ExBook · 刷题本模板

概率论刷题本

刷题用

竖版 Pad 版

“你这个年龄是怎么睡得着觉的”

huang

最后更新时间：2025 年 7 月 2 日

目录

目录

第 1 章　概率论入门

1. 设 A, B 为随机事件, 且 $P(A) = 0.4$, 又 $P(AB) = P(A\overline{B})$, 求 $P(B)$.

2. 设 $P(A)=\frac{1}{3}, P(B|A)=\frac{1}{2}, P(A-B)=$ _______.

3. 设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$,

(1) 若 A,B 互斥, 则 $P(B)=$______;

(2) 若 A,B 相互独立, 则 $P(B)=$______.

4. 设两两相互独立的事件 A,B,C 满足: $ABC=\varnothing, P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, 且有 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 则 $P(A)=$ ________.

5. 设 A,B 为两个相互独立的随机事件, 且 A,B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 A 不发生 B 发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _______.

6. 设 A,B 为随机事件, $P(A)=0.7, P(B)=0.4, P(A-B)=0.5$, 则 $P(A\cup B|\overline{A})=$ ________.

7. 设 $P(A)=\frac{1}{3}, P(B|A)=\frac{2}{3}, P(A|B)=\frac{3}{5}$, 则 $P(A\cup B)=$ ______.

8. 设 A,B,C 为三个事件, $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=P(BC)=0, P(AC)=\frac{1}{8}$, 则 A,B,C 都不发生的概率为 ______.

9. 设 X, Y 为随机变量, 且 $P\{X \geq 0\} = \frac{1}{2}, P\{Y \geq 0\} = \frac{3}{5}, P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{1}{4}$, 则

(1) $P(\min(X, Y) < 0) =$ ______;

(2) $P(\max(X, Y) \geq 0) =$ ______.

10. 设 A, B 为两个事件;

(1) 设 $P(A) > 0$. 证明: 若 $P(B|A) = P(B)$, 则 A, B 相互独立;

(2) 设 $0 < P(A) < 1$. 证明: 若 $P(B|A) = P(B|\overline{A})$, 则 A, B 相互独立;

(3) 设 $0 < P(A) < 1$. 证明: 若 $P(B|A) + P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$, 则 A, B 相互独立.

11. 从学校去车站共经过 5 个红绿灯, 各信号灯之间相互独立, 每个路口遇到红灯的概率为 $\frac{3}{5}$, 求从学校到车站遇到红灯次数不超过一次的概率.

12. 甲乙两人约定上午 9 点到 10 点之间约会, 两人到达时间差不超过 10 分钟则约会成功, 两人到达时间差超过 10 分钟则约会失败, 求两者约会成功的概率.

13. 设口袋中共有 10 个球, 其中 4 个红球, 6 个白球, 从中取两次, 每次取一球, 取后不放回.

(1) 求第二次取到白球的概率;

(2) 已知第二次取到白球, 求第一次也取到白球的概率.

14. 设工厂 A 与工厂 B 的次品率分别为 1% 和 2%. 现从由 A 和 B 生产的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 求该次品是 A 生产的概率.

15. 设 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 的泊松分布, Y 在 $0 \sim X$ 中等可能取整数, 求 $P(Y = 2)$.

第 2 章　一维随机变量

随机变量与分布函数

对于抛硬币试验, 事件 $A_1 = \{$ 正面向上 $\}$, $A_2 = \{$ 反面向上 $\}$.
定义随机变量 X. X 有两个取值 0 和 1. 令 $P\{X=0\} = P(A_1)$, $P\{X=1\} = P(A_2)$.
随机变量在一定的取值范围里本质上就是随机事件. 若在某范围内取不到, 则为不可能事件. 若必然取到, 如 $\{-\infty < X < +\infty\}$, 则为必然事件.

定义: 随机变量的分布函数

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X \in (-\infty, x]\}$$

注: $P\{X=a\} = P\{X \le a\} - P\{X < a\} = F(a) - F(a-0) = F(a) - \lim_{x\to a^-} F(x)$
逻辑: A/C 互斥, 即 $P(A\cap C) = 0 \implies P(A) + P(C) = P(A\cup C) \quad (A\cup C = B)$

$F(x)$ 的性质

1. $0 \le F(x) \le 1$
2. $F(x) \uparrow$ (单调不减)
3. $F(x)$ 右连续
4. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$

离散型随机变量

对于离散型随机变量 X, X 的取值可能是可列个.

$$P\{X = x_i\} = p_i$$

注:

1. $p_i \ge 0$
2. $\sum_i p_i = 1$
3. 对于 X 的分布函数 $F(x) = P\{X \le x\}$
   $P\{X=a\} = F(a) - F(a-0)$

连续型随机变量

X 的分布函数为 $F(x)$, $\exists f(x)\geq 0$, $f(x)$ 可积, $\forall x$, 有 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$. 则称 X 为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度.

$f(x)$ 的性质

1. $f(x)\geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$
3. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$ 一定连续但不一定可导
4. $P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)=0$ (连续型随机变量在任一点处概率为 0)
5. 若 $F(x)$ 可导, 则 $F'(x)=f(x)$

常见分布

一. 离散型

1. **0-1 分布**: X 为 0 或 1, 且 $P\{X=1\}=p$.
   $P\{X=0\}=1-p$. ($X\sim(1-p,p)$)
   称 X 服从 0-1 分布, 记 $X\sim B(1,p)$.
   期望 $EX=p$, 方差 $DX=p(1-p)$.

2. **二项分布**
   X 的分布律为 $P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. 记 $X\sim B(n,p)$.
   (0-1 分布就是 $n=1$ 时的二项分布)
   期望 $EX=np$, 方差 $DX=np(1-p)$.

3. **泊松分布** (一旦考到大题, 大概率结合级数)
   X 的分布率为 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, 记 $X\sim P(\lambda)$.
   期望 $EX=\lambda$, 方差 $DX=\lambda$.

4. **几何分布**
   X 的分布率为 $P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}$, 记 $X\sim G(p)$.
   期望 $EX=\frac{1}{p}$, 方差 $DX=\frac{1-p}{p^2}$.

二. 连续型

1. **均匀分布**
   $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & 其他\end{cases}$, 记 $X\sim U(a,b)$.
   期望 $EX=\frac{a+b}{2}$, 方差 $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$.

2. **指数分布**
   $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$, 记 $X\sim E(\lambda)$.
   期望 $EX=\frac{1}{\lambda}$, 方差 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$.

3. **正态分布**
   $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, 记 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.
   期望 $EX=\mu$, 方差 $DX=\sigma^2$.

正态分布详解

标准正态分布

标准正态分布的概率密度为

$$\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$$

其分布函数表示为 $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$.

$$\Phi(x)=P\{X\le x\}$$

记为: $X\sim N(0,1)$.

性质:

1. $\Phi(0)=\frac{1}{2}$
2. $\Phi(-a)=1-\Phi(a)$

一般正态分布

若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则

1. $P\{X\le\mu\}=\frac{1}{2}$, $P\{X\ge\mu\}=\frac{1}{2}$
2. $\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

3. $P\{a \leq X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X < a\}$

$= P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\} - P\{\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\}$

$= \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

1. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.3, & -1\le x<0,\\ 0.8, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1,\end{cases}$$

求随机变量 X 的分布律.

2. 对目标进行三次独立射击, 设三次射击中至少命中目标一次的概率为 $\frac{7}{8}$, 则最多命中目标一次的概率为 ______.

3. 设一次射击命中率为 p, X 表示独立重复对目标进行射击直到命中两次的射击次数, 则 X 的分布律为 ______.

4. 12 件产品中有 8 件正品, 4 件次品, 从中一次性任取两件, 用 X 表示其中次品的个数, 求 X 的分布律, 并求 X 的分布函数.

5. 设 $X \sim B(2,p), Y \sim B(3,p)$, 若 $P\{X \geq 1\} = \frac{5}{9}$, 求 $P\{Y \geq 1\}$.

6. 甲口袋装有 3 个白球 1 个红球, 乙口袋装有 3 个白球 2 个红球, 从甲口袋取 1 个球放入乙口袋, 再从乙口袋任取 2 个球, 用 X 表示其中的红球数, 求 X 的分布律.

7. 设 X_1, X_2 为两个连续型随机变量, 其密度函数为 $f_1(x), f_2(x)$, 分布函数为 $F_1(x), F_2(x)$, 下列结论正确的是 (　　).

A. $f_1(x)+f_2(x)$ 为某随机变量的密度函数

B. $f_1(x)f_2(x)$ 为某随机变量的密度函数

C. $F_1(x)+F_2(x)$ 为某随机变量的分布函数

D. $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为某随机变量的密度函数

8. 设 X 为连续型随机变量, $f(x), F(x)$ 分别为其概率密度函数和分布函数, 当 $x<0$ 时, $f(x)=0$; 当 $x>0$ 时, $f(x)+2F(x)=2$, 求 X 服从的分布.

9. 设随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 为偶函数, 其分布函数为 $F(x)$, 则 (　　)

A. $F(x)$ 为偶函数

B. $F(-a)=2F(a)-1$

C. $F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$

D. $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a f(x)dx$

10.

(1) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ ______.

(2) 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P\{|X - \mu| < 3\sigma\} =$ ______.

11. 设 $X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2)$, 令 $p = P\{X \le \mu - 4\}, q = P\{Y \ge \mu + 5\}$, 则

A. 对任意实数 μ 都有 $p = q$

B. 对任意实数 μ 都有 $p < q$

C. 对个别 μ, 才有 $p = q$

D. 对任意实数 μ 都有 $p > q$

12. 设随机变量 $X \sim E(\lambda)(\lambda > 0)$, 则 $P\{X > \sqrt{D(X)}\} =$ _______.

13. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = ae^{-x^2+2x} \quad (-\infty < x < +\infty),$$

(1) 求 a;

(2) 求 $P\{X \geq 1\}$.

14. 设 $X \sim E(3)$, 求 $P\{X \leq 3 | X > 1\}$.

15. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

对 X 重复观察 4 次, 用 Y 表示 4 次观察中出现 $X > \frac{\pi}{3}$ 的次数,

(1) 求 Y 的分布;

(2) 求 $E(Y^2)$. (第二问暂时超出了目前的准备, 学...)

16. 设 $X \sim U(0,2)$, 求随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度.

17. 设 $X \sim N(0,1)$, 且 $Y = X^2$, 求随机变量 Y 的概率密度.

18. 设 $X \sim N(0,1)$, 且 $Y = X^2$, 求随机变量 Y 的概率密度.

19. 设 $X \sim E(2), Y = 1 - e^{-2X}$, 求 $f_Y(y)$.

20. 设随机变量 $X \sim E(5), Y = \min\{X, 2\}$, 求 Y 的分布函数.

21. 设 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1, \\ 2-x, & 1<x<2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

(1) 求 X 的分布函数 $F(x)$;

(2) 若 $Y=F(X)$, 求 $F_Y(y)$.

第 3 章　二维随机变量

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} axe^{-x(y+1)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (a>0).$$

(1) 求常数 a;

(2) 求随机变量 X,Y 的边缘密度函数.

2. 设随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $P\{Y\geq X\}$.

3. 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$. 二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 求 X 的条件密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

4. 设 $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, 且 $P\{XY = 0\} = 1$.

(1) 求 (X, Y) 的联合分布;

(2) 判断 X, Y 是否相互独立.

5. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X/Y	0	1
0	0.3	a
1	b	0.2

已知事件 $\{X+Y=1\}$ 与 $\{X=0\}$ 相互独立, 求常数 a, b.

6. 设二维随机变量 $(X,Y) \sim N(1,1,1,4;0)$, 求 $P\{XY+1<X+Y\}$.

7. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 在 $X = x(0 < x < 1)$ 下, 随机变量 $Y \sim U(0,x)$.

(1) 求 Y 的边缘密度;

(2) 求 $P\{X+Y \le 1\}$.

8. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且其边缘分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$.

(1) 求 $Z = \min(X, Y)$ 的分布函数;

(2) 求 $Z = \max(X, Y)$ 的分布函数.

9. 设 $X \sim U(0,1), Y \sim E(2)$ 且 X, Y 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度函数.

10. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2), Y \sim U(-\pi,\pi)$ 且 X, Y 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的密度函数.

11. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 随机变量 Y 的分布律为 $Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, 又 $Z = X + Y$, 求 Z 的分布函数.

第 4 章　随机变量的数值特征

数学期望

一、一维随机变量的期望

1. 离散型

先研究离散型一维随机变量. X 的分布率如下:

$$P\{X=x_i\}=P_i \quad (i=1,\dots,N,\dots)$$

定义 $E(X)$ 为 X 的数学期望

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i$$

注意这里是无穷, 所以此知识点容易与无穷级数结合, 但通常情况下都是有限项, 要知其中玄妙, 请继续努力学习.

若 $Y=\varphi(X)$, 则 $EY=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi(x_i)\cdot P_i$.

例:

X	-1	0	1
P	1/4	1/4	1/2

$EX=-1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. 就这么个简单道理.

2. 连续型

再研究一维连续型随机变量. 设 X 为随机变量, $f(x)$ 为其概率密度. 设 $E(X)$ 为其数学期望

$$\text{则} EX=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

对于 $Y=\varphi(X)$, 则 $EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$.

二、二维随机变量的期望

1. 离散型

再研究二维离散型随机变量. (X,Y) 为二维离散型随机变量, 其分布率为 $P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij} \quad (i=1,\dots,j=1,\dots)$. 若 $Z=\varphi(X,Y)$, 定义 EZ 为 Z 的数学期望.

$$EZ=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi(x_i,y_j)p_{ij}$$

2. 连续型

最后研究二维连续型随机变量 (X,Y). 其联合概率密度为 $f(x,y)$. 设 $Z=\varphi(X,Y)$, 则

$$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)f(x,y)dy$$

三、期望的性质

(1) 对于常数 C, $E(C)=C$.

(2) $E(kX)=kEX$.

(3) $E(X+Y)=EX+EY$.

(4) $E(k_1X_1+\cdots+k_nX_n)=k_1EX_1+\cdots+k_nEX_n$.

(5) 若 X,Y 独立 $\Longrightarrow E(XY)=EX\cdot EY$. 反之不对!!

期望可理解为估值.

方差

期望的概念讲完了, 下面来讲方差.

定义: $D(X)=E\{[X-EX]^2\}$ 其实就 X 偏离其期望 EX 的平方的期望值.

例:

X	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$EX=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$. X 作为随机变量有可能取到 -1, 0, 1. 当取到 -1, 0, 1 时, 偏离的绝对值为 $|X-EX|=1,0,1$. $(X-EX)^2$ 即偏离的数值的平方. 其期望 $E(X-EX)^2$ 被称为 X 的方差 DX.

计算方差的常规方法推导: (如果理解不了也没关系, 不会影响后续的学习)

$$E(X-EX)^2=E(X^2-2X\cdot EX+(EX)^2)$$

注意 X 是随机变量, 但 EX 只是一个常数.

$$=E(X^2)-2E(X\cdot EX)+E((EX)^2)$$

$$=EX^2-2EX\cdot EX+(EX)^2$$

$$=EX^2-(EX)^2$$

即 $DX = EX^2 - (EX)^2$. 背. 公式 $EX^2 = DX + (EX)^2$.

方差的性质:

(1) $(X-EX)^2 \geq 0 \implies E(X-EX)^2 \geq 0 \implies DX \geq 0$. 记住.

(2) 对于常数 C, 它不是随机变量, 故其取值不会波动. $C = E(C)$. $\therefore D(C) = E(C-EC)^2 = E(0) = 0$.

(3) $D(kX) = k^2 DX$.

证明: $D(kX) = E(kX - E(kX))^2 = E(kX - kEX)^2 = E(k^2(X-EX)^2) = k^2 E(X-EX)^2 = k^2 DX$. 证毕.

(4) $D(aX+b) = a^2 DX$.

(5) 把 c 看作变量, $L(c) = E(X-c)^2$, 此函数最小值的取值点 $c = EX$. 最小值为 $E(X-EX)^2 = DX$.

(6) $D(aX+bY) = a^2 DX + b^2 DY + 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$.

特别地, 当 X, Y 独立, $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. $D(aX+bY) = a^2 DX + b^2 DY$.

协方差和相关系数

协方差的定义: X, Y 为随机变量, DX, DY 存在. 定义 X, Y 的协方差

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$$

注: $DX = E(X-EX)^2 = E((X-EX)(X-EX))$. $\therefore \operatorname{cov}(X,X) = DX$. 由定义, 显然 $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$.

相关系数的定义: 定义 ρ_{XY} 为 X, Y 的相关系数

$$\rho_{XY} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

协方差的计算公式: (背)

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY$$

证明: $\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY))$

$$\begin{aligned}
&= E(XY - X\cdot EY - Y\cdot EX + EX\cdot EY) \\
&= E(XY) - E(X\cdot EY) - E(Y\cdot EX) + E(EX\cdot EY) \\
&= E(XY) - EY\cdot EX - EX\cdot EY + EX\cdot EY \\
&= E(XY) - EX\cdot EY. \text{ 证毕.}
\end{aligned}$$

再次提醒: EX, EY 只是一个常数.

协方差的性质: (背)

(1) $\operatorname{cov}(X, X) = DX$.

(2) X, Y 独立 $\Longrightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0$. 反之不对!!

(3) $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$.

(4) $\operatorname{cov}(kX, Y) = \operatorname{cov}(X, kY) = k\operatorname{cov}(X, Y)$.

(5) $\operatorname{cov}(X, k_1Y_1 + k_2Y_2) = k_1\operatorname{cov}(X, Y_1) + k_2\operatorname{cov}(X, Y_2)$.

(6) 若 $\rho_{XY} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

(7) 若 $\rho_{XY} = -1 \Longleftrightarrow P\{Y = aX + b\} = 1 \quad (a < 0)$.

(8) 若 $\rho_{XY} = 1 \Longleftrightarrow P\{Y = aX + b\} = 1 \quad (a > 0)$.

1. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $E[(X-1)(X-2)]=1$, 则 $\lambda=$ ______.

2. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数, 每次射击命中概率为 0.4, 则 $E(X^2) =$ ______.

3. 设试验成功的概率为 $\frac{3}{4}$, 失败的概率为 $\frac{1}{4}$, 独立重复该试验直到成功两次为止. 求试验次数的数学期望.

4. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

对 X 进行独立重复观察 4 次, 用 Y 表示 4 次中出现 $X>3$ 的次数, 求 $E(Y^2)$.

5. 设随机变量 $X \sim E(3)$, 求 $E(X^2 + e^{-X})$.

6. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.4\Phi(\frac{x-1}{2}) + 0.6\Phi(3x+1)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态变量的分布函数, 求 $E(X)$.

7. 设 X, Y 为随机变量, 且 $D(X)=3, D(Y)=2$,

(1) 若 X, Y 相互独立, 则 $D(3X-2Y)=$______;

(2) 若 $\rho_{xy}=\frac{1}{2}$, 则 $D(3X-2Y)=$______.

8. 设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, 且 X, Y 相互独立, 求 $E(|X-Y|), D(|X-Y|)$.

9. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布, 其中 D 是以 $(0,1),(1,0),(1,1)$ 为顶点的三角形区域, 且 $U=X+Y$, 求 $E(U)$.

10. 设 $X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$ 且 X, Y 相互独立, 设 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$, 求 $E(Z), D(Z)$.

11. 投硬币 n 次, 用 X, Y 分别表示出现正面和反面的次数, 求 ρ_{XY}.

12. 设 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)(i = 1, 2, \ldots, n)$ 且 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立, 令

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Y_i = X_i - \bar{X} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

求:

(1) $P\{Y_1 + Y_n > 0\}$;

(2) $E(Y_1), D(Y_1)$;

(3) $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$.

第 5 章　大数定律

切比雪夫不等式

设随机变量 X. 其期望为 EX, 方差为 DX.
注意: DX 和 EX 都是常数.
切比雪夫不等式:

$$P\{|X-EX|\geq\epsilon\}\leq\frac{DX}{\epsilon^2}\quad\text{或}\quad P\{|X-EX|<\epsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\epsilon^2}$$

如何理解这个不等式?
X 是变量, X 落点位置与 EX 的距离 $|X-EX|$ 大于 ϵ 的概率小于 $\frac{DX}{\epsilon^2}$.

定理 (辛钦大数定律)

定理: 设 $X_1,\dots,X_n$ 独立且同分布 (EX_i, DX_i 全都一样), $EX_i=\mu$, 则对 $\forall\epsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\epsilon\right\}=1$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i(\bar{X})\to\mu\quad(n\to\infty)$$

$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=E(\bar{X})=\frac{1}{n}(EX_1+\cdots+EX_n)=\frac{1}{n}n\mu=\mu.$
这个定理想法就是: $\bar{X}$ 为统计量, 样本越大 (即 n 越大), $\bar{X}$ 与其总体的期望 μ 的距离越小. 这是一个小学生都知道的公理, 现在不过将这一公理用极限的语言描述出来.
此即辛钦大数定律.

定理 (中央极限定理)

定理: 设 $X_1,\dots,X_n$ 独立同分布, $EX_i=\mu, DX_i=\sigma^2$. 对 $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\right\}=\Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数.

分析:

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= EX_1 + \cdots + EX_n = n\mu \\
\therefore E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) &= 0 \\
D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= DX_1 + \cdots + DX_n = n\sigma^2 \\
\Longrightarrow D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) &= n\sigma^2 \\
D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) &= \frac{1}{n\sigma^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) = \frac{n\sigma^2}{n\sigma^2} = 1
\end{aligned}
$$

这个定理的核心意思就是: 只要样本足够大 (n 够大), 只要一个统计量 $\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$ 的期望为 0, 方差为 1, 则近似看作服从于 $N(0,1)$ 分布 (正态). 当 $n \to \infty$ (即样本无穷大时), 可看作完全服从于 $N(0,1)$.

1. 设 $X \sim E(\frac{1}{2})$, 用切比雪夫不等式估计 $P\{-3 < X < 7\}$.

2. 设 X 服从参数为 3 的泊松分布, 用切比雪夫不等式估计 $P\{-5 < X < 11\}$.

3. 设 $E(X)=-1, D(X)=1, E(Y)=3, D(Y)=4$ 且 $\rho_{xy}=\frac{1}{2}$, 用切比雪夫不等式估计 $P\{-3<X+Y<7\}$.

4. 设总体 $X \sim E(\lambda)(\lambda > 0)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于 ______.

5. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 独立同分布于参数为 λ 的指数分布, 则 (　　).

A. $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$

B. $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$

C. $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right\} = \Phi(x)$

D. $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \lambda}{n\lambda} \le x\right\} = \Phi(x)$

6. 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_{25}$ 服从 $E(1)$, 用中心极限定理估计 $P\{\sum_{i=1}^{25} X_i \le 35\}$.

7. 一生产线生产包装箱, 每箱重量随机, 设平均每箱重量 50 千克, 标准差为 5 千克, 若用载重量为 5 吨的汽车装运, 利用中心极限定理说明每辆车最多装多少箱, 可保证不超载的概率大于 0.977 ($\Phi(2) = 0.977$).

第 6 章　数理统计入门

设总体为 X, 从总体 X 中取出含 n 个个体的样本 $(X_1,\dots,X_n)$ n 称为样本容量
若

1. $X_1,\dots,X_n$ 相互独立
2. $X_1,\dots,X_n$ 的分布与 X 相同

则, 称 $X_1,\dots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本
定义: 统计量: 从 $X_1,\dots,X_n$ 为变量构造的, 不含其他变量的函数 $g(X_1,\dots,X_n)$ 称为统计量.
例如: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\bar{X})$, $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
但是只要包含未知参数, 例如 aX_1+bX_2, 便不是统计量
常用统计量:

1. 样本均值 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
2. 二阶原点矩: $A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$
3. 样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (区别于总体方差 σ^2)

几个要背的分布

1. **χ^2 分布**

   定义: 一组简单随机样本 $X_1,\dots,X_n$ 都服从 $N(0,1)$ 分布, 则称 $X=X_1^2+\cdots+X_n^2$ 服从 $\chi^2(n)$ 分布, 其中 n 称为自由度.

   性质:

   1. 若 $X\sim N(0,1)$, 则 $X^2\sim\chi^2(1)$.
   2. 若 $X\sim\chi^2(m)$, $Y\sim\chi^2(n)$ 且 X,Y 独立, 则 $X+Y\sim\chi^2(m+n)$.
   3. 若 $X\sim\chi^2(n)$, 则 $EX=n$, $DX=2n$.

2. **t 分布**

   若 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim\chi^2(n)$ 且 X,Y 独立, 则称 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$, 其中 n 称为自由度.

   性质:

   1. 若 $X\sim t(n)$, 则 X 的概率密度为偶函数. 显然 $P(X<0)=\frac{1}{2}$, $P(X>0)=\frac{1}{2}$.
   2. 若 $X\sim t(n)$, 则 $EX=0$, $DX=\frac{n}{n-2}$.

3. **F 分布**

   若 $X\sim\chi^2(m)$, $Y\sim\chi^2(n)$ 且 X,Y 独立, 则 $F=\frac{X/m}{Y/n}\sim F(m,n)$.

   例: 若 $X\sim F(m,n)$, 则 $\frac{1}{X}\sim F(n,m)$.

   证明: $\because X\sim F(m,n),\therefore\exists X_1\sim\chi^2(m),X_2\sim\chi^2(n)$ $X=\frac{X_1/m}{X_2/n}$, $\frac{1}{X}=\frac{X_2/n}{X_1/m}$, $\therefore\frac{1}{X}\sim F(n,m)$.

   例: 若 $X\sim t(m)$, 则 $X^2\sim F(1,m)$.

   证明: $\because X\sim t(m),\therefore\exists X_1\sim N(0,1),X_2\sim\chi^2(m)$. $X=\frac{X_1}{\sqrt{X_2/m}}$, $X^2=\frac{X_1^2}{X_2/m}=\frac{X_1^2/1}{X_2/m}$. $\because X_1^2\sim\chi^2(1)$, $\therefore X^2\sim F(1,m)$.

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本. $\bar{X},S^2$ 分别为样本均值和样本方差.

1. $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

   证明: $E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n}(EX_1+\cdots+EX_n)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu$

   $\therefore E(\bar{X}-\mu)=0$

   $D(\bar{X}-\mu)=D(\bar{X})=D\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n^2}(DX_1+\cdots+DX_n)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$

   $D\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{\sigma^2/n}D(\bar{X}-\mu)=\frac{1}{\sigma^2/n}\cdot\frac{\sigma^2}{n}=1$

   $\therefore\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

2. $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

3. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

   证明: $\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

   $\therefore\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

4. $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ (★ 硬背)

   证明: $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2=\frac{n-1}{\sigma^2}S^2$ (样本方差的定义)

5. $\bar{X}$ 与 S^2 独立

6. $E(S^2)=\sigma^2$

   证明: $E(S^2)=E\left(\frac{\sigma^2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\right)=\frac{\sigma^2}{n-1}E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$

   由第 4 条, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$, $\therefore E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)=n-1$

   $\therefore E(S^2)=\frac{\sigma^2}{n-1}(n-1)=\sigma^2$

1. 设总体 $X \sim B(n,p)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 且 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 记 $T = \bar{X} - S^2$, 求 $E(T)$.

2. 设总体 $X \sim N(0,4)$, 且 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体的简单随机样本, 且有 $a(X_1 - X_2)^2 + b(X_3 + X_4)^2 \sim \chi^2(2)$, 求常数 a, b.

3. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 记 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$, $S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2$, $S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$, $S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$, 则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的统计量是 (　).

A. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$　　B. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$　　C. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　　D. $\frac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

4. 设总体 $X \sim N(0,4)$, 且 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体的简单随机样本, 求 $U = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2}}$ 所服从的分布.

5. 设总体 $X \sim N(0,9)$, $X_1,\ldots,X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量 $U = \frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从 ______ 分布, 自由度为 ______.

6. 设总体 X, Y 独立同分布且都服从正态分布 $N(0,9)$. $X_1,\dots,X_9$ 与 $Y_1,\dots,Y_9$ 是分别来自总体 X, Y 的简单随机样本, 求统计量 $U = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 所服从的分布.

7. 设 $X \sim t(2)$, 求 $Y = \frac{1}{X^2}$ 所服从的分布.

8. 8. 设总体 $X \sim N(0,9)$, $X_1,\ldots,X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量 $U=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从 ______ 分布, 自由度为 ______.

9. 设总体 $X \sim N(0,9)$, $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求统计量 $U = \frac{\sum_{i=1}^{10}(-1)^i X_i}{\sqrt{2}\sqrt{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}}$ 所服从的分布.

10. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_9$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $Y_1 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} X_i$, $Y_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=7}^{9} X_i$, $S^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i - Y_2)^2$, 求 $T = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}$ 所服从的分布.

11. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})$ 为来自总体的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 求统计量 $T = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S}$ 所服从的分布.

12. 设 $X \sim N(0,1)$, 对 $0 < a < 1$ 有 $P\{X \geq u_a\} = a$, 又 $Y \sim \chi^2(1)$, 已知 $k > 0$ 且 $P\{Y \geq k^2\} = a$, 求 k.

13. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 对于 $a \in (0,1)$, 若 u_a 是使得 $P\{X > u_a\} = a$ 成立的数, 求使得 $P\{|X| < x\} = a$ 的 x.

14. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为来自总体的简单随机样本, 令 $T = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, $Y_i = X_i - \bar{X}(i = 1, 2, \ldots, n)$.

(1) 求 $E(X_1 T)$.

(2) 求 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$.

(3) 求 $P\{Y_1 + Y_n \le 0\}$.

15. 设总体 $N(\mu,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\ldots,X_{2n}$ 为来自总体的简单随机样本, $\bar{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i$, $T=\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\bar{X})^2$, 求 $E(T),D(T)$.

16. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 令 $T = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 求 $E(T)$ 及 $D(T)$.

17. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 令 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 求 $E(\bar{X}^2 + S^2)$.

18. 设总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$, 又 $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ 分别为来自总体 X 与 Y 的简单随机样本, 其样本均值分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$, 且 X, Y 相互独立, 求: $D\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2\right]$.

19. 设总体 $X \sim N(60, 12^2)$, 从总体中抽取容量为 n 的简单随机样本, 问容量 n 至少为多少时, 才能使样本均值大于 54 的概率不小于 0.975. ($\Phi(1.96) = 0.975$)

第 7 章　参数估计

1. **参数估计的概念**

   总体 X 的分布函数、概率密度已知, 但其中含有未知参数 θ (一般只考一个参数的情况). 然后, 从总体 X 中取一个简单随机样本 $(X_1,\dots,X_n)$, $(x_1,\dots,x_n)$ 为样本观察值, 利用样本去估计未知参数 θ 的一系列操作, 称为参数估计. 分为:

   (a) 点估计

   (b) 区间估计

2. **点估计**

   概念: 已知总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 或概率密度 $f(x;\theta)$, θ 为未知参数. 再构造一个由样本构成的统计量 $\hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$, 利用样本求出参数的近似值 $\hat{\theta}(x_1,\dots,x_n)$.

   常用方法:

   (a) **矩估计**

   i. **一个参数的情况**
   令 $E\bar{X}=\bar{X}$, (若 EX 中含 θ, 直接解出 $\hat{\theta}$). 若 EX 中不含有 θ, 则令 $EX^2=A_2$, ($A_2=\frac{1}{n}\sum X_i^2$, 也是一个已知统计量).

   ii. **二个参数的情况**
   令 $\begin{cases} EX=\bar{X} \\ EX^2=A_2 \end{cases}$, 然后解出 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$.

   (b) **最大似然估计**

   i. **离散型 X**
   令 $L(\theta)=P\{X_1=x_1\}\cdots P\{X_n=x_n\}$. 再令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$, 解出 $\hat{\theta}$.

   ii. **连续型 X**
   令 $L(\theta)=f(x_1;\theta)\cdots f(x_n;\theta)$. 再令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$, 解出 $\hat{\theta}$.

3. **估计量的评价标准**

   (a) **无偏性**
   若 $E(\hat{\theta})=\theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

   (b) **有效性**
   若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$, 则 $\hat{\theta}_1$ 是比 $\hat{\theta}_2$ 更有效的估计量.

   (c) **一致性**
   若 $\forall\epsilon>0, \lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\epsilon\}=1 \quad (\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta \quad (n\to\infty))$ 称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致估计量.

4. 这一块知识无须冗长的概念叙述, 重点在于拿到题时的操作. 做题前只需大概区分一下题类型.

前置: 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, \ldots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(a) 已知 σ^2, 对 μ 估计.
使用统计量 $T = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

(b) 未知 σ^2, 对 μ 估计.
使用统计量 $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

(c) μ 已知, 对 σ^2 估计.
使用统计量 $T = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$.

(d) μ 未知, 对 σ^2 估计.
使用统计量 $T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$.

1. 设总体 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p & p & 1-2p \end{pmatrix}$ (其中 $0 < p < \frac{1}{2}$ 为未知参数), 且 $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ 为来自总体的简单随机样本, 其观察值为 $(2, 1, 0, 0, 1)$, 求参数 p 的矩估计值.

2. 设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ	θ	$1-2\theta$

其中 $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ 是未知参数, $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ 为来自总体的简单随机样本, 其观察值为 $(1, 1, 3, 2, 3)$, 求参数 θ 的最大似然估计值.

3. 设总体 $X \sim E(\lambda)$ (其中 $\lambda > 0$ 为未知参数), $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求参数 λ 的矩估计量.

4. 设总体 $X \sim E(\lambda)$ (其中 $\lambda > 0$ 为未知参数), $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求参数 λ 的矩估计量.

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (其中 μ, σ^2 为未知参数), $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求参数 μ, σ^2 的矩估计量.

6. 设总体 $X \sim U(\theta_1, \theta_2)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 求 θ_1, θ_2 的矩估计和最大似然估计.

7. 设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 求 $D(\hat{\theta})$;

(3) 判断该估计的无偏性.

8. 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做 n 次测量, 该物体的质量 μ 是已知的. 设 n 次测量的结果 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立且都服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 利用 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ 估计 σ.

(1) 求 Z_i 的概率密度;

(2) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量;

9. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$, $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 且 $(1+k)n\bar{X}^2+(1-5k)S^2$ 为参数 σ^2 的无偏估计量, 求常数 k.

10. 设 $X \sim U(0,\theta)$ (其中 $\theta > 0$ 为未知参数), (X_1, X_2, X_3) 为来自总体 X 的简单随机样本, 问估计量 $\hat{\theta} = \min\{X_1, X_2, X_3\}$ 是否是参数 θ 的无偏估计量?

11. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自正态总体 X 的简单随机样本, $T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n}S^2$, 其中 $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$, 问统计量 T 是否为 μ^2 的无偏估计量?

12. 设总体 $X \sim f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x > \theta \\ 0, & x \le \theta \end{cases}$, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 是来自总体的简单随机样本, 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$, 讨论该估计量是否具有无偏性和一致性.

13. 设相互独立的正态分布 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ 与 $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 分别为来自总体 X 及 Y 的简单随机样本 $(m > 1, n > 1)$, 又 $S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2$, 对任意常数 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 1, T = aS_1^2 + bS_2^2$, 求使得 $D(T)$ 取最小值时的 a, b.

14. 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ (其中 σ 为已知参数), $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 参数 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的长度与 σ 的关系为 (　).

A. σ 越大, 则置信区间的长度越大

B. σ 越大, 则置信区间的长度越小

C. 置信区间的长度与 σ 无关

D. 置信区间的长度与 σ 的关系不确定

15. 设 $0.50, 1.25, 0.80, 2.00$ 是来自总体 X 的简单随机样本的观察值. 已知 $Y = \ln X$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 $E(X)$ (记 $E(X) = b$);

(2) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间. ($u_{0.025} = 1.96$)

第 8 章　假设检验

假设检验, 顾名思义分两步, 假设, 再检验这个假设是否被接受.
一般题干中给出假设, 我们要做的就是去检验在既定的显著性水平下, 假设是否被接受.
这个题型本质上还是求 '置信区间 ', 你所假设的 '参数 '若入了 '置信区间 '则假设成立, 否则不成立.

1. 设某次考试考生成绩服从正态分布, 从中随机抽取 36 位考生的成绩, 平均成绩为 66.5 分, 总体均方差为 15 分. 问在显著性水平为 0.05 下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分? ($t_{0.025} = 1.96$)

第 9 章　课上重点题

$$L(\theta,\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i-\mu}{\theta}}=\left(\frac{1}{\theta}\right)^{n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)},\quad \text{其中}\mu<x_{(1)}$$

对数似然函数为：

$$\ln L(\theta,\mu)=-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right)$$