课堂笔记

作者：Huang

目录

第 1 章　多元函数的极限和连续 **1**

1.1　2023/8/31 1

第 1 章 多元函数的极限和连续

1.1 2023/8/31

定义 1.1

设$F \subset \mathbb{R}^n$，若F^c为开集，则称F为闭集

♣

定理 1.1

在 $\mathbb{R}^n$ 中

1.$\mathbb{R}^n, \oslash$ 均为闭集（很特殊的一点，这两个同时为开集和闭集）

2.若F_α 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族，其中指标 α 来自一个指标集合 I，则 $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ 也是闭集

3. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 为有限个闭集，则它们的并集 $\bigcup_{i=1}^m F_i$ 也是闭集

♡

令 $\check{B}\left(a, r\right) = B\left(a, r\right) \backslash \{a\}$为以$a$为心，半径为$r$的空心球

定义 1.2

设$E \subset \mathbb{R}^n$, 若点 $a \in \mathbb{R}^n$ 满足：对任意 $r > 0$, 在空心球 $\check{B}\left(a, r\right)$ 总含有 E 中的点，则称 a 为 E 的聚点

♣

注 聚点可以属于 E 也可以不属于 E。若 E 中的点不是聚点，则称其为孤立点。

定义 1.3

$E \subset \mathbb{R}^n$ 的凝聚点的全体称为 E 的导集，记作 E，记 $\bar{E} = E \cup E'$，称其为 E 的闭包

♣

定理 1.2

E 为闭集的充要条件是 $E' \subset E$, 即 $\bar{E} = E$

♡

证明

$\Longrightarrow$ 我们要证明的是包含关系，于是先把 E' 中的元素设出来，不妨假设 $x \in E'$, 只需要证明 x同时也 $\in E$ 即可，但直接证明不是很好证明，考虑反证法，即 $x \notin E \Rightarrow x \in E^c$

点在集合中，直接默写定义

$$\exists r > 0, 使得 B(x, r) \subset E^c$$

于是乎，有

$$\hat{B}\left(x, r\right) \cap E = \oslash \tag{1.1}$$

根据聚点的定义，我们是对任意的 $r > 0$ 的去心球均有交集，但我们推出了如 (1.1) 的结论，表明其不为 E 的聚点，故

$$x \in E'$$

与先前假设 $x \in E'$ 矛盾，于是假设错误

$\Longleftarrow$ 现在我们要证明 E 为闭集通常像这类的证明，我们要将其转化为该集合的补集进行证明。故我们只需证明 E^c 为开集即可，但事实上，直接进行证明有些难度，我们采取反证法

假设 E^c 非开，按定义直接写（把开集的定义反着来）

$\exists x \in E^c, \forall r > 0, B(x, r) \cap E \neq \oslash$(这里的结论是$B(x, r) \subset E^c$的反例, 不属于这个集合，等价于和这个集合的补集有交集)

x 显然不在 E 中，则 x 为 E 的一个聚点，于是有

$$x \in E' \subset E$$

与 $x \in E^c$ 矛盾，假设错误

推论 1.1

E 是闭集的充要条件是 E 中的任何收敛点列的极限必在 E 中

证明 $\Longrightarrow$ 设 $\{a_n\} \subset E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$，直接证明不好证明，我们采取反证法，假设 $x \in E^c$, 又因为 E^c 为开集，按定义

$$\exists r > 0, B(x,r) \subset E^c$$

又因为 a_n 收敛于 x，于是存在无穷多个 a_n 在 x 附近的一个开球 $B(x,r)$ 中，故 x 为 E 的一个聚点于是有

$$x \in E' \subset E$$

与 $x \in E^c$ 矛盾，假设错误 $\Longleftarrow$ 现在我们要证明 E 为闭集通常像这类的证明，我们要将其转化为该集合的补集进行证明。故我们只需证明 E^c 为开集即可，但事实上，直接进行证明有些难度，我们采取反证法

推论 1.2

完备度量空间的闭子集是完备集。

证明

定理 1.3

E 的导集 E 和闭包 $\bar{E}$ 均为闭集

证明