线性赋范空间

完备度量空间

完备度量空间的定义：空间中任意柯西列都收敛于空间中的点。

例子:

- 有理数空间不是完备的,例如数列$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \cdots\}$收敛于$\sqrt{2}$，而$\sqrt{2}$不是有理数。
- 实数空间是完备的。
- 开区间$(0,1)$不是完备的，例如数列$\{1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, \cdots\}$收敛于$0$，而0不属于$(0,1)$。

例子:

【例 1】l_1 的子空间 $(M, d_1|_{M\times M}), M = \{\{x_n\} : \exists N \geq 1, \forall n \geq N, x_n = 0\}$ 不是完备度量空间。

- 【证明】构造一个 M 上的数列，证明它是柯西列；假设它收敛于 M 上的某一个点，$x = \{x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, 0, \cdots\}$，证明对于某一个和 k 有关的 ϵ，不能够找到相应的 N，即不收敛。可以构造如下数列：$x^{(n)} = \{1, 1/2, 1/4, \cdots, 1/2^n, 0, 0, \cdots\}$。

【例 2】$(\mathbb{K}^n, d_p), 1 \leq p \leq \infty$ 为完备度量空间。

- 【证明等价性】$d_\infty(x,y) = \max_i |x_i - y_i| \leq (\sum_i |x_i - y_i|^p)^{1/p} = d_p(x,y) \leq n^{1/p} d_\infty(x,y)$。
- 【证明 $(\mathbb{K}^n, d_\infty)$ 完备】任意柯西列，d_∞ 下小于 ϵ 说明每一项都小于 ϵ；使用 $\mathbb{K}$ 的完备性，则每个位置 $x_i^{(n)}$ 都收敛到某个值 x_i；可以证明整个数列收敛于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

【例 3】(l^∞, d_∞) 为完备度量空间。

- 【证明】和上面的证明方式类似，也可以证明任意柯西列收敛到某个数列上；比较特别的是需要证明该极限数列 $x \in l^\infty$，即 $\forall n, x_n < \epsilon + |x_n^{(N)}|$。

【例 4】$C[a,b], d_\infty)$ 为完备度量空间

- 【证明】和上面的证明方式类似，可以证明任意柯西列收敛到某个函数上；同样，另外需要证明该函数 x 是连续的，考虑到连续性的 $\epsilon - \delta$ 描述，同时利用 $|x(t) - x(t_0)| \leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)|$ 可以最后证明连续性。

【例 5】(l^p, d_p) 为完备度量空间

- 【证明】同样先证明一个柯西列收敛到某个数列上，注意到 $d_\infty(x^{(n)} - x^{(m)}) \leq d_p(x^{(n)} - x^{(m)}) < \epsilon$，同样可以得到每个位置上的元素都形成 $\mathbb{K}$ 上的柯西列。另外需要证明数列 $x \in l^p$，这里需要利用 Minkowski 不等式，$(\sum_m |x_m|^p)^{1/p} \leq (\sum_m |x_m - x_m^{(N)}|^p)^{1/p} + (\sum_m |x_m^{(N)}|^p)^{1/p}$。

【例 6】l^∞ 的子空间 $(c_0, d_\infty|_{c_0 \times c_0})$ 为完备子空间，其中 $c_0 = \{\{x_n\} \in l^\infty : \lim_{x\to\infty} x_n = 0\}$。

- 【证明】由于大空间完备，要证明子空间完备只需要证明子空间是闭集；要想证明子空间是闭集，只需要证明数列在子空间中的任意收敛列都收敛在子空间中。假设 $x^{(n)} \in c_0, x^{(n)} \to x \in l^\infty$，极限也可以用 $\epsilon - N$ 描述出来，应用 $|x_m| \leq |x_m - x_m^{(n)}| + |x_m^n|$ 可以得到，其中前一项用数列极限得到上界，后一项用 c_0 的极

限定义得到上界。

【例 7】$(C[a,b],d_p), 1\le p\le\infty$ 不是完备度量空间

- 【分析】注意到 $(C[a,b],d_\infty)$ 是完备度量空间，由于 d_∞ 衡量的是两函数之间差距最大的值，把最大值 bound 了，两函数差距不会太远；而对函数空间来说，$d_p(x,y)=(\int_a^b|x(t)-y(t)|^pdt)^{1/p}$，两个函数可以在一个点上差距非常大，而在其他位置都一样，也会在 d_p 度量下距离较小，即 d_p 不能保证函数【处处】相似。
- 【对比】对比数列可以看到 $(\mathbb{K}^n,d_p), 1\le p\le\infty$ 为完备度量空间，这是由于在数列中 $d_\infty\le d_p$，即 d_p 基本更强，而函数中这一点并不成立。
- 【证明】由于等价性，只需要证明 $p=1$ 即可。构造一个柯西列，这个柯西列上的函数会逐渐变成一个不连续的阶跃函数，证明它的极限是阶跃函数（不连续）即可说明该空间不完备。

基本性质:

- 任一紧致度量空间都是完备的。实际上，一个度量空间是紧致的当且仅当该空间是完备且完全有界的.完全有界：任取$\epsilon>0$，存在有限个开球覆盖空间中的所有点。
- 完备空间的任一子空间是完备的当且仅当它是一个闭子集。
- 任一完备度量空间为一贝尔空间。就是说，该空间的可数个无处稠密子集的并集无内点。

线性赋范空间

有限维线性赋范空间的性质：

- 任一有限维线性赋范空间等距同构于$\mathbb{R}^n$。
- 任一有限维线性赋范空间是完备的。
- 任一有限维线性赋范空间中的范数等价。
- 任一有限维线性赋范空间的子空间是闭的。
- 有限维赋范线性空间中的有界闭集都是紧集。

例子:

- 离散集合

X 为离散集合，$d(x,y)=\mathbb{I}[x\ne y]$，其中 $\mathbb{I}[cond]$ 为指示函数，条件为真时取 1，否则取 0。

证明已是度量空间：前二条容易证明，三角不等式可以用分类讨论证明。先考虑 $x=y$，再考虑 $x\ne y$。后一种情况再分为 $x=z\ne y, x\ne z=y, x\ne z\ne y$ 三种情况证明。

- 任意数列空间

$X=s=\{\{x_n\}:x_n\in\mathbb{K}\}$，$d(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}$

证明已是度量空间：首先，需要验证上面无穷级数和是有限的，$d(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-y_n|}{1+|x_n-y_n|}<\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}<+\infty$。然后验证四条公理，前三个容易，下面验证三角不等式。注意到函数 $f(t):=\frac{t}{1+t},\forall t\ge 0$ 是单调递增的，因此

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|}=f(|x-y|)\le f(|x-z|+|z-y|)=\frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$
$$\le\frac{|x-z|}{1+|x-z|}+\frac{|z-y|}{1+|z-y|}$$

。

- 序列空间 l^∞

$l^\infty:=\{\{x_n\}:\exists C,|x_n|<C,\forall n\ge 1\}$

$X = l^\infty$，$d_\infty(x,y) = \sup_{n\geq 1}|x_n - y_n|$

证明已是度量空间：前三条容易证明，下面证明它满足三角不等式。对于任意的 n 有 $|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |y_n - z_n| \leq d(x,z) + d(z,y)$，由此可以得出三角不等式。

- 序列空间 l^p

$l^p := \{\{x_n\} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty$

$X = l^p$，$d_p(x,y) = (\sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p)^{1/p}$

证明已是度量空间：前三条容易证明，下面证明它满足三角不等式。由于证明过程比较复杂，需要用到以下两个定理。

定理一：Holder 不等式

若 $x \in l^p, y \in l^q$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 < p, q < \infty$，则 $(x_n), (y_n) \in l^1$ 且 $\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q)^{1/q}$。

证明：

1. 利用凸性质（凸函数），注意到 $u = p^{-1}, v = q^{-1}, \sum_{i=1}^2 u_i = 1$，对于任意 $a, b > 0$，有 $ab \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$。
2. 考虑特殊的序列 $\sum_{n=1}^\infty |x_n| = \sum_{n=1}^\infty |y_n| = 1$，有 $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$。
3. 对于任意序列，把它们先归一化 $(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$ 和 $(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q)^{1/q}$ 即可。每一项除以这两个系数，它们就满足条件 2，然后再乘回相应的系数。

Remark: $p = q = 2$ 时，该不等式退化为 Cauchy-Schwarz 不等式。

Remark: 容易验证 $p = 1, q = \infty$ 时，也成立，但是证明不同。

定理二：Minkowski 不等式

$(\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p)^{1/p} \leq (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p} + (\sum_{n=1}^\infty |y_n|^p)^{1/p}$

$\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n||x_n + y_n|^{p-1} + \sum_{n=1}^\infty |y_n||x_n + y_n|^{p-1}$
$\leq ((\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p} + (\sum_{n=1}^\infty |y_n|^p)^{1/p})(\sum_{n=1}^\infty |x_n + y_n|^p)^{(p-1)/p}$

其中，后一个不等式用到了 H?lder 不等式。

三角不等式证明：

直接使用 Minkowski 不等式即可，注意到 $x_n - y_n = (x_n - z_n) + (z_n - y_n)$。

- 向量空间

对于向量空间 $X = A \subset \mathbb{K}^n$，$d_p(x,y) = (\sum_{i\in[n]} |x_i - y_i|^p)^{1/p}$ 为度量量，其中 $p \in [1, \infty)$。

对于向量空间 $X = A \subset \mathbb{K}^n$，$d_\infty(x,y) = \max_{i\in[n]} |x_i - y_i|$ 为度量量，它是前述度量中 $p \to \infty$ 的极限情形。

证明已是度量空间：前三条容易证明，对于三角不等式，前者可以证明使用 H?lder 不等式即可得到，后者可以证明可以仿照第六部分的证明。

- 函数空间

对于某区间上的连续函数集合 $X = C[a,b]$，$d_\infty(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$

有限维赋范空间

Hamel 基

【定义: Hamel 基】设 X 为线性空间, M 为 X 线性无关子集, span(M)=X, 则称 M 为 X 的 Hamel 基。

【性质】X 中任意的元素 x, 都可以唯一一表示为 M 中元素的线性组合。

- 【证明存在】由于 $X \subset span(M)$。
- 【证明唯一】如果还有另外一种表示方法,那么两项相减,可以推出 M 中的这些个元素线性相关,矛盾。

【例】比如 $\mathbb{K}^n$ 中的一个 Hamel 基为 $M = \{e_1, \cdots, e_n\}$ (单位向量)。显然它们线性无关,同时任意向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)$,可以被唯一一表示为 $x = \sum x_i e_i$,反之也成立,因此 span(M)=X。

【例】考虑 $l^p, 1 \leq p < \infty$ 的子集 $M = \{\{x_n\} : \exists N, \forall n \geq N, x_n = 0\}$,构造 M 的子集 $P = \{e_n : n \geq 1\}$,则 P 为 M 的 Hamel 基,这也说明 P 不是 l^p 的 Hamel 基。

- 【证明】显然,P 是线性无关的;同时 M 中的元素都是成 N 维的东西,由此可以看做是 P 中前 N 个元素的线性组合,反之同样。因此 P 为 M 的 Hamel 基。而 $M \subset l^p$,显然 P 不为 l^p 的 Hamel 基。

【性质】设 X 为线性空间,M 为 X 的线性无关子集,则一定存在 X 的 Hamel 基 N,使得 $M \subset N$。(证明需要用到陈本里面不证的 Zorn 引理)

【推论】任意非零线性空间均有 Hamel 基。(X 中任意元素 x,令 $M = \{x\}$,存在 Hamel 基 N)

Banach 空间

【定义: Banach 空间】设 $(X, \|\cdot\|)$ 为赋范线性空间, 如果在由范数诱导出的度量下, X 完备, 则称 $(X, \|\cdot\|)$ 为 Banach 空间。

【例】定义 $\mathbb{K}^n$ 上的范数 p-norm $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$, 则 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ 为 Banach 空间。

- 证明: 首先, 根据前面上述定义一个合理的范数 (三角不等式用到 Minkowski 不等式证明), p-norm 诱导出的度量是完备 d_p, 即可已经证明过 $(\mathbb{K}^n, d_p)$ 为完备度量空间。

【例】定义 $\mathbb{K}^n$ 上的范数 inf-norm $\|x\|_\infty = \max_{i \in [n]} |x_i|$, 则 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 为 Banach 空间。

- 证明: 首先, 根据前面上述定义一个合理的范数 (三角不等式已经证明过用的简单的那个不等式), inf-norm 诱导出的度量是完备 d_∞, 前面已经证明过 $(\mathbb{K}^n, d_\infty)$ 为完备度量空间。
  (后面的证明略过, 不写了)

【例】定义 l^p 上的范数 $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$, 则 $(l^p, \|\cdot\|_p)$ 为 Banach 空间。

【例】定义 l^∞ 上的范数 $\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$, 则 $(l^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 为 Banach 空间。

【例】定义 $C[a, b]$ 上的范数 $\|x\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$, 则 $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ 为 Banach 空间。

【例】定义 $C[a, b]$ 上的范数 $\|x\|_p = (\int_a^b |x|^p dt)^{1/p}, 1 \leq p < \infty$, $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ 不是 Banach 空间。

- 首先, 应用 H?lder 不等式可以证明上述定义是一个合理的范数 d_p, 前面看到 $(C[a, b], d_p)$ 不是完备度量空间 (可以构造一个不收敛的柯西列), 使得最后它成为一个不完备的范数空间。

【例】所有的矩阵集合 s 和相应的距离是是完备的, 但是这里需要不能给个 s 上的范数诱导出来

$$X = s = \{(x_n) : x_n \in \mathbb{K}\}, d(x, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

【性质】若 X 为赋范空间, Y 为 X 的线性子空间, 如果 Y 为 Banach 空间, 则 Y 是 X 中的闭集。

- 证明: Y 为 Banach 空间, 即它完备, 完备子空间"是"闭集。

【性质】若 X 为 Banach 空间, Y 为 X 的线性子空间, 则 Y 为 Banach 空间, 当且仅当, Y 是 X 中的闭集。

- 证明: 完备空间的子集完备, 当且仅当, 子空间为闭集。

等价范数

【性质: 赋范空间任意范数下界】设 X 为赋范空间, $x_1, \cdots, x_n$ 为其中 n 个线性无关元素, 则存在常数 C>0, 使得对于任意的 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$, 有 $C(|a_1| + \cdots + |a_n|) \leq \|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\|$。

- 【Bolzano-Weierstrass 定理】$\mathbb{R}^n$ 中有界数列必定存在收敛子列。
- 【证明】定义范数 $\|a\|_1 = 1$ 的情形。如果不存在 C, 则存在某数列 RHL 趋向于 0; 由上述定理, 系数有极限; 定义极限系数对应的加权和为 x, 有 $\|x\| = 0$; 由此得到矛盾, 即加权和为零, 和线性无关矛盾, 做线性代换即可得到最后的结论。注意到 $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$。

【定义: 等价范数】定义在线性空间 X 上的范数 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$, 若存在常数 $\alpha, \beta > 0$, 使得 $\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a, \forall x \in X$, 则称 $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ 为等价范数。

【性质】等价范数对应的数列具有相同的收敛性。构造性: 等价范数对应的空间具有相同的完备性(同时是/不是 Banach 空间)。

【性质】设 X 为有限维线性空间, 则 X 上任意两个范数均为等价范数。

- 【证明】有限维线性空间中, 存在 Hamel 基 $x_1, \cdots, x_n$。定义一个范数 $\|a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\|_1 = |a_1| + \cdots + |a_n|$。利用【性质: 赋范空间任意范数下界】和三角不等式即可证明该范数和任意范数等价。

【性质】设 X 为有限维线性空间, 则 X 赋予任意范数都构成 Banach 空间。

- 【证明】由等价性, 只需要对前述的 $\|\cdot\|_1$ 范数证明即可。任意柯西列, *其系数也为柯西列; 由实数/复数完备性, 则系数为收敛列*; 则 X 中柯西列为收敛列。
- 【推论】X 为赋范空间, Y 为 X 的有限维线性子空间; 则 Y 为 Banach 空间; 则 Y 为闭集。

紧集

【定义：紧度量空间】如果 X 中的任意数列均有收敛子列，则称 X 为紧度量量空间。

- 【注】什么情况下【不紧】？比如一个【很大的】空间，比如 $\mathbb{R}$，可以找到一个数列 $1, 2, 3, \cdots$，它就不存在一个收敛子列，因为任何收敛子列都发散。形象上也很好理解，一方面说，不能摊出一张覆盖该集合的薄饼的，就不 compact。

【定义：紧集】如果一个度量空间的 (X, d) 的子空间 $(M, d|_{M \times M}), M \subset X$ 为紧度量空间，则称它为紧子集，简称紧集。即，$\forall x_n \in M, \exists \{x_{n_k}\}, \exists x \in M, s.t. \lim_{k \to \infty} x_{n_k} \to x$。

- 【性质】如果一个子集的元素有限，必定是紧集。由于数列是无限长的，而集合中的元素是有限的，因此一定存在某个元素被选了无穷多次，我们就针对该元素选择一个常子列，它是收敛的。
- 【性质】一个离散度量空间的 (X, d)，它的子集 M 为紧集 当且仅当 M 为有限集。反向已经在上面证明了；同时，无限集不可能为紧集，因为在无限集中可以找到一个数列，使得该数列中元素两两不同，这样无法找到一个收敛子列。
- 【性质】一个度量空间 $(\mathbb{K}^n, d_2)$ 中的子集 M 为紧集 当且仅当 M 为有界闭集（Bolzano-Weierstrass 定理）。

【定义：相对紧集】类似地，但不要求极限在子集中。即，
$\forall x_n \in M, \exists \{x_{n_k}\}, \exists x \in X, s.t. \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \to x$。

- 【注】如果 M 为紧集，那么它一定为相对紧集。

【定义：ϵ-网（ϵ-net）】如果 $N \subset M$，$M \subset \cup_{x\in N} B(x, \epsilon)$，则称 N 为 M 的 ϵ-网。

【定义：完全有界集】若任意给定 $\epsilon > 0$，都有关于 M 的有限元素的 ϵ-网，则称 M 为完全有界集。

- 【注】形象地来说 ϵ-网就是选取一张 ϵ 密度的渔网 N 能够把整个 M 空间都覆盖了；而 M 为完全有界集则是说明无论要求网多稀疏，都能找到有限的格点把 M 空间覆盖。这个概念大致跟机器学习里面的 non-parametric 类的方法比较像，像 nearest neighbors 啥的；可以看看进一步的综述，关注一下。
- 【注】完全有界集均为有界集。直观上来说，完全有界集要求有有限格点，每个格点占据体积有限，因此总体积肯定是有限的，有限总体积肯定是有限集；当然严格证明不能这么证。

【性质：紧集必为有界闭集】度量空间 (X, d) 中的紧集 M 必为有界闭集。

- 【证明闭集】考虑 M 上 X 中的收敛列，由紧性知道，它的子列收敛到 M 上；由于其本身收敛，以及收敛的唯一性，可知它和它的子列收敛到同一位置，即它也收敛到 M 上，由【性质：极限和闭集】可知，这样的集合是闭集。
- 【证明有界】有界说的是任意给一个 X 中的点 b，都能以它为球心找一个球把 M 覆盖。假设 M 不有界，则存在一个点 b，使得不管半径多大，M 不能外部都非空。于是可以构造一个数列，使得数列中的第 n 个元素，都离 b 的距离超过 n。假设这个数列有一收敛子列收敛到 x，那么 $d(x_n, b) \to d(x, b)$，而 $d(x_n, b) \to \infty$，矛盾。
- 【注】反之不成立，可以构造 (l^2, d_2) 的子集，$M = \{e_n : n \geq 1\}$，其中 e_n 除了第 n 个元素为 1 之外，每个元素都为 0。可以证明它：闭集、有界、不紧。

【性质：紧集的子空间，闭集=紧集】度量空间 (X, d) 中子空间 Y 为紧集 当且仅当 Y 为闭集。

- 【证明正向】直接利用上一个结论。
- 【证明反向】任意一个 Y 上的数列，都有一个收敛子列收敛到 $x \in X$；由于闭集中的收敛列肯定仍然收敛到 Y 上（前述【性质：极限和闭集】）和极限的唯一性，因此该收敛子列收敛到 $x \in Y$。由此，Y 是紧集。

【性质：紧集的子空间，相对闭集=闭包为紧集】度量空间 (X, d) 中子空间 Y 为相对紧集 当且仅当 $\bar{Y}$ 为紧集。

- 【证明正向】相对紧集说明 Y 中的任意数列 $x_n \in Y$ 存在一个收敛子列收敛到 $x \in X$；由【性质：极限和闭集】知，$x \in \bar{Y}$；但是紧集的证明需要任意一个 $\bar{Y}$ 中的数列，因此不能直接用数列 $x_n \in Y$，不过可以对于任意的一个数列 $y_n \in \bar{Y}$，都构造一个逼近道近它的数列 $x_n \in Y$（由闭包的非空性质），从而完成证明。
- 【证明反向】反向直接利用紧集和相对紧集的定义即可。

【性质：完全有界集=任意数列有柯西子列】度量空间 (X, d) 中子空间 Y 为完全有界集 当且仅当 Y 中任意数列均有柯西子列。

- 【证明正向】证明思路就是给定任意数列，找出一个构造柯西子列的方法。利用完全有界集的定义，对于任意的 ϵ，都能找到有限个球把 Y 覆盖；然而数列是无限的，因此肯定有一个球里面的数列是无限多的；而这个球里面点之间距离都不超过 2ϵ。这样取 $\epsilon = 1, 1/2, 1/4, \cdots$，然后每次选择那个无限多元元素 ϵ 球中的一个元素加入系列，并选择不在那个无限多元元素 ϵ 球中的元素。由此，能够构造出柯西子列。

- 【证明反向】反证法，假设 Y 不是完全有界集，导出存在 Y 中的数列没有柯西子列。Y 不是完全有界集，则存在一个 ϵ，使得 Y 没有有限的 ϵ-网；可以依次选取一点，把它的 ϵ-邻域都剔除掉，再选择一点，如此重复，可以构造一个数列；该数列中任意两个元素距离都大于 ϵ，因此不存在一个柯西子列。

连续映射

映射在某点连续：两个度量空间 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2)，一个映射 $T: X_1 \to X_2$，如果对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$ 使得对于任意满足的 $x \in X_1$，$d_1(x, x_0) < \delta$ 都有 $d_2(Tx, Tx_0) < \epsilon$，这样称映射 T 在 $x = x_0$ 处连续。

连续映射：如果映射 $T: X_1 \to X_2$ 处处连续，则称其为连续映射。

Lipschitz 连续映射：存在常数 $C > 0$，对于任意 $x, y \in X_1$，有 $d_2(Tx_1, Tx_2) \leq Cd_1(x_1, x_2)$。

像集：集合 $M \subset X$ 通过映射 $T: X \to Y$ 得到的像集为 $T(M) := \{Tx : x \in M\}$。

逆像：集合 $G \subset Y$ 通过映射 $T: X \to Y$ 得到的逆像为 $T^{-1}(G) := \{x \in X : Tx \in G\}$。

Remark: 连续函数的定义是上述定义的一种特殊情形，可以把连续实数看做从定义域 $[a, b]$ 到值域 $\mathbb{R}$ 的一个映射。

Remark: 对于映射 $T: X_1 \to X_2$，如果 (X_1, d_1) 为离散度量空间，那么 T 为连续映射，因为只要取 $\delta < 1$ 即只剩下一元素。

Remark: Lipschitz 连续映射是一致连续映射。

Remark: 映射不一定是一一映射，因此可能不存在逆映射；T^{-1} 符号只是表示逆像，不代表存在逆映射。

定理：两个度量空间 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2)，$T: X_1 \to X_2$ 为连续映射？对于任意开集 $G \subset X_2$，$T^{-1}(G)$ 为 X_1 的开集。

证明：注意到连续映射可以写做：对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $T(B(x, \delta)) \subset B(Tx, \epsilon)$，再借助开集的定义可证。

定理：两个度量空间 (X_1, d_1) 和 (X_2, d_2)，$T: X_1 \to X_2$ 为连续映射？对于任意闭集 $F \subset X_2$，$T^{-1}(F)$ 为 X_1 的闭集。

证明：还是利用补集的关系和开集，同时注意到如果 F, F^c 不交集完全拼接成 X_2 的话，$T^{-1}(F), T^{-1}(F^c)$ 也能不交集地拼接成 X_1。\

可分空间

稠密子集：如果存在 $M \subset X, \bar{M} = X$ 则称 M 为 X 的稠密子集。

可分度量空间：如果 X 有至多可数的（countable）稠密子集，则称 (X, d) 为可分度量空间。

Remark: 稠密子集可以这样理解，存在一个子集 M，使得 X 中任意一元素附近都有一个 M 中的元素。

Remark: 如果一个集合中的每一个元素都可以和自然数建立一一对应关系，那么称该个集合可数（countable）；有理数集是是可数的。

例子 1：$\mathbb{R}^n$ 是可分的，因为 $\bar{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$，而有理数是可数的；同理，$\mathbb{C}^n$ 也是可分的。

例子 2：离散度量空间 (X,d) 是可分的，当且仅当 X 至多可数，因为 X 只有一个稠密子集，它就是 X 本身。

例子 3：(l^p, d_p) 为可分度量空间，证明的方法为构造 $M=\{\{x_n\}\in l^p : x_n\in\mathbb{Q}, \exists N\geq 1, \forall n\geq N+1, x_n=0\}$，证明 l^p 空间中的任意一个元素，距离这个集合中的某个元素可以任意近，即 M 是稠密子集；另外，指出【可数个可数集的并集也是可数的】，可以说明 M 是可数的。

例子 4：$(C[a,b], d_\infty)$ 是可分的，证明方法为构造有理系数的 n 阶多项式，再利用 Stone-Weierstrass 定理。即，对于任意两个函数 $f,g\in C[a,b]$，存在一个多项式 $p(x)$，使得 $d_\infty(f,p)<\epsilon$ 和 $d_\infty(g,p)<\epsilon$。

例子 5：(l^∞, d_∞) 是不可分的，假设存在一个稠密子集 N，构造一个不可数子集 $M=\{\{x_n\}\in l^\infty : x_n\in\{0,1\}\}\subset l^\infty$，因此对于 M 中的任意一个元素，N 都应该能无限逼近，但是注意到 M 中任意不相同的两个元素之间的距离都是 1，因此 N 中的元素不可能比 M 中的元素还少，由此可以判断，不存在一个可数的稠密子集 N。

定理：如果 (X,d) 为可分度量空间，那么 $Y\subset X, (Y, d|_{Y\times Y})$ 也是可分度量空间。

证明：假设 X 中的一个稠密子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，接照如下方法构造一可数集 N：对于 $i,j\geq 1$，如果 $B(x_i,1/j)\cap Y\neq\emptyset$，就任意取一点 $y_{ij}\in B(x_i,1/j)\cap Y$，然后证明这稠密：X 中任意一点 N 都能无限逼近稠密子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 的某个点，而子集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 中的每个点又能被无限逼近 N 中的某个点。

baire 纲定理

首先说明，我们称一个集合有空内部，如果它没有至集外的开子集,开称其闭包包含有空内部的集合为无处稠密集

定义:
称一个集合A为第一纲集,如果它可以写成一族可数无处稠密集$A_n n\in I$的可数并$\bigcup n\in IA_n$;否则称其为第二纲集。
Baire定义第一纲集和第二纲集的最初动机是证明如下定理。

定理:
若连续函数列f_n点态收敛到函数f,那么f的连续点集合是第二纲集。

粗糙地说第一纲集是这样一类集合，它们只占据"相当小"的位置,但值得说明的是，这一定理与Lebesgue测度之间并没有直接的联系，我们有着在[0,1]上具有满测度的第一纲集的例子,从而第一纲集可能是不可数的、稠密的。
下面列举一些关于纲的明显性质:

1. 第一纲集的子集是第一纲集
2. 第一纲集的可数并是第一纲集
3. 任何内部是空集的闭集是第一纲集
4. 纲是一个同胚不变量

定义(Baire空间)

我们称S是一个Baire空间，如果S中满足以下四条等价性质之一:

1. S中的任意非空开集是第二纲集。
2. S的每个可数稠密开集族的交在S中稠密。
3. S中每个第一纲集有空的内部。

4. S中具有空内部的可数闭集族的并仍有空的内部。

有了这些准备，我们来叙述并证明定理。

定理(Baire):

如果S是

1. 完备度量空间
2. 局部紧Hausdorff空间

那么S是一个Baire空间。

Baire 空间还具有以下性质：

1. 完备度量空间是 Baire 空间。

2.设 $f: X \to Y$ 是连续开映射，则 $f(X)$ 是 Baire 空间。

3. 设 Y 是 X 的开子空间，则 Y 是 Baire 空间。

关于其的应用,我们有一个常用的定理:

定理:

设X是一个Banach空间，$f_n: X \to \mathbb{C}$是一个连续函数序列，满足

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$

那么f的不连续点集合是第一纲集。