

复变函数论 2024 学年讲义

带 i 的淑芬罢了（迫真）

作者：钟景洋 @ 福州大学

时间：2024 年秋季学期



福州大学
FUZHOU DA XUE

在过去的两个世纪里，数学获得了长足的发展，这在很大程度上要得益于复数的引进。
而矛盾的是，这一切都是建立在一个看似荒谬的理念之上，那就是有一些数它们的平方是负数。

——E. Borel, 1952

目录

第 1 章 复数	1
1.1 复数的历史：从解一元三次方程说起	1
1.2 复数域	2
1.3 复数的三种形式	5
1.3.1 复数的一般形式	5
1.3.2 复数的三角形式	5
1.3.3 复数的指数形式	6
1.3.4 复数的幂和开方	7
1.4 复数和平面解析几何	9
1.5 复球面和扩充复平面	11
第 2 章 复平面的拓扑	15
2.1 拓扑和拓扑基	15
2.2 子集的六类点	18
2.2.1 内点、外点、边界点	18
2.2.2 聚点、闭包点	19
2.2.3 孤立点	19
2.3 分离性	20
2.4 紧性	21
2.5 连通性	23
2.6 连续映射	23
2.7 曲线和单连通	26
第 3 章 解析函数	28
3.1 解析函数的概念	28
3.2 Cauchy-Riemann 方程	28
3.3 初等解析函数	31
3.3.1 指数函数	31
3.3.2 三角函数	32
3.3.3 双曲三角函数	32
3.4 初等多值函数	33
3.4.1 对数函数	33
3.4.2 幂函数	34
3.4.3 反三角函数	34
3.5 分式线性变换	35
3.6 * 多值函数和 Riemann 面	39
第 4 章 复积分	43
4.1 复积分的概念	43
4.2 四个等价和 Cauchy 定理	45
4.3 Cauchy-Goursat 定理	48
4.4 Cauchy 积分公式和值分布理论	52

4.4.1	Cauchy 积分公式	52
4.4.2	解析函数的值分布理论	55
4.5	四个等价的证明	56
4.6	调和函数	58
4.7	最大模原理和 Schwarz 引理	59
4.7.1	最大模原理	59
4.7.2	Schwarz 引理	60
第 5 章	复级数	63
5.1	函数项级数	63
5.2	幂级数	66
5.3	Taylor 级数	69
5.4	Laurent 级数	72
第 6 章	零点和奇点	76
6.1	函数的零点	76
6.2	孤立奇点及其分类	78
6.2.1	有限奇点的奇性	78
6.2.2	无穷远点的奇性	80
6.3	全纯和亚纯函数	81
第 7 章	留数	83
7.1	留数的计算和留数定理	83
7.1.1	有限奇点的留数	83
7.1.2	无穷远点的留数	85
7.1.3	留数定理以及留数和定理	86
7.2	利用留数计算实定积分	87
7.2.1	形如 $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分	89
7.2.2	形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的积分, 其中 f 满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$	89
7.2.3	形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$ 的积分, 其中 f 满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 0$	90
7.2.4	* 和多值函数相关的积分	91
7.2.5	* 和 e^{-x^2} 相关的积分	94
7.3	辐角原理和 Rouché 定理	96
第 8 章	*Riemann 映射定理	101
8.1	单叶解析函数	101
8.2	正规族和 Montel 定理	103
8.3	Riemann 映射定理	105

第 1 章 复数

1.1 复数的历史：从解一元三次方程说起

复数的概念最早出现在 16 世纪，在人们开始研究一元函数方程中引进的。最早人们将 i 定义为二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 的其中一个根（随便哪一个）并称其为虚数单位，在这个意义下所有的一元二次方程都有“根”，而那些不在实数域的根就被称为“复数”。

诚然，当时的数学界只是将 i 当做一个符号在使用，并没有深刻思考背后可能隐藏的数学结构，甚至一段时间的主流观点是， i 和复数都是不应当引进的，因为不会对数学的发展起到任何实质帮助。

复数第一次引起学界的重视反而是在求解一元三次方程的过程中。16 世纪中叶数学家 Tartaglia 完成了对一元三次方程求根公式的推导，而 Cardano 则将这个公式总结成书，具体的推导过程如下：

一元三次方程求根公式

我们知道一个一元三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c$ 通过平移总是可以化归为 $x^3 + px + q = 0$ 。我们知道这个方程总是有实根的（为什么？），那么不妨假设 x 就是其中某个实根，我们将其拆解成两个实数： $x = u + v$ ，带入上述方程中得到

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \Rightarrow (u + v)(3uv + p) + (u^3 + v^3 + q) = 0. \quad (1.1)$$

通过适当调整 u 和 v 的大小可以让 $3uv = -p$ ，在这种情况下就迫使 $u^3 + v^3 + q = 0$ ，总结一下我们得到

$$\begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \quad (1.2)$$

换言之此时 u^3 和 v^3 恰好是二次方程 $t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$ 的两根。而该方程是否有实根的关键在于

$$\frac{1}{4}\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (1.3)$$

的符号，我们也将其称为三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的判别式。当 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$ 时，可以解得

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \quad (1.4)$$

那么也就是说

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \quad (1.5)$$

就是所要求的那个实根，我们将公式 (1.5) 称为 **Cardano 求根公式**。事实上后续 Lagrange 补充说明了这样的步骤其实能给出方程的三个根（而方程最多也就三个根）。具体来说，如果 u, v 是由上式推导的数，那么

$$u + v, \quad u \cdot \omega + v \cdot \omega^2, \quad u \cdot \omega^2 + v \cdot \omega. \quad (1.6)$$

恰好是方程三个不同的根，这里 ω 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的任意一个解。

这里我们看出了一个明显的矛盾：首先一元三次方程必然有实根，而这个实根必然能通过上述求根公式得到，但另一方面其判别式 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ 显然可以为负数，如果不引入虚数单位 i ，这个求根步骤直接会卡在第一个根号处。比如例子： $x^3 - 15x - 4 = 0$ ，很明显 $x = 4$ 是一个实根，但是其对应的判别式为 $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121 < 0$ 。Cardano 陷入了死循环，但是这个问题被他的学生 Bombelli 解决了，他发现求根公式并没有问题，只需要引进 i 即可，首先我们计算可知

$$u^3 = 2 + \sqrt{-121} \xrightarrow{\text{引入 } i} 2 + 11i, \quad v^3 = 2 - \sqrt{-121} = 2 - 11i.$$

Bombelli 突发奇想，认为 u 理应也形如 $a + bi$ ，最终发现恰好有

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i + 6i^2 + i^3 \xrightarrow{i^2 = -1} 2 + 11i \Rightarrow u = 2 + i. \quad (1.7)$$

同理 $v = 2 - i$, 故而 $x = u + v = 4$! 因此要保证求根公式正常工作, 必须引入虚数单位 i 。

一元三次方程的求根公式最终引起了学界的注意, 并承认了加入虚数单位 i 的必要性, 然而这离复变函数这门学科的真正发展还相距差不多 200 年。**复变函数即以复数为变量的函数**, Euler 应该是公认最早研究复变函数的数学家, 1774 年的一篇论文中 Euler 考虑了由复变函数的积分导出的两个方程, 这些方程后来被称为“d'Alembert-Euler 方程”, 也同时被视为流体力学的开端。

之后的 18-19 世纪, 复变函数论逐渐由 Cauchy、Riemann、Weierstrass 等人建立, 值得注意的是, 这个阶段也恰好是数学分析的奠基阶段, 复变函数事实上是和数学分析一样古老的学科。我们学习复变函数的过程也和数学分析并无二致, 我们将从复数谈起, 讨论复变函数对应的可导性、可积性、级数等相关内容。

1.2 复数域

在中学课程中我们是这么理解复数的: 我们将 -1 的平方根 (当然在实数中不存在) 记为 i , 同时把形如 $a + bi$ 的组合记为复数, 其中 a, b 为实数。这么讲的好处是方便于理解和计算, 但是从逻辑上来说这样的“定义”是有缺陷的, 我们应该只从实数集出发来定义什么是复数。

定义 1.1 (群、环、域)

设 \mathbb{F} 为非空集合, 我们可以在其上定义两个运算 $+$ 和 \cdot , 称为加法和乘法, 我们给出如下一些性质:

- (A1) $\forall x, y \in \mathbb{F}$, 有 $x + y \in \mathbb{F}$ 以及 $y + x \in \mathbb{F}$; (**\mathbb{F} 关于加法封闭**, 可不写, 这里强调一下)
- (A2) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, 有 $(x + y) + z = x + (y + z)$; (**加法结合律**)
- (A3) $\exists 0 \in \mathbb{F}$, 使得 $\forall x \in \mathbb{F}$, 有 $0 + x = x + 0 = x$; (**加法单位元存在**)
- (A4) $\forall x \in \mathbb{F}$, $\exists y \in \mathbb{F}$, 使得 $x + y = y + x = 0$; (**加法逆元存在**)
- (A5) $\forall x, y \in \mathbb{F}$, $x + y = y + x$; (**加法交换律**)
- (B1) $\forall x, y \in \mathbb{F}$, 有 $x \cdot y \in \mathbb{F}$ 以及 $y \cdot x \in \mathbb{F}$; (**\mathbb{F} 关于乘法封闭**, 可不写, 这里强调一下)
- (B2) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$; (**乘法结合律**);
- (B3) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, 有 $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 以及 $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$; (**加法乘法分配率**)
- (C1) $\exists 1 \in \mathbb{F}$, 使得 $\forall x \in \mathbb{F}$, 有 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$; (**乘法单位元存在**)
- (C2) $\forall x \in \mathbb{F}$, $\exists z \in \mathbb{F}$, 使得 $x \cdot z = z \cdot x = 1$; (**乘法逆元存在**)
- (D) $\forall x, y \in \mathbb{F}$, 有 $x \cdot y = y \cdot x$; (**乘法交换律**)。

若非空集合 \mathbb{F} 满足 (A1) – (A4), 我们称其关于加法构成一个**群**;

若其继续满足 (A1) – (B3), 我们称其关于加法和乘法构成一个**环**;

若其继续满足 (A1) – (C2), 我们称其关于加法和乘法构成一个**除环**;

若其满足 (A1) – (D), 我们称其关于加法和乘法构成一个**域**。一言以蔽之, 乘法交换的除环称为域。

定义 1.2 (复数域)

我们在 \mathbb{R}^2 上定义如下的加法和乘法:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.8)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad) \quad (1.9)$$

请自行验证以下事实:

(1) \mathbb{R}^2 在加法和乘法下满足对应的结合律、交换律和分配率;

(2) $(0, 0)$ 是加法的单位元, (a, b) 的加法逆元是 $(-a, -b)$;

(3) $(1, 0)$ 是乘法的单位元, (a, b) 的乘法逆元是 $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ 。

如此一来 $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ 构成一个域, 我们将其记为 \mathbb{C} , 称其为**复数域**。

敏锐的读者应该注意到了，在上述定义下我们把所谓的虚数单位 i 和域中元素 $(0, 1)$ 画上等号，这样就从根源上避免了讨论 i 是否存在，什么叫 -1 的平方根等诸多头疼问题。

复数有一种经典的理解方式是通过域扩张：

命题 1.1

$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$ 和复数域 \mathbb{C} 作为域是同构的。

证明 事实上这是抽象代数中的一个重要命题，我们首先给出映射

$$\varphi: \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.10)$$

$$[a + bx] \mapsto (a, b) \quad (1.11)$$

请读者自行验证这是一个良定的映射（因为涉及到代表元），同时是一个环同态，还是双射，因此构成了两个域之间的一个同构。□

注 根据定义不难发现有 $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ ，这说明了所谓的 i 本质上就是复数域中的 $(0, 1)$ ，这样也就无需纠结 i 是否存在的问题。同时不难看出对于任意的复数域中的元素 (a, b) ，有

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \stackrel{\text{记作}}{=} a + bi \quad (1.12)$$

这也是为什么我们管 $a + bi$ 叫复数的本质原因。

我们知道实数本身是个域，而且任意两个不同的实数之间均可以比较大小，一个有趣而深刻的问题是，我们可以在复数域上引进某种大小关系吗？读者不妨先猜一下答案，我们先解释以下什么叫在域上比较大小。

定义 1.3 (有序域)

设 \mathbb{F} 为一个非空集合，我们称其上的一个二元关系 $<$ 是一个序关系，若其满足：

- (1) $\forall x, y \in \mathbb{F}$ ，则以下三条 $x < y$ ， $x = y$ ， $y < x$ 恰好总是只有一条成立；（三择性）
- (2) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$ ，若 $x < y$ 且 $y < z$ 成立，则一定有 $x < z$ 成立。（传递性）

进一步，如果 \mathbb{F} 是一个域， $<$ 是其上的一个序关系，再满足：

- (1) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$ ，若 $x < y$ ，则一定有 $x + z < y + z$ ；（序和加法相容）
- (2) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$ ，若 $x < y$ 且 $0 < z$ ，则一定有 $x \cdot z < y \cdot z$ 。（序和乘法相容）

我们就称 $(\mathbb{F}, <)$ 构成一个有序域。

因为三择性的要求，我们知道一个有序域上的任意两个不同的元素都是可以比较大小的。容易验证实数是有序数，但是很可惜的是，复数域并不是有序域。

命题 1.2 (复数无法比较大小)

无法定义一种序关系 $<$ 使得复数域 \mathbb{C} 成为有序域，换言之，任意两个不同的复数不可能比较大小。

证明 反设存在序关系 $<$ 使得 $(\mathbb{C}, <)$ 成为有序域，在乘法相容性中取 $x = 0$ ，得到

$$\text{若 } 0 < y \text{ 且 } 0 < z, \text{ 则 } 0 < yz. \quad (1.13)$$

同时我们申明，若 $0 < x$ ，则必然有 $-x < 0$ ，这是因为三择性我们知道 $-x \neq 0$ ，同时若反设 $0 < -x$ ，则根据加法相容性，会导致 $0 = 0 + 0 < x + (-x) = 0$ ，产生矛盾。同理，若 $x < 0$ 则必然有 $0 < -x$ 。

我们知道 $i \neq 0$ （当然这里指 $(0, 1) \neq (0, 0)$ ），因此一定有 $i < 0$ 或者 $0 < i$ 成立，但无论是哪种情况都会推出 $0 < -1$ ，这是因为：

$$\begin{aligned} i < 0 &\implies 0 < -i \stackrel{(1.13)}{\implies} 0 = 0 \cdot 0 < (-i) \cdot (-i) = -1 \\ 0 < i &\stackrel{(1.13)}{\implies} 0 = 0 \cdot 0 < i \cdot i = -1 \end{aligned}$$

但 $0 < -1$ 也不足以推出矛盾，因为说不定一种序关系能让 -1 比 0 大是吧你再嘴硬。但我们只要再用一次

乘法相容性就得到

$$0 < -1 \stackrel{(1.13)}{\implies} 0 = 0 \cdot 0 < (-1) \cdot (-1) = 1.$$

现在 $0 < 1$ 且 $0 < -1$ ，这是不可能的，因为不然就有 $0 < 1 + (-1) = 0$ 了这下死透了。故而矛盾达成，这说明复数域是不可能成为一个有序域的。 \square

注 复数不可能比大小会导致很多“怪象”，例如我们可以说 $(1+i) - i > 0$ ，但是 $(1+i) > i$ 又是错误的。拳头硬子在实际学习中也会碰到一些条件，例如 $t > 0$ ，那么这时候其实就默认了 t 是实数了。

对于复数，我们给出以下概念：

定义 1.4

设 $z = x + yi$ 为复数，其中 x 和 y 为实数。

- (1) 容易验证这样的写法是**唯一**的。
- (2) 我们称 x 和 y 分别为 z 的**实部**和**虚部**，分别记为 $x = \operatorname{Re} z$ 、 $y = \operatorname{Im} z$ 。
- (3) 我们称 $\bar{z} = x - yi$ 为复数 $z = x + yi$ 的**共轭**。
- (4) 我们称 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为 z 的**模**。



关于复数的实部、虚部、共轭和模有以下命题，请读者自行验证，并不困难。

命题 1.3

设 z 为任意复数，我们有：

- (1) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$;
- (2) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;
- (3) $|z|^2 = z\bar{z}$;
- (4) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$;
- (5) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$ 。



关于复数的共轭、模跟四则运算的关系，有以下命题，请读者自行验证，并不困难。

命题 1.4

设 z_1 和 z_2 为任意两个复数，我们有：

- (1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;
- (2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;
- (3) $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ ，若 $z_2 \neq 0$;
- (4) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (5) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ ，若 $z_2 \neq 0$ 。



注 一言以蔽之，求共轭运算穿越所有四则运算，但是取模运算只能穿越乘除。

因为对于加减，我们有以下更为著名的三角不等式：

命题 1.5 (三角不等式)

设 z_1 和 z_2 为任意两个复数，则

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.14)$$



证明 事实上如果将复数理解为平面上的一点 (a, b) ，那么复数的模长对应的就是 (a, b) 和原点连线的长度，那么通过几何转换一眼可知上述不等式不过是平面上的三角不等式。

当然我们也可以给予一个纯代数的证明，下面只证明 $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ，剩下是类似的，由于两边皆为正数，我们不妨将两边平方，有

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \end{aligned}$$

另一边

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2|$$

很显然我们有 $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1\bar{z}_2|$ ，因此不等式得证。 \square

1.3 复数的三种形式

1.3.1 复数的一般形式

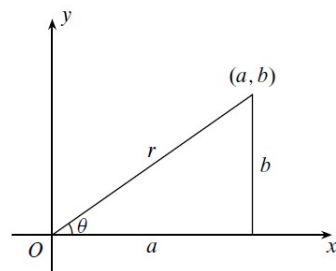
定义 1.5

我们称 $z = x + yi$ 为复数的**一般形式**。What can I say



通过之前的定义，复数域其实就是 \mathbb{R}^2 上附上了特定的加法和乘法，如果暂时忘掉代数运算，那么全体复数自动构成一张平面，我们称之为**复平面**。在后续章节的学习中，我们会发现很多时候我们用到的是复平面的拓扑结构，而非代数结构，我们会经常用复平面这个称呼来代替复数域。

任何一个复数 $z = (a, b)$ ，它自动对应于复平面上的一个点，那么只要这个复数不是零，我们可以将其转化为极坐标，这给出了复数的第二种形式。



1.3.2 复数的三角形式

定义 1.6 (三角形式、辐角和辐角主值)

若 $z \neq 0$ ，则一定存在 $r > 0$ 以及 $\theta \in \mathbb{R}$ ，使得

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.15)$$

我们称上式为 z 的**三角形式**。其中 $r = |z|$ 是 z 的**模**，而满足条件的 θ 的全体被称为 z 的**辐角**，记作 $\text{Arg } z$ 。若限制 θ 的值介于 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，我们会得到唯一满足条件的角，将其称为 z 的**辐角主值**，记作 $\arg z$ 。



命题 1.6

若将 z 点和原点连直线，则 $\arg z$ 的几何含义是将实轴正半轴沿逆时针能转到该直线的最小正角度。而

$$\text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (1.16)$$

如果引入同余记号

$$a \equiv b \pmod{n} \iff n|a-b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ 使得 } a-b = kn. \quad (1.17)$$

则有以下简单常用结论：

$$(1) \theta \in \text{Arg } z \iff \theta \equiv \arg z \pmod{2\pi}. \quad (1.18)$$

$$(2) e^{i\varphi} = e^{i\theta} \iff \varphi \equiv \theta \pmod{2\pi}. \quad (1.19)$$



利用极坐标不难看出， $\arg z$ 跟 $\arctan \frac{y}{x}$ 有些许联系，但注意到 \arctan 的值域范围只有 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，而 $\arg z$ 的值域要大得多，因此我们需要对不同象限的点调整公式。读者自行验证以下公式：

命题 1.7

设 $z = x + yi \neq 0$ ，则 $\arg z$ 满足以下公式：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & z \text{ 在第一象限;} \\ \frac{\pi}{2} & z \text{ 在虚轴正半轴;} \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & z \text{ 在第二或第三象限;} \\ \frac{3\pi}{2} & z \text{ 在虚轴负半轴;} \\ \arctan \frac{y}{x} + 2\pi & z \text{ 在第四象限.} \end{cases} \quad (1.20)$$



例题 1.1 求 $\arg(-3+4i)$ 以及 $\arg(3-4i)$ 。

解 基于画图或者公式 (1.20) 可知 $\arg(-3+4i) = \pi - \arctan \frac{4}{3}$ 而 $\arg(3-4i) = 2\pi - \arctan \frac{4}{3}$ 。 \square

1.3.3 复数的指数形式

在介绍复数的指数形式之前我们需要引进一个函数：指数函数 e^z

定义 1.7 (指数函数)

我们定义 $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ，称之为 (复) 指数函数。



注 我们目前还没有定义过复数项级数的概念，更没有证明右侧是一个对于全平面复数收敛的复数项级数。因此 e^z 目前还不算是良定。所有的证明被放在了第五章。

在接受了 e^z 的定义后我们就可以证明复变史上最出名的公式：欧拉公式。

定理 1.1 (欧拉公式)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \quad (1.21)$$



证明

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &\stackrel{e^z \text{ 定义}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \stackrel{\substack{\text{奇偶分离} \\ \text{绝对收敛}}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\stackrel{i^2=-1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \cos \theta + i \sin \theta. \end{aligned}$$



注 有些书喜欢把欧拉公式作为定义提出，我比较倾向于将其当做一个推论。欧拉公式有以下重要推论：

推论 1.1 (推广欧拉公式)

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{若 } z = x + yi. \quad (1.22)$$



证明 只需注意到 $e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{iy}$ ，再套用欧拉公式即可。 \square

若 $z \neq 0$ ，已知 z 的三角形式为 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，逆用一下欧拉公式就可以得到 z 的指数形式。

定义 1.8 (指数形式)

若 $z \neq 0$ ，则一定存在 $r > 0$ 以及 $\theta \in \mathbb{R}$ ，使得

$$z = re^{i\theta} \quad (1.23)$$

我们称上式为 z 的 **指数形式**。其中 $r = |z|$ 是 z 的模，而 θ 是 z 的任意一个辐角。



指数形式的一大便利是可以借用指数函数的乘幂特性快速进行复数的乘除运算，事实上我们有以下结论：

命题 1.8

设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ， $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ，则

$$\overline{z_1} = r_1 e^{-i\theta_1}, \quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (1.24)$$



而对应地，利用指数形式计算复数的加减法则是自讨苦吃。

结合复数的三种形式，我们可以解决一些看似和复数无关的恒等式。

例题 1.2 利用复数求三倍角公式。

证明 我们取 $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，然后用两种方式算 z^3 ，具体来说：

$$z^3 = e^{i3\theta} = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta);$$

$$z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta).$$

那么比对两式的实部和虚部可得

$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta; \\ \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta = -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta. \end{cases} \quad (1.25)$$

此即大家高中熟知的三倍角公式。 \square

例题 1.3 证明 Machin 恒等式：

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}. \quad (1.26)$$

解 此题的技巧在于将题目中的三个角度转化，我们知道 $\arctan \frac{1}{5}$ 对应的是复数 $(5+i)$ 的辐角主值，而 $\frac{\pi}{4}$ 则对应于复数 $1+i$ 的辐角主值，想到这一层，我们计算

$$(5+i)^4(1-i) = (24+10i)^2(1-i) = (476+480i)(1-i) = 956+4i.$$

对等式两边取辐角主值，我们得到

$$4 \arg(5+i) + \arg(1-i) = \arg(956+4i) \implies \frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

\square

注 通过上述计算我们知道事实上这样的恒等式要多少有多少。但 Machin 恒等式在历史上被用于 π 的近似计算，因为 $\arctan \frac{1}{239}$ 这项收敛很快。

1.3.4 复数的幂和开方

最后我们来讨论一下复数的幂次和开方的问题，很显然，通过复数的指数形式，若 $z = re^{i\theta}$ ，我们有

$$z^n = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.27)$$

因此计算复数的幂次是便利的，但是在计算复数的开方，即 $w = \sqrt[n]{z}$ 时，我们要格外小心，因为这相当于在解方程 $w^n = z$ ，我们知道一般来说根不是唯一，因此事实上开方并不是一个良定的函数，而是一个“一对多”的映射，具体来说，我们有以下开方公式：

命题 1.9 (复数的开方公式)

设 $z \neq 0$ ，且 $z = re^{i\theta}$ ，则

$$\sqrt[n]{z} = \{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k = 0, \dots, n-1 \}. \quad (1.28)$$

证明 设 w 满足 $w^n = z$ ，我们知道开方即是求出 w 所有的可能的值。因为 $w \neq 0$ ，我们设 $w = \rho e^{i\varphi}$ ，有：

$$w^n = z \iff \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}.$$

我们知道两个复数相等等价于说两者的模长和辐角依次相等，首先我们得到

$$\rho^n = r \iff \rho = \sqrt[n]{r}.$$

注意上式中的 ρ 和 r 都是正实数，因此结果是良定的。但在讨论辐角相等的时候，我们其实在讨论两个集合相

等, 也就是说

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} w^n &= \{n\varphi + 2p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\} \stackrel{\text{作为集合相等}}{=} \{\theta + 2q\pi \mid q \in \mathbb{Z}\} = \operatorname{Arg} z \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \text{ 使得 } n\varphi = \theta + 2k\pi. \\ &\iff \text{所有可能的 } \varphi = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

故而我们知道所有满足 $w^n = z$ 的 w 形如 $\{\sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 最后注意到 $e^{i\theta}$ 是一个周期为 2π 的函数 (因为其实部和虚部分别是 $\cos \theta$ 和 $\sin \theta$), 故而纵然允许 $k \in \mathbb{Z}$, 所有不同的值也恰好只有 n 个, 它们分别来自于 $k = 0, \dots, n-1$. \square

例题 1.4 计算 $\frac{(1+\sqrt{3}i)^{114}}{(1-i)^{514}}$. 这么臭的数有什么算的必要吗

解 只需注意到

$$1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \implies (1 + \sqrt{3}i)^6 = 2^6 \implies (1 + \sqrt{3}i)^{114} = 2^{114}.$$

而

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \implies (1 - i)^8 = 2^4 \implies (1 - i)^{514} = 2^{256}(1 - i)^2 = -2^{257}i$$

$$\text{故而 } \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{114}}{(1 - i)^{514}} = \frac{2^{114}}{-2^{257}i} = \frac{i}{2^{143}}.$$

例题 1.5 解方程 $z^2 + 4iz = 4 - 9i$, 并列出现所有可能的解。

解 首先我们利用配方求根:

$$z^2 + 4iz = 4 - 9i \iff z^2 + 4iz - 4 = -9i \iff (z + 2i)^2 = -9i \iff z = -2i + \sqrt{-9i}.$$

这里要小心此根号是复数开方, 和实数定义不同, 事实上这个符号天然就对应两个根, 而且注意到

$$\sqrt{-9i} = \sqrt{9e^{i\frac{3\pi}{2}}} \stackrel{\text{开方公式}}{=} \{3e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}} \mid k = 0, 1\} = \{3e^{i\frac{3\pi}{4}}, 3e^{i\frac{7\pi}{4}}\} = \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i, \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i\right\}.$$

因此方程的解为

$$z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right)i, \quad z_2 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 2\right)i.$$

\square

关于辐角函数的一些说明:

命题 1.10

通过复数的指数形式的乘除法我们不难发现有以下命题:

(1) $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$;

(2) 若 $z_2 \neq 0$, 则 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

但是要注意以下命题: (3) $\operatorname{Arg} z^n \neq n \operatorname{Arg} z$, 若 $n > 1 \in \mathbb{Z}$.



证明 (1) 和 (2) 直接按照定义来, 这里需要再三强调两个辐角相加其实是集合相加, 下面来看 (3):

设 $\arg z = \theta$, 则 $\operatorname{Arg} z = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 我们有:

$$\arg z^n \equiv n\theta \pmod{2\pi} \implies \operatorname{Arg} z^n = \{n\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

但另一边:

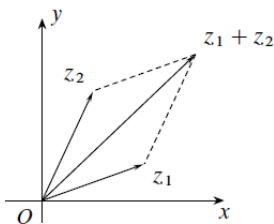
$$n \operatorname{Arg} z = n \cdot \{\theta + 2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{n\theta + m \cdot 2n\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

所以很明显有 $n \operatorname{Arg} z \subsetneq \operatorname{Arg} z^n$. \square

1.4 复数和平面解析几何

我们知道任意一个复数 $z = x + yi$ 可以对应于复平面上的一个点 (也叫做 z) $z = (x, y)$, 那么 z 本身也可以代表向量 \overrightarrow{Oz} , 因此可以将复数和平面向量一一对应。

比如以 z_1 为起点, 以 z_2 为终点的向量 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 的坐标恰好就是 $z_2 - z_1$, 因此做复数减法就是做向量减法。当然同样的我们也可以定义两个向量的和, 在几何上它和 $z_1 + z_2$ 算出来的复数所确定的向量是一致的。



命题 1.11 (利用复数刻画向量间的关系)

设平面向量 \vec{u} 和 \vec{v} 分别对应于复数 z_1 和 z_2 , 则我们有以下结论:

- (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re} z_1 \overline{z_2}$; 注意左边的 \cdot 是向量内积。
- (2) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) = 0$;
- (3) $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \operatorname{Im}(z_1 \overline{z_2}) = 0 \iff \exists t \in \mathbb{R}, \text{ 使得 } z_1 = tz_2$ 。

证明 设 $z_k = x_k + iy_k$, 直接计算:

$$z_1 \overline{z_2} = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

容易看出 $x_1 x_2 + y_1 y_2$ 就是 $\vec{u} \cdot \vec{v}$, 而 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 也当且仅当 $x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0$ 。 □

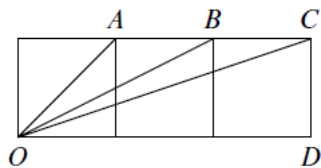
注 上述命题说明可以把平面向量的垂直和平行 (或共线) 问题转化为复数计算。

复数转换对于处理部分平面几何的问题非常有效, 我们来看几个例子:

例题 1.6 设图中是三个一样的大的正方形, 证明:

$$\angle AOD + \angle BOD + \angle COD = \frac{\pi}{2}.$$

证明 我们以 O 为原点, 以 \overrightarrow{OD} 为 x 轴正方向建立直角坐标系, 并假设每个正方形的边长皆为 1, 不难看出 A, B, C 三点对应的复数分别为 $1+i, 2+i, 3+i$ 。那么根据辐角的定义我们有



$$\begin{aligned} \angle AOD + \angle BOD + \angle COD &\stackrel{\text{切换成辐角}}{=} \arg(1+i) + \arg(2+i) + \arg(3+i) \\ &\stackrel{\text{三者皆是锐角}}{=} \arg[(1+i)(2+i)(3+i)] \\ &= \arg(1+3i)(3+i) = \arg(10i) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

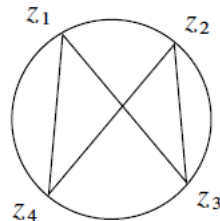
□

例题 1.7 证明复平面上四点 z_1, z_2, z_3, z_4 共圆的充要条件是

$$\operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) = 0. \quad (1.29)$$

证明 事实上四点共圆的图有多种情况, 从 z_1 按顺时针排列的话就有六种, 我们借用右图的情况进行说明, 其他的情况是类似的。

在几何上四点共圆的一个等价描述是 $\angle z_4 z_1 z_3 = \angle z_4 z_2 z_3$ (如右图所示) 或者 $\angle z_4 z_1 z_3 = \angle z_4 z_2 z_3 \pm \pi$ (请读者自己画图)。而另一方面, 利用辐角的性质我们知道



$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) &= \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \right) - \operatorname{Arg} \left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) \\ &= [\operatorname{Arg}(z_1 - z_3) - \operatorname{Arg}(z_1 - z_4)] - [\operatorname{Arg}(z_2 - z_3) - \operatorname{Arg}(z_2 - z_4)] \\ &= [\overrightarrow{z_1 z_4} \text{ 到 } \overrightarrow{z_1 z_3} \text{ 的转角}] - [\overrightarrow{z_2 z_4} \text{ 到 } \overrightarrow{z_2 z_3} \text{ 的转角}] = \angle z_4 z_1 z_3 - \angle z_4 z_2 z_3 \end{aligned}$$

换言之我们有

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) \equiv 0 \pmod{\pi} \iff \operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \right) = 0.$$

例题 1.8 (推广版托勒密定理) 设 $ABCD$ 按顺时针构成一个平面四边形, 证明:

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |BD| \cdot |AC|. \quad (1.30)$$

且等号成立当且仅当四点共圆。在古典几何中, 等号成立条件的定理被称为**托勒密定理**

证明 直接用几何证明是困难的, 本题完全展现了复数运算的巧妙之处。

我们直接把 $ABCD$ 标成复数 z_k (参考上题的图), 那么题目中的不等式转化为

$$\begin{aligned} & |z_1 - z_2| \cdot |z_3 - z_4| + |z_1 - z_4| \cdot |z_2 - z_3| \geq |z_1 - z_3| \cdot |z_2 - z_4|. \\ \iff & |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| \geq |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)|. \end{aligned} \quad (1.31)$$

然而神奇的是, 只要我们令 $w_1 = (z_1 - z_2)(z_3 - z_4)$, $w_2 = (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)$, 虽然麻烦, 但是我们可以直接验证

$$w_1 + w_2 = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4).$$

换句话说公式 (1.31) 本质上不过就是个三角不等式 $|w_1| + |w_2| \geq |w_1 + w_2|$, 因此不等式得证。

更为神奇的是等号成立时我们知道 w_1 和 w_2 作为向量共线, 因此根据之前的命题, 这等价于

$$\exists t \in \mathbb{R}, w_1 = tw_2 \iff \frac{w_1}{w_2} \in \mathbb{R} \iff \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_3} \right) = 0.$$

根据例题 1.7, 这说明等号成立恰好等价于四点共圆。 \square

作为应用, 最后我们利用复数来给出复平面上的直线和圆周的写法:

命题 1.12 (复平面的直线和圆周)

(1) 复平面上的直线一定有形如以下的方程:

$$\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0. \quad (1.32)$$

其中 $a \in \mathbb{C}$, 而 $c \in \mathbb{R}$ 。

(2) 复平面上的圆周一定有形如以下的方程:

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c = 0. \quad (1.33)$$

其中 $a \in \mathbb{C}$, 而 $c \in \mathbb{R}$ 满足 $|a|^2 > c$ 。

证明 (1) 设 l 在复平面上, 我们知道 l 在平面上总有一个法向, 不妨设为 $\vec{v} \xrightarrow{\text{对应复数}} a$ 。
在 l 上任意取一个点 z_0 , 那么 $\forall z \in l$, 我们知道 $\overrightarrow{zz_0}$ 总是和 \vec{v} 垂直, 故而:

$$0 = \overrightarrow{zz_0} \cdot \vec{v} \xrightarrow{\text{命题 1.11}} \operatorname{Re}(a \cdot \overline{(z - z_0)}) \iff a \cdot \overline{z - z_0} + \bar{a} \cdot (z - z_0) = 0.$$

上式整理可得

$$\bar{a}z + a\bar{z} = \bar{a}z_0 + a\bar{z_0} \triangleq -c \implies \bar{a}z + a\bar{z} + c = 0.$$

容易看出这里的 c 的取值事实上和 z_0 的选取无关。

(2) 设 C 为复平面上的圆周, 将其圆心对应的复数记为 $-a$, 半径记为 R , 因此圆 C 可以写为

$$|z + a| = R \iff |z + a|^2 = R^2 \iff (z + a)(\bar{z} + \bar{a}) = R^2 \iff z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + (|a|^2 - R^2) = 0.$$

在上式中令 $c = |a|^2 - R^2$ 即可, 容易看出 $c \in \mathbb{R}$ 且 $|a|^2 - c = R^2 > 0$ 。 \square

注 通过上述命题我们发现, 复平面上的圆周和直线的方程是可以统一成以下形式:

$$Kz\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c = 0. \quad (1.34)$$

其中 $K, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{C}$ 且 $|a|^2 > Kc$ 。我们知道上式表示一条直线当且仅当 $K = 0$, 否则把 K 除掉即得到圆周, 这说明直线和圆周具有某种共性。在下一章中我们会知道**直线实际上是过无穷远点的圆周**, 在后续的学习中我们也经常把直线视为特殊的圆周。

最后我们给出两点关于直线和圆周对称的定义，并给出相应的公式：

定义 1.9

- (1) 我们称两点 z_1 和 z_2 关于直线 l 对称，如果 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 和 l 垂直同时两者的中点落在 l 上；
 (2) 设圆周 C 的圆心为 O ，半径为 R ，我们称两点 z_1 和 z_2 关于圆周 C 对称，若 z_1, z_2 满足以下三条：
 (i) $Oz_1 z_2$ 三点共线； (ii) $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 同向； (iii) $|\overrightarrow{Oz_1}| |\overrightarrow{Oz_2}| = R^2$ 。



命题 1.13

- (1) z_1 和 z_2 关于直线 $\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$ 对称的充要条件是

$$\bar{a}z_1 + a\bar{z}_2 + c = 0. \quad (1.35)$$

- (2) z_1 和 z_2 关于圆周 $z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c = 0$ 对称的充要条件是

$$z_1\bar{z}_2 + \bar{a}z_1 + a\bar{z}_2 + c = 0. \quad (1.36)$$



请读者自行完成证明，我们会在最后一章共形映射再用到这些公式。

1.5 复球面和扩充复平面

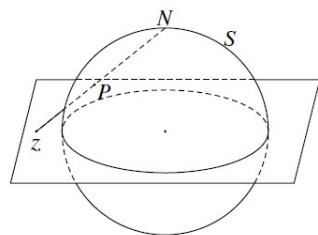
我们知道复平面上的点 z 都有确定的模长 $|z|$ ，而我们有的时候希望描述 $|z| \rightarrow +\infty$ 这样的概念，这需要在复平面之外再引入一个概念点：无穷远点 ∞ 。根据直觉我们希望无穷远点 ∞ 能够满足以下要求：

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}$ ，要求 $z \pm \infty = \infty$ ； (ii) $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C}$ 或 $z = \infty$ ，有 $z \cdot \infty = \infty$ ；
 (iii) $\forall z \in \mathbb{C}$ ，要求 $\frac{\infty}{z} = \infty$ ， $\frac{z}{\infty} = 0$ ； (iv) 不讨论 $0 \cdot \infty$ 、 $\frac{\infty}{\infty}$ 以及 $\infty \pm \infty$ ；
 (v) 加上无穷远点的后的复平面上的每一条直线都通过 ∞ 。

其中 (v) 看上去似乎不显然，但是我们最后会给出解释。在复平面上加入无穷远点的后的模型被称为**扩充复平面**，为了理解无穷远点，一种常见的办法是借助几何上的球极投影，下面给出具体的构造：

一、扩充复平面的构造

如右图所示我们建立空间直角坐标系并画出单位球面，并将其北极点 $(0, 0, 1)$ 记为 N 。同时我们将 xy -平面视为复平面，对于平面上的任何一点 $z = (x, y, 0)$ ，我们连接 Nz ，该直线和单位球面会恰好交于第二点（ N 自己不算），我们将其记为 P 。通过这样的方式，我们把复平面上的点和单位球面上的点进行一个对应，我们将这样的对应称为**球极投影**。



命题 1.14

设 $z = (x, y, 0)$ ，则其对应的球面的像点为

$$P = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right). \quad (1.37)$$

或者写回 $z = x + iy$ ，则对应的公式为

$$P = \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right). \quad (1.38)$$



解 直接计算即可，我们知道 P 需要满足两个条件：(1) N, P, z 三点共线；(2) P 在单位球面上。

我们设 $P = (r, s, t)$, P 在球面上可知 $r^2 + s^2 + t^2 = 1$, 而 N, P, z 三点共线等价于 $\overrightarrow{NP} \parallel \overrightarrow{Nz}$, 由此我们得到方程组:

$$\begin{cases} \frac{r}{x} = \frac{s}{y} = \frac{1-t}{1}; \\ r^2 + s^2 + t^2 = 1. \end{cases} \quad (1.39)$$

由第一个方程可知 $r = (1-t)x$ 且 $s = (1-t)y$, 然后带入第二个方程可得:

$$x^2(1-t)^2 + y^2(1-t)^2 + t^2 = 1 \implies (t-1) \left[(x^2 + y^2 + 1)t - (x^2 + y^2 - 1) \right] = 0. \quad (1.40)$$

我们知道 $t = 1$ 实际上回到北极点 N 本身, 故而舍去, 因此 $t = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$, 后面就不难验证了。□

通过球极投影的模型, 我们将复平面上的点和单位球面上的点进行了一个对应, 但要小心, 这个对应并不是一一的, 我们会发现, 球面上恰有一个点映不到, 那就是北极点 N , 因为 P 的第三个坐标 $\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$ 只能趋近于 1, 而只有当 $|z| \rightarrow +\infty$ 时, 球极投影的像才趋近于 N , 这说明了 N 恰恰就是无穷远点的一个对应。

定义 1.10 (复球面和扩充复平面)

球极投影将复平面加上无穷远点, 即 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 和空间中的单位球面 S 之间一一对应, 即

$$z \longleftrightarrow \left(\frac{2 \operatorname{Re} z}{|z|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right), \quad \infty \longleftrightarrow N \quad (1.41)$$

我们将这样对应下的单位球面 S 称为**复球面**, 而把对应的 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, 称为**扩充复平面**, 经常也记作 $\overline{\mathbb{C}}$ 。♣

回顾我们对无穷远点的要求, 其中还有一条没有核实: 复平面, 不, 严格来说是扩充复平面上所有的直线都过无穷远点。为此我们需要一个结论:

命题 1.15 (球极投影的保圆性)

球极投影把复球面上的圆周映成复平面上的圆周。♠

证明 假设我们用的空间直角坐标系为 $\{0; x_1(=x), x_2(=y), x_3\}$ 我们知道在几何上球面上的任何一个圆周均可以视为一个平面和球面的交线, 即:

$$\Gamma: \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1; \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0. \end{cases} \quad (1.42)$$

其中 A, B, C, D 均为实数。要求 Γ 在复平面中对应的像集, 我们只需将公式 (1.38) 带入上式中的第二式即可 (因为第一式天然成立), 我们得到其像集对应的方程为:

$$\begin{aligned} 2A \operatorname{Re} z + 2B \operatorname{Im} z + C(|z|^2 - 1) + D(|z|^2 + 1) &= 0 \\ \implies (C + D)|z|^2 + A(z + \bar{z}) + Bi(\bar{z} - z) + (D - C) &= 0 \\ \implies (C + D)|z|^2 + (A - Bi)z + (A + Bi)\bar{z} + (D - C) &= 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

我们可以令 $K = C + D$, $a = A - Bi$, $c = D - C$, 则上式划为 $Kz\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c$, 这说明了像集确实是复平面上的一个圆。□

推论 1.2

扩充复平面上的所有直线都过无穷远点。♥

证明 只需观察到像集是直线当且仅当 $K = C + D = 0$, 即 $D = -C$, 那么回看平面方程 $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$, $D = -C$ 说明该平面必过北极点 $N = (0, 0, 1)$, 这说明复平面上的直线对应的恰好是复球面上所有过北极点的圆周。由于北极点和无穷远点是对应的, 因此复平面上所有的直线都过无穷远点。□

二、扩充复平面的度量结构

当我们将复平面视为 \mathbb{R}^2 时我们知道它有一个自带的欧式度量 $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ ，而事实上通过球极投影我们可以给其赋予第二个度量，我们将其记为 $d(z_1, z_2)$ 。

定义 1.11 ($\bar{\mathbb{C}}$ 的球度量)

设 z_1, z_2 是扩充复平面上的两点 (包括可以是无穷远点 ∞)，设 z_1, z_2 在复球面上对应的像点为 P, Q ，我们定义以下度量：

$$d(z_1, z_2) = |P - Q|_{\mathbb{R}^3}. \quad (1.44)$$

我们将其称为**扩充复平面上的球度量**。



我们马上给出球度量的具体公式：

命题 1.16

若 z_1, z_2 均不为无穷远点 ∞ ，则

$$d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}}. \quad (1.45)$$

若 $z \neq \infty$ ，则

$$d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}. \quad (1.46)$$

这里所有的 $|\cdot|$ 都是指复平面本身的欧式度量。



证明 (1) 先假定两个点都不是无穷远点，设 z_1, z_2 在复球面上对应的像点为 $P = (r_1, s_1, t_1)$ 以及 $Q = (r_2, s_2, t_2)$ ，根据定义，有

$$d(z_1, z_2)^2 = |P - Q|_{\mathbb{R}^3}^2 = (r_1 - r_2)^2 + (s_1 - s_2)^2 + (t_1 - t_2)^2 = 2 - 2(r_1 r_2 + s_1 s_2 + t_1 t_2)$$

而根据球极投影的坐标对应关系，我们有

$$r_k = \frac{2 \operatorname{Re} z_k}{1 + |z_k|^2} = \frac{2x_k}{1 + |z_k|^2}, \quad s_k = \frac{2 \operatorname{Im} z_k}{1 + |z_k|^2} = \frac{2y_k}{1 + |z_k|^2}, \quad t_k = \frac{1 - |z_k|^2}{1 + |z_k|^2}.$$

带入上式得：

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2)^2 &= 2 - 2 \cdot \frac{4(x_1 y_1 + x_2 y_2) + (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \\ &= 4 \cdot \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2)}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \end{aligned}$$

另一方面，我们有

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2).$$

故而最终得到

$$d(z_1, z_2)^2 = \frac{4|z_1 - z_2|^2}{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \implies d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \cdot \sqrt{1 + |z_2|^2}}.$$

(2) 设 $z \neq \infty$ ，且 z 在复球面上的对应为 $P = (r, s, t)$ 。我们知道 ∞ 恰好对应于北极点 $N = (0, 0, 1)$ ，故而

$$d(z, \infty)^2 = |P - N|_{\mathbb{R}^3}^2 = r^2 + s^2 + (1 - t)^2 = 2 - 2t = \frac{4}{1 + |z|^2} \implies d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z|^2}}.$$

□

注 容易看出 d 是由欧式度量 $|\cdot|_{\mathbb{R}^3}$ 所诱导，因此它自动满足度量要求的所有条件。同时我们还要指出的是，事实上这个度量 d 和复平面上原本的度量 $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ 在有界集上是完全等价的。

定义 1.12 (度量等价)

设 X 为度量空间，其上可以赋予两个度量 d_1, d_2 ，我们称 d_1 和 d_2 是**等价**的，若存在常数 C_1 以及 C_2 ，使得

$$C_1 \cdot d_2(x, y) \leq d_1(x, y) \leq C_2 \cdot d_2(x, y). \quad (1.47)$$

对于 $\forall x, y \in X$ 成立。



注 度量等价说明了两个度量确定的开球全体

$$B_\rho(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \rho\}, \quad \forall \rho > 0, \forall x \in X. \quad (1.48)$$

是一样的，这就说明了两个度量所诱导的拓扑是一致的。(下一章内容)

定义 1.13 (有界集)

我们称 $E \subset \mathbb{C}$ 是一个**有界集**，若存在确定的 $R > 0$ 使得 $E \subset B_R(0)$ 。

**命题 1.17**

设 $E \subset \mathbb{C}$ 是有界集，则在 E 上 d 和 $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ 等价。



证明 设 $E \subset B_R(0)$ ，直接验证：

$$\frac{2}{1+R^2}|z_1 - z_2| \leq d(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \cdot \sqrt{1+|z_2|^2}} \leq 2|z_1 - z_2|. \quad (1.49)$$

□

通过命题 1.17 我们知道在有界集上用 $d(z_1, z_2)$ 还是 $|z_1 - z_2|$ 是等效的，但同时 d 还可以讨论到无穷远点的距离，以及无穷远点处的邻域，事实上，我们可以定义：

$$B_\rho(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} < \rho\} \iff \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \sqrt{\frac{4}{\rho^2} - 1}\} \quad (1.50)$$

我们知道 ρ 足够小蕴含了 $\sqrt{\frac{4}{\rho^2} - 1}$ 足够大，这说明所谓“ ∞ 的领域”，即是那些模长足够大的点，这和我们的直观是相符的。 $(\bar{\mathbb{C}}, d)$ 构成一个度量空间，它的拓扑也是可以讨论的，所以下一章定义的所有拓扑概念都可以运用于 $\bar{\mathbb{C}}$ 之上。在第七章学习留数的时候，我们还会再次碰到这个概念。

第2章 复平面的拓扑

本章节主要讨论的是复平面上的一些基础的拓扑概念和拓扑性质，包括拓扑、拓扑基、完备性、紧性、连通性等基础概念，这些概念在后续的章节中会频繁出现，希望读者对其有最基本且正确的认识。

2.1 拓扑和拓扑基

拓扑这个词，本身指的是一个集合所对应的一个子集族，它规定了这个集合中哪些子集是开集。装备了拓扑的集合被称为**拓扑空间**，拓扑空间是针对实数集、复数集的一种公理化的推广。

定义 2.1 (子集族)

设 X 为一个非空集合，我们将 X 的部分子集所构成的集合称为 X 的一个**子集族**。

等价的一个说法是，如果我们称 X 的所有子集构成的集合称为 X 的**幂集**，记作 $\mathcal{P}(X)$ ，那么 τ 是 X 的一个子集族当且仅当 $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ 。



定义 2.2 (拓扑、拓扑空间和开集)

设 τ 为非空集合 X 的一个集族，我们称 τ 为 X 上的一个**拓扑**，如果其满足以下三条性质：

(1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

(2) τ 中任意元素的**并集**仍在 τ 中，即对于任意指标集 I ，如果 $\forall \alpha \in I, U_\alpha \in \tau$ ，则 $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$;

(3) τ 中任意**有限个**元素的**交集**仍在 τ 中，即若 $U_\alpha \in \tau, \alpha = 1, \dots, n$ ，则 $\bigcap_{\alpha=1}^n U_\alpha \in \tau$ 。

以上三条性质被称为**拓扑开集公理**。装备了拓扑的集合 (X, τ) 被称为**拓扑空间**。我们称 τ 中的元素为 X 中的**开集**。



注 开集是对实数集上的开区间的一种抽象推广。因此我们不难看出，我们无法允许任意个开集的交仍然是开集，我们可以考虑以下例子：

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\}.$$

很显然这里的无穷交得到了单点集，至少对于实数来说，我们不应该视单点集为开区间。

在规定了什么是开集以后我们可以定义两个重要概念：闭集和邻域。

定义 2.3 (闭集和邻域)

设 (X, τ) 为拓扑空间，我们称 $U \subset X$ 为一个**闭集**，如果其补集 U^c 为开集。

$\forall p \in X$ ，设 $p \in U \subset X$ 。我们称 U 为 p 的一个**邻域**，如果存在开集 V 满足 $p \in V \subset U$ 。当然如果 U 本身就是开集，那么它自动成为 p 的一个邻域，我们称其为 p 的一个**开邻域**。



由于闭集和开集互为补集的关系，不难想象，我们一样可以通过规定什么是闭集来确定 X 的拓扑，事实上根据 De Morgan 率不难验证闭集总是满足以下性质：

定义 2.4 (闭集公理)

设 σ 为非空集合 X 的一个集族，我们称 σ 为 X 上的一个**闭集拓扑**，如果其满足以下三条性质：

(1) $\emptyset \in \sigma$, $X \in \sigma$;

(2) σ 中任意元素的**交集**仍在 σ 中，即对于任意指标集 I ，如果 $\forall \alpha \in I, U_\alpha \in \sigma$ ，则 $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \in \sigma$;

(3) τ 中任意有限个元素的并集仍在 τ 中, 即若 $U_\alpha \in \sigma, \forall \alpha = 1, \dots, n$, 则 $\bigcup_{\alpha=1}^n U_\alpha \in \sigma$ 。

以上三条性质被称为**闭集公理**。我们称 σ 中的元素为 X 中的闭集。如果先规定的是闭集, 我们称闭集的补集是开集。



下面我们来看几个拓扑空间的例子。

例题 2.1 (平凡拓扑、离散拓扑) 设 X 为非空集合, 则 $\tau = \{\emptyset, X\}$ 总是构成 X 的一个拓扑, 我们称其为 X 的**平凡拓扑**; 同时 $\tau = \mathcal{P}(X)$ 总是构成 X 的一个拓扑, 我们称其为 X 的**离散拓扑**。

在平凡拓扑中, 开集和闭集只有空集和全集。在离散拓扑中, 所有可能的子集都自动既是开集又是闭集。一个开集太少, 一个开集太多。平凡不好, 离散更不行。

例题 2.2 (余有限拓扑) 设 X 为非空集, 令 $\tau = \{A \mid A \subset X \text{ 且 } A^c \text{ 为有限集}\} \cup \{\emptyset\}$, 证明: τ 为 X 上的一个拓扑, 我们称其为 X 的**余有限拓扑**。

证明 我们只需根据开集公理逐一验证即可:

(1) 显然根据定义有 $\emptyset \in \tau$ 且 $X \in \tau$;

(2) 对于任意指标集 I , 若 $U_\alpha \in \tau, \forall \alpha \in I$, 可知 U_α^c 总是有限集, 由 De Morgan 律可知

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} (U_\alpha^c)$$

右边自然更是一个有限集, 因此根据定义 $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$;

(3) 对于有限个 $U_\alpha \in \tau, \alpha = 1, \dots, n$, 根据 De Morgan 律

$$\left(\bigcap_{\alpha=1}^n U_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha=1}^n (U_\alpha^c)$$

右边为有限个有限集之并, 因此仍然是有限集, 故 $\bigcap_{\alpha=1}^n U_\alpha \in \tau$ 。

□

注 类似地我们可以定义所谓的余可数拓扑, 请读者自行完成相关的证明。

余有限拓扑和余可数拓扑经常作为拓扑学中的重要反例出现。

注 学到这一块的读者需要注意两个常见误区。

一、**不要认为拓扑空间中的子集并总是开集或是闭集**。事实上就算是实数集, 我们也有所谓的半开半闭区间, 读者可以自行验证它们既不开也不闭。

二、**不可以把开集跟开区间或者开球划等号**。以实数集为例, 诚然所有的开区间都是开集, 但是根据拓扑公理, 开集之间还可以继续交并操作, 因此在几何直观上开集有可能是非常复杂的。

虽然我们不能认为开区间或者开球就是全体开集, 但是如果把它们视作某种“基础零件”, 通过它们“拼出”欧式空间的全体开集, 这个观点是正确的。我们下面通过数学语言严格来描述这个概念:

定义 2.5 (关于 \sim 的拓扑基)

设 (X, τ) 为拓扑空间, $\mathcal{B} \subset \tau$ 被称为**关于 τ 的一个拓扑基**, 如果 $\forall p \in X$ 以及 $\forall U \in \tau$ 满足 $p \in U$, 一定能找到 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $p \in B \subset U$ 。



拓扑基的原始概念较为抽象, 不过它有一个直观的等价刻画:

命题 2.1 (拓扑基的等价刻画 part1)

\mathcal{B} 是关于 τ 的一个拓扑基的充要条件是, τ 中的元素总是可以写成 \mathcal{B} 中元素的并集, 即 $\forall U \in \tau$, 存在指标集 I , 使得

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, \quad \text{其中 } B_\alpha \in \mathcal{B}. \quad (2.1)$$



证明 (\Rightarrow) 假设 \mathcal{B} 为关于 τ 的拓扑基, 而 U 是 τ 中任意元素. $\forall p \in U$, 根据拓扑基原始定义, 都存在 $B_p \in \mathcal{B}$ 使得 $p \in B_p \subset U$, 故而一定有 $U = \bigcup_{p \in U} B_p$.

(\Leftarrow) 反之, 若对于 τ 中任意开集 U , U 总是可以写成 $U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, 那么对于 U 中任意一点 p , 一定存在某个特定的 α 使得 $p \in B_\alpha$, 那么也就有 $p \in B_\alpha \subset U$, 换言之此时 \mathcal{B} 确实是关于 τ 的一个拓扑基. \square

从上述描述中不难发现, 我们要描述一个拓扑基的前提似乎是要先指派它对应的拓扑. 但事实上也可以不用. 而且我们可以通过某个拓扑基生成我们希望的拓扑.

命题 2.2 (拓扑基的等价刻画 part2)

设 X 为非空集合, \mathcal{B} 为子集族, 则 \mathcal{B} 是 (关于某个拓扑的) 拓扑基的充要条件是 \mathcal{B} 满足以下两个条件:

(1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 若 $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, 则 $\forall p \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$, 使得 $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

注 第一条是说没有漏掉空间中的点, 第二条是说总是有足够小的元素填上缝隙.

证明 (\Rightarrow) 假设 \mathcal{B} 是某个 X 上的拓扑 τ 对应的拓扑基.

(1) 由于 $X \in \tau$, 根据命题 2.1, 存在一个指标集 I 使得 $X = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, 注意到 X 已经是全集了, 当然我们也有 $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ 成立.

(2) 假设 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, 根据拓扑基的原始定义, $\mathcal{B} \subset \tau$, 那么 B_1, B_2 自然都是该拓扑下的开集, 同理 $B_1 \cap B_2$ 亦是开集, 那么根据拓扑基的原始定义, 自然有 $\forall p \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$, 满足 $p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

(\Leftarrow) 反之, 设集族 \mathcal{B} 满足两条性质, 我们再定义集族 $\tau = \{U \mid U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, \text{ 其中 } I \text{ 是某个指标集, 而 } B_\alpha \in \mathcal{B}\}$, 下面验证这样的 τ 一定是 X 上的一个拓扑.

(1) 首先我们取 $I = \emptyset$, 即所谓的空指标集, 按照约定我们有 $\emptyset = \bigcup_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha \in \tau$. 同时由第一个条件我们可知 $X \in \tau$.

(2) 假设有一族 $\beta \in J$, 满足 $U_\beta \in \tau$, 根据第二个条件, 我们知道对于每个 β , 存在一个指标集 I_β , 使得 U_β 可以被写为

$$U_\beta = \bigcup_{\alpha \in I_\beta} B_{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

于是得到

$$\bigcup_{\beta \in J} U_\beta = \bigcup_{\beta \in J} \bigcup_{\alpha \in I_\beta} B_{\alpha\beta}. \quad (2.3)$$

而右边依然是若干 \mathcal{B} 中元素的并, 故而我们得到 $\bigcup_{\beta \in J} U_\beta \in \tau$, 即任意并仍在集族中.

(3) 最后, 对于有限交性质, 我们可以只验证两个的交仍在集族中即可. (从两个出发即可归纳有限交)

那么假设 $U_1, U_2 \in \tau$, 根据第二个条件, 有 $U_1 = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$, $U_2 = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta$, 再假设 $p \in U_1 \cap U_2$, 这说明必然存在两个特定的下标 α 和 β , 使得 $p \in B_\alpha \cap B_\beta$. 现在根据第二个条件, 一定有 $B_p \in \mathcal{B}$, 使得 $B_p \subset B_\alpha \cap B_\beta$, 注意到 p 的任意性, 我们不难验证

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{p \in U_1 \cap U_2} B_p. \quad (2.4)$$

这说明了 $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

由 (1)(2)(3) 可知 τ 成为 X 的一个拓扑, 而 \mathcal{B} 自动成为关于 τ 的一个拓扑基, 命题得证. \square

从证明过程中我们不难总结以下结论:

推论 2.1 (由拓扑基生成的拓扑)

若 \mathcal{B} 是某个拓扑对应的拓扑基, 则 $\tau = \{U \mid U = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha, \text{ 其中 } I \text{ 是某个指标集, 而 } B_\alpha \in \mathcal{B}\}$ 正是其对应的拓扑, 我们称 τ 为由 \mathcal{B} 生成的拓扑.

例题 2.3 (标准欧式拓扑) 设 $X = \mathbb{R}^n$, 即 n 维欧式空间, 对于固定的 $p \in \mathbb{R}^n$ 以及 $r > 0 \in \mathbb{R}$, 给出以下记号:

$$B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < r\} \quad (2.5)$$

其中 $|\cdot|$ 为标准欧式度量, 我们称 $B(p, r)$ 为以 p 为圆心, 以 r 为半径的**开球**。可以验证, \mathbb{R}^n 中的开球全体

$$\mathcal{B} = \{B_r(p) \mid p \in \mathbb{R}^n, r > 0 \in \mathbb{R}\} \quad (2.6)$$

构成了 \mathbb{R}^n 的一个拓扑基。我们将由 \mathcal{B} 生成的拓扑记作 d (和度量用同一符号) 称为 \mathbb{R}^n 的**标准欧式拓扑**。换言之, 我们将欧式空间视作拓扑空间时, 其实就是在谈 (\mathbb{R}^n, d) 。

2.2 子集的六类点

在章节开始前, 对于复平面 \mathbb{C} 上的点 (当然其实只要是度量空间就够了), 我们出以下记号方便后续讨论。

定义 2.6 (三种圆盘)

我们称

$$B_\rho(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid |y - x| < \rho\}. \quad (2.7)$$

为复平面上的以 x 为圆心, 以 ρ 为半径的**开圆盘**。称

$$B_\rho^*(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid 0 < |y - x| < \rho\} = B_\rho(x) \setminus \{x\}. \quad (2.8)$$

为复平面上的以 x 为圆心, 以 ρ 为半径的**去心圆盘**。称

$$\overline{B}_\rho(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid |y - x| \leq \rho\}. \quad (2.9)$$

为复平面上的以 x 为圆心, 以 ρ 为半径的**闭圆盘**。最后称

$$C_\rho(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid |y - x| = \rho\}. \quad (2.10)$$

为复平面上的以 x 为圆心, 以 ρ 为半径的**圆周**。



2.2.1 内点、外点、边界点

定义 2.7 (内点、外点、边界点)

设 E 是拓扑空间 (X, τ) 的一个子集, 而 $x \in X$ 。

- (1) 我们称 x 为 E 的一个**内点**, 若 $x \in E$, 且存在 X 中的一个开集 U , 使得 $x \in U \subset E$;
- (2) 我们称 x 为 E 的一个**外点**, 若 $x \in E^c$, 且存在 X 中的一个开集 U , 使得 $x \in U \subset E^c$;
- (3) 我们称 x 为 E 的一个**边界点**, 若对于 X 中的所有包含 x 的开集 U , U 中都包含 E 和 E^c 中的点。

我们把 E 的内点全体称为 E 的**内部**, 记作 E° ;

我们把 E 的外点全体称为 E 的**外部**, 外部一般没有特别的记号, 但是可以理解为 $(E^c)^\circ$;

我们把 E 的边界点全体称为 E 的**边界**, 记作 ∂E 。



注 对于上述定义我们指出一些值得注定的点:

一、如果全空间 $(X, \tau) = (\mathbb{C}, d)$, 即采用标准欧式拓扑的复平面, 则上文定义中的所有包含 x 的开集 U 均可以换成开圆盘 $B_\rho(x)$, 这是因为开圆盘全体构成了标准欧式拓扑的一个拓扑基。(请自行思考)

二、我们注意到, 在边界点的定义中并没有要求 x 是否在 E 中。事实上我们有以下例子, 请自行验证:

$$\partial B_\rho(x) = C_\rho(x), \quad \partial \overline{B}_\rho(x) = C_\rho(x). \quad (2.11)$$

对于前者来说 $C_\rho(x)$ 完全不在集合内, 而对于后者来说 $C_\rho(x)$ 是集合的一部分。

三、从定义不难发现, 边界点的等价描述是既不是内点又不是外点的那些点。(请读者自行证明) 因此对于任意子集 E , 全空集都恰好被分为了内部、外部和边界三个彼此不交的部分。

2.2.2 聚点、闭包点

定义 2.8 (聚点和闭包点)

设 E 是拓扑空间 (X, τ) 的一个子集, 而 $x \in X$ 。

我们称 x 是 E 的一个**聚点**, 如果对于所有 x 的邻域 U , 都有 $(U \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset$ 。

我们称 x 是 E 的一个**闭包点**, 如果对于所有 x 的邻域 U , 都有 $U \cap E \neq \emptyset$ 。

E 的聚点全体称为 E 的**导集**, 记作 E' 。 E 的闭包点全体称为 E 的**闭包**, 记作 \bar{E} 。



聚点的概念是从欧式空间的中的极限点的概念抽象而来, 我们有以下命题:

命题 2.3 (聚点和极限点的关系)

设 E 是度量空间 (X, d) 的子集, $x \in X$, 则 x 是 E 的聚点的充要条件是, 在 E 中存在点列 $\{x_1, x_2, \dots\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0$ 。



证明 (\Rightarrow) 我们依次取 x 的去心邻域 $B_{\frac{1}{n}}^*(x)$, 由于 x 为 E 的聚点, 这表明 $\forall n \in \mathbb{Z}$, 有 $(B_{\frac{1}{n}}^*(x)) \cap E \neq \emptyset$, 换言之之必然存在 $x_n \in E$, 满足 $|x - x_n| < \frac{1}{n}$, 这就证明了 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_n| = 0$ 。

(\Leftarrow) 反之, 对于 x 的所有邻域 U , 由于开圆盘是拓扑基, 故而一定存在 $\rho > 0$ 使得 $B_\rho(x) \subset U$, 那么进一步, 必然存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使得 $x_n \in E$ 满足 $|x - x_n| < \rho$, 那么容易看出 $x_n \in (U \setminus \{x\}) \cap E$, 说明后者总是非空。□

注 聚点并没有要求这个点不在 E 中。(自行举例理解)

2.2.3 孤立点

定义 2.9 (孤立点和离散集)

设 E 是拓扑空间 (X, τ) 的子集, $x \in E$ 称为 E 的一个**孤立点**, 如果存在邻域 U 满足 $(U \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset$ 。

我们称 E 是一个**孤立集**, 如果 E 中的每个点都是 E 的孤立点。

我们称 E 是一个**离散集**, 如果 $E' = \emptyset$ 。**小心离散**



命题 2.4

- (1) x 是 E 的孤立点的等价刻画是 $x \in E$ 但 $x \notin E'$;
- (2) 离散集一定是孤立集, 反之则未必。
- (3) 作为 (\mathbb{R}, d) 的子集, \mathbb{Z} 是一个孤立集, \mathbb{Q} 不是离散集, 而 $\{1/n \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$ 是孤立集不是离散集。



关于内部、边界、导集, 我们有以下命题, 请读者根据定义自行验证, 同时检测自己是否理解这些概念。

命题 2.5

设 E 是拓扑空间 (X, τ) 的一个子集。

- (1) E 是 X 中的开集的充要条件是 $E = E^\circ$;
- (2) E 是 X 中的闭集的充要条件是 $E' \subset E$;
- (3) ∂E 以及 \bar{E} 总是闭集;
- (4) \bar{E} 是包含 E 的最小闭集, 即若还有闭集 $F \supset E$, 一定有 $F \supset \bar{E}$;
- (5) $\bar{E} = E^\circ \cup \partial E$;
- (6) $\bar{E} = E \cup E' = \{\text{全体孤立点}\} \cup E'$ 。



例题 2.4 设 $E = B_1(0) \cup \{3\}$, 判断 \bar{E} 、 E° 、 ∂E 、 E' 以及所有的孤立点。

解 $\bar{E} = \bar{B}_1(0) \cup \{3\}$ 、 $E^\circ = B_1(0)$ 、 $\partial E = C_1(0) \cup \{3\}$ 、 $E' = \bar{B}_1(0)$, 而 $\{3\}$ 是 E 的全部孤立点。

2.3 分离性

我们知道, 对于欧式空间中的两个不同的点, 我们一定可以找到两个不交的开集把这两个点隔开。(为什么?) 但是对于一般的拓扑空间, 这并不总是成立, 以平凡拓扑为例, 因为开集只有空集和全集, 这说明我们永远无法区分这两个点。本节需要给拓扑空间赋予更多的性质, 以便于在空间中区分两个点或是闭集, 我们把这样的一系列拓扑性质称为**分离性**。

定义 2.10 (四种分离性)

设 (X, τ) 为拓扑空间。设 $E \subset X$, 我们称 U 是 E 的一个邻域, 如果存在开集 V 使得 $E \subset V \subset U$ 。

(1) 设 $x \neq y$, 若总是存在 x 的开邻域 U 以及 y 的开邻域 V , 使得 $x \notin V$ 且 $y \notin U$, 称 X 为 **T_1 空间**。

(2) 设 $x \neq y$, 若总是存在 x 的开邻域 U 以及 y 的开邻域 V , 使得 $U \cap V = \emptyset$, 称 X 为 **T_2 空间** 或 **Hausdorff 空间**。

(3) 设 $x \in X$, F 为 X 中闭集, 且 $x \notin F$, 若总是存在 x 的开邻域 U 以及 F 的开邻域 V , 使得 $U \cap V = \emptyset$, 则称 X 为 **正则空间**。一个正则的 T_1 空间被称为 **T_3 空间**。

(4) F 和 G 为 X 中的两个不交闭集, 若总是存在 F 的开邻域 U 以及 G 的开邻域 V , 使得 $U \cap V = \emptyset$, 则称 X 为 **正规空间**。一个正规的 T_1 空间被称为 **T_4 空间**。



注 不难看出 T_2 总是蕴含 T_1 , 但是正则空间和正规空间并不天然蕴含 T_1 或是 T_2 , 因为单点未必是闭集。(是的, 不能被自觉误导!) 但是再加上 T_1 条件就对了, 因为我们有下面这个漂亮的引理。

引理 2.1 (T_1 的等价刻画)

X 是 T_1 空间的充要条件是 X 中的单点总是闭集。



证明 (\Rightarrow) $\forall x \in X$, 我们要证 $\{x\}$ 闭, 只需验证 $X \setminus \{x\}$ 开。而 $\forall y \in X \setminus \{x\}$, 也就是说 $y \neq x$, 因为 X 是 T_1 的, 因此存在 y 的开邻域 U , 使得 $x \notin U$, 这说明 $y \in U \subset X \setminus \{x\}$, 故而 y 为其内点。由 y 的任意性可知 $X \setminus \{x\}$ 开。

(\Leftarrow) 现在我们知道, 对于 X 中的任意两点 $x \neq y$, $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 为闭集, 那么自然 $X \setminus \{x\}$ 和 $X \setminus \{y\}$ 是开集。前者包含 y 不包含 x , 后者包含 x 不包含 y , 因此满足 T_1 条件。 \square

推论 2.2

$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$ 。



证明 因为大家都至少是 T_1 空间, 那么单点就是特殊的闭集。后面也就不难看出来了。 \square

对于度量空间 (当然复平面也是特殊的度量空间), 我们有一个重要结论:

命题 2.6 (欧式是 T_4 的)

度量空间 (X, d) 总是 T_4 空间, 即度量空间自动满足本节定义的所有分离性。



证明 (1) 首先我们先证明 (X, d) 是 Hausdorff 空间, 这说明其至少是 T_1 的。

对于 X 中两点 $x \neq y$, 我们有 $\delta = d(x, y) > 0$, 因此可以做两个开圆盘 $B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ 和 $B_{\frac{\delta}{2}}(y)$, 两者总是不交, 因此空间是 T_2 的。

(2) 现在我们证明 (X, d) 是正规空间, 对于 X 中的两个不交闭集 F 和 G , 对于任意的 $x \in F$ 和 $y \in G$, 我们定义以下两个距离:

$$d(x, G) = \inf_{y \in G} d(x, y), \quad d(y, F) = \inf_{x \in F} d(x, y). \quad (2.12)$$

这里要用到两个关于闭包的事实, 请读者自行验证细节: 首先 $x \in \overline{G} \iff d(x, G) = 0$, 同时我们知道一个闭集的闭包就是自己, 因此如果 $x \notin G$ 就一定有 $d(x, G) > 0$, 同理也有 $d(y, F) > 0$ 。

那么对于 F 中的每一点 x , $B_{\frac{d(x, G)}{2}}(x)$ 是 x 的开邻域, 于是

$$U = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{d(x, G)}{2}}(x)$$

自动成为闭集 F 的一个开邻域。同理 $V = \bigcup_{y \in G} B_{\frac{d(y, F)}{2}}(y)$ 也是闭集 G 的一个开邻域, 且根据定义

$$B_{\frac{d(x, G)}{2}}(x) \cap B_{\frac{d(y, F)}{2}}(y) = \emptyset, \forall x \in F, y \in G \implies U \cap V = \bigcup_{x \in F, y \in G} (B_{\frac{d(x, G)}{2}}(x) \cap B_{\frac{d(y, F)}{2}}(y)) = \emptyset. \quad (2.13)$$

这就证明了 (X, d) 是正规空间。由于 (X, d) 同时满足 T_2 和正规条件, 因此它是 T_4 空间。□

作为本节的结尾, 我们将给出一个正规空间的等价刻画, 在后续的章节中我们将会使用。

命题 2.7 (正规空间的等价刻画)

设 (X, τ) 为拓扑空间, 则其为正规空间的充要条件是, 对于 X 中的任意闭集 F 以及它的一个开邻域 U , 总是存在 F 的另一个开邻域 V , 满足

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset U. \quad (2.14)$$

证明 (\implies) $F \subset U$ 说明 $F \cap U^c = \emptyset$, 而两者都是闭集, 根据正规空间的定义, 我们可以找到它们对应的开邻域 V_1 和 V_2 , 使得 $F \subset V_1$, $U^c \subset V_2$ 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。

注意到 $U^c \subset V_2$ 等价于 $(V_2)^c \subset U$ 。而 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 蕴含了 $\overline{V_1} \cap V_2 = \emptyset$ (请读者自行完成证明), 这等价于 $\overline{V_1} \subset (V_2)^c$, 综上我们得到

$$F \subset V_1 \subset \overline{V_1} \subset (V_2)^c \subset U.$$

这说明 V_1 就是要找的那个开邻域。

(\impliedby) 现在假设 F 和 G 为两个不交闭集, $F \cap G = \emptyset \implies F \subset G^c$, 而 G^c 是开集, 根据条件 2.14, 一定可以再给 F 找一个开邻域 V 满足

$$F \subset V \subset \overline{V} \subset G^c. \quad (2.15)$$

而 $\overline{V} \subset G^c$ 等价于 $G \subset (\overline{V})^c$, 后者是一个开集, 那么加之 $F \subset V$, 不难看出两者各自包含在两个不交的开邻域中, 这说明了空间是正规的。□

2.4 紧性

紧性是拓扑学和泛函分析学中的重要概念, 本章节会介绍两种“紧”, 但是请注意他们是不一样的。

定义 2.11 (覆盖)

设 E 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集。

- (1) 设 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ 为 X 的一个集族, 如果满足 $E \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$, 则称 \mathcal{U} 为 E 的一个 **覆盖**。
- (2) 若 \mathcal{U} 中元素皆为 X 的开集, 则称 \mathcal{U} 为一个 **开覆盖**。
- (3) 若 \mathcal{U} 中元素有限, 则称其为一个 **有限覆盖**。
- (4) 若 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, 而两者皆为 E 的覆盖, 则称 \mathcal{V} 为 \mathcal{U} 的一个子覆盖。

定义 2.12 (紧 (子) 集和列紧 (子) 集)

设 E 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集, 我们称 E 为 X 的一个 **紧 (子) 集**, 如果 E 的任意一个开覆盖一定能取出一个有限的子覆盖。

设 E 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集, 我们称 E 是一个**列紧(子)集**, 若对于 E 中任意包含无穷个点的子集 F , 一定有 $F' \cap E \neq \emptyset$, 换言之 F 一定有一个在 E 中的聚点。



注 一、当拓扑空间确定的时候, 比如就是 \mathbb{C} , 两种紧性中的“子”字不需要强调。

二、在数分和泛函分析的学习中也许会见到列紧集的定义是: **任何无穷点列必有收敛到自身的子列**。事实上这是另一个概念**序列紧**。由于聚点是收敛点的推广, 容易看出拓扑版是其推广。事实上对于度量空间, 这两个概念是一致的, 这里就不再赘述了。

本节事实上只有一个定理: **Heine-Borel 定理**, 它给出了复平面紧子集的一个很好的刻画。但在此之前我们先介绍一个简单的引理: 闭集套原理, 这是数分里著名的区间套原理的一个自然推广

引理 2.2 (闭集套原理)

设 $E \subset (\mathbb{R}^n, d)$, 我们定义

$$\text{diam}(E) = \sup_{x, y \in E} d(x, y). \quad (2.16)$$

为 E 的**直径**, 它刻画了集合中最远的两个点的距离。现在假设

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_n \supset \cdots \quad (2.17)$$

为 \mathbb{R}^n 中的一列闭集, 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = 0$ 。我们称这样的一列闭集为 $\{F_n\}$ 为 \mathbb{R}^n 上的**闭集套**。若 $\{F_n\}$ 为闭集套, 则**存在唯一一点** $x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n. \quad (2.18)$$



证明 我们效仿区间套原理给一个证法, 我们知道这个引理本质上和 \mathbb{R}^n 的完备性(或致密性)是等价的, 因此我们总是需要承认其中某条性质是满足的, 比如我们现在承认, \mathbb{R}^n 中的**Cauchy 准则**, 即**Cauchy 列一定收敛**。

那么在 F_k 中任取点 x_k , 我们说明 $\{x_k\}$ 是**Cauchy 列**, 这是因为 $\forall \epsilon > 0$, 我们总是可以找到 N 使得 $\text{diam}(F_N) < \epsilon$, 因此 $n \geq N$ 后, 总有 $d(x_{n+1}, x_{n+p}) < \epsilon, \forall p \in \mathbb{N}$, 这就证明 $\{x_k\}$ 是**Cauchy 列**。

因为**Cauchy 列**总是收敛, 因此 $\exists x \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0$ 。容易看出 $x \in F_k, \forall k$, 故而有 $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$ 。同时这样的 x 是唯一的, 因为我们知道 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(F_n) = 0$, 如果还有另外的 y 满足要求, 则必然有 $d(x, y) = 0 \implies x = y$ 。 □

定理 2.1 (Heine-Borel)

设 $E \subset \mathbb{C}$, 则以下三条等价:

- (1) E 是紧集; (2) E 是列紧集; (3) E 是有界闭集。



证明 (1) \implies (2) 我们采取反证法。假设 E 紧, 同时还有 E 中一个包含无穷点的子集 F 满足 $F' \cap E = \emptyset$ 。

由于 $F' \cap E = \emptyset$, 这说明了所有 E 中的点都不是 F 的聚点, 换言之, $\forall x \in E$, 总是存在其邻域 U_x 使得 $(U_x \setminus \{x\}) \cap F = \emptyset$, 即 $U_x \cap F$ 至多为 $\{x\}$ 。

收集所有这样的 U_x , $\mathcal{U} = \{U_x \mid x \in E\}$ 构成了 E 的一个开覆盖, 由于 E 紧, 这说明我们可以总是可以取出有限子覆盖 $\mathcal{V} = \{U_{x_i} \mid i = 1, \dots, n\}$, F 是 E 的子集, 这说明 \mathcal{V} 自然也覆盖了 F , 但注意 \mathcal{V} 中每个元素至多和 F 交于一点, 这说明 F 只能是有限集, 这就和 F 是无穷点集矛盾了! 没想到矛盾点在这里吧

(2) \implies (3) 对于有界和闭, 我们依次反证。

(i) 假设 E 列紧但是无界集, 这说明 E 中必然存在一个点列 $\{z_n\}$ 使得 $|z_n| \geq n$, 我们知道这个点列是不可能收敛子列的(注意在 \mathbb{C} 里), 这和列紧矛盾了。

(ii) 假设 E 列紧但不是闭集, 这说明 $E' \subsetneq E$, 也就是说至少存在一个点 $z \in E'$ 使得 $z \notin E$ 。但 $z \in E'$ 就说明可以取一个点列 $\{z_n\}$ 趋于 z , 因为 E 列紧, 就要求 $z \in E$, 这就矛盾了。

(3) \implies (1) 我们采用反证法怎么全是反证, 假设 E 是 \mathbb{C} 的有界闭集, 但同时存在一个开覆盖 \mathcal{U} , 但其任意有限子集都无法覆盖 E 。注意到 E 有界, 因此存在一个 \mathbb{C} 中的有界正方形

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |x| \leq M, |y| \leq M\}$$

使得 $E \subset Q$ 。那么我们将 Q 横竖等分为四等分, 我们知道其中必然至少有一个小块, 比如称其为 Q_1 , 满足:

(i) $E \cap Q_1$ 依然是有界闭集。(因为两者皆为有界闭集)

(ii) \mathcal{U} 的任意有限子覆盖依然无法覆盖 $E \cap Q_1$ 。

不断重复这个过程, 我们得到一系列闭正方形 Q_n , 下记 $F_n = E \cap Q_n$, 不难看出 F_n 始终满足三个性质:

(i) F_n 是有界闭集且满足 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_n \supset \cdots$;

(ii) \mathcal{U} 的任意有限子覆盖始终无法覆盖 F_n ;

(iii) F_n 的直径 (即 F_n 中任意两点之间的距离的上确界) 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$ 。

根据 (i) 和 (iii), $\{F_n\}$ 满足闭集套条件, 因此根据闭集套原理, 我们找到了唯一的 $z_0 \in E$ 满足

$$\{z_0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n.$$

另一方面, \mathcal{U} 是 E 的一个开覆盖, 因此其中至少有一个开集 U_0 使得 $z_0 \in U_0 \in \mathcal{U}$ 。由于 U_0 开, 因此肯定包含 z_0 的一个开球, 即 $\exists \epsilon > 0$, 使得 $B_\epsilon(z_0) \subset U_0$ 。考虑到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, 因而必然 $\exists N$, 使得 $\text{diam}(F_N) < \epsilon$, 这就说了 $F_N \subset B_\epsilon(z_0) \subset U_0$, 这说明了 F_N 事实上被一个 \mathcal{U} 中的成员盖住了, 这就和 $\{F_n\}$ 满足的性质 (ii) 矛盾了。因此通过反正我们知道 E 一定是紧集。 \square

2.5 连通性

本章节主要是介绍连通集和区域等相关的概念。

定义 2.13 (连通 (子) 集)

设 E 为拓扑空间 (X, τ) 的一个子集, 我们称 E 是一个 **连通 (子) 集**, 若不存在 X 中的非空开集 U_1 和 U_2 使得以下三条同时成立:

- (1) $U_1 \cap U_2 = \emptyset$; (2) $U_1 \cap E \neq \emptyset$ 且 $U_2 \cap E \neq \emptyset$; (3) $E \subset U_1 \cup U_2$ 。

概念本身有点抽象, 但是对于 E 本身是开集的情况, 我们则有以下等价定义:

命题 2.8 (连通 for 开集)

设 E 是一个连通开集, 则 E **不可被分解为两个非空不交开集之并**。

证明 注意到 E 本身是开集, 我们只需把定义 2.13 中的 U_1 、 U_2 换成 $U_1 \cap E$ 以及 $U_2 \cap E$ 即可, 同时条件 (3) 变为 $E = (U_1 \cap E) \cup (U_2 \cap E)$ 。

定义 2.14 (区域)

我们称复平面 \mathbb{C} 上的连通开集为一个 **区域**。

区域这个概念将会在后续学习中频繁出现。

2.6 连续映射

连续映射是拓扑学中的核心概念, 这个概念是从连续函数来的。让我先复习一下数分中是怎么定义函数在一点处连续:

定义 2.15 (函数在一点处连续, 数分版)

设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 那么对于 $x_0 \in \mathbb{R}$, 我们称 f 在 x_0 处连续, 如果

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得只要 } |x - x_0| < \delta, \text{ 就有 } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (2.19)$$

我们希望把上述概念改成拓扑语言, 那么首先需要拿掉的就是模长的概念, 我们知道公式 (2.19) 等价于

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{使得只要 } x \in B_\delta(x_0), \text{ 就有 } f(x) \in B_\epsilon(f(x_0)). \quad (2.20)$$

我们知道这里开球实际上可以替换成邻域 (开球构成欧式拓扑基), 因此我们得到了拓扑版的定义:

定义 2.16 (连续映射, 拓扑版)

设 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ 为拓扑空间之间的映射, 我们称 f 在 $x \in X$ 处连续, 如果

$$\text{对于 } f(x) \text{ 的任意邻域 } V, \text{ 存在 } x \text{ 的邻域 } U, \text{ 使得 } f(U) \subset V. \quad (2.21)$$

我们称 f 在 X 上连续, 若 f 对于 X 中任意一点均连续。

连续映射有一个经常会采用的等价刻画版本, 我们一般记为口诀: **开集的原像是开集**。

命题 2.9 (连续映射的等价刻画)

设 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ 为拓扑空间之间的映射, 则 f 在 X 上连续的充要条件是对于 Y 的任意开集 V , $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集。

证明 (\Rightarrow) 根据开集的等价刻画, 欲证 $f^{-1}(V)$ 是开集, 只需证明其每个点均为内点即可。

现在任取 $x \in f^{-1}(V)$, 换言之 $f(x) \in V$, 由于 V 在 Y 中开, 因此我们可以取 $f(x)$ 的邻域 $O_{f(x)} \subset V$ 。

但不要忘了 f 是连续映射, 因此我们一定可以找到 x 的一个邻域 O_x 满足 $f(O_x) \subset O_{f(x)} \subset V$, 这就说明了 $O_x \subset f^{-1}(V)$, 因此 x 是 $f^{-1}(V)$ 的内点。根据 x 的任意性可知 $f^{-1}(V)$ 在 X 中是开集。

(\Leftarrow) 欲证 f 在 X 上连续, 那就任取 $x \in X$, 再取 $f(x)$ 的任意邻域 $O_{f(x)}$, 说明存在一个 x 的邻域 O_x 满足 $f(O_x) \subset O_{f(x)}$ 即可。

那我们知道在 $O_{f(x)}$ 中一定可以取到开集 V 使得 $y \in V$ 。注意到现在开集的原像是开集, 因此 $f^{-1}(V)$ 一定是 x 的一个开邻域, 且当然满足

$$f(f^{-1}(V)) \subset V \subset O_{f(x)}.$$

故而我们要求的 O_x 其实就取 $f^{-1}(V)$ 即可。 \square

注 关于集合论需要知道的常识:

- (1) $f(f^{-1}(B)) \subset B$, 而 $f(f^{-1}(B)) = B, \forall B$ 当且仅当 f 满。
- (2) $f^{-1}(f(A)) \supset A$, 而 $f^{-1}(f(A)) = A, \forall A$ 当且仅当 f 单。
- (3) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, 且 $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ 。
- (4) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, 但 $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ 。

证明交给读者自己完成。另外连续映射还有一个等价描述是**闭集的原像闭**, 也交给读者思考。

连续映射有诸多优秀性质, 我们列举如下:

命题 2.10

- (1) 设 $f: X \rightarrow Y$ 连续映射, E 为 X 中任意**紧子集**, 则 $f(E)$ 是 Y 中的紧子集。
- (2) 设 $f: X \rightarrow Y$ 连续映射, E 为 X 中任意**连通集**, 则 $f(E)$ 是 Y 中的连通集。

证明 (1) 根据紧的原始定义, 我们要证明任取 $f(E)$ 的一个开覆盖 $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$, 一定能取出有限子覆盖。

首先我们定义 $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha \in I\}$, 根据 f 连续, $f^{-1}(V_\alpha)$ 在 X 中开, 故 \mathcal{U} 构成了 E 的一个开覆盖. 但 E 为紧子集, 因此可以在 \mathcal{U} 中取到 E 的有限子覆盖, 即有

$$E \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_i) \implies f(E) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(V_i)\right) \subset \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(V_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n V_i. \quad (2.22)$$

这说明我们总是可以在 \mathcal{V} 中取到 $f(E)$ 的有限子覆盖, 故而 $f(E)$ 紧. \square

(2) 根据连通集的定义, 我们要证明 $f(E)$ 不可以包含于 Y 中的两个不交非空开集之并. 那么我们反证, 若 $f(E)$ 真的被舍于两个不交非空开集之并, 即存在 Y 中的开集 V_1 和 V_2 满足

$$(i) V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad (ii) V_1 \cap f(E) \neq \emptyset \text{ 且 } V_2 \cap f(E) \neq \emptyset \quad (iii) f(E) \subset V_1 \cup V_2.$$

我们可以逐条验证以下事实:

$$(i) f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(\emptyset) \stackrel{\text{按定义}}{=} \emptyset;$$

(ii) $V_1 \cap f(E) \neq \emptyset$ 说明 $\exists x \in E$ 使得 $f(x) \in V_1 \implies x \in f^{-1}(V_1) \cap E \implies f^{-1}(V_1) \cap E \neq \emptyset$, 同理当然也有 $f^{-1}(V_2) \cap E \neq \emptyset$;

$$(iii) E \subset f^{-1}(f(E)) \subset f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2).$$

(iv) 最后由于 f 是连续映射故而 $f^{-1}(V_1)$ 和 $f^{-1}(V_2)$ 皆是 X 中开集。

那么根据 (i)-(iv) 我们相当于验证了 E 包含于 X 中的两个非空不交开集之并, 但这就和 E 本身是连通集矛盾了, 因此命题得证. \square

推论 2.3

复平面 $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\mathbb{R}^2})$ 不是紧集, 而扩充复平面 $(\overline{\mathbb{C}}, d)$ 是紧集, 其中 d 为球度量. 

证明 (1) 取复平面的一个开覆盖 $\mathcal{U} = \{B_n(0) \mid n \in \mathbb{N}\}$, 很显然在 \mathcal{U} 中不可能再取出 \mathbb{C} 的一个有限覆盖了. 因此 $(\mathbb{C}, |\cdot|_{\mathbb{R}^2})$ 不紧。

(2) 回顾章节 1.5 中球极投影 $\phi: (S^2, |\cdot|_{\mathbb{R}^3}) \rightarrow (\overline{\mathbb{C}}, d)$, 我们证明球极投影 ϕ 其实是连续映射, 即 $\forall P_0 \in S^2$, 来证 ϕ 在 P_0 处连续, 其实 $\forall \epsilon > 0$, 我们只要取 $\delta = \epsilon$ 即可, 因为根据球度量的定义我们知道直接就有

$$d(\phi(P), \phi(P_0)) = |P - P_0|_{\mathbb{R}^3} < \delta = \epsilon. \quad (2.23)$$

这就证明了 ϕ 是连续映射。

那么因为 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 显然是有界闭集, 因此是紧子集, 而连续映射把紧子集映成紧子集, 这就证明了 $(\overline{\mathbb{C}}, d)$ 是紧集。

推论 2.4

我们称 $f: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 为 (复) 连续函数, 如果它是 E 上的连续映射。

设 $E \subset \mathbb{C}$ 为紧集, f 在 E 上连续, 则 $|f(E)|$ 在 E 上取到最大、最小值, 即存在点 $z_1, z_2 \in E$ 使得


$$f(z_1) = \min_{z \in E} |f(z)|, \quad f(z_2) = \max_{z \in E} |f(z)|. \quad (2.24)$$



证明 我们知道紧集的连续像是紧集, 而 \mathbb{C} 上的紧集等价于有界闭集, 因此对应的像的模长必然有上下确界. \square

关于连续函数会用到的最后一个概念是一致连续, 我们这里对于复平面中的函数给出定义:

定义 2.17 (一致连续)

设 $E \subset \mathbb{C}$, 我们称 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ 在 E 上 **一致连续**, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得对于 E 中的任意点对 z' 和 z'' , 只要满足 $|z' - z''| < \delta$, 就有 $|f(z') - f(z'')| < \epsilon$. 

注 很容易看出在 E 上一致连续的函数必然是连续的, 但是反之则不然, 请读者自行举一个反例。

一致连续的简单理解方式就是: 可以用同一套 $\epsilon - \delta$ 刻画函数在每个点处的连续性。

命题 2.11

设 $E \subset \mathbb{C}$ 为紧子集, 若 f 在 E 上连续, 则 f 在 E 上一致连续。



证明 我们采用反证法。若不然, 则 $\exists \epsilon_0 > 0$, 对于 $\forall \delta > 0$, 都 $\exists z'$ 以及 $z'' \in E$, 使得

$$|z' - z''| < \delta, \text{ 但仍然有 } |f(z') - f(z'')| > \epsilon_0.$$

那么特别地, 我们就取 $\delta = \frac{1}{n}$, 这样我们就得到了满足上式的两个无穷点列 $\{z'_n\}$ 以及 $\{z''_n\}$ 。

另一边, 根据 Heine-Borel 定理, 在复平面上紧和列紧是等价的, 也就是说 $\{z'_n\}$ 和 $\{z''_n\}$ 必然都有收敛子列, 而且最终会收敛到 E 中某点。假设 $\{z'_n\}$ 有一个子列收敛到 w' 而 $\{z''_n\}$ 有一个子列收敛到 w'' 。(不妨设子列和原点列用一样的下标吧, 懒得写 z'_{n_k}) 我们知道:

$$|w' - w''| \leq |w' - z'_n| + |z'_n - z''_n| + |z''_n - w''| < \frac{1}{n} + 2\epsilon. \quad (2.25)$$

在上式中令 $n \rightarrow +\infty$ 我们知道这说明 $w' = w''$, 所以两个点列其实收敛到同一点。最后根据 f 在 E 上的连续性我们得到:

$$\epsilon_0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(z'_n) - f(z''_n)| = |f(w') - f(w'')| = 0. \quad (2.26)$$

这就产生矛盾了, 因此命题得证。 \square

2.7 曲线和单连通

本章最后的一个概念是曲线, 读者应牢记: **所谓曲线不过就是闭区间到拓扑空间的映射。**


定义 2.18 (连续曲线)

所谓复平面上的**连续曲线**, 是指一个从闭区间 $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 的连续映射 γ 。我们总是可以把这个映射写成:

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b. \quad (2.27)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数。我们把参数 t 增加的方向称为**曲线的方向**, 把 $\gamma(a)$ 和 $\gamma(b)$ 称为曲线的**起点**和**终点**。若 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 为连续曲线, 我们定义 γ^- 为:


$$\gamma^-: [b, a] \rightarrow Y; \quad \gamma^-(t) = \gamma(a + b - t). \quad (2.28)$$

容易看出 γ^- 的曲线方向恰好是 t 减小的方向, 且起点和终点和 γ 相反, 我们将 γ^- 称为 γ 的**反向曲线**。 

当然我们可以给连续曲线再附加更多的条件:

定义 2.19 (简单闭曲线)

我们称连续曲线 γ 是一条**闭曲线**, 如果有 $\gamma(a) = \gamma(b)$;

我们称连续曲线 γ 是一条**简单闭曲线**, 如果有 $\gamma(a) = \gamma(b)$, 同时对于 $t_1, t_2 \in (a, b)$, 若 $t_1 \neq t_2$, 则一定有 $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ 。简单闭曲线也被称为**Jordan曲线**。 

定义 2.20 (可求长曲线)

设 γ 是一条复平面上的连续曲线, 我们对区间 $[a, b]$ 进行分割, 即取分点 $P_k, k = 0, \dots, n$ 使得

$$a = P_0 < P_1 < \dots < P_n = b.$$

令 $z_k = \gamma(P_k)$, 我们将这样的取点方式称为对曲线 γ 的一个**分割**, 记作 \mathcal{P} 。我们将 z_k 依次连接线段构成一条折线, 我们知道折线的长度为

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}|. \quad (2.29)$$

我们将 γ 在所有可能分割下对应的折线长度的上确界定义为 γ 的长度, 即定义

$$l(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} l(\mathcal{P}). \quad (2.30)$$

若 $l(\gamma) < +\infty$, 我们称 γ 是可求长的。可求长的 Jordan 曲线也被称为周线 (Contour)。



最后我们需要引入单连通区域的概念, 这个概念在证明 Cauchy-Goursat 定理的时候会用到。单连通概念本身在拓扑中的原始定义是复杂的, 这里不多赘述, 我们只对复平面上的区域引进这个概念。

定义 2.21

设 D 为复平面上的一个区域 (即连通开集), 我们称 D 是一个单连通区域, 若 $\mathbb{C} \setminus D$ 是连通集。



注 这个概念还有一个等价描述的版本, 因为涉及到 Jordan 曲线定理, 我们不予证明直接引用。

定义 2.22

D 是复平面上的单连通区域的充要条件是 D 中任意 Jordan 曲线的内部仍然在 D 中。



很容易发现这里所谓的“Jordan 曲线的内部”还没有定义, 这其实是来源于一个著名定理: Jordan 曲线定理, 该定理的证明涉及到代数拓扑相关的概念, 我们恕不证明。

定理 2.2 (Jordan 曲线定理)

平面上的任意一条 Jordan 曲线总是将平面分成三个部分: 曲线本身和另外两个连通区域, 其中必然有一个是有界区域一个是无界区域, 我们把有界的区域称为 Jordan 曲线的内部, 无界的区域称为 Jordan 曲线的外部。



第3章 解析函数

复变函数即是以复数为变量的函数，而解析函数是复变函数论研究的主要对象，它是具有某种可微性的函数。本章将以 Cauchy-Riemann 方程入手揭示复可微和实可微的本质区别，同时着眼于各类初等函数相关的性质。

3.1 解析函数的概念

定义 3.1

我们称一个 $f: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射为 (E 上的) 复变函数。

定义 3.2 (可导和可微)

设 $f: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in E^\circ$, 我们称 f 在 z_0 处可导, 若极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ 存在 } (\in \mathbb{C}) \quad (3.1)$$

我们称 f 在 z_0 处可微, 若存在 $A \in \mathbb{C}$ 满足:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f - A\Delta z}{\Delta z} = 0. \quad (3.2)$$

其中 $\Delta f = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$ 。条件 (3.2) 也经常会改写成

$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z). \quad (3.3)$$

命题 3.1 (可导 \iff 可微)

f 在 z_0 处可导的充要条件是 f 在 z_0 处可微。

证明 证明是直接了当的:

$$0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f - A\Delta z}{\Delta z} \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = A \iff \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A. \quad (3.4)$$

注 这里需要注意, 虽然在可微和可导的定义中都用到了邻域中的点, 但是在一点处的可微可导性和邻域选取无关。另外要知道欧式空间是 T_2 空间, 因此任何两个点都可以用两个邻域隔开, 从这点也可以看出来一点处的信息影响不了任何其他的点。比如我们有以下例子:

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q} \\ z^3, & \operatorname{Re} z \notin \mathbb{Q}. \end{cases} \quad (3.5)$$

请读者自行验证 f 在 $z = 0$ 处可导, 但是 f 在其他点甚至都不连续。

很多时候我们需要可导可微性至少对于某个邻域要满足, 这个性质在复变上叫做解析。

定义 3.3 (解析函数)

我们称 $f: E \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 在 z_0 处解析, 如果存在 z_0 的邻域 U 使得 f 在 U 上每一点都可导。

我们称 f 在 E 上解析, 如果 f 对于 E 中每一点皆解析。

3.2 Cauchy-Riemann 方程

上一节我们提到, 一个复函数在 D 上解析的定义是它在 D 上逐点可微, 这里其实隐藏了一个随时会爆炸的矛盾: 一元函数和二元函数的可微可导性是不一样的。我们回顾以下数分中的说法:

定义 3.4

设 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 为实二元函数。

我们称 f 在点 (x_0, y_0) 处可导, 若 f_x 和 f_y 在 (x_0, y_0) 处有定义, 即以下两个极限存在:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \quad f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}. \quad (3.6)$$

我们称 f 在点 (x_0, y_0) 处可微, 若存在 $A, B \in \mathbb{R}$ 满足:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{\Delta f - A\Delta x - B\Delta y}{\rho} = 0. \quad (3.7)$$

其中 $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 。条件 (3.7) 也经常写成

$$\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho). \quad (3.8)$$



回到复平面, 令 $z = x + iy$, 一个复函数 $f(z)$ 总是可以转写为它的实部函数和虚部函数, 即 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 在这种意义上, 我们应当可以按照二元实函数的办法来研究 $f(z)$ 才是。但是很显然, 二元实函数的可微性和可导性是不等价的! (请读者自行举个反例) 而另一方面我们又证明了复函数的可导和可微是等价的, 这不是矛盾了吗?

解决这表面矛盾的钥匙就藏在复函数的导数定义之中, 让我们再次考察公式 $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, 我们知道若导数值存在, 则极限必须和 $z \rightarrow z_0$ 的具体趋近方式无关, 于是我们选择两种不同的趋近方式:

(1) 直接令 $x = x_0$, 再令 $y \rightarrow y_0$, 我们得到:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0 + yi) - f(x_0 + y_0 i)}{i(y - y_0)} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = v_y - iu_y|_{(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (3.9)$$

(2) 再令 $y = y_0$, 然后 $x \rightarrow x_0$, 又有:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + y_0 i) - f(x_0 + y_0 i)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = u_x + iv_x|_{(x_0, y_0)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

因此如果 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处复可微, 就需要自动满足一个“额外条件”: $u_x = v_y, u_y = -v_x$, 我们将其称为 **Cauchy-Riemann** 方程。虽然据称历史上最早发现的人应该是 **Euler** 下面我们给出一个函数在 (x_0, y_0) 复可微的充要条件:

定理 3.1 (Cauchy-Riemann)

$f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处 (复) 可微的充要条件是:

- (1) $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ 和 $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处 (实) 可微;
- (2) $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处满足 **Cauchy-Riemann** 方程, 即

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (3.11)$$



证明 (\implies) 之前的讨论已经说明了为什么满足 **Cauchy-Riemann** 方程, 下面证明 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可微性。

根据一元可微性可知, 在 z_0 邻域, f 满足

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta z} = 0 \quad (3.12)$$

梳理一下这里的记号, 我们知道

$$\Delta z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) \triangleq \Delta x + i\Delta y.$$

同时也有

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(z) - f(z_0) = [u(x, y) - u(x_0, y_0)] + i[v(x, y) - v(x_0, y_0)] \triangleq \Delta u + i\Delta v \\ df &= f'(z_0)\Delta z \triangleq (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) = (\alpha\Delta x - \beta\Delta y) + i(\beta\Delta x + \alpha\Delta y)\end{aligned}$$

因此公式 (3.12) 可直接改写为

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\Delta u - \alpha\Delta x + \beta\Delta y) + i(\Delta v - \beta\Delta x - \alpha\Delta y)}{\Delta z} = 0 \quad (3.13)$$

我们知道一个复数趋于零相当于模长趋于零, 而 $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho$, 因此从 (3.13) 得到

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u - \alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta v - \beta\Delta x - \alpha\Delta y}{\rho} = 0. \quad (3.14)$$

换言之这就证明了 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在该点可微。

(\Leftarrow) 现在假设 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则根据定义我们有

$$\Delta u = u_x\Delta x + u_y\Delta y + o(\rho), \quad \Delta v = v_x\Delta x + v_y\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (3.15)$$

于是我们有

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v = (u_x + iv_x)\Delta x + (u_y + iv_y)\Delta y + o(\rho). \quad (3.16)$$

同时我们知道 u, v 在该点满足 Cauchy-Riemann 方程, 因此有 $u_x = v_y$ 且 $u_y = -v_x$, 带入上式得

$$\Delta f = (u_x + iv_x)\Delta x + (-v_x + iu_x)\Delta y + o(\rho) = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y) + o(\rho) = (u_x + iv_x)\Delta z + o(\Delta z) \quad (3.17)$$

这就验证了 f 在 z_0 处的可微性。 \square

推论 3.1 (导数公式)

若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在某点处解析, 则我们有:

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y. \quad (3.18)$$

注 第一个等号是在证明 Cauchy-Riemann 过程中得到的结论, 后面三个等号则是继续运用 Cauchy-Riemann 方程得到的。值得一说的是第二个等号只用到 u 的偏导信息, 这说明某种意义上 v 是不需要的, 或者说 u 和 v 之间是互相蕴含的。这一点我们会在下一章和调和函数相关的章节中再次强调。

推论 3.2

设 D 为 \mathbb{C} 上区域, $f(z)$ 在 D 上解析的充要条件是:

(1) $u(x, y), v(x, y) \in C^1(D)$; (2) $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 上逐点满足 Cauchy-Riemann 方程。

接下来我们再介绍一个便于验证复函数解析性的公式。我们知道一个复函数 $f(z)$ 最终可以看成是由两个变量决定的: x 和 y , 而同时我们知道 $\{x, y\} \leftrightarrow \{z, \bar{z}\}$ 之间存在简单的线性转化, 即

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \end{cases} \quad (3.19)$$

也就说通过线性变换我们可以将 $f(z)$ 视为 $f(x, y)$ 再视为 $f(z, \bar{z})$ 。当然请注意, 毕竟 \bar{z} 本身也是由 z 决定, 因此请把它理解一种看法。举个例子, $f(z) = |z|^2$ 就可以理解为 $f(z) = z\bar{z}$ 。

在这个意义下我们便可以谈两个记号 $\frac{\partial}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, 根据链式法则不难得到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) f. \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) f.\end{aligned}$$

由此衍生出所谓形式偏导的概念:

定义 3.5 (形式偏导)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (3.20)$$

被称为复函数 $f(z)$ 的 **形式偏导**。

注 再次强调, z 和 \bar{z} 并不是独立变量, 因此这两个记号也不是真正的偏导。

命题 3.2 (Cauchy-Riemann 方程的等价刻画)

$f(z)$ 满足 Cauchy-Riemann 方程等价于 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 。

证明

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 &\iff \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \stackrel{f=u+iv}{\iff} (u_x + i v_x) + i(u_y + i v_y) = 0 \\ &\iff (u_x - v_y) + i(u_y + v_x) = 0 \iff \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}.\end{aligned}$$

注 虽然只是形式记号, 但是生动地说明了: 如果一个函数想解析, **它不能含有 \bar{z} 的部分**。

3.3 初等解析函数

从这节开始我们将讨论常用的初等函数对应的定义和性质, 这些函数大家在数学分析中已经熟知, 但是理应从头定义。首先我们先定义一下什么叫初等函数, 当然你可以简单理解为: 可以用解析表达式写出来的函数。

定义 3.6 (初等函数)

初等函数指由指数、对数、三角、反三角以及幂函数进行四则运算和复合运算后得到的函数。

3.3.1 指数函数

我们第一个需要讨论的是指数函数 e^z , 这里继续沿用第一章时给出的定义并回顾一下对应的 Euler 公式:

定义 3.7 (指数函数)

$$e^z \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \stackrel{\text{Euler 公式}}{=} e^x (\cos y + i \sin y), \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (3.21)$$

命题 3.3

e^z 在全复平面上解析, 且满足 $(e^z)' = e^z$ 。

证明 要注意这里我们不应该照搬实函数 e^x 的结论, 但我们知道 e^z 亦可写作 $e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$, 也就是说 e^z 对应的实部虚部分别为 $u(x, y) = e^x \cos y$ 和 $v(x, y) = e^x \sin y$ 。

那么直接验证

$$u_x = u, v_x = v \implies \begin{cases} u_y = -e^x \sin y = -v = -v_x \\ v_y = e^x \cos y = u = u_x \end{cases}$$

换言之 e^z 在复平面上每一点都满足 C-R 方程, 所以 e^z 在全平面解析。同时根据导数公式我们有 $(e^z)' = u_x + iv_x = u + iv = e^z$ 。□

注 事实上随着后续的学习我们会发现, 某种意义上只有一个初等函数 e^z , 剩下的函数都和它相关。

3.3.2 三角函数

对于 $\forall z \in \mathbb{C}$, 我们希望定义 $\cos z$ 和 $\sin z$, 而 Euler 公式给了我们启发, 我们知道:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \begin{cases} e^{iy} = \cos y + i \sin y \\ e^{-iy} = \cos y - i \sin y \end{cases} \implies \begin{cases} \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \\ \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \end{cases}$$

那么自然我们可以把这个定义“延拓”到复平面上来:

定义 3.8 (三角函数)

$$\cos z \triangleq \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z \triangleq \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3.22)$$

命题 3.4

$\cos z$ 和 $\sin z$ 满足以下性质:

- (1) $\cos z$ 和 $\sin z$ 在全复平面解析, 且 $(\cos z)' = -\sin z$ 、 $(\sin z)' = \cos z$;
- (2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$;
- (3) 所有高中时学过的和差化积公式, 例如 $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$;
- (4)* $\cos z$ 和 $\sin z$ 不再有界, 即不能假定有 $|\cos z| \leq 1$ 以及 $|\sin z| \leq 1$ 。

证明 (1)-(3) 请根据 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的定义直接验证, 注意结合 e^z 的相关性质。

我们重点来说一下 (4), $\cos z$ 是无界的因为可以取 $z = yi, y \in \mathbb{R}$ 带入公式, 得到

$$\cos(iy) = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y).$$

因此我们甚至证明了 $|\cos(iy)| \geq 1$ 。同时当 $y \rightarrow +\infty$ 以及 $y \rightarrow -\infty$ 我们都有 $\cos(iy) \rightarrow +\infty$, 因此当然是无界函数, 同理 $\sin z$ 。

3.3.3 双曲三角函数

双曲三角函数的概念其实也是来源于实函数的版本, 虽然很多高中已经不教了。正如 $\cos t$ 和 $\sin t$ 可以用于参数化单位圆周, 因为它们的平方和天然为 1。如果你希望参数化双曲线 $x^2 - y^2 = 1$, 你自然要考虑是不是有合适的两个函数它们的平方差天然为 1。具体来说我们给出以下定义:

定义 3.9

$$\cosh z \triangleq \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z \triangleq \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3.23)$$

注 一个简单易懂的记忆方式: 双曲版就是在原版公式里把所有的“i”去掉。

命题 3.5

$\cosh z$ 和 $\sinh z$ 满足以下性质:

$$(1) \begin{cases} \cos(iz) = \cosh z \\ \cosh(iz) = \cos z \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin(iz) = i \sinh z \\ \sinh(iz) = -i \sin z \end{cases}$$

(2) $\cosh z$ 和 $\sinh z$ 在全复平面解析, 且 $(\cosh z)' = \sinh z$ 、 $(\sinh z)' = \cosh z$;

(3) $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$;

(4) $\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.



证明 按定义验证即可, (4) 被称为混合型的和差化积。

3.4 初等多值函数

所谓多值函数, 大多数时候是指那些一对应多的关系, 实际上本身已经不是映射了。(因为没有良定性) 事实上这样的情况在复变函数中很常见, 我们知道 e^z 、 $\cos z$ 都是周期函数, 当我们希望定义对应的反函数的时候, 这些所谓的反函数都是一对多的, 因此这些多值函数在每点的“取值”都不是确定的一个数, 而是一个集合。

3.4.1 对数函数

我们希望研究指数函数的反函数, 这里可以利用待定系数法来求解, 也就是设 $z = e^w$, 来求 w 。自然地, 令 $w = u + iv$, 对应于 $z = re^{i\theta}$, 我们知道:

$$z = e^w \iff re^{i\theta} = e^{u+iv} = e^u e^{iv} \iff \begin{cases} r = e^u \\ v \equiv \theta \pmod{2\pi} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \ln r \\ v \in \text{Arg } z. \end{cases}$$

注意 $u = \ln r$ 这里用的是 $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的对数函数, 因此我们得到了结论: $w = \ln |z| + i \text{Arg } z$ 。

定义 3.10 (对数函数)

$$\text{Ln } z \triangleq \ln |z| + i \text{Arg } z = \{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.24)$$

被称为关于 z 的**对数函数**。同时我们也定义 $\ln z$ 为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (3.25)$$

我们称 $\ln z$ 为 $\text{Ln } z$ 的**主值分支**, $\ln z$ 是取值明确的函数。



注 虽然 $\text{Ln } z$ 的性质很糟糕, 但是 $\ln z$ 依然具有和实函数类似的性质。

命题 3.6

设 l 为实的正半轴, 即 $l = \{z \mid \text{Re } z \geq 0, \text{Im } z = 0\}$, 那么

(1) $\ln z$ 是 $\mathbb{C} \setminus l$ 上的解析函数; (2) $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ 。



证明 (1) 由于去掉了实正半轴, 这就迫使 $\arg z$ 的取值范围为 $(0, 2\pi)$, 在这个区间上我们有:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \arctan \frac{y}{x} + C. \text{ (这里 } C \text{ 和象限有关)} \quad (3.26)$$

也就说 $\ln z$ 对应的实部和虚部分别为 $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $v(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + C$, 直接计算

$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, & v_y = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, & v_x = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

故而在 $\mathbb{C} \setminus l$ 上 $\ln z$ 满足 C-R 方程, 逐点解析。

(2) 根据导数公式,

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + yi} = \frac{1}{z}.$$

□

3.4.2 幂函数

定义 3.11 (一般复数的幂)

设 $a, b \in \mathbb{C}$, 我们定义

$$a^b \triangleq e^{b \operatorname{Ln} a} \quad (3.27)$$

仿造这个定义, 我们可以定义 a^z 以及 z^a , $\forall a \in \mathbb{C}$.



注 注意到在定义中借用了 $\operatorname{Ln} z$ 的定义, 因此一般而言计算结果也是一个集合。

这里读者可能会有疑问, 利用这样的定义方式算出来的 z^n 以及 $z^{\frac{1}{n}}, n \in \mathbb{N}$ 还会是原始的含义吗, 我们这里可以验证一下:

(1)

$$z^n \stackrel{\text{按约定}}{=} e^{n \operatorname{Ln} z} = e^{n(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} = |z|^n e^{in \operatorname{Arg} z}. \quad (3.28)$$

可以验证 $e^{in \operatorname{Arg} z}$ 算出来的值是唯一的, 因此 z^n 依然是一个定义良好的函数。

(2)

$$z^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{按约定}}{=} e^{\frac{1}{n} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{n}(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} = \{|z|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg z + 2k\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.29)$$

恰好回到了开方的原始定义。因此这说明 a^b 的定义方式和之前的认知并未冲突。

例题 3.1 直接求以下复数的值: (1) $\ln(1+i)$; (2) i^i ; (3) $1^{\sqrt{2}}$ 。

解 (1) $\ln(1+i) = \ln|1+i| + i \arg(1+i) = \ln \sqrt{2} + i \frac{\pi}{4}$ 。

(2) $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i \cdot i \operatorname{Arg}(i)} = \{e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 。复数的复数次幂是一堆实数还有王法吗

(3) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Arg} 1} = \{e^{i2\sqrt{2}k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 。

实数的实数次幂是一堆复数还有王法吗

3.4.3 反三角函数

由之前的经验我们知道, 三角函数的反函数应该也是多值函数了, 当然事实上我们一般不记反三角函数的公式, 而是直接从定义出发计算, 为了方便我们给它们两个记号 $\operatorname{Arccos} z$ 和 $\operatorname{Arcsin} z$ 。

命题 3.7 (反三角函数公式)

$$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}). \quad (3.30)$$



证明 我们证明一个, 剩下交给读者自己练习。设 $z = \cos w$, 根据 \cos 的定义我们有

$$z = \sin w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) \implies e^{iw} + e^{-iw} = 2z \implies (e^{iw})^2 - 2z(e^{iw}) + 1 = 0.$$

将上式视为关于 e^{iw} 的一元二次方程，可用配方法求根：

$$(e^{iw} - z)^2 = z^2 - 1 \implies e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \implies w = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

□

注 再次提醒，在复数里 $\sqrt{\cdot}$ 本身就蕴含了两个根，因此就不要再写什么 \pm 。夫Low子

例题 3.2 找出 $\sin z$ 在复数域上的所有根。

解 套用 $\operatorname{Arcsin} z$ 的公式（当然也可以不套），得到

$$\operatorname{Arcsin}(0) = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(\sqrt{1}) = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln}(1) = \left\{ \frac{1}{2i} \cdot 2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

换言之，跟实数上的 \sin 情况是一样的。

3.5 分式线性变换

我们把线性函数的商称为分式线性变换，分式线性变换相较于其他复变函数具有更多的几何性质，我们需要单独提及。

定义 3.12 (分式线性变换)

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0. \quad (3.31)$$

被称为分式线性变换，也被称为 Möbius 变换。



注 细心的读者应该注意到了，分式线性变换大部分时候并非 \mathbb{C} 上的解析函数。

事实上 $c = 0$ 时根据题意 $d \neq 0$ ，这时候函数在 \mathbb{C} 上解析，但是 $c \neq 0$ 时，函数在 $z = -\frac{d}{c}$ 处并不解析，同时函数值也永远取不到 $\frac{a}{c}$ （因为 b 和 d 不能同时为 0）。

但是联想到我们已经学过扩充复平面的概念，我们可以补充定义 $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ 以及 $f(\infty) = \frac{a}{c}$ ，这样我们就得到了一个 $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 的映射。

命题 3.8

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0.$$

是一个 $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 的一一对应。



证明 直接验证 $f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ 即可。

□

命题 3.9

$\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 的所有分式线性变换在映射复合下构成一个群。



证明 请读者直接验证即可。事实上我们可以从代数上更加直观地刻画这个群。

定义 3.13 (一般线性群)

$$\operatorname{GL}_2(\mathbb{C}) \triangleq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0 \right\} \quad (3.32)$$

称为 \mathbb{C} 系数的一般线性群。



命题 3.10 (分式线性变换群的代数刻画)

设所有分式线性变换构成的群为 \mathcal{M} , 我们有

$$\mathcal{M} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \sim \quad (3.33)$$

其中等价关系满足 $x \sim y \iff \exists \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}$, 使得 $y = \lambda x$.

证明 定义

$$\begin{aligned} \phi: \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto f: f(z) = \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

请自行验证 ϕ 为群同态, 即满足:

$$\phi(A) \circ \phi(B) = \phi(A \cdot B), \quad \phi(A^{-1}) = (\phi(A))^{-1}.$$

容易看出 $\ker \phi = \{A \mid \phi(A) = \mathrm{id}\} = \{\lambda E_2 \mid \lambda \neq 0 \in \mathbb{C}\}$, 那么根据群同态基本定理可知

$$\mathcal{M} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \ker \phi \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \sim$$

□

注 事实上 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) / \sim$ 被称为 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, 即一般射影线性群。

分式线性变换事实上和平面上的射影变换是深刻相关的, 这里就不再赘述了。

下面我们定义四种基础变换, 并利用它们证明一系列和分式线性变换相关的性质:

定义 3.14 (四种基础变换)

对于分式线性变换, 我们给出以下四种基础变换, 我们称:

- (1) $w = z + a, \forall a \in \mathbb{C}$ 为 **平移**; (2) $w = rz, \forall r \in \mathbb{R}$ 为 **伸缩**;
(3) $w = e^{i\theta}z, \forall \theta \in \mathbb{R}$ 为 **旋转**; (4) $w = \frac{1}{z}$ 为 **反演**。

♣

命题 3.11 (保圆、保对称性)

分式线性变换满足以下性质:

- (1) 任意分式线性变换一定是四种基础变换的复合。
(2) 分式线性变换将复平面上的圆周 (包含直线) 映成圆周 (包含直线)。
(3) 分式线性变换将关于某圆周对称的一对点映成关于像圆周对称的一对点。

我们把性质 (2) 称为 **保圆性**, 把性质 (3) 称为 **保对称性**。

♠

证明 (1) 若 $c = 0$, 则

$$w = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

很明显是平移、旋转加伸缩的复合。若 $c \neq 0$, 则

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}}.$$

也可以直接看出是四种基础变换的复合。

(2) 回看章节 1.4 我们知道复平面上的一个圆周 (包含直线) 总是可以写为

$$Kz\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c.$$

其中 $K, c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}$ 且满足 $|a|^2 - Kc > 0$ 。

很明显, 平移、伸缩和旋转都把圆周映成圆周。当然不信你也可以按定义验证 而任何分式线性变换都是四

种基础变换的复合, 我们只需验证反演把圆周映成圆周即可, 我们令 $z = \frac{1}{w}$ 带入圆周方程, 得

$$K \frac{1}{w} \frac{1}{\bar{w}} + \bar{a} \frac{1}{w} + a \frac{1}{\bar{w}} + c = 0 \implies cw\bar{w} + aw + \bar{a}\bar{w} + K = 0.$$

很明显, 上述方程是关于 w 的一个圆周, 这说明了像集是一个圆周。

(3) 这里借用第一次作业中的命题, 我们知道 z_1, z_2 关于圆周 $Kz\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c$ 对称的充要条件是

$$Kz_1\bar{z}_2 + \bar{a}z_1 + a\bar{z}_2 + c = 0.$$

从几何上不难看出平移、伸缩和旋转都把一对对称点映成一对对称点。当然不信你也可以按定义验证 因此我们还是只对反演进行验证, 设 $w = \frac{1}{z}$ 为反演, 我们知道 $z_1 = \frac{1}{w_1}, z_2 = \frac{1}{w_2}$, 把它们带入上式得:

$$K \frac{1}{w_1} \frac{1}{\bar{w}_2} + \bar{a} \frac{1}{w_1} + a \frac{1}{\bar{w}_2} + c = 0 \implies cw_1\bar{w}_2 + aw_1 + \bar{a}\bar{w}_2 + K = 0.$$

注意到像圆周的方程正是 $cw\bar{w} + aw + \bar{a}\bar{w} + K = 0$, 故而像点 w_1 和 w_2 仍然是关于像圆周对称的一对点。□

分式线性变换表面上看上去有四个参数 a, b, c, d , 但因为采用除式的关系, 实际上独立参数只有三个。因此我们自然会想问这样的问题: 给定 \mathbb{C} 上的任意两组两两不同的三个点 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 以及 $\{w_1, w_2, w_3\}$, 是否存在某个分式线性变换把它们一一对应? 要回答这个问题, 我们需要引进一个概念: 交比。

定义 3.15 (交比)

设 z_1, z_2, z_3, z_4 是 \mathbb{C} 上任给的四个点, 要求其中至少有三个点是两两不同的, 且只允许有一个点是 ∞ , 我们定义以下比值:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \triangleq \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \bigg/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}. \quad (3.35)$$

我们称 (z_1, z_2, z_3, z_4) 为四点的交比。

当这四个点中有 ∞ 时, 我们可以补充以下约定:

$$\begin{aligned} (\infty, z_2, z_3, z_4) &= \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}, & (z_1, \infty, z_3, z_4) &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \\ (z_1, z_2, \infty, z_4) &= \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}, & (z_1, z_2, z_3, \infty) &= \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}. \end{aligned}$$

同时我们约定过 $\frac{1}{0} = \infty$, 因此在两个点相同的情况下 (z_1, z_2, z_3, z_4) 也是良定的。



那么利用交比我们可以回答之前提出的问题了。

命题 3.12 (分式线性基本定理)

设 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 和 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 是 \mathbb{C} 上两组两两不同的三点组, 则存在唯一的分式线性变换 ϕ 满足 $\phi(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$ 。



证明 我们定义函数

$$f(z) = (z, z_1, z_2, z_3) \stackrel{\text{按定义}}{=} \frac{z - z_2}{z - z_3} \bigg/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

很显然, 这是一个分式线性变换 (包括三点中有 ∞ 的情况), 同时很容易验证有

$$f(z_1) = 1 \quad f(z_2) = 0 \quad f(z_3) = \infty.$$

也就是说这个分式线性变换依次把 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 映成了 $\{1, 0, \infty\}$ 。

同理, 令 $g(z) = (z, w_1, w_2, w_3)$, 我们知道 g 也是分式线性变换, 且把 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 依次映成 $\{1, 0, \infty\}$, 那么考虑映射 $\phi = g^{-1} \circ f$, 这就是一个把 $\{z_1, z_2, z_3\}$ 依次映成 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 的分式线性变换。

最后我们来说明满足条件的分式线性变换是唯一的, 这里要借助一个引理: 如果一个分式线性变换有三个以上不动点, 则该映射只能是 id (请读者自行思考细节)。那么如果 ϕ 和 ψ 同时满足要求, 则 $\phi \circ \psi^{-1}$ 拥有三个不动点, 因此一定有 $\phi \circ \psi = \text{id} \implies \phi = \psi$ 。□

推论 3.3 (分式线性变换保交比)

(1) 满足把 z_k 映成 w_k 的分式线性变换由下式唯一决定:

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (\phi(z), w_1, w_2, w_3). \quad (3.36)$$

(2) 分式线性变换保交比, 具体来说, 如果 ϕ 是一个分式线性变换, 那么一定有

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\phi(z_1), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)). \quad (3.37)$$



证明 (1) 只需依次将 z_k 带入 z 验证 $\phi(z_k) = w_k$ 即可, 而且分式线性基本定理已经保证了这样的式子是唯一的。

(2) 因为四点组中要求至少有两个是两两不同的, 因此不妨假设 z_2, z_3, z_4 两两不同, 那么令 $w_k = \phi(z_k)$, 由 (1) 可知 ϕ 的表达式为:

$$(z, z_2, z_3, z_4) = (\phi(z), \phi(z_2), \phi(z_3), \phi(z_4)). \quad (3.38)$$

因此在上式中带入 $z = z_1$ 即证命题。□

最后我们利用分式线性变换的性质巧证几个已经见过的命题, 关于分式线性变换的更多内容我们将在最后一章: 共形变换中继续讨论。

例题 3.3 (1) $\bar{\mathbb{C}}$ 上四点共圆的充要条件是 $\text{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$.

注意: 这里可以把条件放宽到 $\bar{\mathbb{C}}$ 上的四点组, 如果 “ ∞ 在圆上” 则意味这个圆其实是直线, 因此条件自动转化为剩下三点共线。

(2) z 和 w 关于圆 Γ 对称的充要条件是, 在 Γ 上任取三点 z_1, z_2, z_3 , 一定有

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \overline{(w, z_1, z_2, z_3)}.$$

证明 (1) 我们知道平面上的任意三个不同的点一定确定一个圆 (直线亦是一种圆), 那么不妨假设 z_2, z_3, z_4 确定了一个圆 Γ 。令 $f(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, 我们知道 f 是分式线性变换, 故而 f 一定将 Γ 映成一个圆。但另一方面, 由于 $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$, $f(z_4) = \infty$, 我们发现事实上 f 把 Γ 整个的映成了实轴 (也是圆!) 于是逻辑上有

$$z_1 \in \Gamma \iff f(z_1) \in \text{实轴} \iff (f(z_1), 1, 0, \infty) \in \mathbb{R}.$$

最后根据交比在分式线性变换下不变可知四点共圆的充要条件是 $\text{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ 。

(2) 假设圆周 Γ 以 a 为圆心, 以 R 为半径, 根据作业中的定义不难证明:

$$z \text{ 和 } w \text{ 关于圆周 } \Gamma \text{ 对称} \iff (z - a)\overline{(w - a)} = R^2.$$

故而我们得到

$$\begin{aligned} (z, z_1, z_2, z_3) &= \left(a + \frac{R^2}{w - a}, z_1, z_2, z_3\right) \\ &\stackrel{\text{平移保分比}}{=} \left(\frac{R^2}{w - a}, z_1 - a, z_2 - a, z_3 - a\right) \\ &\stackrel{\text{伸缩保分比}}{=} \left(\frac{1}{w - a}, \frac{z_1 - a}{R^2}, \frac{z_2 - a}{R^2}, \frac{z_3 - a}{R^2}\right) \\ &\stackrel{\text{反演保分比}}{=} \left(\overline{w - a}, \frac{R^2}{z_1 - a}, \frac{R^2}{z_2 - a}, \frac{R^2}{z_3 - a}\right) \\ &\stackrel{\text{三点在圆上}}{=} (\overline{w - a}, \overline{z_1 - a}, \overline{z_2 - a}, \overline{z_3 - a}) \\ &\stackrel{\text{平移保分比}}{=} \overline{(w, z_1, z_2, z_3)}. \end{aligned}$$



3.6 * 多值函数和 Riemann 面

通过章节 3.4 我们知道相当多的初等函数实际上是所谓的“多值函数”，这些看似性质恶劣的函数实际上给予了数学家很多灵感。譬如 Riemann 就认为，并不是这些多值函数有什么问题，而是它们本来就不适合定义在复平面上，理应为它们量身定做“适合的空间”。那么这样的空间是什么呢？鉴于当时数学理论太不完善，Riemann 也只是在手稿中给出了模糊的解释。

到了 20 世纪初，H. Weyl 等人将这个概念整理并抽象形成“Riemann 面”的理论。Riemann 面理论是推动 20 世纪数学发展的动机之一，它是流形理论的雏形，而流形则是现代几何学的基础研究对象。可以说，如果没有 Riemann 对于多值函数的洞察，可能整个现代几何学框架都要重新搭建了。

先说回多值函数，我们知道不论是对数函数还是幂函数，它们的多值性本质都是来自 $\operatorname{Arg} z$ 的多值性，因此我们要首先处理的就是 $\operatorname{Arg} z$ 。

定义 3.16 (沿曲线的辐角差)

设 γ 为一条连续闭曲线，我们在曲线上任取一点 z_0 ，并从 z_0 出发沿着曲线的正向绕曲线一圈再第一次回到 z_0 ，我们将在这个变化过程中辐角函数 $\operatorname{Arg} z$ 的前后变化称为沿 γ 的辐角差，记作 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$ 。

命题 3.13 (环绕数)

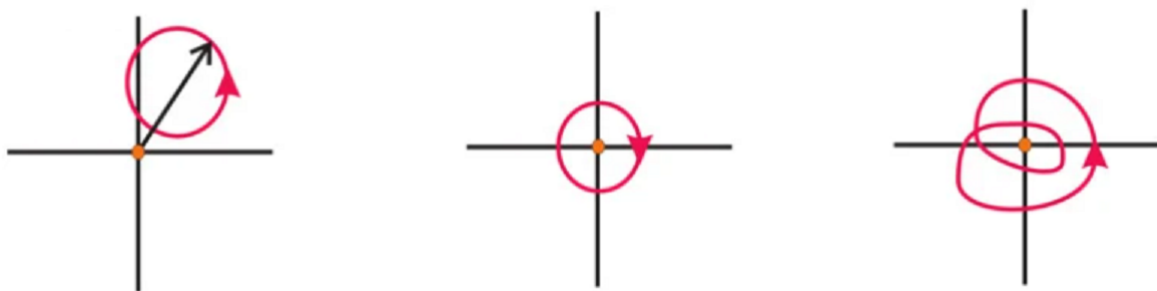
对于给定的连续闭曲线 γ ， $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$ 和 z_0 的选取无关，因而是常数，而且总是 2π 的整数倍，我们将

$$w(\gamma) \triangleq \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z. \quad (3.39)$$

称为曲线的环绕数。

注 这个命题在几何直观还是比较显然，但其实是没法简单验证的，严格的证明需要微分拓扑相关的知识，因此在这里略过，请读者当做事实接受。

$\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z$ 并不是一个简单的“尾减头”的概念，它需要根据曲线的图形来确定，我们给出几个例子：



请读者按图验证这三条曲线对应的环绕数 $w(\gamma)$ 分别为 0、-1 和 2。我们注意到一个很有趣的现象，那就是图 1 和图 2 的曲线形状实则是一样的，环绕数的差异本质来源于原点是否在曲线内部。而图 3 之所以环绕数更多是因为他有自交现象，因此多绕了原点一圈，那么综上所述我们可以得到以下结论：

命题 3.14

设 γ 为一条 Jordan 曲线，则

$$w(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = \begin{cases} 0, & \text{原点不在 } \gamma \text{ 内部} \\ \pm 1, & \text{原点在 } \gamma \text{ 内部} \end{cases} \quad (3.40)$$

关于环绕数这个概念，我们在后续章节中还会提及，现在回到 $\operatorname{Arg} z$ 本身，我们指出 $\operatorname{Arg} z$ 的多值性的来源

正是来自于环绕数, 因为对于复平面上的任意一点 z_0 , 我们可以把 $\operatorname{Arg} z$ 理解为

$$\operatorname{Arg} z_0 = \{\arg z_0 + \Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = \arg z_0 + 2\pi \cdot w(\gamma) \mid \gamma \text{ 为经过 } z_0 \text{ 的任意连续闭曲线}\}. \quad (3.41)$$

注意到 γ 是任取的, 这就是 $\operatorname{Arg} z$ 多值性的本质。数学家希望能够让 $\operatorname{Arg} z$ 成为良定函数, 给出了以下思路:

思路一、限制多值函数的活动范围

我们知道只需要让平面上的曲线无法绕原点一圈, 那么自然有 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z = 0, \forall \gamma$, 因此传统的做法是**将复平面上带原点的实轴正半轴挖去**, 这样平面上的所有闭曲线都无法绕过原点一圈, 因此 $\operatorname{Arg} z$ 就等价于 $\arg z$ 。

思路二、将多值函数拆成若干良定的函数

这个思路其实就是思路一的加强版, 我们能定义 $\arg z$, 自然就可以定义类似的函数

$$(\arg z)_k = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ 是固定的整数} \quad (3.42)$$

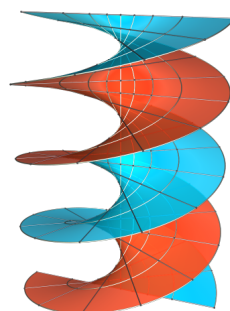
这样一样我们相当于把 $\operatorname{Arg} z$ “封装打包成若干个函数” $\{(\arg z)_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 其中每一个对象都是解析的。

思路三、不动函数, 但“拓宽”函数活动的空间

这就是 Riemann 给出的思路, 他认为既然 $\operatorname{Arg} z$ 取值范围跑遍了 $(-\infty, +\infty)$, 而一个复平面所能承载的区间长度只有 2π , 那么我们为什么不“多放几个”复平面上来呢?

具体来说, 我们取一些标准复平面, 每一个都沿着实轴剪开。先让辐角在第一个复平面上面能从 0 走到 2π , 再把第二个复平面的实轴和第一个相接, 让辐角能在第二平面上从 2π 走到 $4\pi \dots$

当然, 这个操作也可以向负角度延伸。如此往复, 我们相当于把无穷个复平面接在一起, 形成了类似右图的几何对象, 这就是能让 $\operatorname{Arg} z$ 良定的几何空间, 也就是所谓的**Riemann 面**。



定义 3.17 (Riemann 面, Riemann 的原始定义)

设 $f(z)$ 是一个多值函数, 我们称使其解析的几何对象为其对应的 Riemann 面。一般来说, Riemann 面是由多张复平面通过某种拼接方式得到的几何空间。

粗略来说, Riemann 面是复平面的一种推广, 使得我们可以借助这个概念良定任何多值函数。1920 年前后, 拓扑公理体系成熟, 德国数学家 H. Weyl 等人整理了 Riemann 的手稿并将这个概念的定义用拓扑术语进行了严格化。但首先让我们介绍同胚的概念:

定义 3.18 (同胚映射)

我们称 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ 是两个拓扑空间之间的一个**同胚映射**, 如果 f 是一个连续双射, 同时 f^{-1} 也是连续映射。如果两个拓扑空间可以建立同胚映射, 我们就称两者是**同胚**的。

定义 3.19 (Riemann 面, Weyl 的定义)

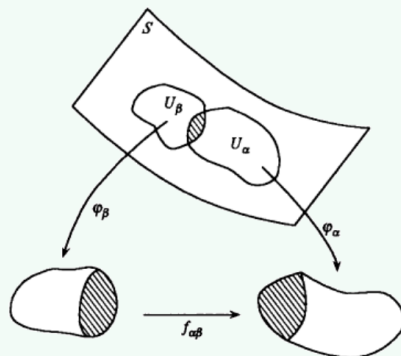
设 S 是一个连通的 T_2 空间, 我们对 S 给出以下要求:

- (1) 存在 S 的一个开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$
- (2) 在每个 U_α 上可以定义一个映射 φ_α , 满足 $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow D_\alpha \subset \mathbb{C}$ 是一个同胚映射。(称 S 是**局部欧氏**的)
- (3) 若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则

$$f_{\alpha\beta} \stackrel{\Delta}{=} \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C} \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C} \quad (3.43)$$

是一个解析函数, 具体可参考右图。(称 S **具有复结构**)

我们称满足全部条件的 S 为一个**Riemann 面**。



Weyl 的定义被当时的学界广泛接受，成为了《流形》概念的雏形，用现代几何的语言，所谓的 Riemann 面就是一维的连通复流形。流形理论是现代几何学的开端，几何学家之后更多地在流形上而不是欧式空间里讨论微积分和曲线曲面论，这里就不再细说了。

和 Riemann 面密切相关的第二个概念是所谓的（复）代数曲线，我们首先给出定义。

定义 3.20 (代数曲线)

$$\Gamma : \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z, w) = 0\}. \quad (3.44)$$

被称为一条（复）代数曲线，其中 $P(z, w)$ 是关于 z 和 w 的多项式。

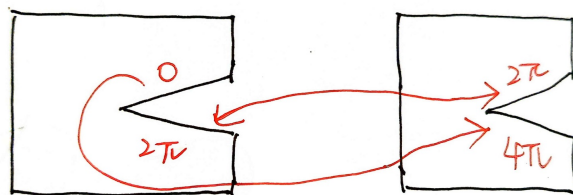
Riemann 面和代数曲线事实上是一回事，让我们以 $w = \sqrt{z}$ 为例进行说明。

我们知道 $\{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid w = \sqrt{z}\} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 - z = 0\}$ 。而多值函数 $w = \sqrt{z}$ 在集合 $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 - z = 0\}$ 上是良定的，这说明了这条代数曲线本身就可以作为 $w = \sqrt{z}$ 的一个 Riemann 面。

让我们沿用 Riemann 的思路，我们知道 \sqrt{z} 是一个 $1 \rightarrow 2$ 的函数，因此我们理应只需要两张复平面就足以刻画 \sqrt{z} 对应的 Riemann 面，事实上：

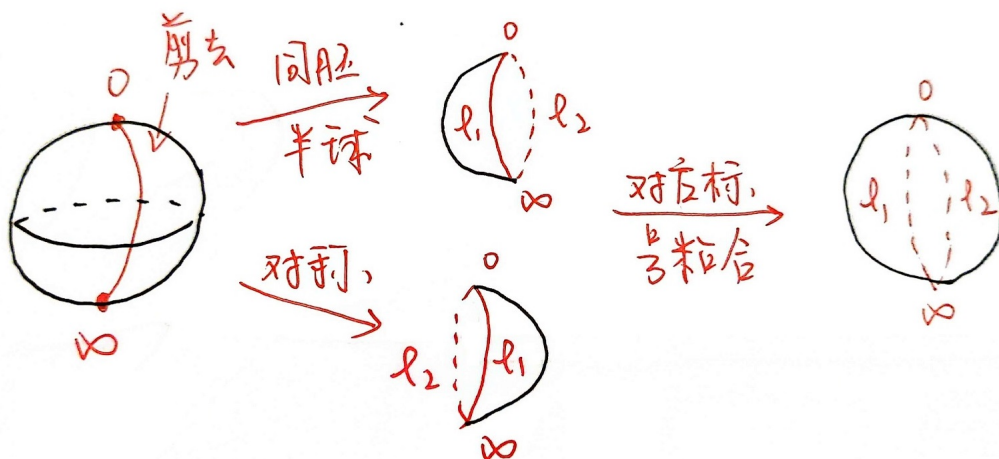
$$\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Ln} z} = \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arg} z}.$$

不难看出 \sqrt{z} 是一个周期为 4π 的函数，因此只需要两张复平面各去掉实轴正半轴并进行粘合即可。具体来说，我们拿两张复平面来代表从 0 到 2π 的辐角，用另一张代表从 2π 到 4π ，同时我们要求对应 2π 的两条边粘合，而 0 和 4π 的边粘合，那么这样粘出来的几何对象就是 \sqrt{z} 对应的 Riemann 面，具体参看右图：



空间几何直观比较强的读者应该意识到了，这件事情在三维空间中是无法实现的，因为一旦 2π 的那两条边粘合了，就形成了一个平面，导致另外两条边无法跨越这个平面进行粘合。如果想象不来，不妨亲手用 A4 纸一试便知。当然这件事也并不奇怪，因为这个 Riemann 面理应是 \mathbb{C}^2 ，也就是 \mathbb{R}^4 中的几何对象，因此借由正常的方式我们是看不到这张曲面的。

但是我们可以借助于复球面和之前介绍过的同胚的概念来理解这个曲面。我们知道在复平面上的原点和无穷远点恰好对应于复球面上的南北极，因此在复平面上挖掉实轴正半轴这一行为相当于在复球面上挖掉连接南北极的一段弧。而复球面去掉这么一段弧后可以和半个球面同胚（请读者尝试自己写出这个同胚映射，并不困难）。在同胚的意义下，我们粘合两个复平面的行为就转化为粘合两个半球面，因此最终得到的几何对象是一整个球面。换言之， \sqrt{z} 的 Riemann 面，或者说代数曲线 $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 - z = 0\}$ 最终会同胚于一个球面。



利用这种思路我们可以来尝试处理更一般的 Riemann 面了, 因为函数可能有多个非解析点, 这里我们给出一个概念: 枝点。

定义 3.21 (枝点)

我们称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 是 $f(z)$ 的一个枝点, 如果存在 z_0 的某个邻域 U , 使得对于 U 中任意围绕 z_0 的简单闭曲线, 函数绕其一圈后的值都发生了变化。

枝点的定义其实来源于对 $\operatorname{Arg} z$ 在原点附近性质的推广, 事实上我们有:

命题 3.15

- (1) z_0 和 ∞ 是 $\operatorname{Arg}(z - z_0)$ 的枝点。
- (2) z_0 和 ∞ 是 $\sqrt{z - z_0}$ 的枝点。

证明 (1) 事实上在 z_0 的任何一个邻域内都可找到简单闭曲线 γ 使得 z_0 在其内部, 根据命题 3.14 可知 γ 的环绕数非零, 因此 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z - z_0) = \pm 2\pi \neq 0$, 也就是说 $\operatorname{Arg}(z - z_0)$ 在绕 γ 一圈后函数值一定发生了变化。而另一方面, 上述的任何简单闭曲线在扩充复平面上都可以视为是绕了 ∞ 一圈, 因此 ∞ 自动成为枝点。

(2) 利用 $\sqrt{z - z_0} = \sqrt{|z - z_0|} \cdot e^{\frac{i}{2} \operatorname{Arg}(z - z_0)}$ 可知, 若在 z_0 附近取任意一条闭曲线, 我们有 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z - z_0) = \pm 2\pi$, 这说明了 $\sqrt{z - z_0}$ 在转满一整圈后正好从原来的复数值变成其负值, 因此 z_0 是枝点, 同理 ∞ 。□

注 这也是为什么叫这样的点为枝点的原因, 因为函数值绕圈后会从“一枝”跳到“另一枝”。

现在我们可以来讨论具有多个枝点的多值函数的 Riemann 面了, 让我们来看一个稍微复杂的例子:

例题 3.4 多值函数 $w = \sqrt{z(z-1)(z-2)}$ 的 Riemann 面同胚于环面。

证明 我们知道

$$\sqrt{z(z-1)(z-2)} = \sqrt{|z(z-1)(z-2)|} \cdot e^{\frac{i}{2} [\operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg}(z-1) + \operatorname{Arg}(z-2)]}. \quad (3.45)$$

不难验证 $z=0$ 、 $z=1$ 、 $z=2$ 分别都是函数的枝点, 因为在这三个点附近对应的 $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(z - z_0) = \pm 2\pi$, 这使得函数的值在绕 γ 转圈后变为负值。同理 ∞ 也是枝点, 因为在 ∞ 附近绕一圈相当于一次绕过了 0, 1, 2 三个枝点, 使得函数值变为负值。

但另一方面我们知道, 如果一次恰好绕过两个枝点是没问题的 负负得正。因此我们还是拿复球面来看这件事情, 现在 0, 1, 2, ∞ 对应复球面上的四个点, 我们将其“成对连线”挖去, 这就相当于在球面上挖掉了两条弧。

那么借由几何直观, 我们不难想象球面挖去两段弧是可以连续形变成一个如 C 字形一样的“环柄”, 和处理 \sqrt{z} 时一样, 我们将两段“环柄”对边粘合, 最终得到了一个像甜甜圈一样的几何图形, 在拓扑上我们称其为环面。通过上述的一系列过程, 我们证明了 $w = \sqrt{z(z-1)(z-2)}$ 的 Riemann 面, 或者说代数曲线 $w^2 = z(z-1)(z-2)$ 同胚于环面。□



例题 3.5 请自行思考并回答 $w = \sqrt{z(z-1)}$ 以及 $w = \sqrt[3]{z(z-1)(z-2)}$ 对应的 Riemann 面是什么。

Riemann 面是研究生课程《复分析》、《代数曲线》中的重要研究对象, 而且其本身就可以单开一门课程, 有兴趣的同学可以查看李忠的《复分析导引》或者在 B 站搜索南京大学梅加强老师的《Riemann 曲面简介》。

第4章 复积分

在单复变函数课程中，复积分指的是复函数在连续曲线上的积分。本章将从复积分的概念入手，把复积分和实函数的第二型曲线积分理论相关联，叙述并证明 Cauchy-Goursat 定理、Cauchy 积分公式等重要结论。

Cauchy-Goursat 定理是本书的核心定理之一，也是整个解析函数理论的基础，从这个定理出发，我们将得到一系列关于复解析函数的函数值分布的奇怪现象，而这些现象对于实函数都是不可能发生的，复函数和实函数的差别开始显现。

4.1 复积分的概念

一般而言，复积分指的是复函数在连续曲线上的积分，为了让一些定理成立，我们需要规定曲线是**可求长**的。复积分的定义和数分中关于二元实函数在连续曲线的第二型积分是一致的。

定义 4.1 (复积分)

设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 为可求长的连续曲线，我们在 $[a, b]$ 上任取分点 P_k ($0 \leq k \leq n$) 满足

$$a = P_0 < P_1 < \cdots < P_{n-1} < P_n = b. \quad (4.1)$$

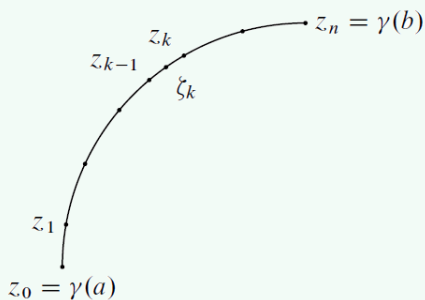
P_k 确定了曲线 γ 上一组分点 $z_k = \gamma(P_k)$ ，我们将这样的取点方式称为对曲线 γ 的一个**分割**，记为 \mathcal{P} 。同时记 γ_k ($1 \leq k \leq n$) 为曲线上从 z_{k-1} 到 z_k 的那段弧，并将其弧长设为 l_k 。

设 $f(z)$ 为定义在 γ 上的复函数，我们在每段 γ_k 上任取一点 ξ_k ，做形式和

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}). \quad (4.2)$$

如果当 $\lambda(\mathcal{P}) \triangleq \max_{1 \leq k \leq n} l_k \rightarrow 0$ 时，对于曲线上的任意分割 \mathcal{P} 以及分点 ξ_k 的选取， $S(f, \mathcal{P})$ 在复数域中有一致的极限，我们称 $f(z)$ **沿 γ 可积**，并将极限值称为 $f(z)$ **在 γ 上的复积分**，即：

$$\int_{\gamma} f(z) dz \triangleq \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} S(f, \mathcal{P}). \quad (4.3)$$



注 请读者小心形式和中 Δz 的部分就是 $z_k - z_{k-1}$ 而不是 $|z_k - z_{k-1}|$ 或者弧长 l_k ，换言之我们其实是在累加向量 $\overrightarrow{z_{k-1}z_k}$ ，因此复积分对应的其实是数分中的第二型积分。

定义中我们不提所谓的“上和”或者“下和”，因为复数不可以比较大小，因此我们直接在定义中要求对于所有分点极限存在。

很显然，原始定义并不好用，一般需要切换成另外两种等价的理解方式。

命题 4.1 (复积分 \rightarrow 第二型曲线积分)

设 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ 为可求长的连续曲线， $\forall t \in [a, b]$ ，我们将 $\gamma(t)$ 的实部和虚部分开：

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t).$$

这样就相当于定义了两条可求长的连续曲线 $x, y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 。同时我们知道 $f(z)$ 亦可分拆为实部和虚部：

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy.$$

那么 $f(z)$ 沿 γ 可积的充分必要条件是以下四个 Stieljes 型积分均可积:

$$\int_{\gamma} u(x, y) dx, \quad \int_{\gamma} u(x, y) dy, \quad \int_{\gamma} v(x, y) dx, \quad \int_{\gamma} v(x, y) dy.$$

且可积时有以下公式

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \left(\int_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \cdot \left(\int_{\gamma} v dx + u dy \right). \quad (4.4)$$

证明 我们回到公式 (4.2), 将其中的分点也都分拆成实部和虚部:

$$\xi_k = s_k + it_k, \quad z_k = \gamma(P_k) = x(P_k) + iy(P_k) \triangleq x_k + iy_k$$

再带回 (4.2) 中计算得到:

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (u(s_k, t_k) + iv(s_k, t_k)) \left[(x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) \right].$$

注意到 $\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0 \Rightarrow |x_k - x_{k-1}|$ 以及 $|y_k - y_{k-1}| \rightarrow 0$, 根据 Stieljes 型积分的定义最终得到公式 (4.4). \square

注 这里可以解释以下什么叫 Stieljes 型积分, 这是专门处理形如 $\int_{\gamma} f dg \triangleq \int_a^b f(t) dg(t)$ 的一套理论, 注意这里甚至不需要 $g(t)$ 可导, 我们只需要做形式和的时候把 $g(t)$ 一起“剖分”即可, 具体来说定义如下:

$$\int_{\gamma} f dg = \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} S(f, g, \mathcal{P}) \triangleq \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (g(\xi_k) - g(\xi_{k-1})). \quad (4.5)$$

因此是在这个意义下我们把 $\int_{\gamma} u(x, y) dx = \int_a^b u(x(t), y(t)) dx(t)$ 理解为 Stieljes 型积分。(不要忘了 $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 本质是一条曲线 / 一个函数。)

当然敏锐的读者已经发现了, $\int_{\gamma} f(z) dz$ 本身岂不是也可以理解为一种 Stieljes 型积分, 答案是正确的。

命题 4.2 (复积分 \rightarrow 第一型曲线积分)

复积分的本质是一种 Stieljes 型积分, 即

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f \circ \gamma(t) d\gamma(t). \quad (4.6)$$

当然如果曲线可微 (即 γ 作为函数可微), 我们还有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f \circ \gamma(t) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (4.7)$$

注 上述两个命题分别阐述了复积分和数分中的第一型曲线积分以及第二型曲线积分之间的联系。

命题 4.3

设 γ 为可求长连续曲线, $f(z)$ 在 γ 上可积, 则有以下性质:

$$(1) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \text{ 有 } \int_{\gamma} (\lambda f(z) + \mu g(z)) dz = \lambda \int_{\gamma} f(z) dz + \mu \int_{\gamma} g(z) dz;$$

$$(2) \text{ 若 } \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \text{ 则 } \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz;$$

$$(3) \int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz;$$

(4) 我们总有下述的不等式, 一般称为 **模长不等式**。若 $f(z)$ 在 γ 上连续, 则

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L. \quad (4.8)$$

其中 $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$, 而 L 为曲线 γ 的弧长。

证明 (1)-(3) 请直接从定义出发验证, 我们重点讲一下 (4)。

首先 $z \in \gamma$ 这个记号的真实含义应该是 $z \in \gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$, 但是在几何上我们经常把 γ (映射!) 和 γ 在复平面上的像混为一谈, 请注意区分。类似地, f 在 γ 上连续其实也是说 f 在集合 $\gamma([a, b])$ 。

因为 γ 是连续映射, 而 $[a, b]$ 是 \mathbb{R} 上的紧集, 因此 γ 的像也是紧的。如果 f 也是连续函数, 则根据定理 2.4 我们知道 $\max_{z \in \gamma} |f(z)|$ 总是存在的, 因此对于连续函数总是有模长不等式。

最后从形式和定义入手, 有

$$|S(f, \mathcal{P})| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \stackrel{\text{三角不等式}}{\leq} M \cdot \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| \stackrel{\text{折线比曲线短}}{\leq} M \cdot L. \quad (4.9)$$

我们得到了模长不等式。 \square

注 模长不等式可以说是后续证明中最常见的技巧 大概会用到 114514 次, 请读者务必掌握。

4.2 四个等价和 Cauchy 定理

我们先约定一个概念, 我们把复平面两点之间的 **可求长的连续曲线** 的像称为两点之间的一条 **路径**。在学习数分的时候我们接触过一个概念: 积分和路径无关。(回忆一下是在什么时候接触的?) 那么既然复积分是在曲线上的积分, 那么取定两个端点后, 我们一样可以问: 复积分和所谓的路径选取有关吗? 我们来看一个例子:

例题 4.1 在以下路径上计算积分 $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$:

(1) C 为 0 到 $1+i$ 的直线段;

(2) C 为从 0 到 1 再从 1 到 $1+i$ 的两条直线段组成的折线。

解 (1) 0 到 $1+i$ 的直线段可以参数化为 $z = z(t) = (1+i)t$, $0 \leq t \leq 1$ 。

那么将参数和被积函数复合我们得到

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 \operatorname{Re}(1+i)t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_0^1 t \, dt = \frac{1+i}{2}.$$

(2) 我们把两条直线段分别叫做 L_1 和 L_2 , 容易 L_1 可参数化为 $z = z(t) = t$, $0 \leq t \leq 1$, 而 L_2 可参数化为 $z = z(t) = 1+ti$, $0 \leq t \leq 1$ 。因此我们有

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_{L_1} \operatorname{Re} z \, dz + \int_{L_2} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt + \int_0^1 \operatorname{Re}(1+it) \cdot i \, dt = \int_0^1 t \, dt + i \cdot \int_0^1 dt = \frac{1}{2} + i.$$

注 从上述例子可以看出 $\operatorname{Re} z$ 在不同的路径上的积分值确定不一样, 因此复积分和路径选取相关。但同时我们会指出, 这里积分和路径选取的本质原因在于 $\operatorname{Re} z$ 并非一个解析函数。而对于解析函数, 我们会论证积分和路径选取无关, 这也是本章的一个核心脉络。

复变函数的学习要时常和数学分析中的内容进行比对, 我们先来回顾一下数分中和路径积分相关的一些概念。在数分中有一个非常重要的定理: **Green 公式**, 每本教材介绍的版本不一致 而且都没有严格证明, 这里我们引用的是 Wikipedia 中的版本。

定理 4.1 (Green 公式)

设 D 是 \mathbb{R}^2 中由 **分段可微闭曲线** 围成的区域。(即 ∂D 是一个 $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ 的分段可微的闭曲线) 如果函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y) \in C^1(D)$ (即具有连续的一阶偏导), 则

$$\int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy = \iint_D (Q_x - P_y) \, dx \, dy.$$



如果默认 **Green 公式** 成立, 那么数学分析有一块知识点刻画了和积分和路径选取无关等价的性质, 我们把这块知识点称为 **四个等价**。

定理 4.2 (四个等价)

设 D 是 \mathbb{R}^2 中的单连通区域, 函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y) \in C^1(D)$, 则以下四条等价:

(1) $\forall (x, y) \in D, Q_x = P_y$.

(2) 对于 D 中任意分段可微闭曲线 γ , 有

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = 0. \quad (4.10)$$

我们把这条性质称为**闭路积分为零**。

(3) 对于 D 中任意两条分段可微曲线 γ_1 和 γ_2 , 如果它们的起点和终点对应一致, 则

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy. \quad (4.11)$$

我们把这条性质称为**积分与路径选取无关**。

(4) 存在 $f(x, y) \in C^2(D)$ (即二阶可微), 满足

$$df = Pdx + Qdy. \quad (4.12)$$

我们把这样的 f 称为 P, Q 的原函数, 把这条性质称为**原函数存在**。



证明 (1) \implies (2) 对于 D 中的分段可微闭曲线 γ , 我们分三类情况考虑:

(i) γ 其实是分段可微的**简单闭**曲线。因为 D 单连通, 因此 γ 的内部都在 D 中, 记 γ 内部为 G , 由题意在 G 中有 $Q_x = P_y$, 因此利用 **Green** 公式可知:

$$\int_{\gamma=\partial G} Pdx + Qdy = \iint_G (Q_x - P_y) dx dy = 0.$$

(ii) γ 分段可微闭曲线, 且只有**有限个自交点**, 这种情况也简单, 因为我们知道这时 γ 一定可以分拆为有限个简单闭曲线之和, 因此积分仍然为 0。

(iii) 若 γ 分段可微闭曲线, 但有**无穷个自交点**。这种情况下我们证明总是可以利用折线积分来逼近曲线积分。因为闭折线的自交点总是有限的, 因此这就回到了情况 (ii)。具体的证明可以参看下一节关于 **Cauchy-Goursat** 证明的第三部分。

(2) \implies (3) 我们令 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$, 容易看出 γ 现在是 D 中一条分段可微闭曲线, 根据 (2) 可知

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int_{\gamma_2^-} Pdx + Qdy \\ &\implies \int_{\gamma_1} Pdx + Qdy = \int_{\gamma_2} Pdx + Qdy. \end{aligned}$$

(3) \implies (4) 在 D 中取任意一条路径连接 (x_0, y_0) 和 (x, y) , 我们直接定义:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(r, s) dr + Q(r, s) ds. \quad (4.13)$$

注意到现在积分与路径选取无关, 因此上式是一个良定的函数。我们现在只需要验证有: $f_x = P$ 以及 $f_y = Q$ 。

因为积分和路径无关, 我们选择特殊路径, 首先我们先沿水平路径从 (x_0, y_0) 走到 (x, y_0) , 再沿垂直路径从 (x, y_0) 走到 (x, y) , 再这样的路径下我们有

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt.$$

那么根据导数的定义我们知道：

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_{y_0}^{y+\Delta y} Q(x, t) dt - \int_{y_0}^y Q(x, t) dt}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\int_y^{y+\Delta y} Q(x, t) dt}{\Delta y}. \end{aligned}$$

注意到 f 在区域中的连续性，利用积分中值定理，可取 $\xi \in [y, y + \Delta y]$ ，使得

$$\int_y^{y+\Delta y} Q(x, t) dt = Q(x, \xi) \Delta y.$$

和上式联立可得：

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} Q(x, \xi) = Q(x, y)$$

同样的办法，换一个先垂直再水平的路径便可证明 $f_x(x, y) = P(x, y)$ 。这就证明 f 是 P 和 Q 的原函数。

(4) \implies (1) 证明是显然的，因为 $Q_x - P_y = (f_y)_x - (f_x)_y = f_{yx} - f_{xy} = 0$ 。 \square

注 有可能 Green 公式中的“分段可微”可以替换为“可求长”，但是并没有找到相关的文献。事实上可以证明“分段可微”曲线总是可求长的，两者相差的也不多。

我们之所以重温数分中这个定理，是因为复变中也有完全对应的版本，而这构成了本章的核心内容，我们在本节中先给出定理的叙述，具体的证明将在完成 Cauchy 积分公式后方可给出。

定理 4.3 (四个等价，复变版)

设 D 是 \mathbb{C} 中的单连通区域， f 在 D 上连续，则以下四条等价：

(1) f 在 D 上解析；

(2) 对于 D 中任意可求长闭曲线 γ ，有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad \text{闭路积分为零} \quad (4.14)$$

(3) 对于 D 中任意两条可求长连续曲线 γ_1 和 γ_2 ，如果它们的起点和终点对应一致，则

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \text{积分与路径选取无关} \quad (4.15)$$

(4) 存在 D 上解析函数 F ，满足

$$F' = f, \quad \text{原函数存在} \quad (4.16)$$



(1) \implies (2) 的问题一般被单拎出来，称为 Cauchy 定理，这一步的地位相当于 Green 公式。1851 年 Riemann 在加上一个条件“ $f'(z)$ 在 D 上连续”后给出 Cauchy 定理的一个简洁漂亮的证明。而去掉这个条件的证明则是由法国数学家 Goursat 最终整理给出，因此后世一般称本定理为 Cauchy-Goursat 定理。这里给出弱化版本的证明。

定理 4.4 (弱化 Cauchy 定理 by Riemann)

设 D 为 \mathbb{C} 中的单连通区域， $f(z)$ 在 D 上解析且 $f'(z)$ 在 D 上连续，则对于 D 中任意分段可微闭曲线 γ ，

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



证明 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，由于 f' 在 D 上连续，因此 $u, v \in C^1(D)$ ，因此可以对 u, v 套用 Green 公式。再回看公式 (4.4)，我们有：

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \left(\int_{\gamma} u dx - v dy \right) + i \cdot \left(\int_{\gamma} v dx + u dy \right) \\ &\stackrel{\text{Green 公式}}{\underset{\gamma \text{ 内部为 } G}{=}} \iint_G (-v_x - u_y) dx dy + i \cdot \iint_G (u_x - v_y) dx dy \stackrel{\text{C-R 方程}}{=} 0. \end{aligned}$$



4.3 Cauchy-Goursat 定理

本章节将对 Cauchy-Goursat 定理给出具体证明，首先给出定理叙述：

定理 4.5 (Cauchy-Goursat)

设 D 为 \mathbb{C} 中的单连通区域， $f(z)$ 在 D 上解析， γ 为 D 中任意可求长闭曲线，则

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$



对比弱化版本的 Cauchy 定理我们发现只是去掉了一个条件，即 $f'(z)$ 在 D 上连续。但是正是因为拿掉了这个条件，Green 公式不再成立（真有反例），导致证明难度大幅上升。但反过来这也说明复可导和实可导差别很大，使得你可以降低条件也能得到类似的结论，这种细微的差别需要读者在学习过程中慢慢体会。

我们会将这个定理分拆成几个部分进行逐项证明：

(part1) 首先我们证明，对于 D 中的任意闭合三角形 Δ ，有 $\int_{\Delta} f(z) dz = 0$ ；

(part2) 第二步我们证明，对于 D 中的任意闭合折线（即由线段组成的闭曲线） C ，有 $\int_C f(z) dz = 0$ ；

(part3) 最后我们证明，对于 D 中的任意可求长简单闭曲线 γ ，我们都可以找到闭合折线 C ，使得 $f(z)$ 在 C 上的积分能逼近在 γ 上的积分。

命题 4.4 (Cauchy-Goursat part1)

设 D 为 \mathbb{C} 中的单连通区域， $f(z)$ 在 D 上解析， Δ 为 D 中任意闭合三角形，则

$$\int_{\Delta} f(z) dz = 0.$$

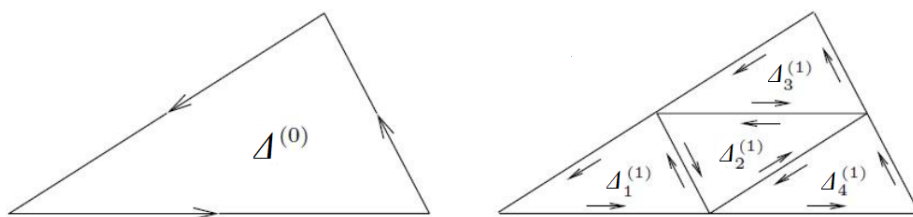


证明 这其实是 Cauchy-Goursat 中的核心步骤，如果三角形都不对，后面也就无从谈起了。设 Δ 为 D 中的任意闭合三角形，由于 Δ 是有界闭集，且可求长，故而

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \max_{z \in \Delta} |f(z)| \cdot L < +\infty \quad (4.17)$$

我们将其记作 M ，我们下面证明 $M = 0$ 。

参考下图的办法，我们逐个连接三角形的三边中点，将原始的三角形 Δ 分解成四个全等的小三角形。由于区域是单连通的，这保证了所有的小三角形以及其内部仍然在包含在 D 中



我们将原始的三角形记为 $\Delta^{(0)}$ ，而将后续的三角形记为 $\Delta_k^{(1)}$ ，注意到：

$$\int_{\Delta^{(0)}} f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\Delta_k^{(1)}} f(z) dz \implies M = \left| \int_{\Delta^{(0)}} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=1}^4 \left| \int_{\Delta_k^{(1)}} f(z) dz \right|.$$

故而总有一个小三角形，将其记作 $\Delta^{(1)}$ ，满足

$$\left| \int_{\Delta^{(1)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

如法炮制我们可以得到一系列的三角形 $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \dots$ ，它们满足以下的几条性质：

(i) 因为 D 单连通, 因此所有 $\Delta^{(n)}$ 以及其内部都在 D 中。

$$(ii) \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n};$$

(iii) 将初始三角形周长记为 L , 则 $\Delta^{(n)}$ 的周长恰为 $\frac{L}{2^n}$;

(iv) 记 $\blacktriangle^{(n)}$ 为 $\Delta^{(n)}$ 包围的带边界的实心三角形。注意到 $\blacktriangle^{(n)}$ 皆为闭集, 且依次严格嵌套, 即

$$\blacktriangle^{(0)} \supsetneq \blacktriangle^{(1)} \supsetneq \blacktriangle^{(2)} \supsetneq \dots$$

且直径趋于零, 因此 $\{\blacktriangle^{(n)}\}$ 构成一个闭集套。由闭集套原理可知最后一定能找到唯一点 z_0 使得

$$\{z_0\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \blacktriangle^{(n)}.$$

注意到 $f(z)$ 在 D 上解析, 自然在 z_0 处解析。那么根据导数的定义, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}$, 使得 $n > N$ 后都有

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon \iff |(f(z) - f(z_0)) - f'(z_0)(z - z_0)| < \epsilon |z - z_0|. \quad (4.18)$$

根据弱化版的 Cauchy 定理不难看出 (注意现在被积函数是 $C^1(D)$ 的)

$$\int_{\Delta^{(n)}} z dz = \int_{\Delta^{(n)}} dz = 0 \implies \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz = \int_{\Delta^{(n)}} [(f(z) - f(z_0)) - f'(z_0)(z - z_0)] dz. \quad (4.19)$$

以上两式结合可知

$$\frac{M}{4^n} \stackrel{\text{性质(ii)}}{\leq} \left| \int_{\Delta^{(n)}} f(z) dz \right| < \epsilon \sup_{z \in \Delta^{(n)}} |z - z_0| \cdot \frac{L}{2^n} < \frac{\epsilon L^2}{4^n}. \quad (4.20)$$

换言之我们有 $M < \epsilon L^2$, 由 ϵ 任意性, 自然 $M = 0$ 。□

命题 4.5 (Cauchy-Goursat part2)

设 D 为 \mathbb{C} 中的单连通区域, $f(z)$ 在 D 上解析, C 为 D 中任意闭合折线, 则

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

证明 定理的第二部分证明基于两个事实, 请读者自行画图验证:

(i) 若闭合折线 C 在某一点 P 处自交, 总是可以将这条折线在 P 点分解为两条在 P 处不自交的闭合折线 C_1, C_2 , 对所有的自交点重复以上步骤, 最后我们总是可以将 C 分解成若干不自交的闭合折线之和。

(ii) 若闭合折线 C 不自交, 但是在某点 Q 处曲线凹陷 (即顶点处的内角 $> \pi$), 我们从这个点出发做对应的角平分线, 可将 C 一分为二为 C_1 和 C_2 , 且后两者中的凹陷点之和严格比 C 少 1, 对所有凹陷点重复这个步骤, 最后我们总是可以把 C 分解成若干凸曲线之和。

通过上述分析我们知道我们只需对于 C 为无自交点的凸折线的情况进行证明即可, 在这种情况下 C 围成的区域是一个多边形, 我们只需从任意顶点出发向所有其他顶点连线, 不难看出这样可以将这个多边形分解成若干三角形, 而通过 part1 我们知道 $f(z)$ 在三角形上的积分为 0, 故而在凸折线上的积分也是 0, 命题即证。□

命题 4.6 (Cauchy-Goursat part3)

设 D 为 \mathbb{C} 中的单连通区域, $f(z)$ 在 D 上解析, γ 为 D 中任意可求长的闭曲线, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 D 中的闭合折线 C 使得

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| < \epsilon.$$

证明 首先我们申明可以默许 D 是一个有界区域, 若不然, 注意到 γ 可求长故而 γ 总是包含在一个开圆盘 B 中的, 我们取 $B \cap D$ 来讨论即可。

我们要找到满足条件的闭合折线, 自然的想法是在 γ 上直接取若干分点 z_k 连接构成这样的折线。但因为 D 并非凸集, 这样的折线中间的部分可能会超出 D 的区域范围, 但是直观上, 只要我们的分点取得“足够密”, 这

样的事情是可以避免的。事实上我们将构造一个开集 D_1 满足 $\gamma \subset \overline{D_1} \subset D$ 同时还能再取分点 z_k 使得其对应的折线 $C \subset \overline{D_1}$ 。

D_1 的构造是有技巧性的，可以从两方面来理解。首先我们称 γ 围成的区域为 G ，记 $\overline{G} = G \cup \gamma$ ，我们知道 $\overline{G} \subset D$ ，而复平面是正规空间，故而必然存在开集 V 满足 $\overline{G} \subset V \subset \overline{V} \subset D$ ，取 $D_1 = V$ 即可。

进一步，考虑到 γ 和 ∂D 是两个不相交的闭集，这说明一定存在 $\rho > 0$ 使得 $d(\gamma, \partial D) = 2\rho > 0$ ，那么我们取

$$D_1 = \{z \mid d(z, \gamma) < \rho\}. \quad (4.21)$$

那么一定有 $\gamma \subset D_1 \subset \overline{D_1} \subset D$ 。这样的 D_1 一般称为 γ 的 ρ -管状邻域。

接下来我们来确定分点的取法。因为 $\overline{D_1} \subset D$ 是有界闭集（即紧），而 $f(z)$ 在 D 上连续，故而一定在 $\overline{D_1}$ 上一致连续，假设 γ 长度为 L ，那么 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ ，使得

$$\forall z', z'' \in \overline{D_1}, \text{ 满足只要 } |z' - z''| < \delta, \text{ 都有 } |f(z') - f(z'')| < \frac{\epsilon}{2L}. \quad (4.22)$$

约定一下记号，我们假设在 γ 上取好 n 个分点 z_0, z_1, \dots, z_{n-1} ，约定好 $z_n = z_0$ （闭曲线头尾相连），我们将 z_k 和 z_{k+1} 落在 γ 上的弧记为 γ_k ，将两者之间的线段记为 $C_k, k = 0, \dots, n-1$ 。我们可以取 n 足够大使得

$$\max_{k=0, \dots, n-1} |r_k| < \min(\rho, \delta). \quad (4.23)$$

那么一定有 $C_k \subset \overline{D_1}$ ，因为根据定义

$$z_k \in \gamma \implies z_{k+1} \in B_{|r_k|}(z_k) \subset B_\rho(z_k) \subset D_1, \quad \forall k = 0, \dots, n-1. \quad (4.24)$$

最后令 $C = C_0 + \dots + C_{n-1}$ ，现在一定有 $\gamma \subset \overline{D_1}$ 且 $C \subset \overline{D_1}$ ，下面验证 C 满足要求即可，直接计算：

$$\left| \int_\gamma f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{C_k} f(z) dz \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\gamma_k} f(z) dz - \int_{C_k} f(z) dz \right|. \quad (4.25)$$

这里我们用一个技巧

$$\int_{\gamma_k} f(z_k) dz = \int_{C_k} f(z_k) dz = f(z_k)(z_{k+1} - z_k), \quad \forall k = 0, \dots, n-1. \quad (4.26)$$

上式成立因为积的是常数，积分和路径无关。那么两式结合我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{\gamma_k} [f(z) - f(z_k)] dz - \int_{C_k} [f(z) - f(z_k)] dz \right| \\ &\stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{z \in \gamma_k} |f(z) - f(z_k)| \cdot |\gamma_k| + \sum_{k=0}^{n-1} \sup_{z \in C_k} |f(z) - f(z_k)| \cdot |C_k| \\ &\stackrel{4.22}{\leq} \frac{\epsilon}{2L} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_k| + \frac{\epsilon}{2L} \sum_{k=0}^{n-1} |C_k| \leq \frac{\epsilon}{2L} (|\gamma| + |C|) < \epsilon. \end{aligned}$$

故而命题得证。 \square

综合 Cauchy-Goursat 的三个部分证明，我们最终证明了定理 4.5。

Cauchy-Goursat 有一个常用的推广，比原始定理本身见到的次数更多：

推论 4.1 (Cauchy-Goursat 边界推广版)

设 γ 为复平面上可求长的简单闭曲线，记 D 为 γ 围成的区域，若 $f(z)$ 在 D 上解析且在 γ 上连续，则有

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$



注 容易看出这个版本弱化了函数在边界上的条件，在分析学上这一类的条件一般被称为“内部 xx 连续到边”，常见于 PDE 等课程。

证明 事实上证明思路依然是在 D 中再取一条曲线 γ' ，根据 Cauchy-Goursat 我们知道 $f(z)$ 在 γ' 上的积分为 0，最后说明 γ' 的积分能够趋近于 γ 的积分即可。然而对于一般的曲线这样的 γ' 不好说明（虽然直观上就是把 γ “往里缩一圈”），我们这里对于 γ 是圆周 $C_R(a)$ 的情况进行说明，因为后续也基本只对圆周使用。

假设 $\gamma = C_R(a)$, 依题意 $D = B_R(a)$, 那么对于 $0 < r < R$, 我们取 $\gamma' = C_r(a)$, 显然 $\gamma' \subset D$, 根据原始的 Cauchy-Goursat 我们有 $\int_{\gamma'} f(z)dz \stackrel{\text{极坐标}}{z=re^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0$, 进而

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\gamma'} f(z)dz (=0) \right| = \left| \int_0^{2\pi} R(f(Re^{i\theta}) - f(re^{i\theta}))e^{i\theta}d\theta \right| \leq 2\pi R \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f(Re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|$$

注意到 $f(z)$ 连续到边, 因此 $f(z)$ 在 $\overline{D} = \overline{B_R(a)}$ 上一致连续, 因此 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得只要 $z', z'' \in \overline{B_R(a)}$ 满足只要 $|z' - z''| < \delta$, 就有 $|f(z') - f(z'')| < \frac{\epsilon}{2\pi R}$, 容易看出我们只需取 r 使得 $|R - r| < \delta$, 就有 $|Re^{i\theta} - re^{i\theta}| < \delta$, 带入上式得到

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\gamma'} f(z)dz \right| < 2\pi R \cdot \frac{\epsilon}{2\pi R} = \epsilon.$$

故而命题得证。□

Cauchy-Goursat 的另外一个推广是在多连通区域上的, 在定理叙述前我们先给出以下定义:

定义 4.2 (Jordan 曲线族)

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^- \quad (4.27)$$

被称为一个 (可求长的) Jordan 曲线族, 如果其满足以下条件:

- (i) 所有的 $n+1$ 条曲线均为 (可求长) Jordan 曲线;
- (ii) 记 G_k 为 γ_k 围成的区域, 一定有 $\overline{G_k} \subset G_0, 1 \leq k \leq n$;
- (iii) $\overline{G_i} \cap \overline{G_j} = \emptyset, 1 \leq i, j \leq n$.

我们称 D 是由 Jordan 曲线族 γ 围出的区域, 若 $D = G_0 \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{G_k}$, 我们把这样的 D 称为多连通区域。



注 对于曲线族而言, 各条曲线的定向不由参数的方向来决定, 我们约定 γ 的定向和平面区域定向是相容的, 即当你在曲线上行进时, 区域始终在你的左边。我超民科!但是目前也没有其他更好的解释 在这样的约定下, 外圈和内圈的定向自然会相反。

推论 4.2 (Cauchy-Goursat 多连通区域版)

设 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^-$ 为可求长 Jordan 曲线族, 围出区域为 D , 若 f 在 D 上解析, 在 \overline{D} 上连续, 则

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \iff \int_{\gamma_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz. \quad (4.28)$$



证明 我们只对 $n=1$, 也就是 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^-$ 的情况进行证明, 一般的情况可以归纳。

这里的技巧我们称之为搭桥法。我们在内圈和外圈上各任取一点 a, b , 连接一条路径 l (假设从 a 到 b), 我们容易看出 $D \setminus l$ 事实上变成了一个单连通区域, 而且 $D \setminus l$ 对应的边界恰好是 (从 a 出发来看)

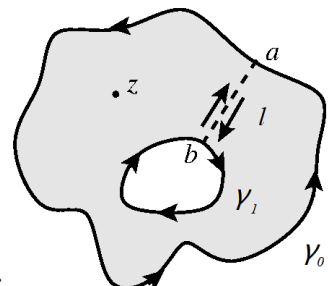
$$\partial(D \setminus l) = l + \gamma_0 + l^- + \gamma_1^- \quad (4.29)$$

而 $f(z)$ 当然也在 $D \setminus l$ 上解析, 因此根据 Cauchy-Goursat 定理我们知道有

$$\int_{\partial(D \setminus l)} f(z)dz = 0 \implies \int_l f(z)dz + \int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{l^-} f(z)dz + \int_{\gamma_1^-} f(z)dz = 0 \quad (4.30)$$

故而命题得证。□

注 Cauchy-Goursat 的多连通区域版的结论用几何语言概括的话就是: 如果函数在“外圈”和“内圈”中间的部分解析, 那么函数在“外圈”的积分就等于在所有“内圈”的积分之和。这就是说在条件允许下, 我们可以把积分区域向内缩, 因为这个版本的 Cauchy-Goursat 经常被称为闭路连续形变原理。常见于各类工科教材



4.4 Cauchy 积分公式和值分布理论

4.4.1 Cauchy 积分公式

通过上一节的学习我们知道, 如果函数在区域上解析, 则在区域内的路径上积分一定是 0, 这反过来也说明了积分理论对于解析函数是没有意义的。但是一旦函数在区域内有个别点是不解析的, 那么这样的积分就有意思了。我们先从一个例子说起, 这是复变函数里的第一个积分公式, 某种意义上也是“唯一”的那个积分公式, 由它可以推导 Cauchy 积分公式, 从而揭示复积分的本质。

命题 4.7 (第一个积分公式)

设 C 为包围 z_0 的任意可求长 Jordan 曲线, 而 $n \in \mathbb{Z}$, 证明:

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (4.31)$$

证明 我们先对 $C = C_r(z_0)$ 证明命题成立, 这里 $\forall r > 0$, 我们采用极坐标

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{dz}{(z - z_0)^n} \stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{ir e^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}} d\theta = ir^{n-1} \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)\theta} d\theta. \quad (4.32)$$

自然要分两种情况讨论:

$$(i) \ n = 1 \implies \text{积分} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i;$$

$$(ii) \ n \neq 1 \implies \text{积分} = \frac{1}{n-1} e^{i(n-1)\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

现在回到题目, 对应于一般的 C , 因为 C 可求长且包围 z_0 , 故而总是包含于一个半径足够大的 $B_r(z_0)$ 之中, 那么取 $\gamma = C_r(z_0) + C^-$, 对 γ 运用闭路连续形变原理, 可知

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \implies \int_C f(z) dz = \int_{C_r(z_0)} f(z) dz.$$

故而命题得证。□

注 上述积分被称为复变函数第一个积分公式 我自己起的名字, 它表明 $\frac{1}{z}$ 这个函数对于积分理论天生就是“有反骨”的。这个公式有一个非常漂亮但是不严谨的理解方式 (因为涉及到原函数理论, 但非解析的函数事实上无法定义原函数, 所以以下推演只能视作某种规律)

$$\int_C \frac{1}{z} dz \stackrel{\text{胡说八道}}{=} \text{Ln}(z - z_0) \Big|_{\text{起点}}^{\text{终点}} = i\Delta_C \text{Arg } z = 2\pi i. \quad (4.33)$$

这里“起点”和“终点”可以指 C 上的任何一点, 因为是闭曲线自然起点 = 终点, 但是辐角“多走了一圈”, 这就是答案中“ 2π ”的来历, 而对于其他的 n , 因为原函数也是整数幂次, 自然积分就是零了。通过以上叙述不难看出, $\text{Arg } z$ 这个多值函数正是复积分理论的“万恶之源”。

如果说 Cauchy-Goursat 告诉我们, 研究解析的函数的积分是无意义的, 纯纯拔草子家人们, 那么以下定理则揭示复积分真正的意义。

定理 4.6 (Cauchy 积分公式)

设 C 为复平面上任意可求长 Jordan 曲线, D 为其内部区域, 设 $f(z)$ 在 D 上解析, 在 \bar{D} 上连续, 则事实上 $f(z)$ 在 D 有任意阶的连续导数, 并且 $\forall z_0 \in D, \forall n \in \mathbb{N}$, 有以下公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (4.34)$$

特别地, 取 $n = 0$, 我们得到

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4.35)$$

注 有时候为了区分细节, 我们把公式 (4.35) 称为 Cauchy 积分公式, 而把 (4.34) 称为高阶 Cauchy 积分公式。

证明 (1) 我们先证明公式 (4.35), 对于 $\forall z_0 \in D$, 利用函数在 D 中的连续性可知, 对于 $\forall \epsilon > 0$, 总是 $\exists \delta > 0$, 使得我们可以取一个小圈 $C_\delta(z_0) \subset D$ 使得 $\forall z \in C_\delta(z_0)$, 都有 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ 。

因为 $C_\delta(z_0) \subset D$, 故而我们取 $G = D \setminus \overline{B}_\delta(z_0)$, 我们知道 $\frac{f(z)}{z - z_0}$ 在 G 上解析, 在 \overline{G} 上连通, 因此根据闭路连续形变原理, 我们有

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (4.36)$$

再加之有

$$\int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{C_\delta(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz. \quad (4.37)$$

以上两个式子结合可知

$$\left| f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_\delta(z_0)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \frac{1}{2\pi\delta} \cdot \epsilon \cdot 2\pi\delta = \epsilon. \quad (4.38)$$

这就证明了零阶的 Cauchy 积分公式。

(2) 我们用数学归纳法处理高阶公式, 假设我们已经得到了 $n = k$ 的公式, 我们要证明 $k+1$ 对应的公式。首先提醒一下读者目前还没有任何证据表明 $f^{(k+1)}(z_0)$ 存在, 因此我们从极限的定义开始写

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} \quad (4.39)$$

下面证明这个极限存在且收敛于 $\frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz$, 首先根据归纳我们知道

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad f^{(k)}(z_0 + \Delta z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \Delta z)^{k+1}} dz.$$

统统带入公式 (4.39), 我们得到

$$\frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{(z - z_0)^{k+1} - (z - z_0 - \Delta z)^{k+1}}{(z - z_0)^{k+1}(z - z_0 - \Delta z)^{k+1}} f(z) dz. \quad (4.40)$$

我们把 $z - z_0$ 理解为 $(z - z_0 - \Delta z) + \Delta z$, 利用 $(a+b)^{k+1}$ 的展开式我们得到:

$$(z - z_0)^{k+1} - (z - z_0 - \Delta z)^{k+1} = (k+1)(z - z_0 - \Delta z)^k \Delta z + O((\Delta z)^2). \quad (4.41)$$

带回 (4.40) 得到

$$\frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} = \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) + O(\Delta z)}{(z - z_0)^{k+1}(z - z_0 - \Delta z)} dz.$$

那么和零阶的情况类似最后我们作差就可以了, 具体来说有

$$\begin{aligned} \text{差} &= \left| \frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} - \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz \right| \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \left| \int_C \frac{(z - z_0)(f(z) + O(\Delta z)) - (z - z_0 - \Delta z)f(z)}{(z - z_0)^{k+2}(z - z_0 - \Delta z)} dz \right| \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \left| \int_C \frac{\Delta z \cdot f(z) + O(\Delta z)(z - z_0)}{(z - z_0)^{k+2}(z - z_0 - \Delta z)} dz \right| \end{aligned} \quad (4.42)$$

那我们只需要像 (1) 中一样取合适的 $\delta > 0$, 使得在 $C_\delta(z_0)$ 上都有 $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ 。注意这里 Δz 本质上是一个独立于 $\epsilon - \delta$ 的量, 因此我们先要求 $|\Delta z| < \frac{\delta}{2}$, 这样就有

$$|z - z_0 - \Delta z| \stackrel{\text{三角不等式}}{\geq} |z - z_0| - |\Delta z| > \frac{\delta}{2}, \quad \forall z \in C_\delta(z_0). \quad (4.43)$$

同时在 $C_\delta(z_0)$ 上 (紧集) 自然有 $|f(z)| \leq M$, 以及 $|z - z_0| = \delta$, 统统带入 (4.42) 中, 得到估计:

$$\text{差} \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \frac{(k+1)!}{2\pi} \cdot 2\pi\delta \cdot \left[\frac{2M|\Delta z|}{\delta^{k+3}} + \frac{2|O(\Delta z)|}{\delta^{k+2}} \right] = 2(k+1)! \left[\frac{M|\Delta z|}{\delta^{k+2}} + \frac{|O(\Delta z)|}{\delta^{k+1}} \right] \quad (4.44)$$

最后别忘了 Δz 跟 $\epsilon - \delta$ 无关, 我们最后令 $\Delta z \rightarrow 0$ 就证明了

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(z_0 + \Delta z) - f^{(k)}(z_0)}{\Delta z} \text{ 存在且等于 } \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+2}} dz.$$

根据数学归纳法, 我们证明了 Cauchy 公式的高阶版本。□

推论 4.3 (解析即光滑)

设 D 为复平面区域, 则 f 在 D 上解析的充要条件是 $f \in C^\infty(D)$ 。



证明 $\forall z_0 \in D$, 可做 $B_r(z_0)$ 使得 $\overline{B_r(z_0)} \subset D$ 中, 利用 Cauchy 积分公式可知 f 在 $B_r(z_0)$ 中有任意阶导数, 因此 f 在 z_0 处任意阶可导, 根据 z_0 的任意性可知 $f \in C^\infty(D)$ 。□

注 事实上 Cauchy 高阶积分公式有一种便捷的记忆方法, 假设 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处有 Taylor 展开 (当然目前还不清楚展开的存在性, 事实上在第五章我们会证明这条对于解析函数是正确的)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

那么带入公式 (4.34) 我们知道右边等于

$$I = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1-k}} dz.$$

再假设积分与求和可换 这位更是歌姬, 我们发现只有一项的积分非零, 即 $n = k$ 时, 因此我们有:

$$I = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \frac{1}{z - z_0} dz = f^{(n)}(z_0).$$

当然这里必须强调, 这只是一个记忆方式, 切勿将其当做证明, 事实上我们正是通过 Cauchy 积分公式才得到了解析函数的 Taylor 展开, 切勿倒反天罡。

注 另外一个记忆方式来源于一些课本会把零阶的 Cauchy 积分写成如下形式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (4.45)$$

这么写的好处在于我们可以对两边求导, 并假设求导和积分可换 (注意, 并没有证明过), 则

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)'} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw. \quad (4.46)$$

继续求导后就不难得到高阶公式了。

正如 Cauchy-Goursat 定理有一个对应的 Jordan 曲线族围成的多连通区域版本, Cauchy 积分公式也有对应的版本, 这个版本是下一章证明 Laurent 定理的基础。

推论 4.4 (Cauchy 积分公式多连通区域版)

设 $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1^- + \cdots + \gamma_n^-$ 为可求长 Jordan 曲线族, 围出区域为 D , 若 f 在 D 上解析, 在 \overline{D} 上连续, 则对 $\forall z_0 \in D, \forall n \in \mathbb{N}$, 有以下公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right]. \quad (4.47)$$

特别地, 取 $n = 0$, 我们得到

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_0} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right]. \quad (4.48)$$



请读者自行完成证明。Cauchy 积分公式最基本的用途是用来计算一些积分:

例题 4.2 设 C 为取正定向的圆周 $|z| = 2$, 计算 $\int_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$

解 (方法一 **不推荐**) 我们希望分母一次只处理一个因子, 因此尝试直接拆分分母

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)^2} &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z} \\ \Rightarrow \text{积分} &= \int_C \frac{e^z}{(z-1)^2} dz - \int_C \frac{e^z}{z-1} dz + \int_C \frac{e^z}{z} dz.\end{aligned}$$

现在逆用 Cauchy 积分公式, 令 $f(z) = e^z$, 可知

$$\int_C \frac{e^z}{z-a} dz = 2\pi i e^a \quad \int_C \frac{e^z}{(z-a)^2} dz = 2\pi i (e^z)'|_{z=a} = 2\pi i e^a$$

带入化简可知积分 $= 2\pi i$ 。

(方法二 **推荐**) 我们知道被积函数在 $z=0$ 和 $z=1$ 处皆不可导, 而且这两个点都在积分曲线的内部。利用闭路连续形变原理, 我们在 $z=0$ 和 $z=1$ 处各做一个小圆 C_0 和 C_1 隔开 0 和 1, 这样我们得到:

$$\text{积分} = \int_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz \xrightarrow{\text{闭路形变原理}} \int_{C_0} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz + \int_{C_1} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$$

现在注意到

$$\int_{C_0} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz = \int_{C_0} \frac{e^z/(z-1)^2}{z} dz$$

因为 $\frac{e^z}{(z-1)^2}$ 在小圆 C_0 内部其实是解析的 (1 被隔开了), 因此我们对上式用一下 Cauchy 积分公式可知在 C_0

上积分为 $= 2\pi i \frac{e^z}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} = 2\pi i$ 。

那么同理我们就有

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz = \int_{C_1} \frac{e^z/z}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{e^z}{z} \right)' \Big|_{z=1} = 2\pi i \cdot \frac{ze^z - e^z}{z^2} \Big|_{z=1} = 0.$$

因此最后一样算得积分 $= 2\pi i$ 。 □

注 到了第七章我们会学习另外一种等价的办法: 留数, 计算会变得更加简洁。

4.4.2 解析函数的值分布理论

从 Cauchy 积分公式出发, 我们将推导一系列和解析函数的值域相关的命题, 这些命题统称为**解析函数值分布理论**。它们从各个角度说明了复解析函数的值域受到了各种限制, 因此不能随意指派函数值来生成复解析函数, 从这里开始复函数和实函数算是彻底分家了。

这其中名气最大的要算是 Liouville 定理, 在证明之前我们先验证一个引理, 它本身也是值分布型的定理, 说明了**函数的界会控制导数的界**。

引理 4.1 (Cauchy 估值)

设 D 为复平面区域, 我们称 $f(z)$ 在 D 上有界, 若 $\exists M > 0$, 使 $|f(z)| \leq M, \forall z \in D$ 。

若 $f(z)$ 在 $|z-a| < R$ 上解析且 $|f(z)| \leq M$, 则

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}. \quad (4.49)$$

证明 取小圆 $C_r(a)$, 其中 $r < R$, 我们知道该小圆仍在 $|z-a| < R$ 中, 且由 Cauchy 积分公式我们有:

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}. \quad (4.50)$$

我们知道这件事对所有 $r < R$ 皆成立, 因此令 $r \rightarrow R$ 即可。 □

利用 Cauchy 不等式我们可以得到如下 Liouville 定理

定理 4.7 (Liouville)

若 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上解析且有界, 则 $f(z)$ 必为常值函数。 ♡

证明 对于任意 $R > 0$, 以及任意的 $z_0 \in \mathbb{C}$, 取 $B_R(z_0)$ 以及对应的边界 $C_R(z_0)$, 我们知道 $f(z)$ 在 $B_R(z_0)$ 中解析且有界, 不妨设 $|f(z)| \leq M$, 根据 Cauchy 不等式, 有

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \quad (4.51)$$

由于上式对于所有 $R > 0$ 皆成立, 我们知道只能有 $f'(z_0) = 0$, 而由于这条也对所有 $z_0 \in \mathbb{C}$ 成立, 最终迫使 $f(z)$ 为常值函数。□

注 Liouville 定理有诸多变式, 比较出名的是所谓半 Liouville 定理以及高阶 Liouville 定理, 这里我们给出定理, 请读者自行完成证明。(大部分证明都是基于 Liouville 原始版)

命题 4.8 (半 Liouville 定理)

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 \mathbb{C} 上解析, 证明: 只需要 $u(x, y)$ 或者 $v(x, y)$ 中任意一个在 \mathbb{R}^2 上有上界或者下界, $f(z)$ 就只能是常值函数。

命题 4.9 (高阶 Liouville 定理)

设 $f(z)$ 在 \mathbb{C} 上解析, 且 $\forall z \in \mathbb{C}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} \in \mathbb{C}$$

证明: $f(z)$ 是一个阶数不超过 n 的多项式。

Liouville 定理的一个直接应用是用于证明代数学基本定理——复系数一元多项式方程在复数域上至少有一个根。代数学基本定理的首次严格证明是由德国数学家 Gauss 在他的博士论文《每个单变量的整有理代数函数均可分解为一次和二次实因式积的新证明》中给出的, 该论文发表于 1799 年。

尽管代数基本定理的名称中包含“代数”, 但至今尚未有纯代数方法的证明。代数学魅力时刻 不过, 存在多种其他方法的证明, 如 复分析证明、拓扑学证明等, 据统计现在已经有超过 200 多种证法。

定理 4.8 (代数学基本定理 / 第一证: Liouville)

复系数一元多项式方程在复数域上至少有一个根。

证明 [利用 Liouville 定理] 设 $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, 其中 $a_k \in \mathbb{C}$.

我们采用反证, 假设 $p(z)$ 在复数域上无根, 这说明 $g(z) = \frac{1}{p(z)}$ 在全平面解析, 因为 $g'(z) = -\frac{p'(z)}{p^2(z)}$ 。

另一方面由于 $p(z)$ 无根, 因此存在 $\delta > 0$, 使得 $|p(z)| \geq \delta, \forall z \in \mathbb{C}$, 这说明 $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta}$, 也就说 $g(z)$ 在复平面上有界。那么根据 Liouville, $g(z)$ 必须为常值函数, 因此 $p(z)$ 也是常值函数, 这就矛盾了。□

注 代数学基本定理的等价表述是: 任何复系数 n 阶多项式在复数域上都恰好有 n 个根。(记重数)

这是因为通过原版证明我们知道至少有一个根, 记为 z_1 , 由于 $p(z)$ 为多项式, 因此一定有 $z - z_1 \mid p(z)$, 换言之一定有一个 $n - 1$ 阶多项式 $q(z)$ 使得 $p(z) = (z - z_1)q(z)$ 。这件事情可以一直做下去直到多项式降为常数, 因此我们知道 $p(z)$ 恰好可以被分解 n 个一次式的乘积, 也就说恰有 n 个根。

代数学基本定理在本讲义中一共会被证明多次, 每次都会对应一种不同的办法。

4.5 四个等价的证明

读者应该还记得在之前的章节我们曾经提到过复变版本的四个等价定理, 现在需要的工具已经齐全, 我们可以着手证明了。首先我们复述一下定理:

定理 4.9 (四个等价, 复变版)

设 D 是 \mathbb{C} 中的单连通区域, f 在 D 上连续, 则以下四条等价:

(1) f 在 D 上解析;

(2) 对于 D 中任意可求长闭曲线 γ , 有

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad \text{闭路积分为零} \quad (4.52)$$

(3) 对于 D 中任意两条可求长连续曲线 γ_1 和 γ_2 , 如果它们的起点和终点对应一致, 则

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \text{积分与路径选取无关} \quad (4.53)$$

(4) 存在 D 上解析函数 F , 满足

$$F' = f, \quad \text{原函数存在} \quad (4.54)$$



证明 (1) \implies (2) 此即 Cauchy-Goursat 定理。

(2) \implies (3) 我们令 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2^-$, 容易看出 γ 现在是 D 中一条可求长闭曲线, 根据 (2) 可知

$$0 = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2^-} f(z) dz \implies \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

(3) \implies (4) 在 D 中取任意路径连接点 z_0 和 z , 我们定义

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z f(w) dw. \quad (4.55)$$

注意到现在积分和路径选取无关, 因此 F 是良定的, 下证 $F' = f$ 。当然我们还不知道 F 是否可导, 因此严格按照导数定义有

$$F'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_z^{z+\Delta z} f(w) dw}{\Delta z}.$$

同时我们也知道有 $f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) dw$, 因此要证 $F' = f$, 相当于论证:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\int_z^{z+\Delta z} [f(z) - f(w)] dw}{\Delta z} = 0.$$

注意到 f 在 D 上连续, 故而对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $|z - w| < \delta$ 后, 有 $|f(z) - f(w)| < \epsilon$, 那我们知道 $|z - w| < |\Delta z|$, 因此只需要令 $|\Delta z| < \delta$ 即可, 这么一来:

$$\left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(z) - f(w)] dw \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \frac{|\Delta z|}{|\Delta z|} \epsilon < \epsilon.$$

这也就证明了 $F' = f$ 。

(4) \implies (1) 根据推论 4.3 可知, 由于 $F(z)$ 在 D 上解析, 故而 $F(z)$ 在 D 上光滑, 且根据 $F' = f$ 可知 f 亦在 D 上光滑, 故而 f 在 D 上解析。 \square

注 (2) \implies (3) \implies (4) \implies (1) 的过程通常被称为 Morera 定理, 它是 Cauchy-Goursat 的逆命题。至此我们证明了函数在区域上解析的三个充要条件, 我们将其整理如下:

命题 4.10 (解析函数的三个等价描述)

设 D 为复平面区域, $f(z)$ 在 D 上解析的充要条件是

(1) $f(z)$ 的实部虚部在 D 上可微且满足 Cauchy-Riemann 方程; (w.r.t. Cauchy-Riemann 定理)

(2) 对于 D 的任意可求长闭曲线 γ , 有 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$; (w.r.t. Cauchy-Goursat / Morera 定理)

(3) $f(z) \in C^\infty(D)$; (w.r.t. Cauchy 积分公式)



4.6 调和函数

我们在 PDE 的课程中会接触到一类特殊的实函数：调和函数，它是指在平面区域上满足 Laplace 方程的函数。本章节会指出：实调和函数的本质是复解析函数对应的实部或者虚部。

定义 4.3

我们称二元实函数 $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个调和函数，若 $f \in C^2(D)$ 且满足 Laplace 方程

$$\Delta f \triangleq f_{xx} + f_{yy} = 0. \quad (4.56)$$

注意这里的 Δ 读作“Laplacian”，也被称为 Laplace 算子。

以下定理揭示了实二元调和函数和复解析函数之间的关系：

定理 4.10 (解析函数 \Leftrightarrow 调和函数 part1)

若 $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 在 D 上解析，则 f 的实部 $u(x, y)$ 和虚部 $v(x, y)$ 都是 D 上的调和函数；

证明 (1) 根据推论 4.3，我们知道 f 在 D 上解析，则自动在 D 上光滑，故而它对应的实部和虚部也都在 D 上光滑， C^2 的要求自然不成问题，其次根据 Cauchy-Riemann 方程 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (u_x)_x + (u_y)_y = (v_y)_x - (v_x)_y = 0.$$

因此 u 为 D 上的调和函数，同理 v 也是。

通过上述定理我们可以得到一个概念：共轭调和函数

定义 4.4

我们称 $v(x, y)$ 在 D 上是调和函数 $u(x, y)$ 的共轭调和函数，如果 $u + iv$ 是 D 上的一个解析函数。

定理 4.11 (解析函数 \Leftrightarrow 调和函数 part2)

若 $u: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是 D 上的调和函数，则在相差一个常数的意义下存在唯一的 D 上的复解析函数 f 使得 $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ 。

证明 我们只需证明 u 的共轭调和函数在相差一个常数的意义下存在唯一。根据定义 u 和 v 需要满足 Cauchy-Riemann 方程 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ ，因此我们总是可以通过以下方式求解 $v(x, y)$ ：

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_x(r, s) dr + v_y(r, s) ds = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y(r, s) dr + u_x(r, s) ds. \quad (4.57)$$

注意到上式事实上与道路选取无关，因为我们总是有 $(u_x)_x - (-u_y)_y = \Delta u = 0$ （相当于在验证 $Q_x - P_y = 0$ ），因此上式是良定的，而 $v(x_0, y_0)$ 可以任意赋值，因此我们在相差一个常数的意义解出了唯一的 $v(x, y)$ ，那么自然 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在相差一个常数下被唯一确定。□

注 本章节的这两个定理说明了解析函数的信息事实上被实部或者虚部直接决定了，这从侧面说明了所有解析函数的性质和调和函数的性质应该是一致的。

举个例子，我们现在知道解析函数一定是光滑函数，那么这侧面说明了调和函数也一定是光滑函数，要知道这一点不通过复变函数是非常难以验证的。

在 PDE 的后续学习中应该会遇到平均值公式、Hanack 不等式以及极值原理，事实上它们在复变函数中的对应就是复变版的平均值公式、Cauchy 不等式以及最大模原理。一般来说复变这边的证明通常要便捷一些，请在后续的学习过程中结合两门课程内容自行体会。

例题 4.3 验证 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ 为调和函数, 并求解析函数 f 满足 $\operatorname{Re} f = u$ 以及 $f(0) = i$.

解 首先根据 $u_{xx} = (3x^2 - 3y^2)_x = 6x$, $u_{yy} = (-6xy)_y = -6x$, 故而 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, 即 u 调和。下面我们两种办法求解 f :

(办法一): 我们来求 u 的共轭调和函数 v , 利用 C-R 方程可知, v 需要满足
$$\begin{cases} v_x = -u_y = 6xy \\ v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2. \end{cases}$$

对第一式两边关于 x 积分得: $v(x, y) = 3x^2y + \phi(y)$, 其中 ϕ 是只依赖 y 的一个函数 (不是常数!)

对上式两边关于 y 求导得到: $v_y = 3x^2 + \phi'$, 和 C-R 方程中的第二式比较可知: $\phi' = -3y^2 \implies \phi(y) = -y^3 + C$. 综上可知 u 对应的共轭调和函数为 $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + C$, 其中 C 为任意常数。

于是满足条件的 f 形如 $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + C = z^3 + C$, 最后根据条件 $f(0) = i \implies C = i$, 故而 $f(z) = z^3 + i$.

(办法二): 聪明的读者应该已经意识到了, 我们是可以绕过 v 直接求 f 的, 回忆求导公式 (四个!), 其中有一项是 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此我们可以直接求出 $f'(z)$, 具体来说:

$$f'(z) = u_x - iu_y = (3x^2 - 3y^2) - i(-6xy) = 3[(x^2 - y^2) + i \cdot 2xy] = 3z^2 \implies f(z) = z^3 + C.$$

最后根据 $f(0) = i$ 一样可得 $f(z) = z^3 + i$. □

4.7 最大模原理和 Schwarz 引理

4.7.1 最大模原理

本节的一个主要的目的是学习并证明最大模原理, 它是解析函数值分布理论中的重要结论。

定理 4.12 (最大模原理)

若 $f(z)$ 在区域 D 上解析且非常值函数, 则 $|f(z)|$ 无法在 D 中取到最大值, 换言之, 不存在这样的 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) = \sup_{z \in D} |f(z)|$.

为了证明最大模原理, 我们需要应用以下的结论, 通常它被称之为平均值公式。

引理 4.2 (平均值公式)

若 $f(z)$ 在 $B_R(z_0)$ 上解析, 则有:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad \forall 0 < r < R \quad (4.58)$$

证明 [平均值公式的证明] 对于 $0 < r < R$, 我们取圆周 $C_r(z_0)$ 并在其上运用 Cauchy 积分公式, 可得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

利用极坐标, 对于 $C_r(z_0)$ 上的每一点 z , 我们有

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad dz = ire^{i\theta} d\theta$$

带入上式直接计算可知:

$$f(z_0) \stackrel{\text{极坐标}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

□

注 平均值公式说明了在圆盘的每一个圈上, 函数积分的平均值都要等于圆心的值。

平均值公式在直观上说明了, 解析函数在圆心处的模长不能处于其周围的点的峰值或者谷底。

证明 [最大模原理的证明] 首先不妨设 $\sup_{z \in D} |f(z)| = M < +\infty$, 不然就不用证了, 反正无穷大也取不到。我

们把区域 D 拆解成以下两个集合：

$$D_1 = \{z \in D \mid |f(z)| < M\}, \quad D_2 = \{z \in D \mid |f(z)| = M\}. \quad (4.59)$$

根据 M 的定义 $D = D_1 \cup D_2$ ，并且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ，同时因为 f 是连续的，因此很明显 D_1 是开集，我们下面论述 D_2 也是开集。

不妨设 D_2 非空（当然空集也是开集）。若 D_2 非空，对于其中的某点 z_0 ，有 $|f(z_0)| = M$ ，而 D 是开集，我们可以取到 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(z_0) \subset D$ ，根据平均值公式，有

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \quad \forall 0 < r < \delta$$

对上式运用模长不等式，得到

$$M = |f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta \implies \int_0^{2\pi} [M - |f(z_0 + re^{i\theta})|] d\theta \leq 0 \quad (4.60)$$

但同时根据 M 的定义又有 $M - |f(z_0 + re^{i\theta})| \geq 0$ 。对非负函数积分得到一个非正数的唯一可能是被积函数恒为 0，因此我们得到

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| \equiv M, \quad \forall 0 < r < \delta \quad (4.61)$$

那么换句话，这就验证了 $B_\delta(z_0) \subset D_2$ ，由 z_0 的任意性可知 D_2 是开集。

现在回到 D_1 和 D_2 的设定，我们知道 D 被分成两个不交的开集 D_1 和 D_2 ，根据区域 D 的连通性，我们知道只有可能是 $D_1 = \emptyset, D_2 = D$ 或者 $D_1 = D, D_2 = \emptyset$ 。前者对应于 f 是一个常值函数，不合题意，因此一定有 $D_2 = \emptyset$ ，这就证明了最大模原理。 \square

注 4.4 小节里提到的 Liouville 定理以及本节的平均值公式和最大模原理都属于解析函数的值分布理论。它们在不同的意义上都说明了复平面上的解析函数的取值不可以“随心所欲”，这点和实函数有着天渊之别。

作为应用，我们来运用最大模定理重新给代数学基本定理一个证明。

定理 4.13 (代数学基本定理 / 第二证：最大模)

复系数一元多项式方程在复数域上至少有一个根。



证明 [利用最大模原理] 设 $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ，其中 $a_k \in \mathbb{C}$ 。

假设 $p(z)$ 在复数域上无根，这说明 $g(z) = \frac{1}{p(z)}$ 在全平面解析，下面取定一个半径：

$$R = \max \left[1, 2(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|), (2|a_0|)^{\frac{1}{n}} + 1 \right] \quad (4.62)$$

我们下面证明，在 $C_R(0)$ 上必然有 $|p(z)| > |p(0)| = |a_0|$ ，这是根据

$$\begin{aligned} |p(z)| &= |z^n| \cdot \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \\ &\geq |z^n| \left[1 - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right] \\ &\geq |z^n| \left[1 - \frac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{|z|} \right] \quad (\text{因为 } |z| = R \geq 1) \\ &\geq \frac{|z|^n}{2} \quad (\text{因为 } |z| = R \geq 2(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|)) \\ &> |a_0| \quad (\text{因为 } |z| = R \geq (2|a_0|)^{\frac{1}{n}} + 1) \end{aligned}$$

换言之，在 $C_R(0)$ 上必然有 $|g(z)| < |g(0)|$ ，由于 $C_R(0)$ 是 $B_R(0)$ 的边界，这说明了 $|g(z)|$ 的最大值不能在区域边界上取到，只能在圆盘内部取到，这就和最大模原理矛盾了。因此 $p(z)$ 在复平面一定有根。 \square

4.7.2 Schwarz 引理

最大模原理的另外一个重要的作用是证明 Schwarz 引理。Schwarz 引理为誉为复几何的第一个定理，利用该引理可以给出单位圆盘的全纯自同构群。

定理 4.14 (Schwarz 引理)

设 $D = B_1(0)$, 即单位圆盘, 设 $f(z)$ 在 D 上解析, 且满足:

(1) $f(0) = 0$; (2) $|f(z)| \leq 1, \forall z \in D$.

那么有: (1) $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in D$; (2) $|f'(0)| \leq 1$.

同时, 这两个不等式中的任意等号成立当且仅当 $\exists \theta \in \mathbb{R}$, 满足 $f(z) = e^{i\theta} z$.



证明 首先定义以下函数

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \forall 0 < |z| < 1; \\ f'(0), & z = 0. \end{cases} \quad (4.63)$$

下面证明 $g(z)$ 事实上在整个单位圆盘上解析, 我们提供两个思路。

思路一: 我们姑且先借用一下第五章的结论: 函数在区域上解析的充要条件是函数在区域上一定收敛到对应的 Taylor 级数。那么自然在单位圆盘内我们可以将 $f(z)$ 写为

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \cdots \quad \text{注意到 } f(0) = 0 \implies g(z) = f'(0) + \cdots$$

故而 $g(z)$ 在单位圆盘上收敛到对应的 Taylor 级数, 也就解析。

思路二: 如果不想借用后续章节知识, 我们也可以用一下 Morera 定理, 叙述会麻烦一点。

我们先验证 $g(z)$ 在单位圆盘上是连续的, 这是由于

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = f'(0)$$

接着只要验证, 函数若在单位圆盘上连续, 在去心圆盘上解析, 则在整个开圆盘上也解析。这是因为根据 Morera 定理, 函数 $g(z)$ 在 D 中解析的充要条件是, 对于 D 中的任意三角形 T , 有 $\int_T g(z) dz = 0$ 。我们取单位圆盘内的任意三角形 T 并分两种情况讨论:

(1) 原点不在 T 内部, 则 $g(z)$ 在 T 内部完全解析, 自然有 $\int_T g(z) dz = 0$ 。

(2) 原点在 T 内部, 我们只需将原点和 T 的三个顶点各连一条直线, 将 T 拆分成三个小三角形 T_1, T_2, T_3 , 显然对于每个 T_i 来说, 原点都不在其内部 (在顶点呢), 故而 $\int_{T_i} g(z) dz = 0$, 相加可得 $\int_T g(z) dz = 0$ 。

现在我们知道 $g(z)$ 在单位圆盘上解析, 取 $0 < r < 1$, 那么 $g(z)$ 至少在 $\overline{B_r(0)}$ 上都解析, 于是

$$\max_{z \in \overline{B_r(0)}} |g(z)| \stackrel{\text{最大模原理}}{=} \max_{z \in C_r(0)} |g(z)| = \max_{z \in C_r(0)} \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r} \quad (4.64)$$

在上式中令 $r \rightarrow 1$, 可知

$$\max_{z \in B_1(0)} |g(z)| \leq 1 \implies |f(z)| \leq |z|, \forall z \in B_1(0). \quad (4.65)$$

特别地

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \right| \leq 1 \implies |f'(0)| \leq 1. \quad (4.66)$$

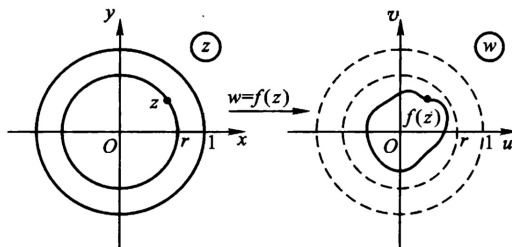
最后来验证一下等号成立条件:

(1) $|f'(0)| = 1$, 这说明 $|g(z)|$ 的最大模在原点取到了;

(2) $\exists z_0 \in B_1(0)$ 使得 $|f(z)| = |z|$, 同样说明 $|g(z)|$ 的最大模在单位圆盘中取到了。

以上两条结合最大模原理来看, 因为 $g(z)$ 解析, 唯一的可能性是 $g(z)$ 为常值函数, 而且必须满足其模长为 1, 也就是说 $\exists \theta \in \mathbb{R}$, 使得 $g(z) \equiv e^{i\theta} \implies f(z) = e^{i\theta} z$. \square

注 Schwarz 引理有一个非常棒的几何解释: 对于任何一个把单位圆盘映到单位圆盘的解析函数, 如果其把原点映成原点, 则其他的点对应的像点到圆心的距离一定严格小于等于原像到圆心的距离。而一旦有一个像点将这个不等式取到等号, 唯一的可能性是: 这个映射是一个旋转。(参考右图)



这暗示我们，单位圆盘到单位圆盘的解析映射并不太多。

定义 4.5 (全纯自同构)

设 D 为复平面上区域, f 称为 D 上的一个**全纯自同构**, 若 f 限制在 D 上是 D 到 D 的一一对应且 f 和 f^{-1} 均在 D 上解析。所有 D 上的全纯自同构在映射复合下构成一个群, 称为 D 的全纯自同构群, 记作 $\text{Aut}(D)$ 。

通过 Schwarz 引理我们可以验证我们的猜测: 单位圆盘上的全纯自同构真的很少:

定理 4.15 (单位圆盘的全纯自同构群)

$$\text{Aut}(B_1(0)) = \{e^{i\theta} \cdot \frac{a-z}{1-\bar{a}z} \mid a \in B_1(0), \theta \in \mathbb{R}\}. \quad (4.67)$$

证明 (左 \supset 右) 令 $w = e^{i\theta} \cdot \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 直接验证有

(i) $|w| < 1$, 即 $w = f(z)$ 确实是单位圆盘到单位圆盘的映射。

(ii) $z = e^{-i\theta} \cdot \frac{a-w}{1-\bar{a}w}$, 故而 f 可逆, 而且显然 f 和 f^{-1} 都在单位圆盘上解析, 故而其属于 $\text{Aut}(D)$ 。

(左 \subset 右) 记 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 直接验证有

(i) $\varphi_a^{-1} = \varphi_a$; (ii) $\varphi_a(0) = a$; (iii) $\varphi_a(a) = 0, \forall a \in B_1(0)$ 。

我们下面说明所有 $\text{Aut}(D)$ 中的元素都可以写成右侧的形式, 任取 $f \in \text{Aut}(D)$, 当然必然存在一点 $a \in B_1(0)$ 使得 $f(a) = 0$, 下面观察函数 $g = f \circ \varphi_a$, 我们发现:

(i) $g = f \circ \varphi_a \in \text{Aut}(D)$; (ii) $g(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0$ 。故而 g 满足 Schwarz 引理条件 (!), 那么根据 Schwarz 引理, 我们有 $|g'(0)| \leq 1$ 。

继续观察 $g^{-1} = \varphi_a^{-1} \circ f^{-1}$, 现在变成有

(i) $g^{-1} \in \text{Aut}(D)$; (ii) $g^{-1}(0) = \varphi_a^{-1}(f(0)) = \varphi_a^{-1}(a) = \varphi_a(a) = 0$ 。那么同样根据 Schwarz 引理, 我们有 $|(g^{-1})'(0)| \leq 1$ 。

但结合逆函数求导法则可知

$$1 \geq |(g^{-1})'(0)| = \frac{1}{|g'(g^{-1}(0))|} = \frac{1}{|g'(0)|} \implies |g'(0)| \geq 1.$$

这就迫使 $|g'(0)| = 1$, 但这又触发了 Schwarz 引理的等号成立条件, 因此我们知道 $\exists \theta \in \mathbb{R}$ 使得

$$g(z) = e^{i\theta} z \implies f \circ \varphi_a(z) = e^{i\theta} z \implies f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{a-z}{1-\bar{a}z}. \quad (4.68)$$

□

第5章 复级数

总所周知,和数分教学类似,在讨论完求导和积分后,自然我们需要进入到讨论级数的环节。实际上级数理论对于复变函数也是相当重要,比如我们知道,最简单的初等函数 e^z 就需要用幂级数来定义,如果没有复级数理论,则整个初等函数理论都会崩塌。

本章节主要聚焦于 Taylor 定理和 Laurent 定理,这两类展开式是后续章节的基础,不过首先,让我们先复习一下级数的概念。

5.1 函数项级数

定义 5.1 (级数和敛散)

设 $z_n \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \dots$, 形如

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots \quad (5.1)$$

的无穷和被称为**级数**,我们称该级数是**收敛**的,如果其部分和 $S_N = \sum_{n=1}^N z_n$ 的极限 $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N$ 在 \mathbb{C} 上存在,否则称该级数是**发散**的。

我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 是**绝对收敛**的,如果级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 收敛。(注意这里的“绝对值”替换成**复数模长**)

我们称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 是**条件收敛**的,如果级数本身收敛但 $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$ 发散。



由定义可知,复级数本质上和实级数并没有太多差别。当然需要注意的是,因为复数无法比较大小,自然也没有正负的说法,因此也没有正项级数相关的知识。我们不难验证以下命题:

命题 5.1

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的充要条件是实级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re} z_n$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im} z_n$ 同时收敛。



以及所谓的 Cauchy 判别法:

命题 5.2 (Cauchy 判别法)

级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ 收敛的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}$, 使得对于 $n \geq N$ 以及任意正整数 p , 有

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \dots + z_{n+p}| < \epsilon. \quad (5.2)$$



本节更重要的是介绍复的函数项级数相关的概念,主要需要讨论一致收敛性以及和函数的连续、可积、可导等性质。

定义 5.2 (函数项级数、逐点收敛和一致收敛)

设 D 为复平面的区域,而 $f_n(z)$ 为定义在 D 上的复函数,则形如

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots \quad (5.3)$$

的无穷形式和被称为复函数项级数。

我们称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 上是逐点收敛的, 若 $\forall z_0 \in D$, 有 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z_0)$ 作为级数是收敛的。

在 D 上逐点收敛的函数项级数总是收敛到一个 D 上的复函数 $S(z)$, 我们称其为函数项级数的和函数。

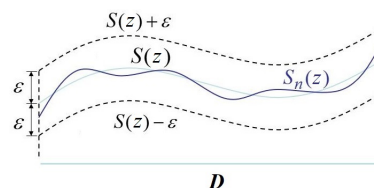
我们称一个逐点收敛的函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 上是一致收敛于和函数 $S(z)$ 的, 如果 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}$, 使得对于 $n \geq N$, 有

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in D. \quad (5.4)$$



注 一致收敛有一个明显的几何刻画。对于和函数 $S(z)$, 我们可以取上的每一个函数值做一个 ϵ 圆盘, 从而得到一根 ϵ 管, 一致收敛保证了, 当 n 足够大以后 $S_n(z)$ 的函数值就必须整体落在这根“管子”里了。

同时注意到一致收敛和逐点收敛本质上只差一个条件, 即“ $\forall z \in D$ ”, 因此不难看出, 对于函数项级数的一致收敛我们也有所谓的 Cauchy 判别法。



命题 5.3 (一致收敛的 Cauchy 判别法)

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 上一致收敛的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}$, 使得对于 $n \geq N$ 以及任意正整数 p , 有

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \epsilon, \quad \forall z \in D. \quad (5.5)$$



关于一致收敛还有一个很常用的判别法, 通常被称为 Weierstrass 判别法或者优级数判别法。

命题 5.4 (Weierstrass 判别法)

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 为一个收敛的实正项级数, 若 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 以及 $\forall z \in D$, 有 $|f_n(z)| \leq M_n$, 则 $f_n(z)$ 在 D 上一致

收敛。我们称 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 为一个优级数。



证明 只需验证 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 满足 Cauchy 判别法的要求即可, 事实上有

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} |f_{n+1}(z)| + \cdots + |f_{n+p}(z)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_{n+p} < \epsilon \quad (5.6)$$

而最后一个不等式来源于 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 的 Cauchy 判别法。 □

注 回顾一下数学分析中实函数项级数部分的内容, 我们给出一致收敛的概念主要是为了保证级数的性质可以反映和函数的性质。在一致收敛的前提下, 我们可以问以下问题:

- (1) 若 $f_n(z)$ 均在 D 上连续, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 是否还在 D 上连续?
- (2) 设 γ 为可求长曲线, 若 $f_n(z)$ 均在可求长曲线上可积, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 是否还是沿 γ 可积?
- (3) 若 $f_n(z)$ 均在 D 上解析, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 是否还在 D 上解析?

以上的问题的答案都是肯定的, 下面我们将逐一进行证明。

命题 5.5 (一致收敛保证连续性)

设 $f_n(z)$ 在 D 上连续, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 上一致收敛于其和函数 $S(z)$, 则 $S(z)$ 在 D 上连续。



证明 回顾一下连续的定义, 要证 $S(z)$ 在 D 上连续, 就是要说明, 对于 $\forall z_0 \in D$, 以及 $\forall \epsilon > 0$, 都 $\exists \delta > 0$, 使得 $|z - z_0| < \delta$ 后, 一定有 $|S(z) - S(z_0)| < \epsilon$ 。我们将上式拆解成三个部分, 即

$$|S(z) - S(z_0)| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} |S(z) - S_N(z)| + |S_N(z) - S_N(z_0)| + |S_N(z_0) - S(z_0)|, \quad \forall N \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 上一致收敛, 因而对于给定的 $\epsilon > 0$, 一定有一个足够大的 N , 使得

$$|S(z) - S_N(z)| < \frac{\epsilon}{4} \quad \text{以及} \quad |S_N(z_0) - S(z_0)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

那么对于这个 N , 利用 $S_N(z)$ 的连续性 (因为有限和), 一定能找到 $\delta > 0$, 使得 $|z - z_0| < \delta$ 后, 一定有 $|S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ 。结合之后带入公式 (5.7) 即可证明连续性。□

命题 5.6 (一致收敛保证逐项积分)

设 γ 为可求长曲线, $f_n(z)$ 沿着 γ 可积, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛于其和函数 $S(z)$, 则 $S(z)$ 沿着 γ 可积, 并且有以下公式

$$\int_{\gamma} S(z) dz \triangleq \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_{\gamma} f_n(z) dz \right). \quad (5.8)$$



注 上式说明一致收敛最终可以保证“积分号”和“无穷求和号”可换, 我们把这种性质称为级数可以逐项可积, 类似的还有逐项可导的说法。

证明 首先积分号和有限求和号必然可换, 这说明

$$\int_{\gamma} S_N(z) dz = \sum_{n=1}^N \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

因此我们只需证明 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} S_N(z) dz = \int_{\gamma} S(z) dz$ 即可。

由于 γ 可求长, 不妨设其弧长为 L 。注意到 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 γ 上一致收敛于 $S(z)$, 故而 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, 使得 $n \geq N$ 后都有 $|S_n(z) - S(z)| < \frac{\epsilon}{L}, \forall z \in \gamma$ 。这样就有

$$\left| \int_{\gamma} S_n(z) dz - \int_{\gamma} S(z) dz \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \int_{\gamma} |S_n(z) - S(z)| ds < \frac{\epsilon}{L} \cdot L = \epsilon. \quad (5.9)$$

这就证明了 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\gamma} S_N(z) dz = \int_{\gamma} S(z) dz$ 。□

最后我们来证明一致收敛能保证和函数的解析性。事实上证明这个条件甚至不需要用到一致收敛, 我们这里介绍一个相对弱化一些的条件: 内闭一致收敛。

定义 5.3 (内闭一致收敛)

我们称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 D 上**内闭一致收敛**到其和函数 $S(z)$, 若对于 D 中的任意**紧集** $K \subset D$, $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 K 上一致收敛到 $S(z)$ 。



注 内闭一致收敛是一个错翻, 正确的翻译理应是紧一致收敛 众所周知, 有些老登一言难尽, 这里对于内闭一

致收敛给出一个简单的刻画：

首先，单点一定可以取出有限覆盖，因此单点集自动是紧集。换言之之内闭一致收敛可以保证逐点收敛。

而另一方面，一致收敛显然可以保证内闭一致收敛，但反之则未必。因此内闭一致收敛非常恰好的介在逐点收敛和一致收敛之间。

以下命题是经常会用到的，请读者自行完成证明。

命题 5.7

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 $B_R(z_0)$ 上内闭一致收敛的充要条件是， $\forall 0 < r < R$ ， $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{B}_r(z_0)$ 上一致收敛。

定理 5.1 (Weierstrass, 内闭一致收敛保证逐项可导)

设 $f_n(z)$ 在 D 上解析且内闭一致收敛于其和函数 $S(z)$ ，则 $S(z)$ 在 D 上解析，并且有以下公式：

$$S^{(k)}(z_0) \triangleq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \right)^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(f_n^{(k)}(z_0) \right), \quad \forall z_0 \in D, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.10)$$

证明 (1) $\forall z_0 \in D$ ，可取 $\delta > 0$ 使得 $\overline{B}_\delta(z_0) \in D$ 。由于 $\overline{B}_\delta(z_0)$ 为 D 中紧集，根据内闭一致收敛性可知 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{B}_\delta(z_0)$ 上一致收敛于 $S(z)$ ，那么结合命题 5.5 和命题 5.6 我们有：

(i) $S(z)$ 在 $\overline{B}_\delta(z_0)$ 上连续；

(ii) $\int_\gamma S(z)dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$ ， $\forall \gamma \subset B_\delta(z_0)$ 可求长闭曲线。（因为 $f_n(z)$ 解析）

这说明 $S(z)$ 在 $\overline{B}_\delta(z_0)$ 上满足 Morera 定理所需条件，由 Morera 定理可知 $S(z)$ 在 $B_\delta(z_0)$ 上解析，特别地必然在点 z_0 处解析，由 z_0 的任意性可知 $S(z)$ 在 D 上解析。

(2) $\forall z_0 \in D$ ，我们还是按照之前的逻辑取 $\overline{B}_\delta(z_0) \subset D$ ，现在取 $\gamma = C_\delta(z_0)$ ，由于 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)dz$ 在 γ 上一致收敛，根据 Cauchy 判别法， $\forall \epsilon > 0$ ，存在 $N \in \mathbb{Z}$ ，使得 $n \geq N$ 后都有

$$|f_{n+1}(z) + \cdots f_{n+p}(z)| < \delta^{k+1} \cdot \epsilon.$$

这说明了

$$\left| \frac{f_{n+1}(z)}{(z-z_0)^{k+1}} + \cdots \frac{f_{n+p}(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \right| = \frac{|f_{n+1}(z) + \cdots f_{n+p}(z)|}{|z-z_0|^{k+1}} < \frac{\delta^{k+1} \cdot \epsilon}{\delta^{k+1}} = \epsilon.$$

也就是说 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$ 在 γ 上同样是一致收敛的，那么利用命题 5.6，即所谓的逐项可积性，我们可知

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \xrightarrow{\text{Cauchy}} S^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(f_n^{(k)}(z_0) \right). \quad (5.11)$$

根据 z_0 在 D 的任意性我们完成了命题的证明。 \square

注 公式 (5.10) 实质上是在说 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上是逐点收敛到 $S^{(k)}(z)$ 的，事实上我们有更强的结论，那就是

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在 D 上其实是内闭一致收敛到 $S^{(k)}(z)$ 的，这个证明就交由读者自行思考。

5.2 幂级数

从这节开始我们把注意力放在一类重要的函数项级数上——形式幂级数。

定义 5.4 (形式幂级数)

形如

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \quad (5.12)$$

的函数项级数被称为以 a 为中心, 以 c_n 为系数的形式幂级数。

我们自然会问一个重要的问题: 形式幂级数什么时候收敛、怎么收敛, 以下定理部分地解决了这个问题。

定理 5.2 (Abel)

若形式幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $z = z_1$ 处收敛 ($z_1 \neq a$), 则其在 $B_{r_1}(a)$ 上绝对收敛且内闭一致收敛, 其中 $r_1 = |z_1 - a|$ 。



证明 这个证明的关键技巧在于先验证等比级数求和的性质, 即, 若有 $|z| < 1$ 则 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ 是绝对收敛的。(当然这个就交给读者自己验证了)

(1) 我们先证明绝对收敛性。有条件可知 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z_1-a)^n$ 收敛, 故而 $\exists M > 0$ 使得 $|c_n(z_1-a)^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{Z}$ 。那么显然我们有

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_1-a)^n \cdot \left(\frac{z-a}{z_1-a}\right)^n| \leq M \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n, \quad \forall z \in B_{r_1}(a). \quad (5.13)$$

注意到在 $B_{r_1}(a)$ 上所有的 z 自动都满足 $\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right| < 1$, 因此有 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n < +\infty$, 这说明 $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n(z-a)^n| < +\infty$, 故而绝对收敛。

(2) 再证内闭一致收敛。我们知道 $B_{r_1}(a)$ 的任意紧集一定包含在某个闭圆盘 $\overline{B}_\rho(a)$ 中, 其中 $0 < \rho < r_1$, (请读者自行给出证明) 因此我们只要证明幂级数在所有的 $\overline{B}_\rho(a)$ 上一致收敛即可。

和 (1) 类似地操作, 我们有

$$|c_n(z-a)^n| \leq M \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n \leq M \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^n, \quad \forall z \in \overline{B}_\rho(a). \quad (5.14)$$

那么很显然 $\rho < r_1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^n < +\infty$, 所以不等式右边自动成为一个优级数, 利用 Weierstrass 判别法可知

$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $\overline{B}_\rho(a)$ 上一致收敛, 继而得到在 $B_{r_1}(a)$ 上内闭一致收敛。□

Abel 定理有一系列的推论, 我们在此一一列举证明:

推论 5.1

若形式幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $z = z_2$ 处发散, 则其在 $\overline{B_{r_2}(a)}$ 外均发散, 其中 $r_2 = |z_2 - a|$ 。



证明 反证即可, 假设存在点 w 满足 $|w-a| > r_2$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(w-a)^n$ 收敛。那么根据 Abel 定理可知幂级数在 $B_{|w-a|}(a)$ 内均收敛, 而我们知道 $z_2 \in B_{|w-a|}(a)$, 这就产生了矛盾。□

类似数学分析中的定义, 对于复形式幂级数, 我们也可以定义所谓的收敛半径。

定义 5.5 (收敛半径)

设 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 为形式幂级数, 那么关于它的敛散有三种可能:

- (i) 幂级数在除了 a 以外的其它点均发散, 则我们约定该幂级数的收敛半径 $R=0$;
- (ii) 幂级数在复平面上的所有点都收敛, 则我们约定该幂级数的收敛半径 $R=+\infty$;
- (iii) 最后如果存在 $0 < R < +\infty$, 使得幂级数在 $B_R(a)$ 中皆收敛, 在 $\overline{B}_R(a)$ 外皆发散, 则我们约定该幂级数的收敛半径为 R 。



推论 5.2

任何形式幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 都有唯一的收敛半径 $R \in [0, +\infty]$ 。



证明 很显然, 如果幂级数的收敛半径不是 0 或者 $+\infty$, 则必然至少存在 $z_1 \neq a$ 以及 z_2 , 满足幂级数在 z_1 处收敛但在 z_2 处发散。

很显然由 Abel 定理可知 $|z_2 - a| \geq |z_1 - a|$, 我们分两种情况:

(1) $|z_2 - a| = |z_1 - a|$, 那自然就有 $R = |z_2 - a| = |z_1 - a|$ 了。

(2) $|z_2 - a| > |z_1 - a|$, 分别计两者为 r_2 和 r_1 , 由于收敛范围是整个圆盘, 故而一定存在 $x_2, x_1 \in \mathbb{R}$, 使得 $|x_k - a| = r_k$, 那么我们知道幂级数也是在 x_1 处收敛, 在 x_2 处发散。

接下来取两者的中点 $\frac{x_1+x_2}{2}$, 判断幂级数在中点处的敛散性:

(i) 如果其在中点处发散, 则记 $x_1^{(2)} = x_1, x_2^{(2)} = \frac{x_1+x_2}{2}$;

(ii) 如果其在中点处收敛, 则记 $x_1^{(2)} = \frac{x_1+x_2}{2}, x_2^{(2)} = x_2$;

这样我们就得到了一个新的闭区间 $[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}]$, 它的长度是前者的一半, 而且幂级数在其左端点收敛, 右端点发散。持续这样的操作, 我们就得到了一个闭区间套 $[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}], n \in \mathbb{N}$, 我们知道最终一定套出唯一的一个点 $x_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} [x_1^{(n)}, x_2^{(n)}]$, 那么我们定义 $R = |x_0 - a|$, 很容易验证它就是我们要求的收敛半径。□

注 读者应该能留意到, 和实级数的情况类似, 对于正好在收敛半径上的那些点, 幂级数的敛散性是不确定的。对于复幂级数而言, 我们通常不对这些点进行讨论。因为一般不会做。

推论 5.3 (Cauchy-Hadamard)

形式幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{l}$, 其中

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (5.15)$$



证明 对于实级数来说, Cauchy-Hadamard 定理在数分里已经给出证明, 我们只需定义实幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|x^n$, 并证明原始的复幂级数和实幂级数的收敛半径是一致的即可。

为了区分, 我们把复幂级数的收敛半径记作 R , 而把对应的实幂级数的收敛半径先记作 R_x 。

首先因为 $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|r^n < +\infty \implies \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ 收敛 (绝对收敛一定收敛), 可知 $R \geq R_x$ 。

但如果假定 $R > R_x$, 则取 $\tilde{R} = \frac{R+R_x}{2}$, 我们知道 $R_x < \tilde{R} < R$, 由 Abel 定理可知复级数在 $B_{\tilde{R}}(a)$ 上绝对收敛, 也就说有 $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n|\tilde{R}^n < +\infty$, 但这就和 R 是实幂级数的收敛半径矛盾了。因此一定有 $R = R_x$ 。□

注 上述推论说明复半径的算法和实半径是一致的，那么自然我们也可以用到以下公式

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \quad \text{d'Alembert 公式, 即比值判别} \quad (5.16)$$

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad \text{Cauchy 公式, 即根式判别} \quad (5.17)$$

这里不再赘述。

推论 5.4

设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则

(1) 其和函数 $S(z)$ 在 $B_R(a)$ 上解析, 我们也称 $B_R(a)$ 为幂级数的收敛圆盘。

(2) 我们有以下系数公式

$$c_k = \frac{S^k(a)}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (5.18)$$

证明 这两条实际上都是 Weierstrass 定理的推论。

(1) 利用 Abel 定理可知 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 在 $B_R(a)$ 上内闭一致收敛到 $S(z)$, 而显然 $c_n(z-a)^n$ 都是解析函数, 故而有 Weierstrass 的结论可知 $S(z)$ 在 $B_R(a)$ 上解析。

(2) 再利用 Weierstrass 定理, 我们知道在 $B_R(a)$ 上可以逐项求导, 因此

$$S^k(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left[(z-a)^n \right]^{(k)} \Big|_{z=a} \stackrel{\text{只有 } n=k \text{ 时不为零}}{=} c_k \left[(z-a)^k \right]^{(k)} \Big|_{z=a} = k! c_k \quad (5.19)$$

故而 $c_k = \frac{S^k(a)}{k!}$. □

5.3 Taylor 级数

在上一节最后的推论 5.4 中我们证明了, 形式幂级数的和函数在收敛圆盘中总是解析函数。事实上对立的逆命题也是成立的, 这就是本节的重点: Taylor 定理。

定理 5.3 (Taylor)

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析, 则 $\forall a \in D$ 以及任意 $R > 0$ 满足 $B_R(a) \subset D$, $f(z)$ 均可以在 $B_R(a)$ 中展开成以下的级数:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad \forall z \in B_R(a). \quad (5.20)$$

而对应的系数满足 $c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$ 。这样的级数是唯一的, 我们将其称为 $f(z)$ 在 a 处的 Taylor 级数。

证明 $\forall z \in B_R(a)$, 我们总能找到 $0 < \rho < R$ 满足 $z \in B_\rho(a) \subset \overline{B}_\rho(a) \subset B_R(a)$ 。自然 $f(z)$ 在 $\overline{B}_\rho(a)$ 上解析, 根据 Cauchy 积分公式, 我们有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (5.21)$$

又注意到

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \cdot \frac{1}{w-a}. \quad (5.22)$$

因为 $z \in B_\rho(a)$ 而 $w \in C_\rho(a)$, 故而 $\left| \frac{z-a}{w-a} \right| < 1$, 故而根据等比级数求和公式, 有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{w-a} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}. \quad (5.23)$$

那么把上述所有公式结合我们知道

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n \right) dw. \quad (5.24)$$

因为 $w \in C_\rho(a)$ (紧集!), 故而一定有 $M > 0$ 使得 $|f(w)| \leq M$. 对于给定的 z , 将级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n \right)$ 视为 w 的级数 (不要视为 z 的级数, 因为后面要跟 dw 的积分换序, 易错!), 可为其找到一个优级数:

$$\left| \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n \right| \leq \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot |z-a|^n. \quad (5.25)$$

那么根据 Weierstrass 判别法, 原级数在 $C_\rho(a)$ 上一致收敛, 因而公式 (5.24) 中积分和无穷和可换, 即

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{n!}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) \frac{(z-a)^n}{n!} \stackrel{\text{Cauchy 积分公式}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(a)}{n!} (z-a)^n. \quad (5.26)$$

自然我们也就证明了 $c_n = \frac{f^n(a)}{n!}$.

最后我们说明唯一性, 假设还有系数 c'_n 使得 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n (z-a)^n$, 那么根据推论 5.4 可知, 一定有 $c'_n = \frac{f^n(a)}{n!}$, 这说明了事实上 $c'_n \equiv c_n$. \square

总结推论 5.4 以及 Taylor 定理, 我们将给出函数在区域 D 上解析的最后一个充要条件, 至此我们终于可以理解为什么复变函数这门课把“复可导”叫做“解析”。因为真的解析——

命题 5.8

$f(z)$ 在 D 上解析的充要条件是 $f(z)$ 可以在 D 中每一点的邻域上展开成 Taylor 级数。

注 至此关于解析的最后一块拼图也得到了, 我们将解析的所有等价说法在此进行一个总结:

首先别忘了原始定义, 设 D 为复平面区域, 我们称 $f(z)$ 在 D 上解析, 如果 $f(z)$ 在 D 上每一点可导。

定理 5.4 (解析函数的等价描述, 最终版)

设 D 为复平面区域, 则以下五条等价:

- (1) $f(z)$ 在 D 上解析;
- (2) $f(z)$ 的实部虚部在 D 上可微且满足 Cauchy-Riemann 方程; (w.r.t. Cauchy-Riemann 定理)
- (3) 对于 D 的任意可求长简单闭曲线 γ , 有 $\int_\gamma f(z) dz = 0$; (w.r.t. Cauchy-Goursat / Morera 定理)
- (4) $f(z) \in C^\infty(D)$; (w.r.t. Cauchy 积分公式)
- (5) $f(z)$ 可以在 D 中每一点的邻域上展开成 Taylor 级数。 (w.r.t. Taylor 定理)

和数学分析中的章节类似, 我们给出各个初等函数对应的 Taylor 展开。

命题 5.9 (指数函数的 Taylor 级数)

$$e^z \triangleq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.27)$$

我们在第一章时就给出了这个定义，现在我们可以验证这个定义是合理的。注意到：

$$c_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow l = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty. \quad (5.28)$$

因此这个级数确实在复平面上点点收敛，故而可以定义和函数。再根据定理 5.4 可知 e^z 在全平面上解析。

命题 5.10 (三角函数的 Taylor 级数)

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.29)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (5.30)$$

证明 根据 $\cos z$ 的原始定义 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ ，结合 e^z 的展开式可知：

$$\cos z = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n + (-i)^n}{2} \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

注意到

$$\frac{i^n + (-i)^n}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k+1. \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{只有偶数项}} \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

$\sin z$ 的公式计算方法是类似的。最后因为 e^z 在全平面上解析可知， $\cos z$ 和 $\sin z$ 在全平面解析。

命题 5.11 (对数函数的 Taylor 展开)

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad \forall z \text{ 满足 } |z| < 1. \quad (5.31)$$

这里 $\ln z$ 取的是 $\text{Ln } z$ 的主值分支，即 $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

命题 5.12 (乘幂函数的 Taylor 展开)

$$(1+z)_0^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n \triangleq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad \forall z \text{ 满足 } |z| < 1. \quad (5.32)$$

这里 $(1+z)_0^\alpha$ 取的也是主值分支，即 $(1+z)_0^\alpha = e^{\alpha \cdot \ln(1+z)}$

推论 5.5

从命题 5.11 可以推导以下常用结论：

$$(1) \text{ 取 } \alpha = -2 \Rightarrow \frac{1}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) z^n \quad \forall z \text{ 满足 } |z| < 1;$$

$$(2) \text{ 取 } \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt{1+z})_0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} z^n \quad \forall z \text{ 满足 } |z| < 1;$$

$$(2) \text{ 取 } \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)_0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} z^n \quad \forall z \text{ 满足 } |z| < 1;$$

计算过程交给读者自行完成。

5.4 Laurent 级数

从上一节我们知道“在 D 上解析”和“在 D 上每点处收敛到对应的 Taylor 展开”是一个意思，那么借由 Cauchy-Goursat 知道，如果一个函数的展开只有所谓的“Taylor”部分，或者说只有非负幂次的部分，那么它的积分是无趣的。反之，如果一个函数在一点附近能有类似 $\frac{1}{z}$ 这样的展开，那么积分理论很有可能跟这样的展开项相关，这就启发我们去定义类似 $\frac{1}{z}$ 这样的带负幂次项的展开。

定义 5.6 (双边幂级数)

我们称形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n \quad (5.33)$$

的级数为**双边幂级数**，我们把其中的非负幂次部分 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 称为**解析部分**，把负幂次部分 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$ 称为**主要部分**。我们称一个双边幂级数是**收敛的**，如果其对应的解析部分和主要部分同时收敛，否则称其为**发散的**。

对于一个双边幂级数，我们考察其对应的两个部分：

$$\begin{aligned} & c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \\ & \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots \end{aligned}$$

容易看出前者是形式幂级数，因此它的收敛域应该形如 $|z-a| < R$ 。对于后者，我们可以做换元 $w = \frac{1}{z-a}$ ，这样它就转化为一个关于 w 的形式幂级数，我们知道其收敛域应该形如 $|w| < \frac{1}{r} \iff r < |z-a|$ ，这就看出了双边幂级数对应的收敛域总是形如圆环 $r < |z-a| < R$ 。事实上对于双边幂级数我们可以证明类似于 Abel 定理和 Weierstrass 定理的结论，这里我们省去证明过程。

定理 5.5 (Abel & Weierstrass for 双边幂级数)

设 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 为双边幂级数，则：

- (1) 若其在非 a 的某点处收敛，则存在 $0 \leq r < R \leq +\infty$ 使得双边幂级数在圆环 $r < |z-a| < R$ 上**绝对收敛且内闭一致收敛**，称该圆环为**收敛圆环**。
- (2) 在收敛圆环内双边幂级数的和函数存在且解析；
- (3) 在收敛圆环内可以对双边幂级数进行逐项求导和逐项积分。

和 Taylor 定理类似，对于在圆环区域解析的函数，我们一定能写出对应的双边幂级数展开，这就是本节的重点 Laurent 定理。

定理 5.6 (Laurent)

设 $f(z)$ 在圆环 $H: r < |z-a| < R$ 上解析，则 $\forall a \in H$ ， $f(z)$ 均可以在 H 中展开成双边幂级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n, \quad \forall z \in H. \quad (5.34)$$

其对应的系数 c_n 总是唯一的，且满足以下公式：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \forall r < \rho < R, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (5.35)$$

证明 首先任取 $z \in H$, 我们总可以找到适当的 r_1 和 r_2 , 满足 $r < r_1 < r_2 < R$, 使得 z 落在圆环 $r_1 < |z-a| < r_2$ 中, 将这个圆环理解为由 $C_{r_2}(a)$ 和 $C_{r_1}(a)$ 构成的 Jordan 曲线族的内部, 那么根据 Cauchy 积分公式的推广版本, 我们知道有:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(a)} \frac{f(w)}{w-z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}(a)} \frac{f(w)}{z-w} dw \triangleq (I) + (II). \end{aligned} \quad (5.36)$$

对于前者, 我们的处理方式和 Taylor 定理证明中的一致, 注意到:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \cdot \frac{1}{w-a}. \quad (5.37)$$

且 $|z-a| < r_2$ 而 $w \in C_{r_2}(a) \implies \left| \frac{z-a}{w-a} \right| < 1$, 故而根据等比级数求和公式, 有

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \cdot (z-a)^n \right) dw \\ &\stackrel{\text{逐项可积}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n. \end{aligned} \quad (5.38)$$

不难看出上式可以写为 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n$, 且利用闭路连续形变原理可知对应的系数满足

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \forall r < \rho < R, \quad \forall n \geq 0. \quad (5.39)$$

现在我们来处理后, 类似地有

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} \cdot \frac{1}{z-a}. \quad (5.40)$$

注意到现在 $|z-a| > r_1$ 而 $w \in C_{r_1}(a)$, 故而 $\left| \frac{w-a}{z-a} \right| < 1$, 同样套等比求和, 得到

$$\begin{aligned} (II) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}(a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(f(w)(w-a)^n \cdot \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \right) dw \\ &\stackrel{\text{令 } m=-(n+1)}{=} \int_{C_{r_1}(a)} \sum_{m=-\infty}^{-1} \left(\frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}} (z-a)^m \right) dw \\ &\stackrel{\text{逐项可积}}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \right) (z-a)^n \end{aligned} \quad (5.41)$$

同样看出上式可以写为 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n$, 且利用闭路连续形变原理可知对应的系数满足

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \forall r < \rho < R, \quad \forall n < 0 \quad (5.42)$$

最后结合公式 (5.38) 和 (5.41) 我们得到

$$f(z) = (I) + (II) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n.$$

再结合系数公式 (5.39) 和 (5.42), 我们知道所有系数都满足同样的公式

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad \forall r < \rho < R, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

最后我们说明唯一性, 假设还有系数 c'_n 使得 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n (z-a)^n$, 那么直接在 $C_\rho(a)$ 上计算以下积分:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(a)} \frac{c'_n}{(z-a)^{n-m-1}} dz.$$

我们知道上式中只有 $n=m$ 项不为零, 因此计算得到 c'_n 和 c_n 的公式一致, 这就证明了系数的唯一性。□

注 我们知道对于 Taylor 级数来说, 同一个函数在指定中心处展开的 Taylor 公式自然是一样的。但同样注意到在 Laurent 定理的描述中, 我们不但要指定好展开中心, 还要指定圆环区域的内外半径。这是因为即便展开中心一致, 随着内外半径的改变, 新旧圆环上的 Laurent 级数也极可能发生变化! 请读者结合下面的例子进行理解。

例题 5.1 求函数 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2}$ 在 (1) $0 < |z-1| < 2$; (2) $2 < |z-1| < \infty$; (3) $|z-2| < 1$ 中分别对应的 Laurent 展开式。

解 对于具体计算 Laurent 展开的题目, 我们通常采用的是间接法, 即利用已知的公式来推导, 而不是根据定义计算。(毕竟按照定义 c_n 是积分根本没法逐一计算)

(1) 注意到展开中心就是 $z=1$, 故而 $z=1$ 那个因子不需要动, 我们有

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{[(z-1)-2]^2} = \frac{1}{4(z-1)} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{z-1}{2}\right]^2}.$$

注意到圆环区域为 $0 < |z-1| < 2$, 故而 $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$, 我们套用公式

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n, \quad |x| < 1. \quad (5.43)$$

得到对应的 Laurent 展开式为:

$$f(z) = \frac{1}{4(z-1)} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{z-1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^{n+2}} (z-1)^{n-1}.$$

(2) 很显然我们依然有

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{[(z-1)-2]^2}.$$

但注意到内外半径发生了变化, 现在 $\left|\frac{z-1}{2}\right| > 1$, 因此不能像上题一样直接套用公式, 但是反过来, 这时候我们倒是有 $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$, 因此我们对原函数稍加处理即可:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{[(z-1)-2]^2} = \frac{1}{(z-1)^3} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{2}{z-1}\right]^2} \\ &\stackrel{\text{套用公式}}{=} \frac{1}{(z-1)^3} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{2}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)2^n}{(z-1)^{n+3}}. \end{aligned}$$

(3) 注意到现在展开中心在 $z=2$, 因此分母的两个因子都要发生变化, 但是首先我们申明: 两个无穷级数的乘积不能作为答案提交, 因为此时级数的通项并不确定, 所以我们首先通过技巧拆解分母:

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-3)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-3} + \frac{1}{4} \frac{1}{z-1}. \quad (5.44)$$

那么注意到展开中心是 $z = 2$, 且 $|z - 2| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \frac{1}{[1 - (z - 2)]^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 - (z - 2)} + \frac{1}{4} \frac{1}{1 + (z - 2)} \\ &\stackrel{\text{等比求和}}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(z-2)^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (z-2)^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{n+1}{2} + \frac{1+(-1)^n}{4} \right] (z-2)^n. \end{aligned}$$

注 通过计算细节不难发现, 三个 Laurent 展开式各有千秋: (2) 中只有主要部分, (3) 其实本质上是个 Taylor 展开, 而 (1) 则是主要部分和解析部分皆有。这说明了 Laurent 展开的公式一定要中心、内径、外径都确定的情况下才能固定, 不然形式是很多变的。

第6章 零点和奇点

从本章开始我们着眼于研究复函数在区域内的零点和奇点以及相关的性质。这两个概念其实是级数理论的副产物，因此五六两章其实本来就是同一块的知识点，只是进行一个划分会更为合理。

6.1 函数的零点

定义 6.1 (零点和阶)

我们称 a 为 f 的一个 **零点**，如果 f 在 a 的某个去心邻域 $B_\rho^*(a)$ 上解析，且在 $B_\rho^*(a)$ 上 f 对应的 Laurent

展开 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 其系数满足 $c_n = 0, \forall n \leq 0$ 。(即没有负幂次和常数项)

若 a 为 f 的零点，我们称其为一个 **m 阶的零点** ($m \geq 1$)，如果还有 $c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ ，但 $c_m \neq 0$ 。

特别地，如果 f 也在 a 点解析，则 a 是 f 的零点等价于 $f(a) = 0$ ，同时 a 是 m 阶零点等价于

$$f(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$



注 注意：我们在定义的时候并没有说这样的 m 是存在的，但事实上对于非零函数的 f ，零点的阶总是确定的。

命题 6.1 (零点总是有阶)

设 f 在 D 上解析且不为零函数， $\forall a \in D$ ，若 a 是 f 的一个零点，则 a 有**唯一**确定的**有限**的阶。



证明 我们先证明零点的阶总是有限的，定义以下集合：

$$D_1 = \{a \in D \mid f^{(m)}(a) = 0, \forall m \in \mathbb{N}\}, \quad (6.1)$$

$$D_2 = \{a \in D \mid \exists m \in \mathbb{N}, \text{ 使 } f^{(m)}(a) \neq 0\}. \quad (6.2)$$

可以看出 D_1 和 D_2 的要求是互斥的，因此 $D_1 \cup D_2 = D$ 且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ ，我们下证： D_1 和 D_2 皆是开集。

首先证明 D_1 是开集，这是因为我们可以找到 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(a) \subset D$ ，这样根据 Taylor 定理， f 在 $B_\delta(a)$ 上均等于其在 a 处的 Taylor 展开，但根据 D_1 的定义我们知道 Taylor 展开天然为零，这就说明了 $B_\delta(a) \subset D_1$ 。

其次来证明 D_2 是开集，我们将 D_2 再分解为以下集合：

$$D_2^{(0)} = \{a \in D \mid f(a) \neq 0\} \text{ 以及} \quad (6.3)$$

$$D_2^{(m)} = \{a \in D \mid f(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0\}, \forall m \geq 1. \quad (6.4)$$

容易看出 $D = D_2^{(0)} \cup \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} D_2^{(m)}$ ，其中 $D_2^{(0)}$ 事实上就是那些不是 f 的零点的点构成的集合，而 $D_2^{(m)}$ 恰好是所有 f 的 m 阶零点。那么对于任意的 $a \in D_2$ ，我们分情况讨论：

(1) $a \in D_2^{(0)}$ ，显然根据 f 的连续性可知 $D_2^{(0)}$ 是开集，因此存在 $\delta > 0$ 使得 $a \in B_\delta(a) \subset D_2^{(0)} \subset D_2$ ；

(2) $a \in D_2^{(m)}$ ，根据定义， f 在 a 处的 Taylor 展开一定形如

$$f(z) = c_m(z-a)^m + \cdots = (z-a)^m \varphi(z), \text{ 其中 } \varphi \text{ 在 } D \text{ 上解析且 } \varphi(a) \neq 0.$$

那么利用 $\varphi(a) \neq 0$ 以及 φ 在 D 上的连续性，我们一定能找到 $\delta > 0$ ，使得 φ 在 $B_\delta(D)$ 上皆不为 0，这就证明了 $B_\delta(a) \subset D_2$ ，综上 D_2 是开集。

最后根据 D 是连通集可知一定有 $D_1 = D$ 或者 $D_2 = D$ ，但 $D_1 = D$ 相当于说 f 在 D 上为零函数，不符合题意，因此只能 $D_2 = D$ ，这就证明了所有零点都有有限的阶。

而注意到 $D_2^{(m)}$ 亦是两两互斥的，这说明了对于确定的某个零点 a ， a 的阶数是唯一的。 \square

从上述证明中我们不难得到以下推论，这些推论本身比原始命题更重要：

推论 6.1 (零点孤立原理)

设 f 在 D 上解析且不为零函数：

- (1) 若 $a \in D$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，则存在 D 上的解析函数 φ 满足 $\varphi(a) \neq 0$ 使得 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$ 。
- (2) $f(z)$ 在 D 上的零点（在 f 的零点集中）总是孤立的。



那么根据零点的孤立性我们就不难得到以下定理，这个定理一般被称为**唯一性定理**。

定理 6.1 (唯一性定理)

设 f 和 g 在区域 D 中解析，若存在 $E \subset D$ 满足：(1) $E' \cap D \neq \emptyset$ ，(2) $f(z) \equiv g(z), \forall z \in E$ ，则一定有

$$f(z) \equiv g(z), \quad \forall z \in D. \quad (6.5)$$



证明 令 $h(z) = f(z) - g(z)$ ，则根据定义 E 中的点都是 h 的零点。由于 $E' \cap D \neq \emptyset$ ，那么任取 $z_0 \in E' \cap D$ ，因为 $z_0 \in E'$ ，我们可以取 E 中的点列 $\{z_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 。而根据 h 在 D 中的连续性可知

$$h(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(z_n) \stackrel{z_n \in E, E \text{ 为 } h \text{ 的零点集}}{=} 0.$$

换言之， z_0 也是 h 在 D 中的一个零点，那么假设 h 在 D 中不恒为零，根据零点孤立原理可知， z_0 在零点集中必须孤立，但这和 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ 矛盾了。因此 h 在 D 中只能是零函数，这就证明了 $f(z) \equiv g(z), \forall z \in D$ 。□

注 这里的两个条件 $E' \cap D \neq \emptyset$ 以及 f, g 在 D 中解析缺一不可。

比如假设 E 是一个离散集，即 $E' = \emptyset$ ，那么确实有这样的例子， f 以 E 为零点集但 f 非零函数，请读者尝试自行举例。

再比如我们看这个例子 $f(z) = \sin\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ ，很容易看出 f 的所有零点为 $E = \left\{\frac{k\pi+1}{k\pi-1} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ ，容易验证 $E' = \{1\}$ ，也就是说 $E' \cap \mathbb{C} \neq \emptyset$ ，但很显然函数并不是零函数，这是因为函数恰好就是在 1 处不解析。

唯一性定理有两个重要推论。

推论 6.2

- (1) 设 $E \subset D$ 为一条任意长的连续曲线，而 f 和 g 在 D 中解析且 $f \equiv g, \forall z \in E$ ，则 $f \equiv g, \forall z \in D$ 。
- (2) 在实轴上由解析函数写出来的恒等式在全复平面上依旧成立。



证明 验证在这种情况下 $E' \cap D \neq \emptyset$ 即可。其中通过命题 (2) 我们可以得到一些很好的结论，比如我们知道对于实函数而言 $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ，这是一个由解析函数写出来的恒等式，那么自然我们知道这个恒等式就与全复平面也需要成立，因此我们只能将 $\cos z$ 定义为 $\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ 。再比如你已经知道了 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 以及 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ ，这些恒等式是由解析函数写成的，因此在复平面上也自动成立，就不需要重证一遍了。□

通过唯一性定理我们可以给最大模原理一个新的证明。

定理 6.2 (最大模原理 / 第二证：唯一性定理)

若 $f(z)$ 在区域 D 上解析且非常值函数，则 $|f(z)|$ 无法在 D 中取到最大值，换言之，不存在这样的 $z_0 \in D$ ，使得 $f(z_0) = \sup_{z \in D} |f(z)|$ 。



证明 [利用唯一性定理] 设 $M = \sup_{z \in D} |f(z)|$ ，我们不妨设 $M < +\infty$ 不然命题当然成立。现在采取反证法，假设存在 $a \in D$ 满足 $|f(a)| = M$ ，因为 D 是开集，我们可以找到 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(a) \subset D$ ，借由平均值公式可知

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta, \quad \forall 0 < r < \delta.$$

对上式两边取模长我们得到

$$M = |f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{z \in C_r(a)} |f(z)| \cdot 2\pi \leq M.$$

容易看出等式成立的唯一可能是 $|f(z)| \equiv M, \forall z \in C_r(a)$ 。注意到 $C_r(a)$ 为 D 中的一段弧, 那么根据唯一性定理可以, 只能有 $|f(z)| \equiv M, \forall z \in D$, 也就是说 f 在 D 上为常值函数, 这和题意矛盾了, 故而命题得证。□

6.2 孤立奇点及其分类

我们已经学过了 Cauchy 积分公式, 读者应当可以理解: 对于积分来说, 我们需要关心的反而不是那些明确解析的点, 反而应该聚焦于那些解析性出问题的点, 我们将这样的点称为函数的奇点。

定义 6.2 (奇点和孤立奇点)

我们称 a 为 f 的一个奇点, 如果 f 在 a 处不解析, 但是在 a 的任意邻域内都还有使 f 解析的点。
若进一步, f 在 a 的某个去心邻域上解析, 那么我们称 a 为 f 的一个孤立奇点。
容易看出 ∞ 天然所有函数的奇点, 我们称不为 ∞ 的奇点为函数的有限奇点。

注 简而言之, 我们要求首先函数在该点处不解析, 但是 f 又不能太糟糕, 导致在大片区域上不解析。比如我们知道 $\operatorname{Re} z$ 在全平面都不解析, 那对于这样的函数我们事实上是不谈所谓“奇点”的概念的。

6.2.1 有限奇点的奇性

设 $a \in \mathbb{C}$ 为 f 的一个孤立奇点, 注意到 f 在 a 的某个去心邻域, 即 $B_\rho^*(a) : 0 < |z - a| < \rho$ 上解析, 我们知道去心邻域亦是一种圆环区域, 故而此时 f 在 $B_\rho^*(a)$ 有唯一的 Laurent 展开式, 我们可以根据 Laurent 展开的信息将孤立奇点再细分为三大类。

定义 6.3 (三种孤立奇点)

设 $a \in \mathbb{C}$ 为 f 的一个孤立奇点, f 在 $B_\rho^*(a)$ 上解析:

- (1) 我们称其为 f 的一个可去奇点, 如果其对应的 Laurent 展开中的主要部分为 0;
- (2) 我们称其为 f 的一个 m 阶极点, 如果其对应的 Laurent 展开中的主要部分有限且最高的负幂次为 $-m$;
- (3) 我们称其为 f 的一个本性奇点, 如果其对应的 Laurent 展开中的主要部分有无穷项。

对于三类孤立奇点, 我们将依次给出它们的等价刻画:

命题 6.2 (可去奇点的等价刻画)

设 $a \in \mathbb{C}$ 为 f 的一个孤立奇点, f 在 $B_\rho^*(a)$ 上解析, 则以下三条等价:

- (1) a 为 f 的可去奇点;
- (2) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- (3) $\exists \delta > 0$, 使得 $|f|$ 在 $B_\delta^*(a)$ 内有上界。

证明 (1) \implies (2) 由于 a 为 f 的可去奇点, 我们在 $B_\rho^*(a)$ 上写出对应的 Laurent 展开可知其形如

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \cdots \quad \text{即纯 Taylor}$$

那么容易看出 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$ 。

(2) \implies (3) 现在假设 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b \in \mathbb{C}$, 我们把极限用 $\epsilon - \delta$ 翻译一遍即可, 这相当于说 $\forall \epsilon > 0$, 总是存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall z \in B_\delta^*(a)$, 有 $|f(z) - b| < \epsilon$, 因此在 $B_\delta^*(a)$ 中, $|f(z)| < |b| + \epsilon$, 总归是有上界的。

(3) \implies (1) 最后假设 $\exists \delta > 0$, 使得 $|f|$ 在 $B_\delta^*(a)$ 内有上界, 就不妨设 $|f(z)| \leq M$ 。

首先当然也不妨设 $\delta < \rho$, 因此 f 在 $B_\delta^*(a)$ 处一定有 Laurent 展开, 其对应的系数满足:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

由模长不等式可知:

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\delta^{n+1}} \cdot 2\pi\delta = \frac{M}{\delta^n}.$$

因此容易看出当 $n \leq -1$ 时, 我们可以令 $\delta \rightarrow 0$, 这就证明了 $c_n \equiv 0, \forall n \leq -1$. 换言之, 就是在 a 处的 Laurent 展开没有主要部分, 这也就证明了 a 是 f 的可去奇点. \square

命题 6.3 (m 阶极点的等价刻画)

设 $a \in \mathbb{C}$ 为 f 的一个孤立奇点, f 在 $B_\rho^*(a)$ 上解析, 则以下三条等价:

- (1) a 为 f 的一个 m 阶极点;
- (2) f 在 $B_\rho^*(a)$ 上可以写为 $f(z) = (z-a)^{-m}\varphi(z)$, 其中 φ 在 $B_\rho(a)$ 上解析且 $\varphi(a) \neq 0$;
- (3) $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ 以点 a 为 m 阶零点.

证明 (1) \implies (2) 由于 a 为 m 阶极点, 故而 f 在 $B_\rho^*(a)$ 上的 Laurent 形如:

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \cdots \\ &= (z-a)^{-m} [c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots] \end{aligned}$$

令 $\varphi(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \cdots$, 可知 $\varphi(z)$ 在 $B_\rho(a)$ 上的展开式没有主要部分, 因此 φ 在 $B_\rho(a)$ 上解析, 而且有 $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$.

(2) \implies (3) 由于 $f(z) = (z-a)^{-m}\varphi(z)$, 故而 $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{\varphi(z)}$, 由于 $\varphi(a) \neq 0$, 故而至少在 a 的某个邻域上有 $\varphi(z) \neq 0$, 换言之 $\frac{1}{\varphi(z)}$ 在这个邻域上解析, 因此可以看出 a 为 $g(z)$ 的 m 阶零点.

(3) \implies (1) 现在 a 是 $g(z)$ 的 m 阶零点, 因此 $g(z) = (z-a)^m\psi(z)$, 那么 $f(z) = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m}\frac{1}{\psi(z)}$, 和之前的讨论类似, 我们可以看出现在 a 是 $f(z)$ 的 m 阶极点. \square

和可去奇点类似, 我们一样可以用极限来刻画极点和本性奇点, 我们把这三条整理在一起.

命题 6.4 (三类孤立奇点的极限刻画)

设 $a \in \mathbb{C}$ 为 f 的孤立奇点.

- (1) a 是 f 的可去奇点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$;
- (2) a 是 f 的极点的充要条件是 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;
- (3) a 是 f 的本性奇点的充要条件是无法在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上定义 $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$.

证明 (1) 已经证明过了, (3) 是 (1) 和 (2) 的推论, 下面直接证明 (2).

我们知道 a 是 f 的极点的充要条件是 a 是 $1/f$ 的零点, 因此换言之一定有 $\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0$, 根据约定我们知道这等价于 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. \square

最后我们给出本性奇点的一个性质, 这个定理揭示了函数值在本性奇点附近有多混乱.

定理 6.3 (Weierstrass, 本性奇点的刻画)

设 a 为 $f(z)$ 的本性奇点, 则 $\forall \epsilon > 0, \overline{f(B_\epsilon^*(a))} = \mathbb{C}$.

证明 我们采用反证法, 假设 $\mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\epsilon^*(a))} \neq \emptyset$, 由于后者总是闭集, 故而这个集合是非空开集, 因此我们可以

找到 $w \in \mathbb{C}$ 以及 $\delta > 0$ 使得

$$B_\delta(w) \subset \mathbb{C} \setminus \overline{f(B_\epsilon^*(a))} \implies B_\delta(w) \cap f(B_\epsilon^*(a)) = \emptyset \implies \forall z \in B_\epsilon^*(a), |f(z) - w| \geq \delta.$$

下面构造函数 $g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$, 我们知道在 $B_\epsilon^*(a)$ 上有 $g(z)$ 解析且 $|g(z)| \leq \frac{1}{\delta}$, 换言之 $g(z)$ 在 a 的一个去心邻域上有上界, 根据可去奇点的等价描述我们知道此时 a 必然是 g 的一个可去奇点。

但注意到 $f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$, 因此我们有

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w + \frac{1}{\lim_{z \rightarrow a} g(z)} = \begin{cases} \infty, & \text{若 } \lim_{z \rightarrow a} g(z) = 0; \\ w + \frac{1}{A}, & \text{若 } \lim_{z \rightarrow a} g(z) = A. \end{cases}$$

这说明了 a 要么是 f 的可去奇点要么是极点, 但这和假设 a 是本性奇点矛盾了。 \square

6.2.2 无穷远点的奇性

我们知道无穷远点 ∞ 天然是所有函数的奇点, 那么如果 ∞ 是孤立奇点时, 我们理应可以分析它是哪一类的孤立奇点。事实上这里的定义和通常的定义并无二致, 我们只需要说清楚什么叫 ∞ 处的 Laurent 展开即可。

回忆章节 1.5 中我们对于扩充复平面定义了球度量, 并通过球度量说明了所谓 ∞ 的邻域即是那些模长足够大的点。另一方面, 如果 ∞ 是孤立奇点, 这相当于说 ∞ 可以跟 f 的其他奇点都隔开, 因此必然存在一个足够大的半径 $R > 0$, 使得 $B_R(0)$ 包住了 f 的所有有限奇点。

所以综上所述, 若 ∞ 是 f 的孤立奇点, 则必然存在一个足够大的半径 $R > 0$, 使得在 $\{z \mid |z| > R\}$ 上 f 只有唯一的奇点 ∞ , 因此在这样的邻域上我们可以谈 f 在 ∞ 的 Laurent 展开, 我们将以上讨论整理为定义:

定义 6.4 (∞ 处的 Laurent 展开)

设 ∞ 为 f 的孤立奇点, 则 $f(x)$ 在 ∞ 处的展开是指在圆环: $R < |z| < +\infty$ 上的 Laurent 展开, 其形如 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$. 其中 R 是足够大的正数, 使得满足 f 的所有有限奇点都包含在 $B_R(0)$ 中。



我们当然希望讨论函数在 ∞ 处的奇性, 但是注意到对于 ∞ 处的 Laurent 级数来说, 负幂次的部分才是自然收敛的, 而正幂次的部分是发散的, 因此我们应该给出如下定义:

定义 6.5 (∞ 的奇性)

设 ∞ 为 f 的孤立奇点, 则 f 可以在 ∞ 处展开为 Laurent 级数, 形如 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, 我们称其中的常数项以及正幂次 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 为其主要部分; 称其中的负幂次 $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ 为其解析部分, 那么:

- (1) 我们称 ∞ 为 f 的一个可去奇点, 如果对应的 Laurent 展开中的主要部分为 0;
- (2) 我们称 ∞ 为 f 的一个 m 阶极点, 如果对应的 Laurent 展开中的主要部分有限且最高的正幂次为 m ;
- (3) 我们称 ∞ 为 f 的一个本性奇点, 如果对应的 Laurent 展开中的主要部分有无穷项。



通过定义我们可以看出命题 6.4 对于 ∞ 也成立, 同时我们还有如下的命题:

命题 6.5 (∞ 的奇性的等价刻画)

- (1) ∞ 是 f 的可去奇点的充要条件是 0 是 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的可去奇点或者解析点。
- (2) ∞ 是 f 的 m 阶极点 (本性奇点) 的充要条件是 0 是 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的 m 阶极点 (本性奇点)。



证明 交给读者自己完成。

6.3 全纯和亚纯函数

从上一节的讨论中我们可以看到，函数在非孤立奇点以及本性奇点上的行为是难以预测的，但反过来，可去奇点和极点的行为并不算差。因此我们或许可以放宽函数的解析性要求，允许函数有可去极点和极点，由此我们得到了两个概念：全纯函数和亚纯函数。

定义 6.6 (全纯、亚纯、整函数)

设 $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ 上区域，我们称 f 为 D 上的 **全纯** 函数，若 f 在 D 上只有解析点和可去奇点。
我们称 f 为 D 上的 **亚纯** 函数，若 f 在 D 上只有解析点、可去奇点和极点。
最后，我们称 f 为 **整函数**，如果 f 在 \mathbb{C} 上全纯。

注 注意到我们已经定义过了 ∞ 的奇性，因此我们可以把 ∞ 加入考虑，这就是为什么可以允许 $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ；

其次，我们知道 a 为 f 的极点充要于 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ，因此如果可以将 f 视为一个 $D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 的函数，此时 a 就转为 f 的一个可去奇点（因为极限有定义！），故而 $D \rightarrow \mathbb{C}$ 上亚纯函数相当于 $D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ 的全纯函数。

命题 6.6 (整函数的分类)

设 f 为整函数，若

(1) ∞ 是 f 的可去奇点 $\iff f$ 是常数；

(2) ∞ 是 f 的极点 $\iff f$ 是多项式；

若 ∞ 是 f 的本性奇点，我们称这样的 f 为 **超越整函数**。

证明 既然 f 在全平面全纯，因此我们可以将 f 在 $0 < |z| < +\infty$ 中展开为 Laurent 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ ，根据 Laurent 展开唯一性不难看出这恰好也是 f 在 ∞ 处的 Laurent 展开，直接根据 ∞ 的奇性定义即可得到对应的结论。 \square

命题 6.7 (Weierstrass \implies Weierstrass)

重证一遍值分布版的 Weierstrass 定理，即：若 f 为整函数且不为常数，则 $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$ 。

证明 我们知道 f 现在只能是多项式或者超越整函数。

(1) f 是多项式，我们知道 $\forall w \in \mathbb{C}, f(z) = w$ 必然有根。（代数学基本定理！）因此 f 必然是满射，因此 $f(\mathbb{C})$ 已经是 \mathbb{C} 。

(2) f 是超越整函数，也就是说 f 以 ∞ 为本性奇点，那么根据本性奇点的 Weierstrass 定理，我们有 $\overline{f(\mathbb{C})} \supset \overline{f(B_\epsilon^*(\infty))} = \mathbb{C}$ 。 \square

命题 6.8 (全纯函数环和亚纯函数域)

(1) 全体 D 上的全纯函数在函数四则运算下封闭且构成一个 **环**，称为全纯函数环，记为 $\mathcal{H}(D)$ ；

(2) 全体 D 上的亚纯函数在函数四则运算下构成一个 **域**，称为亚纯函数域，记为 $\mathcal{M}(D)$ 。

证明 证明交给读者，只需注意到对于亚纯函数来说，每个极点都是有限阶的即可。

对于一般的 D 来说计算 $\mathcal{M}(D)$ 是困难的，我们目前有如下结论：

命题 6.9 ($\mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ 的刻画)

$f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ 的充要条件是存在 \mathbb{C} 上的 **多项式** g, h ，使得 $f = \frac{g}{h}$ 。

证明 (\implies) 这里我们需要用到一个事实，即 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的亚纯函数的极点个数是有限的。（请读者自行思考，提示： $\overline{\mathbb{C}}$ 是紧集，所以这件事情在 \mathbb{C} 上反而不对）

那么我们不妨假设 f 在 \mathbb{C} 中的极点为 $a_1 \cdots a_n$, 且对应的阶数分别为 $m_1, \cdots m_n$, 然后我们令

$$g(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n} f(z).$$

这样 $g(z)$ 在 \mathbb{C} 上就再也没有极点了, 因此成为一个整函数。另一方面, 显然 $g(z) \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$, 也就是说 ∞ 不是 $g(z)$ 的本性奇点, 那么根据命题 6.6, $g(z)$ 事实上是一个多项式。因此我们得到了

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n}}.$$

确实是两个多项式的商。

(\Leftarrow) 设 $f = \frac{g}{h}$, 其中 g, h 为多项式且 $\deg g = m$, $\deg h = n$, 我们只需验证两件事:

(1) 首先考察 f 在 \mathbb{C} 上的奇点, 我们知道它们统统来自于分母的零点, 而多项式零点是有有限阶的, 换言之 f 在 \mathbb{C} 的奇点中只可能是极点或者可去奇点。

(2) 继续考察 f 在 ∞ 的奇性, 注意到

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a_m z^m + \cdots}{b_n z^n + \cdots} = \begin{cases} \infty, & \text{若 } m > n \\ \frac{a_m}{b_n}, & \text{若 } m = n \\ 0, & \text{若 } m < n \end{cases}$$

换言之 ∞ 只可能是 f 的可去奇点或者极点。综上可知 $f \in \mathcal{M}(\overline{\mathbb{C}})$ 。

□

第7章 留数

设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 根据定义我们总可以找到 $\delta > 0$ 使得 f 在去心圆盘 $B_\delta^*(a)$ 上解析, 那么我们可以做以下两个操作:

(i) 我们在取简单闭曲线 $\gamma \subset B_\delta^*(a)$, 并计算 $\int_\gamma f(z)dz$;

(ii) 我们在 $B_\delta^*(a)$ 直接计算 $f(z)$ 对应的 Laurent 展开 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$.

最后我们再回顾一下复变函数中学会的第一个积分公式, 即:

(iii)

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1; \\ 0, & \text{else.} \end{cases}, \quad \gamma \text{ 为包围 } a \text{ 的任意闭曲线.}$$

让我们把这三条结合在一起, 我们会得到一个朴素的真相, 即:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_\gamma c_n(z-a)^n dz = c_{-1}$$

因此无论积分理论还是级数理论, 最终都通向一个神秘的系数 c_{-1} , 这个被诅咒被“留下”的系数被称之为留数。

定义 7.1 (留数)

设 a 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 我们取 $\delta > 0$ 使得 f 在去心圆盘 $B_\delta^*(a)$ 上解析, 取任意一条简单闭曲线 $\gamma \subset B_\delta^*(a)$, 记

$$\text{Res}[f(z), a] \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz. \quad (7.1)$$

我们称 $\text{Res}[f(z), a]$ 为 $f(z)$ 在 a 点处的留数。

留数是复变函数理论中的一个核心内容, 事实上不难察觉在复变函数中有一个天然的“三位一体”。

$$\text{积分} \iff \text{级数} \iff \text{留数} \quad \text{那岂不是又水一章}$$

通过学习 Laurent 级数我们知道, Laurent 级数的系数最终都是靠积分得到, 因此积分 \implies 级数;

通过留数的定义我们知道, 留数的本质就是 c_{-1} , 因此级数 \implies 留数;

最后, 通过下一节的留数定理, 我们会了解积分的本质就是在数积分区域里的留数, 因此留数 \implies 积分。

7.1 留数的计算和留数定理

7.1.1 有限奇点的留数

对于 f 的有限孤立奇点, 我们有以下常用的简单公式:

命题 7.1 (留数公式)

设 $a \in \mathbb{C}$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

(1) 若 a 为可去奇点, 则总有 $\text{Res}[f(z), a] = 0$;

(2) 若 a 为 m 阶极点, 则我们有以下计算公式:

$$\text{Res}[f(z), a] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a)^m f(z) \right]^{(m-1)}. \quad (7.2)$$

以上公式被称为 m 阶极点基本公式

证明 (1) 是显然的, 因为根据可去奇点的定义, 函数在 a 处对应的 Laurent 展开没有主部, 那自然有 $c_{-1} = 0$ 。

(2) 由于 a 为 m 阶极点, 故 f 在 a 点处的 Laurent 展开形如

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m}(z-a)^{-m} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + \cdots \\ \implies (z-a)^m f(z) &= c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \cdots \end{aligned}$$

那么根据 Taylor 展开的系数计算公式可知

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a)^m f(z) \right]^{(m-1)}. \quad (7.3)$$

□

除此之外, 对于一阶极点, 以下的公式也是非常常用的:

命题 7.2 (一阶极点留数公式)

设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 在 a 附近解析, 且满足 $P(a) \neq 0, Q(a) = 0$ 但 $Q'(a) \neq 0$, 则

$$\operatorname{Res}[f, a] = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (7.4)$$

♠

证明 容易看出 $Q(a) = 0$ 但 $Q'(a) \neq 0$ 蕴含了 a 为 $Q(z)$ 的一阶零点, 再加之 $P(a) \neq 0$ 故而 a 非 $P(z)$ 的零点, 因此 a 恰好是 $f(z)$ 的一阶极点。

那么根据之前的公式可知

$$\operatorname{Res}[f, a] = \lim_{z \rightarrow a} \left[(z-a) \frac{P(z)}{Q(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow a} P(z) \cdot \frac{z-a}{Q(z)-Q(a)(=0)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}. \quad (7.5)$$

□

值得提醒, 纵然学了这么多公式, 到了实战的时候还是有可能一点也用不上。

招无定式。算留数唯一的思路是: **不择手段**。

例题 7.1 计算以下留数:

- (1) $\operatorname{Res} \left[(z-1)^4 \sin \frac{1}{z-1}, 1 \right];$
- (2) 设 $f = \frac{e^z}{z(z-1)^3}$, 求 $\operatorname{Res}[f, 0]$ 和 $\operatorname{Res}[f, 1];$
- (3) $\operatorname{Res} \left[\frac{z - \sin z}{z^8}, 0 \right];$
- (4) $\operatorname{Res} \left[\frac{z}{1+z^n}, \eta_k \right]$, 其中 η_k 为所有有限奇点;
- (5)* $\operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z^3 \sin z}, 0 \right].$

解 (1) 注意 $z=1$ 是 $(z-1)^4 \sin \frac{1}{z-1}$ 的 **本性奇点**, 因此事实上没有任何公式可以套用, 唯一的办法是直接计算其 Laurent 展开并取系数 c_{-1} 。利用 $\sin z$ 的 Taylor 展开式我们可得 $f(z)$ 的 Laurent 展开形如

$$f(z) = (z-1)^4 \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{6} \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{120} \frac{1}{(z-1)^5} + \cdots \right]$$

不难看出 $c_{-1} = \frac{1}{120}$, 因此 $\operatorname{Res}[f, 1] = \frac{1}{120}$ 。

(2) 由于 0 是 $f(z)$ 的 **一阶极点**, 套用 m 阶极点留数公式可知: $\operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z(z-1)^3}, 0 \right] = \frac{e^z}{(z-1)^3} \Big|_{z=0} = -1$ 。

(**解法一**) 另一方面 $z=1$ 是 **三阶极点**, 套用公式可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[\frac{e^z}{z(z-1)^3}, 1 \right] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{e^z}{z} \right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{ze^z - e^z}{z^2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 e^z - 2z^2 e^z + 2ze^z}{z^4} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

(解法二) 懒狗聪明的读者已经发现死套公式的弊端：需要算分式函数的高阶导数！既然最终目的是求所谓的 c_{-1} ，那有没有可能用 Laurent 更合算的呢？是的。

$$\frac{e^z}{z(z-1)^3} = e^{\frac{z-1}{z-1}} = e^{\frac{e^{z-1}}{(z-1)^3 + (z-1)^4}} \stackrel{\text{Taylor}}{=} e^{\frac{1 + (z-1) + \frac{1}{2}(z-1)^2 + \dots}{(z-1)^3 + (z-1)^4}}$$

容易看出 $\text{Res}[f, 0] = c_{-1} = \frac{e}{2}$

(3) 容易看出 $z=0$ 是 $\frac{z-\sin z}{z^8}$ 的五阶极点。不会有人看出来罢

因此如果直接套用 m 阶极点公式，你需要计算 $\frac{z-\sin z}{z^5}$ 的四阶导数。差不多得子
但其实我们直接求 Laurent 展开即可

$$\frac{z-\sin z}{z^6} = \frac{z - z + \frac{1}{3!}z^3 - \frac{1}{5!}z^5 + \frac{1}{7!}z^7 + \dots}{z^8}$$

直接看出 $\text{Res}[f, 0] = \frac{1}{7!}$ 。别套公式子屁用没有

(4) 如果用常规的做法我们设 η_k 为 $1+z^n=0$ 的 n 个根，如果套 m 阶极点公式，那么

$$\text{Res}\left[\frac{z}{1+z^n}, \eta_k\right] = \text{Res}\left[\frac{z}{\prod_{i=0}^{n-1}(z-\eta_i)}, \eta_k\right] = \frac{\eta_k}{\prod_{i \neq k}(\eta_k - \eta_i)}.$$

这么计算分母依旧不明所以，但其实每个 η_k 都是 f 的一阶极点。这道题其实是提醒大家，一阶极点还有一个常用公式：

$$\text{Res}\left[\frac{z}{1+z^n}, \eta_k\right] = \frac{z}{nz^{n-1}} \Big|_{\eta_k} = \frac{1(=-z^n)}{nz^{n-2}} \Big|_{\eta_k} = -\frac{z^2}{n} \Big|_{\eta_k} = -\frac{\eta_k^2}{n}$$

最后根据开方公式我们知道 $\eta_k = e^{i\frac{2k+1}{n}\pi}, k=0, \dots, n-1$ 可知 $\text{Res}\left[\frac{z}{1+z^n}, \eta_k\right] = -\frac{1}{n}e^{i\frac{4k+2}{n}\pi}, k=0, \dots, n-1$ 。

(5)* 本题是 2021 年秋季学期期末填空题。死得可惨了，没几个会做

注意到 $z=0$ 是 $f(z) = \frac{e^z}{z^3 \sin z}$ 的四阶极点，因此直接套用公式计算量巨大，但同时对应的 Laurent 展开也不好求。但记住一件事，我们不需要 Laurent，我们需要的只是 c_{-1} 。回看 $f(z)$ ：

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3 \sin z} = \frac{e^z}{z^4(1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \dots)} \triangleq \frac{1}{z^4}\varphi(z).$$

我们虽然不知道 $\varphi(z)$ 是什么，但是我么知道它在 $z=0$ 附近必然是解析的，因此本题转化为求

$$\varphi(z) = \frac{e^z}{1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \dots}$$

对应的 Taylor 展开中的三阶系数 C_3 。因为我们对 $\varphi(z)$ 细节一无所知，我们采用待定系数法，设 $\varphi(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$ ，带入上式有

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \dots} &= c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots \\ \iff 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots &= (1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 + \dots)(c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots) \end{aligned}$$

利用多项式相等则所有对应系数必须相等。比较上式的各阶系数我们可以求出 c_k 。

(i) 比较常数项可知 $c_0 = 1$;

(ii) 比较一阶项可知 $c_1 = 1$;

(iii) 比较二阶项可知 $-\frac{1}{6}c_0 + c_2 = \frac{1}{2} \implies c_2 = \frac{2}{3}$;

(iv) 比较三阶项可知 $-\frac{1}{6}c_1 + c_3 = \frac{1}{6} \implies c_3 = \frac{1}{3}$ 。

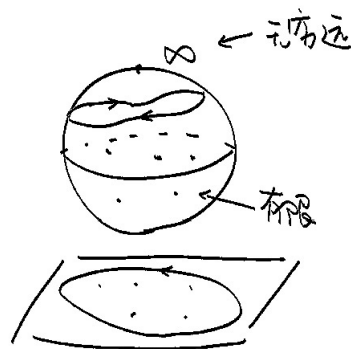
故而我们知道 $\text{Res}[f, 0] = c_3 = \frac{1}{3}$ 。

□

7.1.2 无穷远点的留数

我们知道, 无穷远点作为所有复变函数的天然奇点, 如果它是孤立奇点, 我们可以仿照正常孤立奇点的做法定义其留数: 首先我们可以找一条复平面上的简单闭曲线 γ 包住 $f(z)$ 的所有有限奇点 (因为 ∞ 孤立)。

但注意到事实上这条曲线有两种含义: 它一边围住了所有有限奇点, 但另一边也“围住”了 ∞ 。对于其内部的点来说它是正定向的曲线, 但 ∞ 事实上在曲线的外部, 因此从 ∞ 的角度来说它天然就应该是反定向的。请读者结合复球面模型对此进行理解, 根据以上分析我们给出下述定义:



定义 7.2 (∞ 处的留数)

设 f 以 ∞ 为孤立奇点, 我们定义 f 在 ∞ 处的留数为

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz. \quad (7.6)$$

其中 c_{-1} 对应于 $f(z)$ 在 ∞ 处的 Laurent 展开的 -1 项系数, 而 γ 是任意包围 f 的所有有限奇点的简单闭曲线。

直接从定义出发求留数大部分时候并不方便, 关于 ∞ 处的留数我们有以下便捷公式:

命题 7.3 (∞ 留数公式)

设 f 以 ∞ 为孤立奇点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right]. \quad (7.7)$$

证明 我们设 f 在 ∞ 的去心邻域上的 Laurent 展开形如

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n = \cdots c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots. \quad (7.8)$$

我们知道所要的留数其实就是 $-c_{-1}$, 另一方面, 用 $\frac{1}{z}$ 替换 z 带入上式并乘以 $\frac{1}{z^2}$ 得到:

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \cdots + c_{-1} z + c_0 + c_1 \frac{1}{z} + \cdots \implies f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} = \cdots + c_{-1} \frac{1}{z} + c_0 \frac{1}{z^2} + c_1 \frac{1}{z^3} + \cdots \quad (7.9)$$

注意到 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域的 Laurent 展开恰好就是 $f(\frac{1}{z})$ 在 0 的去心邻域的 Laurent 展开, 由上式直接可以看出 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right]$. \square

7.1.3 留数定理以及留数和定理

关于留数我们给出两个相当重要的定理:

定理 7.1 (留数定理)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线, $f(z)$ 在 γ 上连续, 在 γ 内部只有有限个孤立奇点, 不妨设为 z_1, \dots, z_n , 那么:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \quad (7.10)$$

证明 证明是直接了当的, 由于 z_1, \dots, z_n 皆为孤立奇点, 故而我们可以选取适当的半径 r_k 使得 $C_{r_k}(z_k)$ 皆在 γ 内部同时还两两不交, 换言之 $\gamma + C_{r_1}^-(z_1) + \cdots + C_{r_n}^-(z_n)$ 构成一个 Jordan 曲线族, 那么根据闭路连续形变原理可知:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_{r_k}^-(z_k)} f(z) dz \stackrel{\text{根据留数定义}}{=} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \quad (7.11)$$

\square

定理 7.2 (留数和定理)

设 f 在 \mathbb{C} 上只有孤立奇点, 则:

$$\sum_{\text{有限奇点}} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0. \quad (7.12)$$



证明 由于所有奇点孤立, 包括 ∞ , 因此可做一条简单闭曲线将 $f(z)$ 的所有有限奇点和 ∞ 隔开。我们知道现在 γ 有两重含义: 它可以视为是包住了所有有限奇点的曲线, 也可以视为只包住的 ∞ 的曲线, 而且 γ 对于两边的定向恰好相反, 那么根据留数定理, 我们不难得到:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{有限奇点}} \operatorname{Res}[f(z), z_k] \quad (7.13)$$

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] \quad (7.14)$$

两式相加即得结论。 \square

通过这两个定理配合, 我们可以处理一些相对复杂的积分计算, 技巧是通过无穷远点过渡留数。

例题 7.2 求 $\int_{\gamma} \frac{z}{z^{16}-1} dz$, 其中 γ 为 $|z|=2$ 取正向。

解 我们知道函数在 γ 内部有 16 个一阶极点, 因此直接计算并不合适, 但是注意到函数的所有有限奇点也就是这 16 个奇点, 因此通过留数和定理, 我们有:

$$\begin{aligned} I &\stackrel{\text{留数定理}}{=} 2\pi i \sum_{\text{有限奇点}} \operatorname{Res}[f(z), z_k] \stackrel{\text{留数和定理}}{=} -2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] \\ &\stackrel{\text{无穷远点留数公式}}{=} 2\pi i \operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}, 0\right] = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{z^{13}}{1-z^{16}}, 0\right]. \end{aligned} \quad (7.15)$$

容易看出 $z=0$ 是该函数的解析点, 因此留数自动为零, 故而上式积分为 0。 \square

7.2 利用留数计算实定积分

作为留数理论的一类重要应用, 本节将介绍一些通过留数计算实定积分的办法。这里涉及的定积分主要是被积函数的原函数不能用初等函数表示的积分, 在数学分析中我们一般采用含参变量积分的办法, 但是这类办法一般比较复杂, 而通过复变函数留数理论来求这类积分, 则有统一的套路。

举例来说本节主要针对的是 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 这种积分, 其中 $f(x)$ 需要满足某些条件, 具体过程分为四步:

- (1) 先选取一个复函数 $F(z)$ 满足 $F(x) = f(x)$ 或者至少 $\operatorname{Re} F(x) = f(x)$;
- (2) 在复平面上选取一个闭的积分路径 γ , 使得实轴区间 $[-R, R]$ 是 γ 的一部分;
- (3) 设 γ 围成的区域为 D , 利用留数定理计算 $\int_{\gamma} F(z) dz$;
- (4) 最后令 $R \rightarrow +\infty$, 并估计 $F(z)$ 在 γ 上其它路径的积分。

针对第四条, 我们需要介绍两个引理:

引理 7.1 (弧上积分的估计 part1)

设 $C_R = \{z \mid z = Re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, 其中 $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, 即 C_R 为一段半径为 R 的角度从 θ_1 转至 θ_2 的圆弧。若 $f(z)$ 满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = \lambda$, 则

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = i\lambda(\theta_2 - \theta_1). \quad (7.16)$$



证明 注意到

$$\lambda \int_{C_R} \frac{dz}{z} \stackrel{\text{极坐标}}{=} \lambda \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{iRe^{i\theta}}{Re^{i\theta}} d\theta = i\lambda(\theta_2 - \theta_1). \quad (7.17)$$

故而只需证明

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = \lambda \int_{C_R} \frac{dz}{z} \iff \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{C_R} \left(f(z) - \frac{\lambda}{z} \right) dz \right| = 0.$$

而根据 $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = \lambda$, 可知 $\forall \epsilon > 0$, 当 R 充分大后总有 $\max_{z \in C_R} |zf(z) - \lambda| < \epsilon$, 因而:

$$\left| \int_{C_R} \left(f(z) - \frac{\lambda}{z} \right) dz \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \max_{z \in C_R} \left| f(z) - \frac{\lambda}{z} \right| \cdot R(\theta_2 - \theta_1) = \max_{z \in C_R} |zf(z) - \lambda|(\theta_2 - \theta_1) < \epsilon(\theta_2 - \theta_1). \quad (7.18)$$

故而命题得证。 \square

当然我们用的最多的是以下版本:

推论 7.1 (半圆估计)

取 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 若 $f(z)$ 满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} zf(z) = 0$, 则 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$.



引理 7.2 (Jordan, 弧上积分的估计 part2)

设 C_R 的定义和引理 7.1 中一致, 并取 $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$, 若 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 则有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0, \quad \alpha > 0 \in \mathbb{R}. \quad (7.19)$$



证明 证明技巧和引理 7.1 类似, 但是我们需要一些精妙的三角不等式让我们的估计得更准确。首先我们指出有以下事实:

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (7.20)$$

这个事实可以从几何上直接看出, 或者定义函数 $f(\theta) = \sin \theta - \frac{2\theta}{\pi}$ 并证明其在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 开口向下。

回到最命题, 我们利用极坐标可以改写公式

$$\int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{i\alpha Re^{i\theta}} \cdot iRe^{i\theta} d\theta. \quad (7.21)$$

其中

$$e^{i\alpha Re^{i\theta}} = e^{i\alpha R(\cos \theta + i \sin \theta)} = e^{-\alpha R \sin \theta} \cdot e^{i\alpha R \cos \theta} \implies |e^{i\alpha Re^{i\theta}}| = e^{-\alpha R \sin \theta}.$$

由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 故而对于 $\forall \epsilon > 0$, 当 R 足够大后都有 $\max_{z \in C_R} |f(z)| < \epsilon$.

把上述的结论结合起来我们得到

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \stackrel{\text{模长不等式}}{\leq} \max_{z \in C_R} |f(z)| \cdot R \int_0^\pi |e^{i\alpha Re^{i\theta}}| d\theta < \epsilon R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta. \quad (7.22)$$

而对于等式右边那项积分我们有如下估计:

$$\int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \stackrel{\text{对称性}}{=} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \stackrel{(7.20)}{\leq} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\alpha R \theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi}{\alpha R} e^{-\frac{2\alpha R \theta}{\pi}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}) < \frac{\pi}{\alpha R}. \quad (7.23)$$

带入 (7.22) 可知 $\left| \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow +\infty$. \square

利用以上两个引理, 我们来具体处理三类实积分:

7.2.1 形如 $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ 的积分

命题 7.4 (第一类积分公式)

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz}. \quad (7.24)$$

证明 在单位圆周上令 $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 我们不难得到以下公式:

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}; \\ \sin \theta = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz}; \\ d\theta = \frac{dz}{iz}. \end{cases} \quad (7.25)$$

带入原始积分中即得公式 (7.24)。本质上我们把实积分化归成一个单位圆上的复积分。 \square

例题 7.3 计算 $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+4\cos \theta}$.

解

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos \theta} = \int_{|z|=1} \frac{1}{5+4 \cdot \frac{z^2+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2} dz = \frac{1}{2i} \int_{|z|=1} \frac{1}{(z+\frac{1}{2})(z+2)} dz.$$

注意到只有 $z = -\frac{1}{2}$ 在单位圆周内部, 根据留数定理, 得

$$\text{原积分} = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z+\frac{1}{2})(z+2)}, -\frac{1}{2}\right] = \pi \cdot \frac{1}{z+2} \Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}.$$

一个很显然但却容易被遗忘的事实: 因为原题是实积分, 因此**答案一定是实数**。如果算出非实数的答案, 请务必检查。

7.2.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的积分, 其中 f 满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$

命题 7.5 (第二类积分公式)

若 f 满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} z f(z) = 0$, 且在实轴上解析, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \quad (7.26)$$

其中 z_k 为 $f(z)$ 在上半平面内的所有孤立奇点。

证明 我们在复平面上取如右图的闭路径, 由两段组成, 一段是实轴 $[-R, R]$, 一段是以原点为圆心, 以 R 为半径的圆周。我们称路径围成的区域为 D , 并将该路径记为 ∂D 。利用留数定理我们知道:

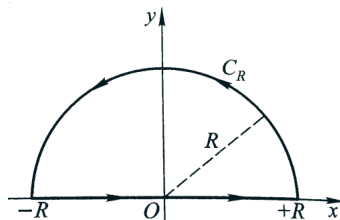
$$\int_{C_R} f(z) dz + \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_D \operatorname{Res}[f(z), z_k]. \quad (7.27)$$

其中 z_k 为 $f(z)$ 在 D 中的全体孤立奇点。现在令 $R \rightarrow +\infty$, 我们知道 D 的极限是上半平面, 而根据推论 7.1, 我们有

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \quad (7.28)$$

综合一下我们就得到了积分公式。 \square

而我们会经常遇到的是下述特殊情形:



推论 7.2

假设 $P(x)$ 、 $Q(x)$ 为多项式, 且满足: (1) $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$; (2) $Q(x)$ 在实轴上无根。则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res} \left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_k \right]. \quad (7.29)$$

其中 z_k 为 $Q(z)$ 在上半平面中的所有零点。



证明 令 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, 只需注意到 $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$ 保证了 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$ 即可。

例题 7.4 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$, 其中 $a > 0 \in \mathbb{R}$ 。

解 利用偶函数的特性我们知道 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4}$ 。令 $P(z) = 1, Q(z) = z^4 + a^4$, 容易验证: (1) $\deg Q(x) \geq \deg P(x) + 2$; (2) $Q(z)$ 在实轴无根。故而套用公式可知

$$\text{原积分} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + a^4} = \pi i \operatorname{Res} \left[\frac{1}{z^4 + a^4}, z_k \right]$$

其中 z_k 为 $x^4 + a^4$ 在上半平面的零点, 即 $z_1 = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ 以及 $z_2 = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$, 它们都是 $Q(z)$ 的一阶极点, 即 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点, 那么再套用一下 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 型一阶极点公式, 得:

$$\text{原积分} = \pi i \left(\frac{1}{4z^3} \Big|_{ae^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{ae^{i\frac{3\pi}{4}}} \right) = \frac{\pi i}{4a^3} (e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{\pi i}{4a^3} (-\sqrt{2}i) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4a^3}.$$

□

7.2.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$ 或 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$ 的积分, 其中 f 满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 0$

命题 7.6 (第三类积分公式)

若 $\alpha > 0$ 以及 f 满足 $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 0$, 且在实轴上解析, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k] \right\} = -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k] \right\}. \quad (7.30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k] \right\} = 2\pi \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k] \right\}. \quad (7.31)$$

其中 z_k 为 $f(z)$ 在上半平面内的所有孤立奇点。



证明 只需注意到 $f(x) \cos(\alpha x) = \operatorname{Re}(f(x)e^{i\alpha x})$ 以及 $f(x) \sin(\alpha x) = \operatorname{Im}(f(x)e^{i\alpha x})$ 即可。证明方式和第二类积分公式完全一致, 只是需要把用到的引理从 7.1 换成 7.2 Jordan 引理即可。请读者自行完成证明。

例题 7.5 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{1+x^2} dx$, 其中 $m > 0 \in \mathbb{R}$ 。

解

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{1+x^2} dx \stackrel{\text{偶函数}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} \cdot e^{imx} dx.$$

令 $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, 容易验证 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ 以及 $f(z)$ 在实轴上解析, 那么根据命题 7.6, 得:

$$\begin{aligned} \text{原积分} &= \frac{1}{2} \cdot (-2\pi) \operatorname{Im} \left\{ \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{Res} \left[\frac{e^{imz}}{z^2+1}, z_k \right] \right\} \\ &= -\pi \operatorname{Im} \left\{ \operatorname{Res} \left[\frac{e^{imz}}{z^2+1}, i \right] \right\} = -\pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{imz}}{z+i} \Big|_{z=i} \right\} = \frac{\pi}{2} e^{-m}. \end{aligned}$$

□

我们这里需要指出, 第二类和第三类积分事实上可以把条件放宽: 可以允许被积函数在实轴有一阶极点, 这样对应的公式中会出现在这些极点处的半留数。我们需要将引理 7.1 略微改造并证明以下引理:

引理 7.3 (半留数)

设 $C_r = \{z \mid z = a + re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$, 若 a 为 f 的一阶极点且 $\text{Res}[f, a] = A$, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = iA(\theta_2 - \theta_1). \quad (7.32)$$

作为特例, 令 $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, 得到

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i\pi A = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \text{Res}[f, a]. \quad (7.33)$$

这种情况下我们称 f 在 C_r 上贡献了半留数。



具体的证明和引理 7.1 几乎一致, 留给读者。如果第二类积分和第三类积分在实轴出现了一阶极点, 我们只需在这些极点处做小半圆绕过即可, 而根据半留数引理可知, 函数在这些小半圆上贡献处半留数, 因此我们可以将两类积分公式进行推广。

命题 7.7 (第二类和第三类积分公式的推广)

若第二类和第三类积分中被积函数在实轴上出现一阶极点, 则公式转变为:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{Res}[f(z), z_k] + \pi i \sum_{\text{实轴}} \text{Res}[f(z), w_l]. \quad (7.34)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = \text{Re} \left\{ 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k] + \pi i \sum_{\text{实轴}} \text{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, w_l] \right\}. \quad (7.35)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = \text{Im} \left\{ 2\pi i \sum_{\text{上半平面}} \text{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, z_k] + \pi i \sum_{\text{实轴}} \text{Res}[f(z)e^{i\alpha z}, w_l] \right\}. \quad (7.36)$$



例题 7.6 (Dirichlet 积分) 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

解 我们知道被积函数是偶函数, 因此不难得到

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx. \quad (7.37)$$

令 $f(z) = \frac{1}{z}$, 容易验证 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$, 同时 $f(z)$ 在上半平面并没有奇点, 但是在实轴上有一个一阶极点 $z = 0$, 那么根据推广公式得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \text{Res} \left[\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right] = \pi i. \quad (7.38)$$

因此得到 $I = \frac{1}{2} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 此即著名的 Dirichlet 积分结果。

□

7.2.4 * 和多值函数相关的积分

在介绍初等函数的时候我们提到, 诸如 $\text{Ln } z$ 、 \sqrt{z} 、 a^z 这样的在数分中常见的函数, 它们的复数版事实上都已经不是“函数”了, 但我们在计算实积分的时候又经常会碰到它们。事实上只要取好了正确的路径, 我们依然有办法处理这些积分, 这部分的题目没有统一解法, 我们直接来看例子吧。

例题 7.7 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$, 其中 $0 < p < 1$ 。

解 首先我们令 $f(z) = \frac{(z^{p-1})_0}{1+z} = \frac{e^{p-1} \ln z}{1+z}$, 这里 $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ 在 $\mathbb{C} \setminus x$ 轴上解析, 因此 $f(z)$ 在这个区域内有确定的函数值 (不让转圈, 因此不再多值)。

我们将这个区域改造为如右图所示的“钥匙孔”区域, 该区域边界 γ 由四段组成: l_1, l_2, C_R, C_r , 其中 $R \rightarrow +\infty$ 而 $r \rightarrow 0$, 根据留数定理我们有:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{C_R} + \int_{C_r}.$$

接下来依次分析每项的结算结果:

(i) 我们申明有 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} = 0$, 直接利用模长不等式:

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right| \leq \max_{z \in C_R} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z} \right| \cdot 2\pi R \leq \frac{R^{p-1}}{R-1} \cdot 2\pi R = 2\pi \frac{R^p}{R-1} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. (\text{因为 } p < 1)$$

$$\left| \int_{C_r} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz \right| \leq \max_{z \in C_r} \left| \frac{z^{p-1}}{1+z} \right| \cdot 2\pi r \leq \frac{r^{p-1}}{1-r} \cdot 2\pi r = 2\pi \frac{r^p}{1-r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. (\text{因为 } p > 0)$$

(ii) $\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_1} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$.

(iii) 注意到在 l_2 上实际上有 $z = x \cdot e^{2\pi i}$, 且直线方向反向。虽然乍看之下 $e^{2\pi i} = 1$, 但是一旦我们带入公式中则不见得总会消去, 事实上我们有:

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_2} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = \int_0^{+\infty} \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}} \cdot e^{2\pi i} dx = -(e^{2\pi i})^{p-1} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

(iv) 最后, 我们注意到在钥匙孔区域中 $f(z) = \frac{(z^{p-1})_0}{1+z}$ 有唯一奇点 $z = 1$, 则根据留数定理可知:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{(z^{p-1})_0}{1+z}, -1 \right] = 2\pi i (-1)^{p-1}.$$

综合 (i)-(iv) 的计算结果我们最终得到:

$$\begin{aligned} 2\pi i (-1)^{p-1} &= \left[1 - (e^{2\pi i})^{p-1} \right] \cdot \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx \\ \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx &= 2\pi i \cdot \frac{e^{i(p-1)\pi}}{1 - e^{2i(p-1)\pi}} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{-1(p-1)\pi} - e^{i(p-1)\pi}} = -\frac{\pi}{\sin(p-1)\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \end{aligned}$$

□

注 该积分事实上和 beta 函数相关, 我们重温 beta 函数的定义:

$$B(p, q) \triangleq \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx. \quad (7.39)$$

在上式中我们令 $q = 1 - p$ 同时令 $t = \frac{x}{1-x}$, 不难得到

$$B(p, 1-p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{-p} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (7.40)$$

我们知道 Beta 函数和 Γ 函数之间有如下关系:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (7.41)$$

结合在一起我们得到了著名的公式: 余元公式。

引理 7.4 (余元公式)

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \quad (7.42)$$

♡

通过上述例题我们发现“钥匙孔”区域对付像 $\ln z$ 或者 \sqrt{z} 这样的多值函数有奇效, 因为挖掉了 x 轴正半轴后它们都转为了解析函数, 但是“钥匙孔”区域也不一定是万能的。

例题 7.8 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$.

解 (解法一) 我们首先尝试再用一次“钥匙孔”区域, 路径请参考上题。当然我们会令 $f(z) = \frac{\ln z}{1+z^2}$ 但经过尝试我们发现

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_1} f(z) dz &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx \\ \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_2} f(z) dz &\stackrel{z=xe^{2\pi i}}{\text{积分反向}} - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xe^{2\pi i})}{1+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

两个路径积分相加我们发现需要求的那个积分居然被消掉了, 所以这个思路看似是不可行的。

但问题并不是出在“钥匙孔”路径, 而是在于选取的函数 $f(z)$ 上。既然 l_1 和 l_2 上的积分有对消的可能, 那我们为什么不利用这个对消?

事实上我们应该定义 $f(z) = \frac{\ln^2 z}{1+z^2}$, 刚开始肯定一头雾水, 但是我们很快会看到这样定义的好处。我们也依次分析每条路径上的积分情况:

$$(i) \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz = \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{C_r} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz = 0. \text{ 事实上还是放缩, 注意到}$$

$$\max_{z \in C_R} |\ln^2 z| = \max_{z \in C_R} |\ln z|^2 < (\ln R)^2 + 4\pi^2 \quad (\text{因为 } \arg z < 2\pi)$$

故而

$$\left| \int_{C_R} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz \right| \leq \max_{z \in C_R} \left| \frac{\ln^2 z}{1+z^2} \right| \cdot 2\pi R < \frac{(\ln R)^2 + 4\pi^2}{R^2 - 1} \cdot 2\pi R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\left| \int_{C_r} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz \right| \leq \max_{z \in C_r} \left| \frac{\ln^2 z}{1+z^2} \right| \cdot 2\pi r < \frac{(\ln r)^2 + 4\pi^2}{1-r^2} \cdot 2\pi r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_1} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx, \text{ 这确实不是我们要的积分。但是你先别急但我们同时还有}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_2} \frac{\ln^2 z}{1+z^2} dz &\stackrel{z=xe^{2\pi i}}{\text{积分反向}} = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x e^{2\pi i}}{1+x^2} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{1+x^2} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^2} dx - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + 2\pi^3. \end{aligned}$$

我们要的积分终于现身, 这是因为这次被消掉的是二次项, 而线性项被保留下来了。最后根据留数定理有:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} + \int_{C_r} + \int_{l_1} + \int_{l_2} &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left[\frac{\ln^2 z}{1+z^2}, i \right] + \operatorname{Res} \left[\frac{\ln^2 z}{1+z^2}, -i \right] \right) \\ \Rightarrow -4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + 2\pi^3 &= 2\pi i \left(\frac{\ln^2 z}{z+i} \Big|_{z=i} + \frac{\ln^2 z}{z-i} \Big|_{z=-i} \right) \end{aligned}$$

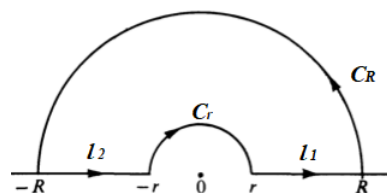
注意到 $\ln i = \frac{\pi i}{2}$ 而 $\ln -i = \frac{3\pi i}{2}$, 带入上式得

$$-4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + 2\pi^3 = \pi \left(\frac{-\pi^2}{4} - \frac{-9\pi^2}{4} \right) = 2\pi^3 \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

(解法二) 我们之前说过“钥匙孔”区域也不是万能的, 事实上本题也可以选别的区域, 只需要保证这个区域内部不含实轴正半轴即可, 比如我们可以取右图的区域, 即取上半平面但要求在零点处绕开一个小洞。

直觉上你可能会认为这样 l_1 和 l_2 上的积分不是抵消了吗, 但事实上只有试过才知道。直觉信不了一点。

这回我们取回原函数 $f(z) = \frac{\ln z}{1+z^2}$, 分析每一条路径上的积分:



$$(i) \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z^2} dz = \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{C_r} \frac{\ln z}{1+z^2} dz = 0, \text{ 技巧一样, 不再重复.}$$

$$(ii) \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_1} \frac{\ln z}{1+z^2} dz = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

$$(iii) \lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{l_2} \frac{\ln z}{1+z^2} dz \stackrel{\substack{z=xe^{\pi i} \\ \text{积分反向}}}{=} - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xe^{\pi i})}{1+(xe^{\pi i})^2} e^{\pi i} dx \\ = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \pi i \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \frac{\pi^2 i}{2}.$$

因为这回只转了半圈, 因此积分因子多了一个 $e^{\pi i}$, 反倒负负得正了。我靠数学真是太卑鄙了。最后根据留数定理 (这回留数只有在 $z=i$ 处了!) 我们得到

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} + \int_{C_r} + \int_{l_1} + \int_{l_2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left[\frac{\ln z}{1+z^2}, i \right] \\ \Rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx + \frac{\pi^2 i}{2} = 2\pi i \cdot \frac{\ln z}{z+i} \Big|_{z=i} = \frac{\pi^2 i}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0.$$

□

7.2.5 * 和 e^{-x^2} 相关的积分

这一块题目技巧度较高, 且没有统一的处理办法, 需要针对每道题改变积分路径。我们先从 e^{-x^2} 在实轴上的积分说起, 这就是统计学上最出名的公式: Gauss 积分公式。辱统计子

命题 7.8 (Gauss 积分)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (7.43)$$



证明 证明的办法是不少, 最简单的一种是利用重积分技巧, 我们将积分平方并换元:

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \stackrel{\text{写成重积分}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ \stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr \right] d\theta = 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{+\infty} \right) = \pi \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

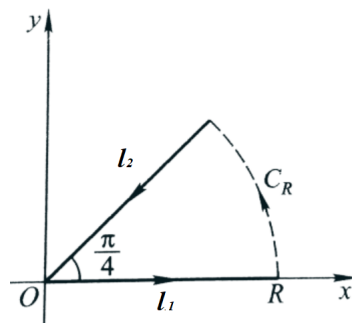
□

例题 7.9 (Fresnel 积分) 计算 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ 以及 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$

解 注意到要求的两个积分恰好分别是 $\int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx$ 的实部和虚部, 因此可以一起计算。我们取闭路径 γ 为一个第一象限的 45 度扇形, 具体参考右图。令 $f(z) = e^{iz^2}$, 由于 f 在全平面解析, 故而有

$$0 = \int_{\gamma} e^{iz^2} dz = \int_{l_1} e^{iz^2} dz + \int_{l_2} e^{iz^2} dz + \int_{C_R} e^{iz^2} dz.$$

接下来我们依次分析每条路径上的积分:



(i) 首先我们验证 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0$, 我们可以利用极坐标:

$$\begin{aligned} \int_{C_R} e^{iz^2} dz &\stackrel{\text{极坐标}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{i(Re^{i\theta})^2} \cdot iRe^{i\theta} d\theta \\ &= iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} e^{i\theta} d\theta = iR \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2\theta} e^{i(\theta + R^2 \cos 2\theta)} d\theta \\ &\Rightarrow \left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta \end{aligned}$$

注意到我们在证明 Jordan 引理时用过的公式

$$\sin 2\theta \geq \frac{4\theta}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

带入上式得

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iz^2} dz \right| &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4\theta}{\pi} R^2} d\theta = \frac{-\pi}{4R} e^{-\frac{4\theta}{\pi} R^2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \\ &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0. \end{aligned}$$

(ii) 注意到在 l_2 上有 $z = x \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}, 0 \leq x \leq R$, 且路径取反向, 故而

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{l_2} e^{iz^2} dz = - \int_0^{+\infty} e^{i(x \cdot e^{i\frac{\pi}{4}})^2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} dx = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \stackrel{\text{Gauss 积分}}{=} -e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(iii) 最后注意到 $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{l_1} e^{iz^2} dz = \int_0^{+\infty} e^{iz^2} dz$, 再加之以上所有结论, 我们有

$$\int_0^{+\infty} e^{iz^2} dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

最后分别取实部和虚部, 即可得到

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}.$$

□

例题 7.10 (Poisson 积分) 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx$.

解 我们取闭路径 γ 为一个高为 $\frac{1}{2}$ 的长方形, 具体参考右图。

令 $f(z) = e^{-z^2}$ (注意, 不是 $e^{-z^2} e^{iz}$!), 由于 f 在全平面解析, 故我们有

$$0 = \int_{\gamma} e^{-z^2} dz = \sum_{i=1}^4 \int_{l_i} e^{-z^2} dz.$$

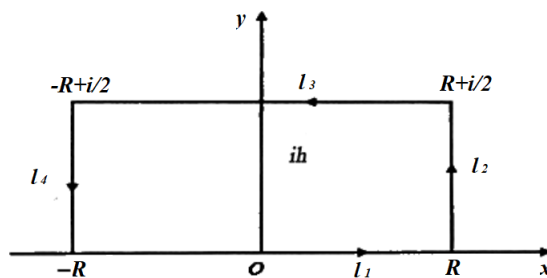
接下来我们依次分析每条 l_i 上的积分:

(i) 我们申明 $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{l_2} e^{-z^2} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{l_4} e^{-z^2} dz = 0$.

注意到在 l_2 上 $z = R + yi, 0 < y < \frac{1}{2}$, 带入计算:

$$\begin{aligned} \int_{l_2} e^{-z^2} dz &\stackrel{\substack{z=R+yi \\ dz=idy}}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-(R+yi)^2} i dy = i \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-R^2+y^2-2Ryi} dy \\ &\Rightarrow \left| \int_{l_2} e^{-z^2} dz \right| \leq e^{-R^2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{y^2} dy \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

最后趋于零是由于 $e^{-R^2} \rightarrow 0$ 而后者积分有限。同理我们也可以得到 $\left| \int_{l_4} e^{-z^2} dz \right| \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$



(ii) 注意到在 l_3 上 $z = x + \frac{i}{2}$, $-R \leq x \leq R$, 且路径是从右向左, 于是

$$\begin{aligned} \int_{l_3} e^{-z^2} dz &\stackrel{z=x+\frac{i}{2}}{=} \int_R^{-R} e^{-(x+\frac{i}{2})^2} dx = -e^{\frac{1}{4}} \int_{-R}^R e^{-ix} e^{-x^2} dx \\ &= -e^{\frac{1}{4}} \int_{-R}^R e^{-x^2} (\cos x + i \sin x) dx \stackrel{\text{奇函数}}{=} -e^{\frac{1}{4}} \int_{-R}^R e^{-x^2} \cos x dx. \end{aligned}$$

(iii) 最后根据 $\int_{l_1} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$, 结合以上所有结论, 再令 $R \rightarrow +\infty$, 我们得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx = e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \stackrel{\text{Gauss 积分}}{=} e^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}.$$

□

7.3 辐角原理和 Rouché 定理

作为留数理论的另一个重要应用, 本节让我们用留数定理来证明辐角原理和 Rouché 定理, 让我们从一个有趣的积分谈起。

定义 7.3 (对数留数)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线, f 在 γ 上解析且不为 0, 我们称

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (7.44)$$

为 $f(z)$ 关于 γ 的 **对数留数**。



对数留数事实上只和 f 在 γ 内的零点信息和极点信息相关, 我们先证明以下引理:

引理 7.5

- (1) 设 a 为 f 的 n 阶零点, 则 a 为 $\frac{f'}{f}$ 的一阶极点, 且 $\text{Res} \left[\frac{f'}{f}, a \right] = n$;
- (2) 设 b 为 f 的 m 阶极点, 则 b 为 $\frac{f'}{f}$ 的一阶极点, 且 $\text{Res} \left[\frac{f'}{f}, b \right] = -m$ 。



证明 (1) 由于 a 为 f 的 n 阶零点, 故在 a 的某个邻域 U 上 $f(z)$ 可以写为 $f(z) = (z-a)^n \varphi(z)$, 其中 φ 在 U 上解析且 $\varphi(a) \neq 0$, 因此不难计算得到:

$$\frac{f'}{f} = \frac{n(z-a)^{n-1} \varphi + (z-a)^n \varphi'}{(z-a)^n \varphi} = \frac{n}{z-a} + \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

由于 $\varphi(a) \neq 0$ 且解析, 故可以假设在 U 上 φ 恒不为 0 (不然再把邻域缩小), 这样 $\frac{\varphi'}{\varphi}$ 在 U 上解析, 那么容易看出 a 是 $\frac{f'}{f}$ 的一阶极点, 且 $\text{Res} \left[\frac{f'}{f}, a \right] = n$ 。

(2) 证明和 (1) 几乎一样, 但注意到现在 b 是 m 阶极点, 故而在某个 b 的邻域上存在解析的 ψ , $\psi(b) \neq 0$, 使得 $f(z) = (z-b)^{-m} \psi(z)$, 同时:

$$\frac{f'}{f} = \frac{-m(z-b)^{-m-1} \psi + (z-b)^{-m} \psi'}{(z-b)^{-m} \psi} = \frac{-m}{z-b} + \frac{\psi'}{\psi}.$$

这样也不难看出 b 是 $\frac{f'}{f}$ 的一阶极点, 且 $\text{Res} \left[\frac{f'}{f}, b \right] = -m$ 。

□

命题 7.9 (对数留数公式)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线, f 在 γ 上解析且不为 0, 在 γ 内亚纯, 则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N(f, \gamma) - P(f, \gamma). \quad (7.45)$$

其中 $N(f, \gamma)$ 为 f 在 γ 内全体零点阶数之和, $P(f, \gamma)$ 为 f 在 γ 的全体极点阶数之和。

证明 由于 f 在 γ 内亚纯, 故而所有的奇点只有极点和可去奇点。那么根据引理, 我们假设 f 在 γ 内的零点分别为 $\{a_k\}$, 且 a_k 的零点阶数为 n_k ; 在 γ 内的极点分别为 $\{b_l\}$, 且 b_l 的极点阶数为 m_l 。由引理可知, $\frac{f'}{f}$ 在 γ 内只有一阶极点, 且恰为所有的 a_k 以及 b_l , 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k \operatorname{Res} \left[\frac{f'}{f}, a_k \right] + \sum_l \operatorname{Res} \left[\frac{f'}{f}, b_l \right] \stackrel{\text{引理}}{=} \sum_k n_k - \sum_l b_l = N(f, \gamma) - P(f, \gamma).$$

□

例题 7.11 求 $\int_{\gamma} \tan z dz$, 其中 γ 为 $|z| = 2$ 正向。

解 本题其实有别的做法, 但让我们用对数留数公式来处理, 注意到 $(\cos z)' = -\sin z$, 因此对于 $\tan z$ 的积分实际上可以看成是在算 $\cos z$ 的负对数留数, 于是

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tan z dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\cos z)'}{\cos z} dz \stackrel{\text{对数留数公式}}{=} -N(\cos z, \gamma) + P(\cos z, \gamma) = -2.$$

换言之 $\int_{\gamma} \tan z dz = -4\pi i$ 。

□

在这里我们需要对对数留数进行一些分析, 我们将指出: 对数留数实际上跟之前章节中的概念息息相关, 即便是沿曲线的辐角差和环绕数, 让我们再复习一遍这两个概念:

定义 7.4 (沿曲线的辐角差和环绕数)

设 γ 为一条连续闭曲线, 我们在曲线上任取一点 z_0 , 并从 z_0 出发沿着曲线的正向绕曲线一圈再第一次回到 z_0 , 我们将在这个变化过程中辐角函数 $\operatorname{Arg} z$ 的前后变化称为沿 γ 的辐角差, 记作 $\Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} z$ 。

$\Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} z$ 和 z_0 的选取无关, 因而是常数, 而且总是 2π 的整数倍, 我们将

$$w(\gamma) \triangleq \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} z. \quad (7.46)$$

称为曲线的环绕数。

♣

在这里我们只介绍一种不严格的理解方式: 我们将对数留数转化为某种意义上的原函数积分, 即:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{df(z)}{f(z)} \stackrel{\text{纯粹看法}}{=} \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} \operatorname{Ln} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z). \quad (7.47)$$

我们需要再次强调, 因为 $f(z)$ 在 γ 内部并非解析, 因此当然也不存在什么原函数, 因此上述事实其实必须单独证明。同时我们注意到, 事实上 $\Delta_{\gamma} \operatorname{Arg} f(z) = \Delta_{f(\gamma)} \operatorname{Arg} z$, 再结合对数留数公式, 我们便可以得到如下的定理, 一般被称之为辐角原理:

定理 7.3 (辐角原理)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线, f 在 γ 上解析且不为 0, 在 γ 内亚纯, 则有

$$w(f(\gamma)) = N(f, \gamma) - P(f, \gamma) \quad (7.48)$$

♡

注 辐角原理从一个新的角度揭示了环绕数必然是整数, 同时也把曲线的几何含义和分析细节结合到了一起。

通过辐角定理我们将证明一个经典结论: Rouché 定理

定理 7.4 (Rouché 定理)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线, 若 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 满足:

(1) 两者在 γ 内解析, 在 γ 上连续; (2) $|f(z)| > |\varphi(z)|, \forall z \in \gamma$ 。

则有 $N(f + \varphi, \gamma) = N(f, \gamma)$ 。

♡

注 Rouché 定理有相当明确的几何含义, 我们姑且将 f 看做初始函数, 而将 φ 视作为对 f 的一个“扰动”, 我们

知道正常来说扰动会改变函数的行为, 但是 Rouché 定理的结论是: 如果在边界 (即 γ) 上的扰动幅度 (即 $|\varphi|$) 严格小于初始函数的幅度 (即 $|f|$), 那么扰动将不会改变函数在 γ 中的根数。

证明 根据题意 f 和 φ 在 γ 内解析, 因此 $P(f + \varphi, \gamma) = P(f, \gamma) = 0$, 那么根据辐角原理, 我们只要说明 $w(f(\gamma)) = w(f + \varphi(\gamma))$ 即可, 换言之只要证明: $\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f(z) + \varphi(z)) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$ 。

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f(z) + \varphi(z)) = \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) &\iff \Delta_\gamma \operatorname{Arg}(f(z) + \varphi(z)) - \Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = 0 \\ &\iff \Delta_\gamma \operatorname{Arg} \left(\frac{f(z) + \varphi(z)}{f(z)} \right) = 0 \\ &\iff \Delta_\gamma \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) = 0.\end{aligned}\quad (7.49)$$

但注意到在 γ 有 $|\varphi| < |f|$, 因此我们记 $g = 1 + \frac{\varphi}{f}$, 我们知道对于 $\forall z \in \gamma$, $|g(z) - 1| < 1$, 换言之 $g(\gamma)$ 的图像整体落在以 1 为圆心, 以 1 为半径的圆内部, 重要的是 $g(\gamma)$ 的图像不可能碰到原点, 自然也就更不可能绕原点转圈, 那么根据环绕数的几何含义, 我们知道

$$w(g(\gamma)) = 0 \iff \Delta_{g(\gamma)} \operatorname{Arg} z = 0 \iff \Delta_\gamma \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{\varphi(z)}{f(z)} \right) = 0. \quad (7.50)$$

故而命题得证。 \square

注意到上述证明中调用了辐角原理, 但环绕数的概念并没有严格证明, 所以这里给出一个替换证明, 该证明出自 Stein 的《复分析》。

证明 [一个替换证明] 我们定义以下同伦:

$$\begin{aligned}H : \gamma \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ (z, t) &\mapsto f(z) + t\varphi(z).\end{aligned}\quad (7.51)$$

同时我们定义:

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{H'(z, t)}{H(z, t)} dz. \quad (7.52)$$

我们知道固定了某个 $t \in [0, 1]$ 之后, $H(z, t)$ 一定是在 γ 中解析, 在 γ 上连续, 而且由于在 γ 上 $|f| > |\varphi|$, 这保证了在 γ 上 H 不可能为零, 因此这个积分是良定的, 而且根据对数留数计算公式 $N(t)$ 就是 $H(z, t)$ 在 γ 中的零点个数, 因此只能取整数。我们只要能证明 $N(t)$ 关于 t 是连续的, 这就说明了 $N(t)$ 只能是常数。(为什么)

下面证明 $N(t)$ 关于 t 连续, 换言之, 需要证明对于任意 $t_0 \in [0, 1]$, 以及 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $|t - t_0| < \delta$, 就有 $|N(t) - N(t_0)| < \epsilon$ 。

我们记 $F(z, t) \triangleq \frac{H'(z, t)}{H(z, t)}$, 我们知道 F 关于 z 和 t 都连续, 同时 γ 和 $[0, 1]$ 都是紧集, 这说明了 F 关于 t 和 z 还都是一致连续的。也就是说对于之前给定的 $\epsilon > 0$, 一定有 $\delta > 0$, 使得只要 $|t' - t''| < \delta$, 就有

$$|F(z, t') - F(z, t'')| < \frac{\epsilon}{L}, \quad \forall z \in \gamma \quad (7.53)$$

这里 L 为 γ 的弧长, 因此我们只要取 $|t - t_0| < \delta$, 就有

$$|N(t) - N(t_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma F(z, t) - F(z, t_0) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{L} \cdot L = \frac{\epsilon}{2\pi}. \quad (7.54)$$

因此 N 关于 t 连续, 故而只能是常数, 这说明了 $N(1) = N(0)$, 换言之 $N(f + \varphi, \gamma) = N(f, \gamma)$ 。 \square

Rouché 定理可以帮助我们在无法求根的前提下也能大致把握函数根的分布, 它在各个方面都有重要的应用, 让我们先从简单的例子谈起。

例题 7.12 证明 $z^7 + z^3 + 12 = 0$ 的根全部落在圆环 $1 < |z| < 2$ 中。

解 令 $p(z) = z^7 + z^3 + 12$, 显然七阶多项式没有求根公式, 因此我们必须借助 Rouché 定理。先从思路谈起, 我们的大致思路其实可以分为三步:

(1) 说明 $p(z)$ 在 $|z| < 1$ 中无根;

(2) 说明 $p(z)$ 在 $|z| = 1$ 上无根;

(3) 因为 $p(z)$ 恰好有七个根 (代数学基本定理!), 因此说明其在 $|z| < 2$ 中有七个根。

证明的关键在于对于每个圆周, 将 $p(z)$ 拆解成适当的两个部分 $f + \varphi$, 并运用 Rouché 定理, 这里我们要求 f 至少要有两个性质: 首先 f 的模在圆周上要大, 其次 f 在圆内的根数要能够简单判断, 这就需要对于具体的圆周进行具体的分析:

(1) 令 γ_1 为 $|z| = 1$, 我们取 $f = 12$, $\varphi = z^7 + z^3$, 容易看出在 γ_1 上

$$|\varphi| \leq |z|^7 + |z|^3 \leq 2 < 12 = |f|. \quad (7.55)$$

故由 Rouché 定理可知: $N(p(z), \gamma_1) = N(12, \gamma_1) = 0$, 也就是说在 $|z| < 1$ 中无根。

(2) 是 (1) 的推论, 因为我们已经知道在 $|z| = 1$ 上一定有 $f > \varphi$, 故而在 $|z| = 1$, $p(z)$ 没有机会为零;

(3) 现在令 γ_2 为 $|z| = 2$, 我们取 $f = z^7$, $\varphi = z^3 + 12$, 验证在 γ_2 上

$$|\varphi| \leq |z|^3 + 12 \leq 2^3 + 12 = 20 < 2^7 = |f|. \quad (7.56)$$

故由 Rouché 定理可知: $N(p(z), \gamma_2) = N(z^7, \gamma_2) = 7$, 也就是说在 $|z| < 2$ 中有 7 个根。

那么综合 (1)-(3) 可知 $p(z)$ 的所有根恰好都落入圆环 $1 < |z| < 2$ 之中。 \square

关于根的命题中最有名的当然是那个定理 (哪个? .jpg), 我们可以用 Rouché 定理给予其第三个证明。

定理 7.5 (代数学基本定理 / 第三证: Rouché)

复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一个根 / 恰好有 n 个根。



证明 [利用 Rouché 定理] 不妨设 $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, 其中 $n \geq 1$, 这次我们不用反证法了。直接令 $R = |a_{n-1}| + \cdots + |a_0| + 1$, 令 $\gamma = C_R(0)$, 再令 $f(z) = z^n$, $\varphi(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, 直接验证: 在 γ 上有

$$\begin{aligned} |\varphi| &\leq |a_{n-1}||z|^{n-1} + \cdots + |a_0| \leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_0| \\ &\leq (|a_{n-1}| + \cdots + |a_0|)R^{n-1} < R^n = |f|. \end{aligned} \quad (7.57)$$

换言之这样的分解 f 和 φ 满足 Rouché 定理条件, 那么根据 Rouché 定理, 自然 $N(p(z), \gamma) = N(z^n, \gamma) = n$, 同时我们知道 $p(z)$ 在复平面的根数不可能大于 n , 这就完成了定理的证明。 \square

Rouché 定理也是证明下述引理以及保域性原理的关键:

引理 7.6 (m 对 1 引理)

设 D 为 \mathbb{C} 上区域且 f 在 D 上解析, 对于任意 $z_0 \in D$, 记 $w_0 = f(z_0)$, 我们知道 z_0 自动是 $f(z) - w_0$ 的零点, 如果 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点, 那么一定存在 $\rho > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对于 $\forall w \in B_\rho^*(w_0)$, $f(z) - w$ 在 $B_\delta(z_0)$ 中一定有 m 个两两不同的零点。



证明 根据题意 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的零点, 而解析函数的零点总是孤立的, 故而可以找到 $\delta_1 > 0$, 使得 $f(z) - w_0$ 在 $B_{\delta_1}(z_0)$ 中再无其他的零点。

事实上若 z_0 是 $f(z) - w_0$ 的 m 阶零点, 这里 $m \geq 2$, 则 z_0 还同时是 $f'(z)$ 的零点, 那么同时可以找到 $\delta_2 > 0$ 使得 $f(z) - w_0$ 在 $B_{\delta_2}(z_0)$ 中再无其他零点。对于 $m = 1$ 取 $\delta = \delta_1$, 而对于 $m \geq 2$ 取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 最后令 $\rho = \min_{C_\delta(z_0)} |f(z) - w_0|$, 我们来说明这样的 ρ 和 δ 满足要求。

$\forall w \in B_\rho^*(w_0)$ 考察函数 $f(z) - w$, 我们将其分解为两个部分:

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w - w_0), \quad \forall w \in B_\rho^*(w_0)$$

而同时在 $C_\delta(z_0)$ 上, 我们有 $|f(z) - w_0| \geq \rho > |w - w_0|$ 成立, 那么根据 Rouché 定理可知

$$N(f(z) - w, C_\delta(z_0)) = N(f(z) - w_0, C_\delta(z_0)) = m.$$

换言之这就证明了 $f(z) - w$ 在 $B_\delta(z_0)$ 中有 m 个零点。另一方面, 由于 $f'(z)$ 在 $B_\delta(z_0)$ 再无其他零点了, 这说明 $f(z) - w$ 不可能有重根, 因此这 m 个零点是两两不同的。 \square

注 m 对 1 引理也有漂亮的几何刻画, 我们知道 $z = 0$ 是 $z \mapsto z^m$ 的 m 阶零点, 这个映射正是一个标准的 m 对 1 映射, m 对 1 引理正是说明了任何函数在零点附近的行为就和 $z \mapsto z^m$ 相似。

定理 7.6 (保域性原理)

设 D 为 \mathbb{C} 上区域, f 在 D 上解析且不为常数, 则:

(1) 若 D 为开集, $f(D)$ 亦为开集。(说明解析即开映射);

(2) 若 D 为区域, $f(D)$ 亦为区域。(称为保域性)。



证明 (1) 要证 $f(D)$ 为开集, 即证, 对于 $\forall w_0 \in f(D)$, 存在 $\rho > 0$, 使得 $B_\rho(w_0) \subset f(D)$ 。由于 $w_0 \in f(D)$, 故而不妨设有某个 (当然可以不止一个) $z_0 \in D$ 使得 $f(z_0) = w_0$ 。我们知道现在 z_0 自动成为函数 $f(z) - w_0$ 的一个零点, 由 m 对 1 引理可知, $\exists \delta > 0$ 以及 $\rho > 0$, 使得对于 $\forall w \in B_\rho^*(w_0)$, $f(z) - w$ 在 $B_\delta(z_0)$ 中一定有 m 个零点。当然这里其实只要至少有一个零点就够了, 因为我们已经说明了 $B_\rho(w_0) \subset f(D)$ 。

(2) 我们已经证明了连通集在连续映射下的像集也是连通集, 再加之 (1) 的结论, 我们知道像集一定是即开由连通, 故而是区域。□

通过解析函数是开映射的特点, 我们可以给最大模原理一个新的证明。

定理 7.7 (最大模原理 / 第三证: 开映射)

若 $f(z)$ 在区域 D 上解析且非常值函数, 则 $|f(z)|$ 无法在 D 中取到最大值, 换言之, 不存在这样的 $z_0 \in D$, 使得 $f(z_0) = \sup_{z \in D} |f(z)|$ 。



证明 反设存在 $z_0 \in D$ 使得 $|f(z_0)|$ 取到最大模, 我们知道 D 为开集, 因此 $\exists \delta > 0$ 使得 $B_\delta(z_0) \subset D$, 另一方面根据 f 是开映射, 可知 $f(B_\delta(z_0))$ 为 \mathbb{C} 中开集, 那么在这个开集中必然可以找到 $f(z_0)$ 的一个开圆盘 $B_\rho(f(z_0)) \subset f(B_\delta(z_0))$ 。从几何上容易看出, 在这个圆盘上至少有一点, 它的模长要比 $|f(z_0)|$ 更大, 但这就和最大模的约定矛盾了! □

保域性原理告诉我们解析函数总是把区域映成区域, 这便是开启下一章的基础。

如果复平面的两个区域之间能建立解析的双射, 我们认为这两个区域是解析等价的, 也就是某种意义上认为两个区域是“一样”的。那么自然的问题是: 在解析等价下, 复平面上究竟有多少种不解析等价的区域? 又或者, 给出两个复平面上的区域, 是否可以找到满足条件的解析映射使二者解析等价? 它们的答案将在下一章揭晓。

第 8 章 *Riemann 映射定理

本章的核心目标是证明 Riemann 映射定理，这是单复变函数论中最著名的结论，它揭示了复平面上单连通区域之间的联系。为了精确描述这个定理并给出证明，我们需要引进单叶解析和正规族这两个概念，并证明所需要的一些前置引理。

8.1 单叶解析函数

定义 8.1 (单叶)

设 $D \subset \mathbb{C}$ 为子集，我们称 f 在 D 是单叶的，若 f 在 D 上是单射。

设 $z_0 \in D$ ，我们称 f 在 z_0 处是局部单叶的，若存在 $\delta > 0$ ，使得 f 在 $B_\delta(z_0)$ 上单叶。

若 $\forall z \in D$ ， f 在 z 处均是局部单叶的，我们称 f 在 D 上是局部单叶的。



注 一定有读者好奇，每点都局部单叶难道不是单叶函数吗？那还真不一定。不然为什么要写两个概念

比如取 $D = \mathbb{C}$ ，令 $f(z) = e^z$ ，注意到 e^z 具有周期性， $e^{z+2\pi i} = e^z$ ，因此在 \mathbb{C} 上自然是不可能是单叶的，但是在每一点确实是局部单叶的。

关于单叶性我们给出以下重要刻画：

命题 8.1 (单叶性的刻画)

设 D 为 \mathbb{C} 上区域，

(1) 若 f 在 D 上单叶解析（注意单叶解析必然不可能是常值函数），则 $\forall z \in D$ ， $f'(z) \neq 0$ ；

(2) 若 f 在 D 上解析， $z_0 \in D$ 满足 $f'(z_0) \neq 0$ ，则 f 在 z_0 处局部单叶。



注 显然的推论是，如果 f' 在 D 上每点皆非零，也只能说明 f 在整个 D 上局部单叶，而推不出单叶，小心。

证明 两问的核心都在于巧妙地运用 m 对 1 引理，注意到这里 m 是否为 1 就已经在论述是否单叶了。

(1) 反设存在 $z_0 \in D$ 使得 $f'(z_0) = 0$ ，那么注意到 z_0 自动成为函数 $f(z) - f(z_0) \triangleq f(z) - w_0$ 的至少二阶往上的零点。那么根据 m 对 1 引理，存在 $\delta, \rho > 0$ ，使得 $\forall w \in B_\rho^*(w_0)$ ， $f(z) - w$ 在 $B_\delta(z_0)$ 上至少有两个不同的零点。换言之，存在 D 中两点 $z_1 \neq z_2$ ，使得 $f(z_1) = f(z_2) = w$ ，这就和单叶性矛盾了！

(2) 若 $f'(z_0) \neq 0$ ，这说明 z_0 恰好是 $f(z) - w_0$ 的一阶零点，由 m 对 1 引理，存在 $\delta, \rho > 0$ ，使得 $\forall w \in B_\rho^*(w_0)$ ， $f(z) - w$ 在 $B_\delta(z_0)$ 上恰有一个零点。换言之，在 $B_\delta(z_0)$ 上总是存在唯一的 z 满足 $f(z) = w$ ，这就说明了 f 在 $B_\delta(z_0)$ 上是单叶的，因此 f 在 z_0 处局部单叶。□

注意到 (1) 的结论暗示了我们局部上总是可以求得反函数的，所以对于复函数来说，单叶性其实是很强的一个性质。事实上我们有非常强的结论：

命题 8.2 (单叶 + 解析 \implies 同胚)

若 f 在 D 上单叶解析，则 f 事实上是到其像集的一个解析同胚，换言之，将 f 视为 $f: D \rightarrow f(D) \triangleq G$ ，则总是存在 $g: G \rightarrow D$ 作为 f 的逆，且 g 在 G 上单叶解析。



证明 因为 f 本身是单叶，那么打到像集上之后自然成为一个双射，故而逆 g 是自动存在的，重点在于说明 g 事实上也是解析的。我们指出以下两点：

(1) $g: G \rightarrow D$ 是连续的，这是因为 f 是开映射。

(2) $g: G \rightarrow D$ 在 G 上解析, 这是因为 f 的单叶性保证了 $f'(z) \neq 0, \forall z \in D$, 根据反函数定理, 我们有

$$g'(w) = (f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}, \quad \forall w \in G. \quad (8.1)$$

这说明 g 在 G 上每点皆可导, 故而解析。□

注 我们知道这个性质对于实函数是不可能成立, 请读者自己举一个例子, 单叶加解析, 但是逆不见得连续。

单叶解析函数具有更多难以相信的优秀性质, 其中比较重要的是单叶解析函数会把单连通的区域映成单连通的区域, 这是 Riemann 证明的出发点。那为了证明这个命题, 我们需要以下定理作为引理, 这个引理是在说, 单叶解析函数如果把简单闭曲线映成简单闭曲线, 则它一定保曲线定向, 同时把曲线内部映到曲线内部。

定理 8.1 (边界对应原理)

设 D 为复平面区域, γ 为 D 中任意可求长 Jordan 曲线, 设 f 在 D 单叶解析, 且记 $\Gamma = f(\gamma)$, 则:

(1) f 一定把正定向的 γ 映为正定向的 Γ ;

(2) f 一定将 γ 的内部刚好映成 Γ 的内部。



证明 (1) 注意到 f 单叶, 故而 $f(\gamma)$ 一定是简单闭曲线, 不然内部自交会和单叶性矛盾。现在假设 $w_0 \notin \Gamma$, 套用一下对数留数计算公式得到:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = N(f(z) - w_0, \gamma) - P(f(z) - w_0, \gamma) = N(f(z) - w_0, \gamma). \quad (8.2)$$

后者等于 0 是因为函数在 γ 中解析。我们现在记 $w = f(z)$, 我们可以给左侧的积分换元, 但是注意我们还并不知道对应的像曲线是正定向还是反定向, 因此记作 Γ^{\pm} , 即:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{\pm}} \frac{dw}{w - w_0} = N(f(z) - w_0, \gamma). \quad (8.3)$$

但注意等号右侧其实是正整数, 这迫使左侧要取正定向了, 这就证明了 f 一定把正定向的 γ 映为正定向的 Γ 。

(2) 对于任意给定的 $w_0 \notin \Gamma$, 有两种可能:

Case 1 w_0 在 Γ 外部 $\implies N(f(z) - w_0, \gamma) = 0$, 因为左侧被积函数现在解析。换言之, f 不可能把 γ 内部的点映到 Γ 外部。而另一方面, f 也不可能把 γ 内部的点映到 Γ 上, 这样会跟单叶性矛盾! 因此我们得到了 $f(D_{\gamma}) \subset D_{\Gamma}$ 。

Case 2 w_0 在 Γ 内部 $\implies N(f(z) - w_0, \gamma) = 1$, 换言之, 恰有一点 $z_0 \in D_{\gamma}$ 使得 $f(z_0) = w_0$, 也就说 Γ 内部的点一定有原像, 因此 $D_{\Gamma} \subset f(D_{\gamma})$ 。

综上我们证明了 $f(D_{\gamma}) = D_{\Gamma}$ 。□

通过边界对应原理, 我们可以将保域性原理再稍微加强一些。

定理 8.2 (保域性原理加强版)

设 D 为复平面上的单连通区域, f 在 D 上单叶解析, 则 $f(D)$ 也是单连通区域。



证明 只要补证 $f(D)$ 也是单连通的, 换言之只需验证, 对于 $f(D)$ 中的任意 Jordan 曲线 Γ , D_{Γ} 一定包含于 $f(D)$ 。注意到 f 单叶解析, 故而存在逆映射 $g: f(D) \rightarrow D$ 在 $f(D)$ 上单叶解析。我们记 $\gamma = g(\Gamma)$, 现在 γ 是 D 的一条 Jordan 曲线, 由于 D 是单连通的, 故而 $D_{\gamma} \subset D \implies f(D_{\gamma}) \subset f(D)$, 现在套用边界对应原理, 我们有 $D_{\Gamma} = f(D_{\gamma}) \subset f(D)$, 这就说明了 $f(D)$ 的单连通性。□

本小节的最后一个定理是 Hurwitz 定理, 它是保证 Riemann 映射定理成立的必要步骤。我们之前学过了级数版的 Weierstrass 定理, 它是说如果一个级数在 D 上解析并且内闭一致收敛, 则其和函数也在 D 上解析, 我们下面来说明, 加上单叶性也是对的。

定理 8.3 (Hurwitz)

设函数列 $\{f_n(z)\}$ 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 在区域 D 上单叶解析, 并且在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$, 同时 $f(z)$ 不为常数, 则 $f(z)$ 在 D 中单叶解析。



Hurwitz 定理的证明基于下面的引理:

引理 8.1

设函数列 $\{f_n(z)\}$ 对于 $\forall n \in \mathbb{N}$ 在区域 D 上单叶解析, 并且在 D 中内闭一致收敛到不恒为零的函数 $f(z)$, 那么在 D 中任取可求长 Jordan 曲线 γ , 满足 f 在 γ 上不为零, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $n \geq N$ 后, $N(f_n(z), \gamma) = N(f, \gamma)$.



证明 [引理的证明] 首先由 Weierstrass 定理可知 $f(z)$ 在 D 内解析, 由于约定过 f 在 γ 上没有零点, 以及 γ 是个紧集, 因此

$$\min_{z \in \gamma} |f(z)| \triangleq \alpha > 0. \quad (8.4)$$

但另一方面, $f_n(z)$ 在 $\gamma \subset D$ 上一致收敛于 f , 这就保证了一定存在 $N \in \mathbb{N}$, 满足:

$$|f_n(z) - f(z)| < \alpha, \quad \forall z \in \gamma, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8.5)$$

换言之, 也就是说在 γ 上始终有 $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$, 由 Rouché 定理可知 $N(f_n(z), \gamma) = N(f, \gamma)$. \square

证明 [Hurwitz 定理的证明] 现在回到 Hurwitz 定理, 反设 $f(z)$ 在 D 中非单叶, 则一定存在 D 中两点 $z_1 \neq z_2$ 使得 $f(z_1) = f(z_2) = w_0$. 这么一来 $\{f_n(z) - w_0\}$ 在 D 中内闭一致收敛于非零函数 $f(z) - w_0$, 对于 z_1 和 z_2 , 我们在 D 以两者为圆心各做一个小圆 C_1 和 C_2 将两者隔开, 根据引理, 必然存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $n \geq N$ 后,

$$N(f_n(z) - w_0, C_k) = N(f(z) - w_0, C_k)$$

换言之, 我们还可以在 C_k 内部再找个点 z'_k , 使得

$$f_n(z'_1) = f_n(z'_2) = w_0. \quad (8.6)$$

但这就和 f_n 的单叶性矛盾了. \square

8.2 正规族和 Montel 定理

到这里可以稍微谈一下 Riemann 映射定理的历史。我们知道一个 D 上的单叶函数总是把复平面上的单连通区域映为一个单连通区域, 因此反过来我们可以问这样一个问题: 任给两个复平面上的单连通区域 D 和 G , 是否总是有单叶解析函数恰好将 D 映成 G ? 当然我们知道单叶解析函数实际上是双射, 所以不失一般性我们可以要求这个映射的像集是单位圆盘 $B_1(0)$, 因为 $D \rightarrow B_1(0)$ 的单叶解析函数和 $B_1(0) \rightarrow G$ 的单叶解析函数自动给出了一个 $D \rightarrow G$ 的单叶解析函数。

我们很快会发现答案是错的, 比如取 $D = \mathbb{C}$, 就不存在 \mathbb{C} 上的解析函数使得 $f(D) = B_1(0)$ 。(这是因为 Liouville 定理) 但如果 $D \neq \mathbb{C}$, 则有理由相信答案应该是对的, 这就是 Riemann 映射定理的结果。而且 Riemann 证明了更强的结果, 如果继续要求在某一点 $z_0 \in D$, f 满足 $f(z_0) = 0$ 以及 $f'(z_0) > 0$, 则满足要求的单叶解析函数事实上是唯一的。

1851 年, Riemann 给出了定理证明的细节, 初始版的证明借由了调和函数的某类解的存在性, 但事实上方法是有问题的。1869 年 Schwarz 用另外的思路给出一个修正, 这就是今天大部分教材会采用的证明思路。这个思路的核心步骤是先取出一族定义在 D 映入单位圆盘的单叶解析函数, 再证明这族函数最后一定能取出一个在 D 上内闭一致收敛的子列, 而这个子列收敛的函数刚好映满了单位圆盘。为了说清这件事情, 我们要从正规族这个概念说起。

定义 8.2 (正规族)

设 \mathcal{F} 是定义在 D 上的一个函数族, 我们称其是 D 上的正规族, 如果 \mathcal{F} 中的任意子列 $\{f_n\}$ 中可以取出一个内闭一致收敛的子列 $\{f_{n_k}\}$ 。



注 注意, 这里的子列 $\{f_{n_k}\}$ 需要在 D 中所有的紧集 K 上都一致收敛。

某种意义上,正规族是在刻画函数族的紧性。事实上内闭一致收敛可以给出一个函数空间上的一个拓扑(紧开拓扑),而正规族的意思就是说这族函数在这样的拓扑下是列紧的。

我们希望给出正规族的一种等价刻画,因此需要引入两个概念:

定义 8.3 (一致有界)

设 \mathcal{F} 是定义在 D 上的一个函数族,我们称其**一致有界**,如果存在常数 $M > 0$ 使得

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall z \in D. \quad (8.7)$$

当然,我们称 \mathcal{F} 在 D 上**内闭一致有界**,如果 \mathcal{F} 在任意紧集 $K \subset D$ 上都是一致有界的。

定义 8.4 (等度连续)

设 \mathcal{F} 是定义在 D 上的一个函数族,我们称其在 D 上**等度连续**,如果对 $\forall \epsilon > 0$, 存在固定的 $\delta > 0$, 使得只要 D 中两点满足 $|z' - z''| < \delta$, 就有

$$|f(z') - f(z'')| < \epsilon, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \quad (8.8)$$

注 换言之,等度连续就是加强版的一致连续,而且要求全族函数共用同一套 $\epsilon - \delta$.

最后我们介绍一下 Arzela-Ascoli 定理,它给出了紧集上的正规族的一个等价刻画,鉴于篇幅问题这里略过证明。事实上这是泛函中的一个定理,有兴趣的同学可以参考许全华的《泛函分析讲义》或者史济怀的《复变函数》,上面有详细的证明。

定理 8.4 (Arzela-Ascoli)

设 $K \subset \mathbb{C}$ 为紧集, $\{f_n(z)\}$ 为定义在 K 上的一列函数,则以下等价:

- (1) $\{f_n(z)\}$ 在 K 上有一致收敛的子列;
- (2) $\{f_n(z)\}$ 在 K 上一致有界且等度连续。

注 这个定理可以类比于 Heine-Borel, Heine-Borel 说复平面上的列紧集等价于有界闭,那这里一致收敛的性质就类比于函数空间中的列紧,一致有界的地位相当于“有界”,等度连续的地位相当于“闭”。当然以上纯属胡说八道

最后让我们用 Arzela-Ascoli 证明 Montel 定理,这是 Riemann 映射定理的最后一块拼图。

定理 8.5 (Montel)

设 \mathcal{F} 是 D 上的解析函数族,且 \mathcal{F} 在 D 上内闭一致有界,则 \mathcal{F} 是 D 上的正规族。

证明 先随便取 \mathcal{F} 中的任意一个函数列 $\{f_n(z)\}$, 我们将证明分为以下步骤:

Step 1 我们先证明,对于 D 中的任意闭圆盘 $\overline{B}_r(z_0)$, $\{f_n(z)\}$ 在其上有一致收敛的子列。

根据 Arzela-Ascoli, 我们只需要再补充验证 $\{f_n(z)\}$ 在 $\overline{B}_r(z_0)$ 上**等度连续**。我们知道 $\{f_n(z)\}$ 在 $\overline{B}_r(z_0)$ 上一致有界,那么不妨假设

$$|f_n(z)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in \overline{B}_r(z_0)$$

根据 Cauchy 估值我们知道 $|f'_n(z)|$ 在 $\overline{B}_r(z_0)$ 上也是有界的,设界为 M' , 那么对于 $\overline{B}_r(z_0)$ 中的两点 z_1, z_2 , 我们取 $\delta = \epsilon/M'$, 这样只要 $|z_1 - z_2| < \delta$, 就有

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| \stackrel{\substack{\text{路径取线段} \\ \text{解析函数}}}{=} \left| \int_{z_1}^{z_2} f'_n(w) dw \right| \leq M' |z_1 - z_2| < M' \cdot \frac{\epsilon}{M'} = \epsilon. \quad (8.9)$$

这就说明了 $\{f_n(z)\}$ 在闭圆盘 $\overline{B}_r(z_0)$ 上等度连续,那么由 Arzela-Ascoli 可知 $\{f_n(z)\}$ 在 D 中**任意闭圆盘**上有一致收敛的子列。

Step 2 我们再证明步骤 1 的结论对于 D 中任意紧集也是成立的。

设 $K \subset D$ 为紧集, 我们知道对于 $z \in D$ 总是可以找到一个开圆盘 $B_r(z) \subset D$, 那么自然地收集所有这样的 $\{B_{r/2}(z)\}$, 其构成了 K 的一个开覆盖, 因为 K 紧, 我们可以取出有限开覆盖, 记为 $\{B_l\}$, $1 \leq l \leq m$ 。

那么首先 $\{f_n\}$ 在 \overline{B}_1 上有一致收敛的子列 $\{f_{n_i}^{(1)}\}$, 那么把 $\{f_{n_i}^{(1)}\}$ 看做一个新的函数族, 它在 \overline{B}_2 上自然也有一个一致收敛的子列 $\{f_{n_i}^{(2)}\}$, 我们知道这个步骤可以重复下去, 而且只需要 m 步, 我们自然就会得到一个子列 $\{f_{n_i}^{(m)}\}$, 它在所有 \overline{B}_l 上都一致收敛, 当然也就在 K 上一致收敛。

Step 3 最后我们证明 $\{f_n\}$ 存在一个子列, 在 **所有** D 中的紧集上 **都** 一致收敛, 也就证明了 \mathcal{F} 是正规族。

这里我们需要定义一族可数的紧集

$$K_p = \{z \mid d(z, \mathbb{C} \setminus D) \geq \frac{1}{p}\} \cap B_p(0), \quad \forall p \in \mathbb{N}^+. \quad (8.10)$$

那么容易验证: (1) K_p 都是紧集; (2) $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset D$; (3) D 中任意紧集 K 都包含在某个 K_p 之中。

那么和之前类似的, 我们让 $\{f_n\}$ 中取出一个一致收敛的子列 $\{f_{n_i}^{(1)}\}$ 让其在 K_1 上一致收敛, 再继续从 $\{f_{n_i}^{(1)}\}$ 中取出一个子列 $\{f_{n_i}^{(2)}\}$ 让其在 K_2 上一致收敛, 根据对角线法则, 我们可以取出 **对角线子列** $\{f_{n_p}^{(p)} \mid p \in \mathbb{N}^+\}$, 这个子列在所有 K_p 上都一致收敛。而我们已经证明过 D 中任意紧集 K 都一定含于某个 K_p 之中, 因此这个子列其实是在 D 中所有紧集上都一致收敛的。至此我们完成了 Montel 定理的证明。 \square

8.3 Riemann 映射定理

前置工作已经完备, 现在我们可以来证明 Riemann 映射定理, 这是一个集大成的定理, 需要调用函数项级数的 Weierstrass 定理、极大值原理、开映射原理、Schwarz 引理、Hurwitz 定理、Montel 定理等前面章节已经验证过的结果, 作为复变函数这门课的一个总结再合适不过。

定理 8.6 (Riemann 映射定理)

设 $D \neq \mathbb{C}$ 为 \mathbb{C} 中的单连通区域, 给定 $z_0 \in D$, 总是 **存在唯一的** D 上的 **单叶解析** 函数 f 满足以下要求:
(1) $f(D) = B_1(0)$; (2) $f(z_0) = 0$ 且 $f'(z_0) > 0$ 。

这是一个颇为复杂且引理众多的定理, 我们将其拆解为四个部分:

命题 8.3 (Riemann 映射定理 part 1)

令 $\mathcal{F} = \{f \mid f \text{ 在 } D \text{ 上单叶解析且有界}\}$, 证明 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ 。

证明 我们只需要构造出一个满足 \mathcal{F} 中要求的函数即可。由于 $D \neq \mathbb{C}$, 故而至少存在 $a \in \mathbb{C} \setminus D$ 。令 $g(z) = (\sqrt{z-a})_0$, 即取根号函数的主值分支。我们知道 g 在 D 上单叶解析, 那么由保域性原理可知 $E \triangleq g(D)$ 也是 \mathbb{C} 中的区域。

需要指出 E 满足一个重要的性质, 即 **若有 $w \in E$, 那么 $-w \notin E$** 。

不然的话我们知道这样就会存在 $z_1, z_2 \in D$ 使得 $g(z_1) = \sqrt{z_1-a} = w$, $g(z_2) = \sqrt{z_2-a} = -w$, 通过平方我们看出 z_1 其实等于 z_2 , 换言之 $w = -w \implies w = 0$, 但 $g(z)$ 的值域中是不可能含有 0 的 (因为 $a \notin D$), 这就矛盾了。

注意到 $z_0 \in D$, 而 E 为开集, 因此存在 $\rho > 0$, 使得 $B_\rho(g(z_0)) \subset E$, 那么从另一个角度, $B_\rho(-g(z_0))$ 必然落在 $\mathbb{C} \setminus E$ 中。那么现在我们构造函数

$$\varphi(z) = \frac{1}{g(z) + g(z_0)}. \quad (8.11)$$

$\varphi(z)$ 当然在 D 上单叶解析, 而且根据定义直接验证 $|\varphi(z)| \leq 1/\rho, \forall z \in D$, 故而 $\varphi \in \mathcal{F}$, 也就证明了其非空。

命题 8.4 (Riemann 映射定理 part 2)

令 $\mathcal{M} = \{f \mid f \in \mathcal{F} \text{ 且同时要求 } f(D) \subset B_1(0), f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0\}$ 。验证：

(1) \mathcal{M} 非空；

(2) 存在 $f_* \in \mathcal{M}$ ，使得 $f'_*(z_0) = \sup_{f \in \mathcal{M}} f'(z_0)$ 。



证明 (1) 我们已经知道 $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ，那么从中随便取出一个 φ ，因为 \mathcal{F} 中的函数的模长都比 $1/\rho$ 要少，这里 ρ 为上文中提到的 z_0 在 D 中对应的圆盘半径，因此 $\sup_{z \in D} |\varphi(z)| < +\infty$ ，那么我们令

$$f(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{2 \sup_{z \in D} |\varphi(z)|} \cdot \frac{|\varphi'(z_0)|}{\varphi'(z_0)}. \quad (8.12)$$

直接验证： $f(z_0) = 0$ ， $f'(z_0) > 0$ 以及 $|f(z)| < 1$ ，因此 $f \in \mathcal{M}$ ，也就是说 $\mathcal{M} \neq \emptyset$ 。

(2) 现在任取 $f \in \mathcal{M}$ ，因为 $z_0 \in D$ ，我们可以找到一个半径 $\delta > 0$ 使得 $B_\delta(z_0) \subset D$ ，那么根据 Cauchy 估值可知 $|f'(z_0)| < 1/\delta$ ，因此我们定义

$$M = \sup_{f \in \mathcal{M}} |f'(z_0)| \quad (8.13)$$

我们知道 $M < +\infty$ ，通过系数调整，我们当然可以做出一列函数 $\{f_n\} \subset \mathcal{M}$ ，满足 $|f'_n(z_0)| > M - \frac{1}{n}$ 。

另一方面根据要求 \mathcal{M} 中的函数必然是内闭一致有界的，那么根据 Montel 定理， \mathcal{M} 是 D 上的正规族，也就是说 $\{f_n\}$ 中可以取出一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 上内闭一致收敛，那么假设 f_{n_k} 一致收敛于 f_* ，我们来依次证明以下事实：

(1) $f_*(z_0) = 0$ ，这是因为 $f_*(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z_0) = 0$ ；

(2) $|f'_*(z_0)| = M$ ，这是根据 $|f'_{n_k}(z_0)| > M - \frac{1}{n_k}$ 的要求自动成立的。

(3) f_* 在 D 上单叶解析，这里用到 Hurwitz 定理的结论，因为 $\{f_{n_k}\}$ 在 D 上都是单叶解析的。

(4) $f_*(D) \subset B_1(0)$ ，这是因为 $|f_{n_k}(z)| < 1, \forall z \in D$ ，故而 $f_*(D) \subset \overline{B_1(0)}$ ，但根据最大模原理， f 在 D 中不可能取到最大模，因此事实上 $f_*(D) \subset B_1(0)$ 。

综上 $f_* \in \mathcal{M}$ 且满足要求。

命题 8.5 (Riemann 映射定理 part 3)

在上文中从 \mathcal{M} 中取出的 f_* 实则映满了 $B_1(0)$ ，即 $f_*(D) = B_1(0)$ 。



这一步的证明略微复杂，需要进行一些简单的计算，我们的思路是：如果像集中缺了一个点，那么我们可以通过那个缺失的点构造一个 \mathcal{M} 的新映射，使得该映射在 z_0 处的导数值比 M 还大，这就和 M 是极大值的定义矛盾。为此我们需要一个引理：

引理 8.2 (最後の引理)

设 $G \subsetneq B_1(0)$ 但 $0 \in G$ (这里 G 的地位相当于 $f(D)$)，则存在 $h: G \rightarrow B_1(0)$ ，在 G 上单叶解析且满足：

(1) $h(0) = 0$ ；(2) $h'(0) > 1$ 。



证明 那么根据题目存在 $a \in B_1(0)$ 但 $a \notin G$ ，令

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \quad (8.14)$$

我们知道 $\varphi(z) \in \text{Aut}(B_1(0))$ ，故而 $\varphi(z)$ 在 G 上单叶解析且恒不为零，那么也就可以定义它的根号 $\sqrt{\varphi}$ 了。下面假设 $b = \sqrt{\varphi(0)}$ ，同时再定义：

$$\psi(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b}z}. \quad (8.15)$$

以及

$$h(z) = e^{i \arg b} \cdot \psi(\sqrt{\varphi(z)}). \quad (8.16)$$

验证 h 满足要求即可, 首先我们有

$$h(0) = e^{i \arg b} \psi(\sqrt{\varphi(0)}) = e^{i \arg b} \psi(b) = 0. \quad (8.17)$$

$$h'(0) = e^{i \arg b} \cdot \psi'(b) \cdot \frac{\varphi'(0)}{2b}. \quad (8.18)$$

而详细计算可得: $\varphi'(0) = 1 - |a|^2$, $\psi'(b) = \frac{1}{1-|b|^2}$, 而注意到 $b = \sqrt{\varphi(0)} = \sqrt{-a}$, 换言之 $a = -b^2$, 全部带入公式 8.18 中可得:

$$h'(0) = \frac{1 + |b|^2}{2|b|} > 1. \quad (\text{因为 } |b| < 1) \quad (8.19)$$

故而引理证毕。 \square

证明 [Step3 的证明] 现在我们反设 f 并没有映满 $B_1(0)$, 那么也就是说 $f(D) \subsetneq B_1(0)$, 根据引理, 我们知道有 $h: f(D) \rightarrow B_1(0)$ 单叶解析并且满足 $h(0) = 0$ 且 $h'(0) > 1$.

那么考察映射 $h \circ f_*$, 我们有以下结论:

- (1) $h \circ f_*: D \rightarrow B_1(0)$ 在 D 上单叶解析;
- (2) $h(f_*(z_0)) = h(0) = 0$;
- (3) $(h \circ f_*)'(z_0) \stackrel{\text{链式法则}}{=} h'(0) \cdot f'_*(z_0) > M$

那么综上所述我们得到了 \mathcal{M} 中的一个新函数, 但其在 z_0 处的导数比 M 还大, 这就引起了矛盾。 \square

命题 8.6 (Riemann 映射定理 part 4)

满足要求的 f_* 事实上是唯一的。

证明 证明是直接了当的, 如果还有 g 满足全部的要求, 那么令 $h = f_* \circ g^{-1}$, 我们知道 h 在 $B_1(0)$ 上单叶解析, 也就是说 $h \in \text{Aut}(B_1(0))$, 那么根据 $\text{Aut}(B_1(0))$ 的结构我们知道一定有

$$h(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}. \quad (8.20)$$

同时注意到 $h(0) = 0$, 这迫使上式中的 $a = 0$, 而另一方面, 我们有: $h'(0) = e^{i\theta} = \frac{f'_*(z_0)}{g'_*(z_0)} > 0$, 这迫使 $e^{i\theta} = 1$. 那么综上所述, 我们知道 $h(z) = z$, 换言之 $f_* \circ g^{-1} = \text{id}$, 这就证明了 f_* 的唯一性。

那么综合以上四个部分, 我们完成了对于 Riemann 映射定理的证明。 \square

Riemann 映射定理自然可以导出以下推论:

推论 8.1

若 $D, G \subsetneq \mathbb{C}$ 为两个单连通区域, 给定 $z_0 \in D$ 以及 $w_0 \in G$, 总是存在唯一的 D 上的单叶解析函数 f 满足以下要求: (1) $f(D) = G$; (2) $f(z_0) = w_0$ 且 $f'(z_0) > 0$.

证明 我们通过 Riemann 映射定理可知, 必然存在唯一 $g: D \rightarrow B_1(0)$ 以及 $h: G \rightarrow B_1(0)$, 直接验证 $f = h^{-1} \circ g$ 就是所求的映射。 \square

注 在几何上, 这表明了 \mathbb{C} 上的单连通真子集区域在解析同胚的意义下只有一个。