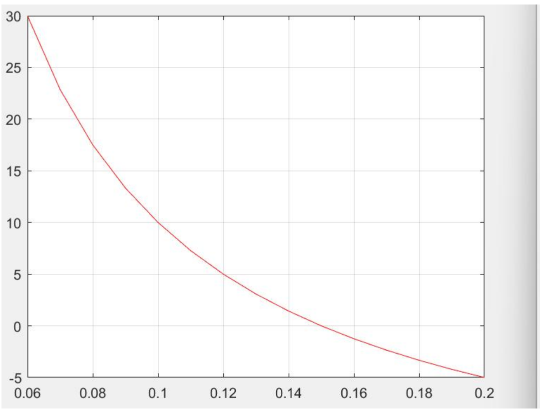
以及

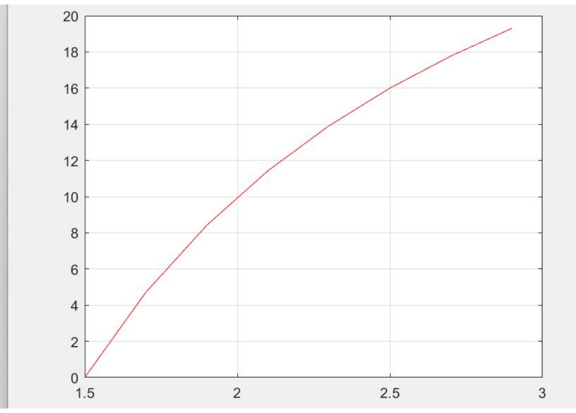
$$t=\frac{40r-60}{r}\,(r\geq 1.5) \tag{1.8}$$

此时我们可以画出图像，程序如下：

```
r=1.5:0.2:3;

g=0.06:0.01:0.2;

figure;

plot(r, (40*r-60)./r, 'r-');

grid on;

figure;

plot(g, (3-20*g)./g, 'r-');

grid on;
```

结果如下：




灵敏度分析：

我们如下定义 t 对 r 的灵敏度

$$S(t,r)=\frac{\Delta t}{\Delta r}=\frac{dt}{dr}\frac{r}{t} \tag{1.9}$$

此时我们带入(1.8)，即可得到 r=3 时，

$$S(t,r)=\frac{60}{40r-60}=\frac{1}{2} \tag{1.10}$$

即猪的体重 r 每天增加 1.5%，出售时间推迟 0.5%

同理，我们可以定义 t 对 s 的灵敏度

$$S(t,g)=\frac{\Delta t}{\Delta g}=\frac{dt}{dg}\frac{g}{t} \tag{1.11}$$

此时我们带入(1.9)，即可得到 g=0.1 时，

$$S(t,g)=-\frac{3}{3-20g}=-3 \tag{1.12}$$

即猪的价格 r 每天增加 1%，出售时间提前 3%

**问题分析**

该问题是部门在面对投资时经常遇到的问题，考虑到在限制时间内用 10 万元的投资得到最大的回报。

**符号说明**

$x_{ij}$:第 i 年(i=1,2,3,4,5)对分别对 A,B,C,D(j=1,2,3,4)四个项目的投资额

**模型假设**

假设部门每年将钱全部花出去，不留任何的钱

**模型建立**

在第一年，我们有如下投资

$$x_{11}+x_{14}=10 \tag{1.13}$$

在第二年的年初，我们有

$$x_{21}+x_{23}+x_{24}=1.06x_{14} \tag{1.14}$$

在第三年的年初，我们有

$$x_{31}+x_{32}+x_{34}=1.15x_{11}+1.06x_{24} \tag{1.15}$$

在第四年的年初，我们有

$$x_{41}+x_{44}=1.15x_{21}+1.06x_{34} \tag{1.16}$$

在第五年的年初，我们有

$$x_{54}=1.15x_{31}+1.06x_{44} \tag{1.17}$$

此时，我们的目标便转化为求解

$$\max\ y=1.15x_{41}+1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.06x_{54} \tag{1.18}$$

于是乎，数学模型如下

$$\max\ y=1.15x_{41}+1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.06x_{54}$$

$$s.t.\begin{cases} x_{11}+x_{14}=10 \\ x_{21}+x_{23}+x_{24}=1.06x_{14} \\ x_{31}+x_{32}+x_{34}=1.15x_{11}+1.06x_{24} \\ x_{41}+x_{44}=1.15x_{21}+1.06x_{34} \\ x_{54}=1.15x_{31}+1.06x_{44} \\ x_{32}\le 4, x_{23}\le 3 \\ x_{ij}\ge 0 \end{cases}$$

由于求解器的限制，我们将新元素重新排列成一个列向量

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{34} \\ x_{41} \\ x_{44} \\ x_{54} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

代码如下：

```
clc,clear
prob=optimproblem('ObjectiveSense','max');
x = optimvar('x',11,'LowerBound',0);
prob.Objective =
1.15*x(9)+1.40*x(4)+1.25*x(7)+1.06*x(11);
prob.Constraints.con1 = x(1)+x(2)==10;
prob.Constraints.con2
=x(3)+x(4)+x(5)-1.06*x(2)==0;
prob.Constraints.con3 =
x(6)+x(7)+x(8)-1.15*x(1)-1.06*x(5)==0;
prob.Constraints.con4 =
x(9)+x(10)-1.15*x(3)-1.06*x(8)==0;
prob.Constraints.con5
=1.15*x(6)+1.06*x(10)-x(11)==0;
prob.Constraints.con6 =x(7)<=4;
prob.Constraints.con7=x(4)<= 3;
```

```
[sol,fval,flag,out]=solve(prob),sol.x;
xx=sol.x
```

**结果如下：**

```
fval =

   14.3750
```

| |
|---|
| 3.4783 |
| 6.5217 |
| 3.9130 |
| 3 |
| 0 |
| 0 |
| 4 |
| 0 |
| 4.5000 |
| 0 |
| 0 |

此时

$$\begin{pmatrix} x_{11}=3.4783 \\ x_{14}=6.5217 \\ x_{21}=3.9130 \\ x_{23}=3 \\ x_{24}=0 \\ x_{31}=0 \\ x_{32}=4 \\ x_{34}=0 \\ x_{41}=4.5000 \\ x_{44}=0 \\ x_{54}=0 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

最大收益为 **14.3750** 万元

2.2

**问题分析**

该问题是典型的非线性转线性问题，我们需要将非线性转为线性

考虑到

$$y=x_1x_2 \tag{1.21}$$

于是题目的条件即可转化为

$$\max\ x_1+y-x_3$$

$$s.t.\begin{cases}-2x_1+3x_2+x_3\le 3\\ x_1+x_2-1\le y\le x_1\\ x_1+x_2-1\le y\le x_2\\ x_1,x_2,x_3,y=0\text{或}1\end{cases} \tag{1.22}$$

**2.2**

**问题分析**

这是常见的 0-1 决策问题，需要我们在最小建校时能覆盖最大的区域

**符号说明**

$x_i$:对第 i(i=1,2,3,4,5,6)个区域的选取

**模型建立**

对小区 $A_1$ 我们有

$$x_1+x_2+x_3\ge 1 \tag{1.23}$$

对小区 $A_2$，我们有

$$x_2+x_4\ge 1 \tag{1.24}$$

对小区 $A_3$，我们有

$$x_3+x_5\ge 1 \tag{1.25}$$

对小区 $A_4$，我们有

$$x_4+x_6\ge 1 \tag{1.26}$$

对小区 $A_5$，我们有

$$x_2+x_5\ge 1 \tag{1.27}$$

对小区 $A_6$，我们有

$$x_5+x_6\ge 1 \tag{1.28}$$

对小区 $A_7$，我们有

$$x_1\ge 1$$

对小区 $A_8$，我们有

$$x_2+x_4+x_6\ge 1 \tag{1.29}$$

于是，我们只要求解

$$\min\sum_{i=1}^{6}x_i \tag{1.30}$$

**代码如下：**

```
clc,clear

prob=optimproblem;

x=optimvar('x',6,'Type','integer','LowerBound',
0,'UpperBound',1);

prob.Objective = sum(x);
```

```
prob.Constraints.con1=x(1)+x(2)+x(3)>=1;
prob.Constraints.con2=x(2)+x(4)>=1;
prob.Constraints.con3=x(3)+x(5)>=1;
prob.Constraints.con4=x(4)+x(6)>=1;
prob.Constraints.con5=x(6)+x(5)>=1;
prob.Constraints.con6=x(1)>=1;
prob.Constraints.con7=x(4)+x(2)+x(6)>=1;
prob.Constraints.con8=x(2)+x(5)>=1;
[sol,fval,flag]=solve(prob),xx=sol.x
```

**结果如下：**

```
xx =

     1
     0
     0
     1
     1
     0
```

即此时只要对 $B_1$, $B_4$, $B_5$,建设即可

2.3

**问题分析**

这是常见的 0-1 决策问题，需要我们在限定设备时做出能提供最大收益的决策

**符号说明**

$x_{ij}$:对第 i(i=1,2,3,4)个企业对第 j(j=1,2,3,4)个工厂的选取

$c_{ij}$： $x_{ij}$:所对因的盈利

**模型建立**

每个企业至少有一个设备，我们有

$$\sum_{i=1}^{6} x_{ij} \geq 1 \tag{1.31}$$

每个设备都有一台，我们有

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \tag{1.32}$$

于是问题转化为

$$\text{求}\max\sum c_{ij}x_{ij}$$

$$s.t.\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{6}x_{ij}\geq 1\\ \sum\limits_{j=1}^{4}x_{ij}=1\\ x_{ij}=0\text{或}1\end{cases}\tag{1.33}$$

**代码如下：**

```
clc,clear
prob=optimproblem('ObjectiveSense','max');
b=[4,2,3,4;6,4,5,5;7,6,7,6;7,8,8,6;7,9,8,6;7,10,8,6]
x=optimvar('x',6,4,'Type','integer','LowerBound',0,'UpperBound',1);
prob.Objective = sum(b.*x,'all');
prob.Constraints.con1=sum(x,2)==1;
prob.Constraints.con2=sum(x,1)>=1;
[sol,fval,flag]=solve(prob),xx=sol.x
```

**结果如下：**

```
xx =

     0     0     0     1
     1     0     0     0
     0     0     1     0
     0     1     0     0
     0     1     0     0
     0     1     0     0

fval =

    44
```

即最大收益为 44 千万

1.7

**问题分析**

这是常见的规划问题，让我们求解变量的最大值

**模型建立**

由题，我们有

$$\max\ v$$

$$s.t.\begin{cases}\sum_{i=1}^{100} a_{ij}x_i \geq v \\ \sum_{i=1}^{100} x_i = 1 \\ x_i \geq 0\end{cases} \tag{1.34}$$

代码如下：

```
clc,clear
prob=optimproblem('ObjectiveSense','max');
a=randi([0,10],100,150);
v=optimvar('v',1,'LowerBound',0)
x=optimvar('x',100,150,'LowerBound',0);
prob.Objective =v;
prob.Constraints.con1=sum(a.*x,1)>=v;
prob.Constraints.con2=sum(x,1)==1;
[sol,fval,flag]=solve(prob),xx=sol.x;
```

解得

```
fval =

    10
```

即 v 的最大值为 10

2.7

**问题分析**

这是常见的规划问题，需要我们求出获利最大时的选取

**符号说明**

$x$ :对家电 I 的选取数

$y$：对家电 II 的选取数

**模型建立**

对于设备 A，我们有

$$5y \le 15 \tag{1.35}$$

对于设备 B 我们有

$$6x + 2y \le 24 \tag{1.36}$$

对于调试工序，我们有

$$x + y \le 5 \tag{1.37}$$

于是问题可转化为

$$\max\ 2x + y$$
$$s.t \begin{cases} 5y \le 15 \\ 6x + 2y \le 24 \\ x + y \le 5 \end{cases} \tag{1.38}$$

代码如下：

```
clc,clear
prob=optimproblem('ObjectiveSense','max');
v=optimvar('v',1,'LowerBound',0);
x=optimvar('x',1,'LowerBound',0);
prob.Objective =2*x+v;
prob.Constraints.con1=5*v<=15;
prob.Constraints.con2=6*x+2*v<=24;
prob.Constraints.con3=x+v<=5;
[sol,fval,flag]=solve(prob)
xx=sol.x,yy=sol.v
```

结果如下：

```
fval =

    8.5000
```

```
xx =

    3.5000


yy =

    1.5000
```

即对Ⅰ选 3.5 台，对Ⅱ选 1.5 台时，我们有最大值 8.5

3.2

**问题分析**

这是一题典型的同余方程组问题，我们只需求出最小解即可

**符号假设**

x：鸡蛋的数量

**模型建立**

由题，可构建如下方程

$$\min x$$

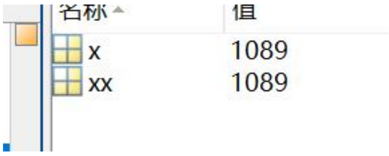
$$s.t\begin{cases} x \bmod (2) = 1 \\ x \bmod (3) = 0 \\ x \bmod (4) = 1 \\ x \bmod (5) = 4 \\ x \bmod (6) = 3 \\ x \bmod (7) = 4 \\ x \bmod (8) = 1 \\ x \bmod (9) = 0 \end{cases} \tag{1.39}$$

代码如下

```
clc,clear

x = 1;

while true

    if rem(x, 2) == 1

&&rem(x,4)==1&&rem(x,3)==0&& rem(x, 9) == 0&&

rem(x,5)==4&&rem(x,6)==3&&rem(x,7)==4&&rem(x,8)

==1;

        break;
```

```
    end
    x = x + 1;
end
xx = x;
```

结果如下




即最小值为 1089

3.7

**问题分析**

这是一道组合投资问题，需要我们求出在给定投资数下时的投资收益

**符号说明**

$x_i$：购买股票 i 的数量

$\sigma_i(i=1,2,3)$：A,B,C 相关收益的标准差

$\rho_{ij}(i=1,2,3,j=1,2,3)$：i 和 j 的相关系数

**模型建立**

由题目所给信息，我们首先能求出收益的协方差矩阵

$$R=\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 \\ \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 \\ \rho_{13}\sigma_1\sigma_3 & \rho_{23}\sigma_2\sigma_3 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2.5 & -10 \\ 2.5 & 36 & -15 \\ -10 & -15 & 100 \end{pmatrix} \tag{1.40}$$

此时风险 **X** 就能表示为

$$X=x^T Rx \tag{1.41}$$

此时我们的收益 **Z** 可表示为

$$Z=5x_1+8x_2+10x_3 \tag{1.42}$$

则问题就转化为

$$\min x^T Rx$$
$$s.t\begin{cases} 5x_1+8x_2+10x_3\geq 100000 \\ 20x_1+25x_2+30x_3\leq 500000 \\ x_1,x_2,x_3\geq 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

代码如下：

```
clc,clear
```

```
prob=optimproblem;
R=[4,2.5,-10;2.5,36,-15;-10,-15,100]
x=optimvar('x',3,'LowerBound',0);
prob.Objective =x'*R*x;
x0.x=rand(3,1);
for n=0:100
prob.Constraints.con1=5*x(1)+8*x(2)+10*x(3)>=0.01*n*500000;
prob.Constraints.con2=20*x(1)+25*x(2)+30*x(3)<=500000;
[sol,fval,flag,out]=solve(prob,x0)
y=fval;
plot(0.01*n,y);
end
```

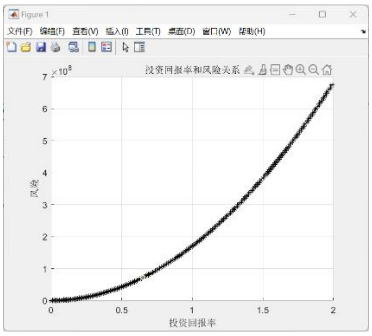
**结果如下**

```
1.0e+04 *

 1.3111
 0.1529
 0.2221
```

第一题：

A 投 13111，B 投 1529，C 投 2221

第二题：




从图像上显示，投资回报率越高，风险越高

3.9

问题如下

$$\max\ z = c^{\mathrm{T}} x + \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} Q x,$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} -1 \leqslant x_1 x_2 + x_3 x_4 \leqslant 1, \\ -3 \leqslant x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{-1, 1\}. \end{cases}$$

代码如下

```
clc,clear
prob=optimproblem('ObjectiveSense','max');
x=optimvar('x',4,'LowerBound',-1,'UpperBound',
1);
c=[6,8,4,2];
Q=[-1,2,0,0;2,-1,2,0;0,2,-1,2;0,0,2,-1];
prob.Objective = c*x+0.5*x'*Q*x;
prob.Constraints.con1=x(1)*x(2)+x(3)*x(4)>=-1;
prob.Constraints.con2=x(1)*x(2)+x(3)*x(4)<=1;
prob.Constraints.con3=x(1)+x(2)+x(3)+x(4)>=-3;
prob.Constraints.con3=x(1)+x(2)+x(3)+x(4)<=2;
```

```
x0.x=rand(4,1);
[sol,fval,flag,out]=solve(prob,x0),xx=sol.x;
```

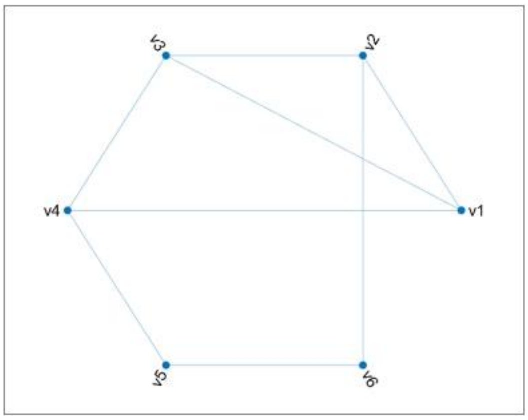
结果如下:

```
fval =

   16.3333
```

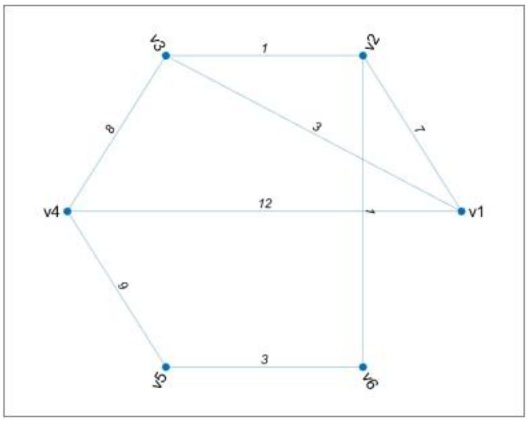
## 4.1

**代码如下：**

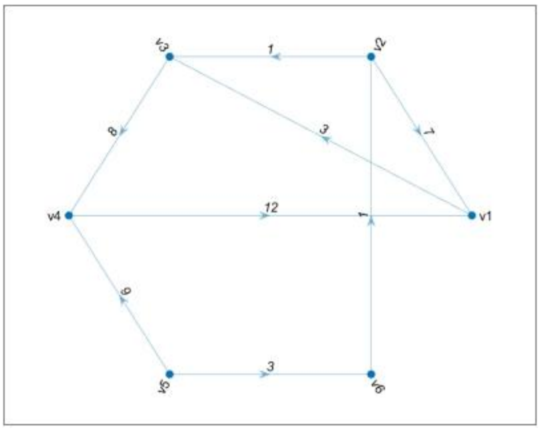
```
clc,clear,close all
a1=zeros(6);
a1(1,[2:4])=1;a1(2,[3,6])=1;a1(3,4)=1;a1(4,5)=1;a1(5,6)=1;
s=cellstr(strcat('v',int2str([1:6]')));
G1=graph(a1,s,'upper');
plot(G1,'Layout','circle')
```




```
a2=zeros(6);
a2(1,[2:4])=[7,3,12];a2(2,[3,6])=[1,1];
a2(3,4)=8;a2(4,5)=9;a2(5,6)=3;
s=cellstr(strcat('v',int2str([1:6]')));
G2=graph(a2,s,'upper');
plot(G2,'Layout','circle','EdgeLabel',G2.Edges.Weight)
```




```
a3=zeros(6);
a3(1,3)=3;a3(2,[1,3])=[7,1];a3(3,4)=8;
a3(4,1)=12;a3(5,[4,6])=[9,3];a3(6,2)=1;
s=cellstr(strcat('v',int2str([1:6]')));
G3=digraph(a3,s);
plot(G3,'EdgeLabel',G3.Edges.Weight,'Layout','circle')
```




## 4.4

**问题分析：**

这是一个最短路径的问题，可以使用 Dijkstra 标号算法求解。

**符号说明：**

分别用 p,d 表示最短路径和最短距离。

**模型建立：**

（1）首先从 v1 出发，v1 到 v1 的最短距离为 0，标记节点 1

（2）从 v1 出发，到 v2 的距离为 20，到 v5 的距离为 15，节点 2 和节点 5 更新，其前面点均为节点 1，标记节点 5

（3）从 v1 出发，经过 v5,到 v2 的距离为 40，到 v3 的距离为 33，到 v4 的距离为 50，到 v6 的距离为 30，节点 3、节点 4 和节点 6 更新，其前面点均为节点 5，标记节点 2

（4）从 v1 出发，经过 v2,到 v3 的距离为 40，到 v4 的距离为 80，到 v5 的距离为 45，不更新任何节点，标记节点 6

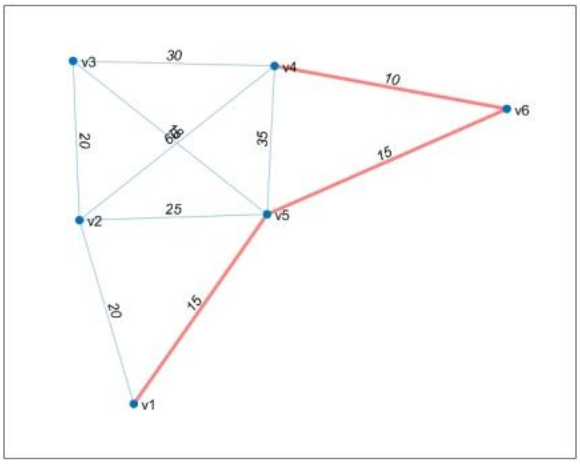
（5）从 v1 出发，经过 v6,到 v4 的距离为 40，节点 4 更新，其前面点为节点 6，标记节点 3

（6）从 v1 出发，经过 v3,到 v4 的距离为 63，不更新任何节点，标记节点 4，结束。

求得从 v1 到 v4 的最短路径为 v1→v5→v6→v4，最短距离为 40。

**代码：**

```
clc,clear,close all
a=zeros(6);
a(1,[2,5])=[20,15];a(2,[3:5])=[20,60,25];
a(3,[4,5])=[30,18];a(4,[5,6])=[35,10];a(5,6)=15;
s=cellstr(strcat('v',int2str([1:6]')));
G=graph(a,s,'upper');
[p,d]=shortestpath(G,1,4)
h=plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight);
highlight(h,p,'EdgeColor','r','LineWidth',2)
disp('(d)赋权无向图');
```




**运行结果：**

```
p = 1×4
     1     5     6     4
d = 40
```

4.2

这题是一题典型的求最短路径问题，我们可以用到 Dijkstra 算法来求解

代码如下：

```
clc, clear;
L= {'A','B1',2;'A','B2',4 ;'B1','C1',3
'B1','C2',3;'B1','C3',1;'B2','C1',2
'B2','C2',3;'B2','C3',1;'C1','D',1
'C2','D',3 ;'C3','D',4};
G=digraph (L(:,1),L(:,2),cell2mat (L(:,3)));
plot (G), [p,d]=shortestpath(G,'A','D')
```

结果如下：

```
p =

  1×4 cell 数组

    {'A'}    {'B1'}    {'C1'}    {'D'}


d =

     6
```

4.7

这题也是一题典型的求最短路径问题，同样的，我们可以用到 Dijkstra 算法来求解

**符号说明**

$s_j$：到 j 村所需要的距离

$c_j$：j 村有的小学生人数

**模型建立**

我们首先可以得到对应的邻接矩阵

$$W=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 8 & \infty \\ 7 & 4 & 0 & 1 & 3 & \infty \\ \infty & 6 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ \infty & 8 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

然后我们可以调用 Dijkstra 算法来求出所有顶点对的距离，最后问题便转化为求

$$\min\ s_j \tag{1.2}$$

**代码如下：**

```
clc,clear,w=zeros(6);
w(1,[2,3])=[2,7];w(2,[3:5])=[4,6,8];
w(3,[4,5])=[1,3];w(4,[5,6])=[1,6];
w(5,6)=3;
G=graph(w,'Upper');
d=distances(G)
md=max(d)
c=[50 40 60 20 70 90];
s=c*d
[ms,ind]=min(s)
```

**结果如下：**

结　果

```
d =

     0     2     6     7     8    11
     2     0     4     5     6     9
     6     4     0     1     2     5
     7     5     1     0     1     4
     8     6     2     1     0     3
    11     9     5     4     3     0


md =

    11     9     6     7     8    11


s =

        2130        1670        1070        1040        1050        1500


ms =

        1040


ind =
```

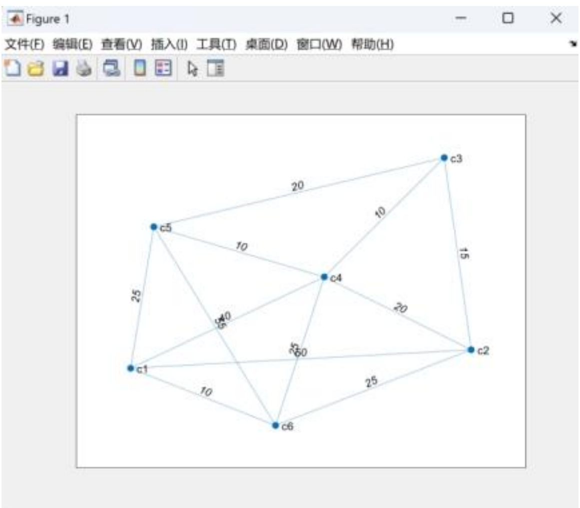
结果表明，选村庄四最好

补充题：

1. 问题分析

某公司在六个城市 $c_1, c_2, \ldots, c_6$ 中有分公司,从 $c_i$ 到 $c_j$,的直接航程票价记在下述矩阵的(i,j)位置上（∞表示无直接航路)。画出该矩阵对应的赋权图（顶点和边都要有标注），并帮助该公司设计一个简便的算法，能快速得到一张城市 $c_1$ 到其它城市间的票价最便宜的路线图。

2. 赋权图




3. 从求解器确定答案：

从 c1 到其他城市的最短路径以及最短距离如下所示

```
p =

     1     6     2

d =

    35
```

1-2

```
p =

     1     5     4     3

d =

    45
```

1-3

```
p =

     1     5     4

d =

    35
```

1-4

```
p =

     1     5

d =

    25
```

1-5

```
p =

     1     6

d =

    10
```

1-6

4.从 Floyd 算法求解

```
price =

    35    45    35    25    10


path =

     6     5     5     1     1

fx >>
```

有图可知:

$c_1$-$c_2$:1-6-2 ,35

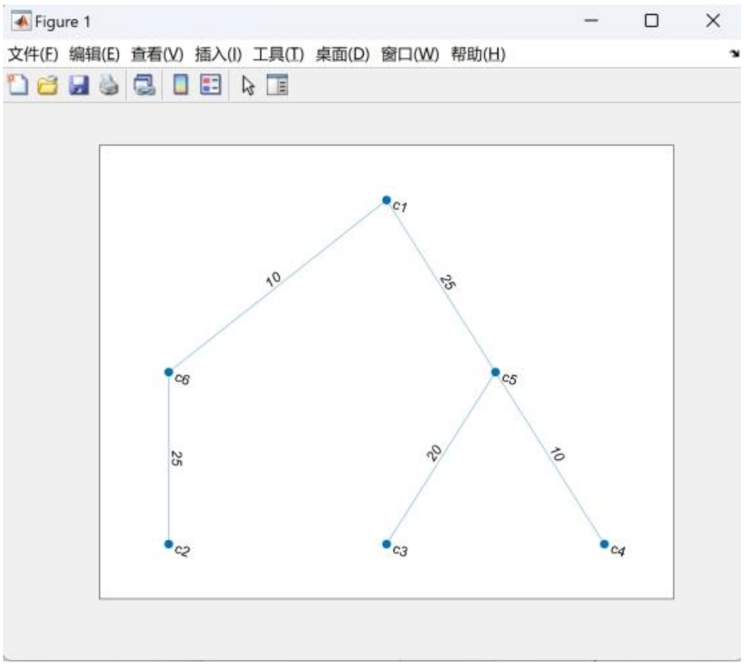
$c_1$-$c_3$:1-5-3 ,45

$c_1$-$c_4$:1-5-4 ,35

$c_1$-$c_5$:1-5 ,25

$c_1$-$c_6$:1-6 ,10

票价最便宜路线图




代码如下：

```
clc,clear,w = zeros(6);
w(1,[2,4,5,6]) = [50,40,25,10];w(2,[1,3,4,6]) = [50,15,20,25];
w(3,[2,4,5]) = [15,10,20];w(4,[1,2,3,5,6]) = [40,20,10,10,25];
w(5,[1,3,4,6]) = [25,20,10,55];w(6,[1,2,4,5]) = [10,25,25,55];
%构造完整的邻接矩阵
s = cellstr(strcat('c',int2str([1:6]')));%顶点字符串
G = graph(w,s,'upper');%利用邻接矩阵的上三角元素构造无向图
plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight);%画无向图
[price,path] = Floyd(w) %显示 c1 至其他地方票价最便宜价钱，路线矩阵
p = zeros(6);
p(1,5:6) = [25,10];p(5,3:4) = [20,10];p(6,2) = 25;
p = p+p';
G1 = graph(p,s,'upper');%利用邻接矩阵的上三角元素构造无向图
plot(G1,'EdgeLabel',G1.Edges.Weight);%画最短航线图

function [price,path] = Floyd(w)
%输出矩阵为两两顶点间最短距离矩阵，输入矩阵为待求邻接矩阵
n = length(w);
w(w == 0) = inf; %把零元素换成无穷大
w(1:n+1:end) = 0; %把对角线元素换成 0
path = -ones(n);%初始化 path 矩阵
for i=1:n
for j=1:n
if i~=j && w(i,j)~=inf
path(i,j)=i;
end
end
```

```
end %完成 path 矩阵未更新的建立
for k = 1:n
for i = 1:n
for j = 1:n
if w(i,k)+w(k,j) < w(i,j) %Floyd 算法核心，更新
w(i,j) = w(i,k)+w(k,j);
path(i,j) = k; %对 w 以及 path 矩阵更新
end
end
end
end
price = w(1,2:n);
path = path(1,2:n);%只考虑 c1 至其他城市，故只取部分
```

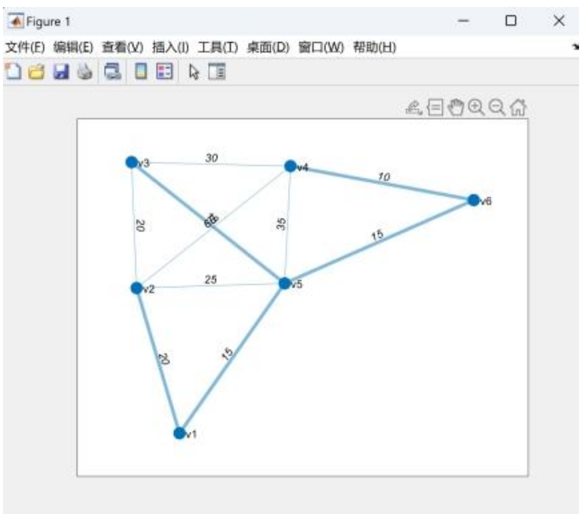
4.3

这个就只是画出赋权图，我们直接调用 prim 算法

**代码如下：**

```
clc,clear
a = zeros(6);
a(1,[2,5]) = [20,15];a(2,[3,4,5]) = [20,60,25];
a(3,[4,5]) = [30,18];a(4,[5,6]) = [35,10];
a(5,6) = 15; a = a+a'; %建立邻接矩阵
s = cellstr(strcat('v',int2str([1:6]')));
G = graph(a,s,'upper');%画出无向赋权图
p = plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight)
T = minspantree(G)%画出最小生成树
L = sum(T.Edges.Weight)%找出最小生成树的路径，并计算总和
highlight(p,T)%着重标记最小生成树
```

**结果如下：**



```
L =

    78
```

我们可知**最小生成树的长度为 78**

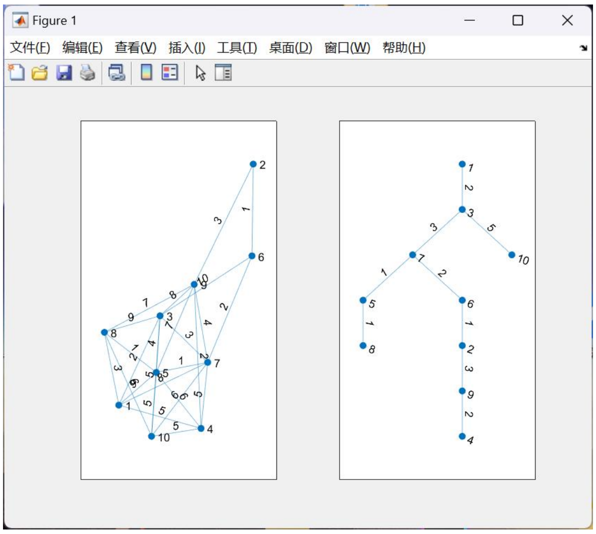
4.8

由于我们无法做到如题所示的 0.6 概率的随机，我们可以调用随机函数矩阵来表示随机的概念，

**代码如下：**

```
clc,clear
a = rand(10);%构造概率矩阵
a = triu(a,1);%我们取上三角元素
w = randi(10,10);%构造了权重矩阵
W = (a>=0.4).*w%生成无向赋权图邻接矩阵的上三角部分
W = W +W'%生成完全邻接矩阵
G = graph(W,'upper')
subplot(121),plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight)
T = minspantree(G)%使用 Prim 算法求得最小生成树
subplot(122),plot(T,'EdgeLabel',T.Edges.Weight)
[p,d] = shortestpath(G,1,10)%q 求得 1-10 的最短距离及最短路径;
d2 = distances(G)
```

**结果如下：**



```
p =

     1     3    10


d =

     7


d2 =

     0     8     2     5     4     7     5     3     7     7
     8     0     6     5     4     1     3     5     3     9
     2     6     0     7     4     5     3     5     7     5
     5     5     7     0     6     6     5     7     2     5
     4     4     4     6     0     3     1     1     5     5
     7     1     5     6     3     0     2     4     4     8
     5     3     3     5     1     2     0     2     4     6
     3     5     5     7     1     4     2     0     6     6
     7     3     7     2     5     4     4     6     0     7
     7     9     5     5     5     8     6     6     7     0
```

（1） 最小生成树如上图所示

（2） 路径为 1→3→10，最短路径长度为 7

（3） 每个点的最短距离如上

4.13

式中$N=|V|$表示点集$Z$中点的个数。

将该模型的第三个消除子回路的约束单独提出来：

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij} \leqslant |S|-1, 2 \leqslant |S| \leqslant N-1, S \subset V$$

式中$S$为$V$的一个真子集，这个式子的含义是：对于一个$V$中的任意真子集$S$，$S$中连通的节点边数小于节点个数。

该问题可以转化为 0—1 整数规划类问题，具体问题可以转化为如下

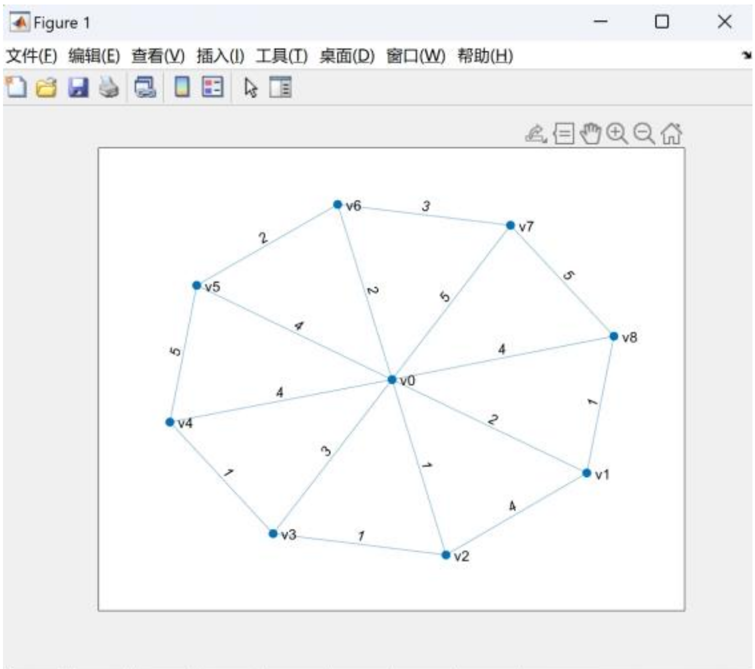
$$\text{求}\min\ z\sum\sum \omega_{ij}x_{ij}$$

$$s.t\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \geq 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \\ \sum\limits_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S|-1, 2 \leq |S| \leq n-1, S \subset V\end{cases} \tag{1.1}$$

**代码如下：**

```
clc, clear, close all, n = 9;
nod =cellstr(strcat('v',int2str([0:n-1]')));%运用 cellstr 进行标号
G = graph(); G = addnode(G,nod); %定好无序图
ed ={ 'v0','v1',2;'v0','v2',1;'v0','v3',3;'v0','v4',4
'v0','v5',4;'v0','v6',2;'v0','v7',5;'v0','v8',4
'v1','v2',4;'v1','v8',1;'v2','v3',1;'v3','v4',1
'v4','v5',5;'v5','v6',2;'v6','v7',3;'v7','v8',5};
G = addedge(G,ed(:,1),ed(:,2),cell2mat(ed(:,3)));%无序图确认
```

```
p = plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight) %做出 9 个村庄道路及道路长度图
w = full(adjacency(G,'weighted')); %做出边权矩阵
w(w==0) = 1000000; %充分大的正实数，让所有不能直接到达的两个村庄改为足够大
prob = optimproblem;
x = optimvar('x',n,n,'Type','integer','LowerBound',0,'UpperBound',1);
prob.Objective = sum(sum(w.*x));
prob.Constraints.con1 = 1<=sum(x(1,:));%条件 1
prob.Constraints.con2 = sum(x(:,2:end))'==1; %条件 2
con3 = [];
for q = 2:n-1
a = zeros(q);
for m = 1:100 %100 次足够精度
b = randperm(n);%随机对 n 数进行排序
c = b(1:q); %相当于从 n 中随机抽取 p 个数
a = x(c,c);
con3 = [sum(sum(a)) <= q-1;con3];
end
end
prob.Constraints.con3 = con3;%条件 3
[sol,fval,flag,out] = solve(prob)
xx = sol.x
[i,j]=find(sol.x);
ind = [(i-1)'; (j-1)'] %输出树的顶点编号
```
**结果如下：**



```
ind =

     0     0     2     3     6     0     6     1
     1     2     3     4     5     6     7     8

>>
```

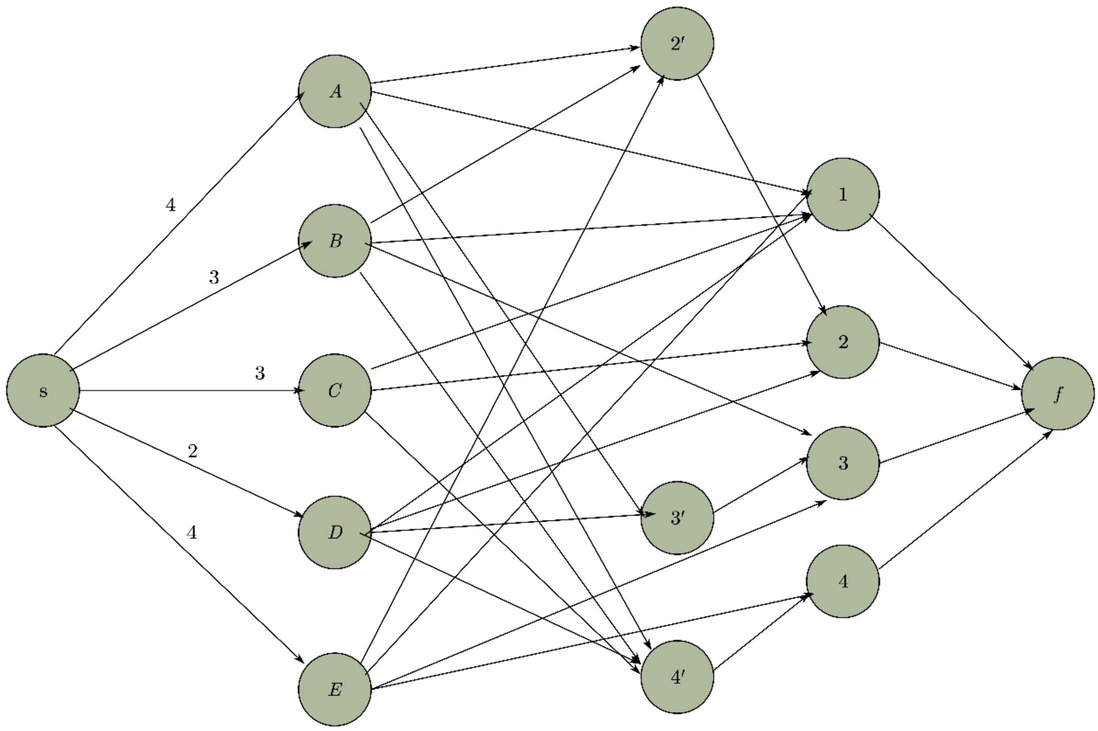
```
fval =

    13
```

**即最小生成树的坐标和权重都可得到**

4.10

这是个最大流问题。分别有五个专业作为多源，四个公司作为多汇。为此我们需要虚拟假设一个源点和一个汇点。将上述问题转为单对单模型。

由题意可知，转化原问题，可得如下模型：

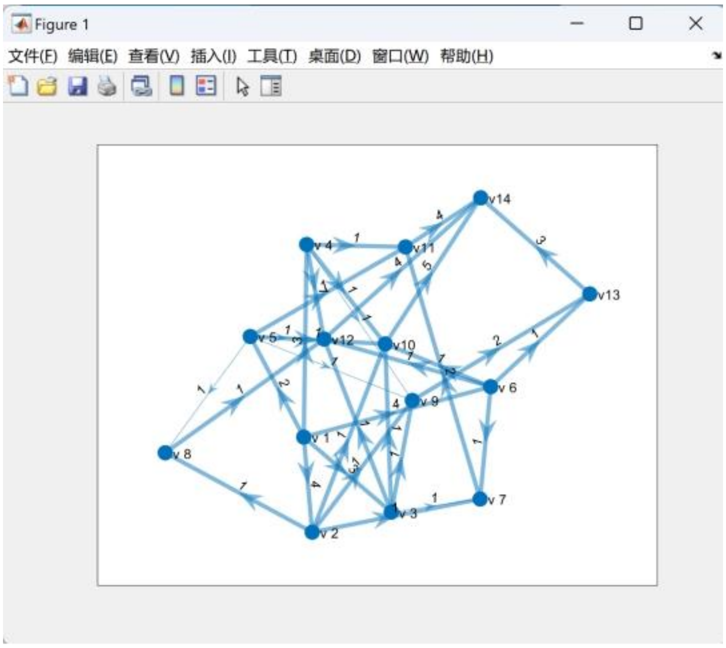


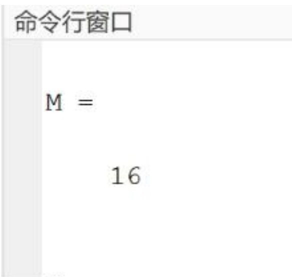

**代码如下：**

```
clc,clear
a = zeros(14);%总共有 5 个专业，4 个公司，1 个源点，1 个汇点，3 个中转点
a(1,[2:6]) = [4,3,3,2,4];a(2,[7:10]) = 1;
a(3,[7,9,10,12]) = 1;a(4,[9:12]) = 1;
a(5,[8:12]) = 1;a(6,[7,10,12,13]) = 1;
a(7,11) = 2;a(8,12) = 1;a(9,13) = 2;
a([10:13],14) = [5,4,4,3];%将权赋好
```

```
s = cellstr(strcat('v',int2str([1:14]')));%命名序号
G = digraph(a,s);%确定赋权图
[M,F] = maxflow(G,1,14) %使用默认 searchtrees 方法求最大流
p = plot(G,'Layout','force','EdgeLabel',G.Edges.Weight);
highlight(p,F)%显示最大流并画出最大流
```

**结果如下：**





命令行窗口

M =

    16

所以最大流量是 16，正好与五个专业一共十六名毕业生想对应，所以所有公司都能招聘到各自需要的专业人才。