课堂笔记

作者：Huang

目录

第 1 章 欧氏空间的极限和连续

1.1 2023/8/31

定义 1.1

设$F \subset \mathbb{R}^n$，若F^c为开集，则称F为闭集

定理 1.1

在 $\mathbb{R}^n$ 中

1.$\mathbb{R}^n, \varnothing$ 均为闭集（很特殊的一点，这两个同时为开集和闭集）

2.若F_α 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一个闭集族，其中指标 α 来自一个指标集合 I，则 $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 也是闭集

3. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_m$ 为有限个闭集，则它们的并集 $\bigcup_{i=1}^m F_i$ 也是闭集

令 $\check{B}(a,r) = B(a,r) \setminus \{a\}$为以$a$为心，半径为$r$的空心球

定义 1.2

设$E \subset \mathbb{R}^n$, 若点 $a \in \mathbb{R}^n$ 满足：对任意 $r > 0$, 在空心球 $\check{B}(a,r)$ 总含有 E 中的点，则称 a 为 E 的聚点

注 聚点可以属于 E 也可以不属于 E。若 E 中的点不是聚点，则称其为孤立点。

定义 1.3

$E \subset \mathbb{R}^n$ 的凝聚点的全体称为 E 的导集，记作 E，记 $\bar{E} = E \cup E'$，称其为 E 的闭包

定理 1.2

E 为闭集的充要条件是 $E' \subset E$, 即 $\bar{E} = E$

证明

$\Longrightarrow$ 我们要证明的是包含关系，于是先把 E' 中的元素设出来，不妨假设 $x \in E'$, 只需要证明 x同时也 $\in E$ 即可，但直接证明不是很好证明，考虑反证法，即 $x \notin E \Rightarrow x \in E^c$

点在集合中，直接默写定义

$$\exists r > 0, 使得B(x,r) \subset E^c$$

于是乎，有

$$\hat{B}(x,r) \cap E = \varnothing \tag{1.1}$$

根据聚点的定义，我们是对任意的 $r > 0$ 的去心球均有交集，但我们推出了如 (1.1) 的结论，表明其不为 E 的聚点，故

$$x \in E'$$

与先前假设 $x \in E'$ 矛盾，于是假设错误

$\Longleftarrow$ 现在我们要证明 E 为闭集通常像这类的证明，我们要将其转化为该集合的补集进行证明。故我们只需证明 E^c 为开集即可，但事实上，直接进行证明有些难度，我们采取反证法

假设 E^c 非开，按定义直接写（把开集的定义反着来）

$\exists x \in E^c, \forall r > 0, B(x,r) \cap E \neq \varnothing$(这里的结论是$B(x,r) \subset E^c$的反例, 不属于这个集合，等价于和这个集合的补集有交集)

x 显然不在 E 中，则 x 为 E 的一个聚点，于是有

$$x \in E' \subset E$$

与 $x \in E^c$ 矛盾，假设错误

推论 1.1

E 是闭集的充要条件是 E 中的任何收敛点列的极限必在 E 中

证明 $\Longrightarrow$ 设 $\{a_n\} \subset E$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$，直接证明不好证明，我们采取反证法，假设 $x \in E^c$, 又因为 E^c 为开集，按定义

$$\exists r > 0, B(x, r) \subset E^c$$

又因为 a_n 收敛于 x，于是存在无穷多个 a_n 在 x 附近的一个开球 $B(x, r)$ 中，故 x 为 E 的一个聚点于是有

$$x \in E' \subset E$$

与 $x \in E^c$ 矛盾，假设错误

$\Longleftarrow$ 现在我们要证明 E 为闭集通常像这类的证明，我们要将其转化为该集合的补集进行证明。故我们只需证明 E^c 为开集即可，但事实上，直接进行证明有些难度，我们采取反证法

假设 E^c 非开，按定义直接写（把开集的定义反着来）

$$\exists x \in E^c, \forall r > 0, B(x, r) \cap E \neq \oslash(\text{这里的结论是} B(x, r) \subset E^c \text{的反例, 不属于这个集合，等价于和这个集合的补集有交集})$$

我们取 $\{a_n\} \subset B(x, r) \cap E \neq \oslash$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$，(由收敛数列的稠密性，这是可以做到的) 由题条件可知 $x \in E$，矛盾

推论 1.2

完备度量空间的闭子集是完备集。

证明 只需要证明取出来的闭子集仍然是柯西列即可。

$\forall \{x_n\} \subset E$ 且 $\{a_n\}$ 在 E 中为柯西列，我们有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{当} m, n > N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

于是完备

定理 1.3

E 的导集 E' 和闭包 $\bar{E}$ 均为闭集

证明

导集 E':

由推论（1.1）我们只需要证明导集 E' 中的每个收敛点列都收敛到 E' 即可，设 $\forall$ 收敛点列 $\{x_n\} \subset E'$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$，只需要证明 $x \in E'$ 即可（即 x 为 E 的一个聚点）

取 $x_1 \in E'$，存在 E 中的点列 $\left\{m_k^1\right\} \to x_1$

取 $x_2 \in E'$，存在 E 中的点列 $\left\{m_k^2\right\} \to x_2$

...

取 $x_k \in E'$，存在 E 中的点列 $\left\{m_k^k\right\} \to x_k$

以此类推

对于上述点列，我们采取以下取法：第一组点列取第一个点，第二组取第二个点，$\cdots$，第 k 组取第 k 个点，用这些点组成一个数列，现在我们要证明该数列收敛到 x

对于 $\{x_k\}$，我们有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, k > N_1 \Rightarrow \|x_k - x\| < \varepsilon$$

因为 $\left\{m_k^k\right\} \to x_k$，对于上述的 ε，$\exists N_2, k > N_2 \Rightarrow \left\|m_k^k - x_k\right\| < \varepsilon$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$, 当 $k>N$ 时，有

$$\left\|m_k^k-x\right\|=\left\|m_k^k-x_k+x_k-x\right\|<\left\|m_k^k-x_k\right\|+\|x_k-x\|<2\varepsilon$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}m_k^k=x$，我们找到了一组点列趋近于 x，于是 $x\in E'$, 又因为该组点列是通过 $\{x_n\}\subset E'$ 所取得的，所以 E' 中的每个收敛点列都收敛到 E'，得证

闭包 $\bar{E}$（本题也可以用上面的做法，但为了答案的多样性，采取另一种做法）:

证明 $\bar{E}$ 为闭，只需证明补集为开。令 $x\in\bar{E}^c$, 则 x 不为 E 的聚点

则存在 $r_1>0$, 使得 $\check{B}(x,r_1)\cap E=\varnothing$

取 $x'\in\check{B}(x,r_1)$, 则存在 r_2 使得 $\check{B}(x',r_2)\subset\check{B}(x,r_1)$

则 $\check{B}(x',r_2)$ 中的所有点都不是 E 的聚点，则 $\check{B}(x,r_2)\cap E=\varnothing$

于是 $\forall x\in\bar{E}^c$, 都存在一个领域包含于 $\bar{E}^c$，于是 $\bar{E}^c$ 为开集，故 $\bar{E}$ 为闭集

1.2 2023/9/4

定理 1.4

E° 是含于 E 内的最大开集，$\bar{E}$ 是包含 E 的最小闭集。

证明

若为最大开集，只需要证明任意的开集都是其子集即可。

$\forall x\in E$, 则存在 $r_1>0$, 使得 $B(x,r_1)\subset E$

显然存在 m 和 $r_2>0$, 使得 $B(m,r_2)\subset B(x,r_1)\subset E$

由于 x 任意性，于是有 $B(m,r_2)\subset E^\circ$, 得证

要证是最小闭集，只需要证明任意的包含 E 的闭集都包含 $\bar{E}$ 即可

任取闭集 F 使得 $E\subset F$, 下证 $\forall x\in\bar{E},x\in F$

由于 $\bar{E}=E\cup E'$, 下面分情况讨论

1.$x\in E$, 显然成立

2.$x\in E'$, 则 $\forall r_1>0$, 使得 $\check{B}(x,r_1)\cap E\neq\varnothing$

又 $E\subset F$, 则 $\check{B}(x,r_1)\cap F\neq\varnothing$

则 $x\in\bar{F}$, 又 F 为闭，则 $\bar{F}=F$

综上，$\forall x\in\bar{E},x\in F$

定义 1.4

设 $E\subset\mathbb{R}^n$,$(E^c)^\circ$ 称为 E 的外点，E 的外点的全体称为 E 的外部；既不是 E 的内点，也不是 E 的外点的点称为 E 的边界点，E 的边界点的全体称为 E 的边界，记为 ∂E。

注 a 为 E 的外点，则存在一个球 $B(a,r)$ 使得其中完全不含有 E 中的点；b 是 E 的边界点当且仅当对任何 $r>0$，球 $B(b,r)$ 均既含有 E 中的点，也含有 E^c 的点。

例题 1.1 求以下诸点集的内点、外点和边界点：

1.$E=\mathbb{R}^n$

2.$E=\{a\}$ 为单点集

3. E 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一条直线

4.$E=B(a,r)$

解

1. 内点：$\mathbb{R}^n$ 外点：$\varnothing$ 边界点：$\varnothing$

2. 内点：$\varnothing$ 外点：$\mathbb{R}^n/\{a\}$ 边界点：$\{a\}$

3. 内点：$\varnothing$ 外点：$\mathbb{R}^n/\left\{\text{那条直线}\right\}$ 边界点：$\left\{\text{那条直线}\right\}$

4. 内点：E 外点：空间中挖去 E 和其边界点边界点：球的边缘

定义 1.5

设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 定义 E 的直径为

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in E\}$$

定理 1.5 (*Cantor* 闭集套定理)

设 $\{F_i\}(F_i \neq \varnothing, i = 1, 2, \cdots, n)$ 是一个闭集列, 且满足:

1.$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n$

2. $\lim\limits_{i \to +\infty} \operatorname{diam}(F_i) = 0$

则存在唯一的点 a 属于所有的 F_n

证明

先证明存在性，构造 $\{x_n\}$，取法如下:

取 $x_1 \in F_1$

取 $x_2 \in F_2$

$\cdots$

取 $x_n \in F_n$

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, i, j$，当 $j > i > n > N$ 时，有

$$\left\|x_i - x_j\right\| \leq \operatorname{diam}(F_i) < \varepsilon$$

由 *Cauchy* 收敛准则，极限存在

再证明唯一性

设 a, a' 均为 F_i 的极限, 则

$$\left\|a - a'\right\| \leq \operatorname{diam}(F_i) \to 0$$

唯一性成立

1.3 2023/9/7

定义 1.6

设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果 E 中的任一点列都有一子列收敛于 E 中的一点，则称 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的列紧集 (列紧集中的每个点都是聚点)

定理 1.6 (*Bolzano – Weierstrass* 致密性定理)

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 E 是列紧集的充要条件是 E 为有界闭集

证明

$\Rightarrow$

先证明有界 (*ps.* 其实列紧性和紧致性是等价的)、

正面做不好做，我们反证法

假设其发散

$$\forall M > 0, \exists x \in E, \text{使得 } \|x\| > M$$

接下来的手法需要积累

取 $M = 1$，$\exists x_1 \in E$, 使得 $\|x\| > M$

取 $M=\max\{2,\|x_1\|+1\}$，$\exists x_2\in E$, 使得 $\|x_2\|>M$

...

取 $M=\max\{k,\|x_{k-1}\|+1\}$，$\exists x_k\in E$, 使得 $\|x_k\|>M$

这样取，构成了一个集合 $\{x_n\}$

由于 $\{x_n\}\subset E$ 是列紧集, 故可选取子列使其收敛，不妨选取 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}\subset E$，其中 $\{x_{n_k}\}$ 收敛

但事实上，$\exists N, n_{k_1}>n_{k_2}>N$

$$\left\|x_{n_{k_1}}-x_{n_{k_2}}\right\|>n_{k_1}-n_{k_2}$$

此时发散，与子列收敛矛盾

再证明其为闭集

只需证明 E 中所有收敛数列的极限都收敛到 E 中即可

取 $\{x_n\}\subset E$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$

对于 $\{x_n\}$，我们有

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_1,n>N_1\Rightarrow\|x_n-x\|<\varepsilon$$

下证 $x\in E$

由于 E 是列紧集，则

$$\exists\left\{x_{n_k}\right\}\subset\left\{x_n\right\}, \text{使得} \lim_{n\to\infty}x_{_{n_k}}=x_0\in E$$

即

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_2,n>N_2\Rightarrow\left\|x_{n_k}-x_0\right\|<\varepsilon$$

由于 x_{n_k} 为 x_n 子列，且 x_n 收敛，则有

$$\forall\varepsilon>0,\exists N_3,n>N_3\Rightarrow\left\|x_{n_k}-x_n\right\|<\varepsilon$$

取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$

$$\forall\varepsilon>0,n>N, \text{有} \|x-x_0\|=\left\|x-x_n+x_n-x_{n_k}+x_{n_k}-x_0\right\|<3\varepsilon$$

则 $x\in E$

$\Leftarrow$

由于 E 为有界闭集，则

$$\forall x\in E,\exists\left\{x_{n_k}\right\}\subset\left\{x_n\right\}\subset E, \text{使得} \lim_{n\to\infty}x_{n_k}=x\in E$$

由此，E 是列紧集

定义 1.7

设$E\subset\mathbb{R}^n$，$\mathcal{G}=\{G_\alpha\}$ 为$\mathbb{R}^n$中的一个开集族，如果

$$E\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$$

则称开集族$\mathcal{G}$ 覆盖了 E，或者称$\mathcal{G}$ 是 E 的一个开覆盖

♣

定义 1.8

设$E\subset\mathbb{R}^n$, 若能从 E 的任一个开覆盖中选出有限个开集，它们仍能组成 E 的开覆盖，那么就称 E 为一个紧致集

♣

定理 1.7 (*Heine – Borel* 有限覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 E 是紧致集的充要条件是 E 为有界闭集

证明

$\Rightarrow$

先证明有界

由题，我们可以构造以下开覆盖

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B(0,i)$$

显然有

$$E \subset \mathbb{R}^n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(0,i)$$

由有限覆盖定理，$\exists m > 0$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(0,i)$$

显然有

$$B(0,i) \subset B(0,i+1)$$

于是

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(0,i) = B(0,m)$$

由于 $B(0,m)$ 有界，于是 E 有界

再证明其为闭集合 (这题的手法也很不错，大家积累积累)

要证为闭集合，只需证明其补集 E^c 为开集即可，即

$$\forall y \in E^c, \exists r_1 > 0, \text{使得} B(y,r_1) \subset E^c$$

由 *Hausdorff* 定理

$$\forall x \in E, \exists \delta_x, \eta_x > 0, \text{使得} B(x,\delta_x) \cap B(y,\eta_x) = \varnothing$$

显然有

$$\bigcup_{x\in E} B(x,\delta_x) \supset \bigcup_{x\in E} x = E$$

由紧致性，我们有

$$\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\delta_i) \supset \bigcup_{x\in E} x = E$$

于是乎，取 $r = \min\{\eta_{x_1}, \eta_{x_2}, \cdots, \eta_{x_m}\}$，我们有

$$B(y,r) \cap \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\delta_i) = \varnothing \supset B(y,r) \cap \bigcup_{x\in E} x = E$$

因此，我们有

$$B(y,r) \cap E = \varnothing$$

故

$$B(y,r) \subset E^c$$

$\Leftarrow$(可以参考习题 1.9，这里给出课上的做法)

我们反证，由于其为有界闭集，则存在一个矩形将该区间包住，

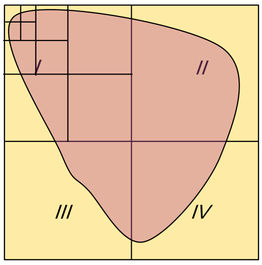

图 1.1

如图 (1.1)，我们将其该矩形四等分，则存在一些区域无法被有限个开覆盖覆盖，不失一般性，不妨假设是在 区在一区中，我们将其四等分，同样能找到不能被有限个开覆盖覆盖的区域，类似的，我们多次将其四等分，构成了一系列的非空的区间套，这些区间不能被有限个开覆盖覆盖，由区间套定理，我们可以找到一个唯一的 $x \in E$, 并且其不能被有限个开区间覆盖，但显然 $B(x, \delta)$ 可覆盖住 x，矛盾。于是原命题得证

定义 1.9

设$E \subset \mathbb{R}^n$, 如果 E 的任一分解式 $E = A \cup B$ 满足 $A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$ 且 $A \cap B = \varnothing$, 则可以得到下面两式

$$A \cap B' \neq \varnothing, A' \cap B \neq \varnothing$$

中至少有一个成立，则称 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的连通集，或者说 E 是连通的 ♣

定义 1.10

在 $\mathbb{R}^n$ 中，连通的开集称为区域，区域的闭包称为闭区域 ♣

定理 1.8

开集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为连通集的充要条件是 E 不能分解为两个不相交的非空开集的并 ♡

证明 $\Rightarrow$

假设其能分解为两个不相交的非空开集的并，即

$$E = A \cup B; A, B \neq \varnothing; A \cap B = \varnothing$$

于是

$$\forall x \in A, \exists r, \text{使得} B(x, r) \subset A$$

故

$$B(x, r) \cap B' = \varnothing$$

同样的，也可证明

$$\forall y \in B \exists d, B(y, d) \cap A' = \varnothing$$

与连通集矛盾。

$\Leftarrow$

设其不连通，则

$$E = A \cup B; A, B \neq \varnothing; A \cap B = \varnothing; A \cap B' = \varnothing, B \cap A' = \varnothing$$

下证 A, B 为开集, 由 $A \cap B' = \varnothing$

$$\forall x \in A, \exists r \text{使得} B(x, r) \cap B = \varnothing$$

又因为

$$x \notin B$$

于是

$$\exists r>0, B(x,r)\subset A$$

因此 A 为开，同理 B 为开，与命题矛盾

1.4 2023/9/11

定理 1.9

在 $\mathbb{R}$ 上集合 E 连通的充要条件是 E 为区间。

证明

我们需要用到下面的引理

$$E\text{为区间的充要条件是}\forall a,b\in E,[a,b]\subset E$$

$\Rightarrow$

我们采取反证法，即

$$\exists c,d\in E,\text{有}[c,d]\not\subset E$$

立即推出

$$\exists x_0\in[c,d], x_0\notin E$$

令 $\begin{cases} A=\{x\in E|x<x_0\} \\ B=\{x\in E|x>x_0\}\end{cases}$ ，由于 E 连通，则

$$E=A\cup B; A,B\neq\varnothing; A\cap B=\varnothing; A\cap B'\neq\varnothing\text{或}B\cap A'\neq\varnothing$$

$\forall y\in A'$，我们有

$$\exists\{y_n\}\subset A, y_n\neq y, \lim_{n\to\infty}y_n=y$$

于是有

$$y\le x_0$$

故

$$y\notin B\Rightarrow B\cap A'=\varnothing$$

矛盾

$\Leftarrow$

令

$$E=A\cup B; A,B\neq\varnothing; A\cap B=\varnothing$$

只需证明

$$A\cap B'\neq\varnothing\text{或}B\cap A'\neq\varnothing$$

即可

我们如下构造区间套

取 $a_1\in A, b_1\in B$, 令 $c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$, 如果 $c_1\in A$, 令 $a_2=c_1, b_2=b_1$, 如果 $c_1\in B$, 令 $b_2=c_1, a_2=a_1$

令 $c_2=\frac{a_2+b_2}{2}$, 如果 $c_2\in A$, 令 $a_3=c_2, b_3=b_2$, 如果 $c_2\in B$, 令 $b_3=c_2, a_3=a_2$

...

多次循环，我们可得到一个区间套 $[a_n,b_n]$, 且其直径趋向于零，由区间套定理

$$\exists 唯一的\xi \in [a_n, b_n], \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

如果 $\xi \in A$, 则 $\xi \in B'$, 即 $A \cap B' \neq \varnothing$，同理可证 $B \cap A' \neq \varnothing$
下证引理

$$E为区间的充要条件是\forall a, b \in E, [a, b] \subset E$$

证明 $\Rightarrow$
显然
$\Leftarrow$
记 $\inf E = -\infty 或 a, \sup E = +\infty 或 b$
我们要证明 $E = [a, +\infty)$(不失一般性)
显然，我们有

$$E \subset [a, +\infty)$$

下证

$$[a, +\infty) \subset E$$

$\forall x \in [a, +\infty)$, 我们只需证明 $x \in E$ 即可
1. 若 $a \in E$, 则对于上述的 x，我们有 $a \leq x$ 恒成立，由于 $\sup E = +\infty$, 于是 $\exists N > 0 \in E, a < N$, 于是 $x \in [a, N] \subset E$, 结论成立。
2. 若 $a \notin E$, 则此时结论不成立
综上 E 为区间

定义 1.11
设 $E \subset \mathbb{R}^n$，如果对任意两点 $p, q \in E$，都有一条连续曲线 $l \subset E$ 将 p, q 连接起来，则称点集 E 是道路连通的

定理 1.10
道路连通集一定是连通集

证明
不妨设 E 道路连通，下证其为连通集
令

$$E = A \cup B; A, B \neq \varnothing; A \cap B = \varnothing$$

只需证明

$$A \cap B' \neq \varnothing 或 B \cap A' \neq \varnothing$$

即可
取 $p \in A, q \in B$, 由于 E 道路连通，则存在一个向量函数 $\Phi(t), t \in [0, 1]$，使得

$$\Phi(0) = p, \Phi(1) = q$$

令 $\begin{cases} S = \{t \in [0, 1] \,|\Phi(t) \in A\} \\ T = \{t \in [0, 1] \,|\Phi(t) \in B\} \end{cases}$
显然有

$$S \cup T = [0, 1], S \neq \varnothing, T \neq \varnothing, S \cap T = \varnothing$$

（这里我们采用了一种部分代替整体的手法，可以积累一下）

由于 [0,1] 为连通的，则有

$$S \cap T' \neq \oslash 或 T \cap S' \neq \oslash$$

不妨设 $S \cap T' \neq \oslash$，取 $x \in S \cap T'$, 则有 $\{x_n\} \subset T$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x\,(x_n \neq x)$

于是有

$$\Phi(x) \in A, \Phi(x_n) \in B$$

由于 $\Phi(t)$ 连续，则

$$|\Phi(x_n) - \Phi(x)| < \varepsilon$$

于是 $\Phi(x) \in B'$，结论得证

例题 1.2 连通集未必是道路连通的，例如，设集合

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \sin\frac{1}{x}, 0 < x \leq \frac{2}{\pi}\right\}$$

该曲线被称为“拓扑学家的正弦曲线”，则可以证明：$\bar{E}$ 是连通的，但不是道路连通的

证明

反证：

设 $\bar{E}$ 不连通，则

$$\bar{E} = A \cup B; A, B \neq \oslash; A \cap B = \oslash; A \cap B' = \oslash, B \cap A' = \oslash$$

令 $A_1 = A \cap E, B_1 = B \cap E$

则有 $E = A_1 \cup B_1$

显然有

$$A_1 \cap B_1 = \oslash; A_1 \cap B_1' = \oslash, B_1 \cap A_1' = \oslash$$

现我们只需证明 A_1, B_1 非空即可

若 $A_1 = \oslash$, 由 $A_1 = A \cap E, B_1 = B \cap E$，则 $A \subset E'$, 此时 $E = B_1 \subset B$

$\forall x \in A$, 由于 $A \subset E'$，$E = B_1 \subset B$，我们有

$$\exists \{x_n\} \subset B, \lim_{n\to\infty} x_n = x\,(x_n \neq x)$$

于是 $x \in B'$, 与题目 $A_1 \cap B_1' = \oslash$ 矛盾，于是 A_1 非空，同理 B_1 非空

于是对 E 有

$$E = A_1 \cup B_1; A_1, B_1 \neq \oslash; A_1 \cap B_1 = \oslash; A_1 \cap B_1' = \oslash, B_1 \cap A_1' = \oslash$$

于是 E 非连通集，显然矛盾

因此 $\bar{E}$ 连通

不妨设其道路连通，则存在一个向量函数 $\Phi(t), t \in [0,1]$，使得

$$\Phi(0) = (0,0), \Phi(1) = (\frac{2}{\pi}, 1)$$

由介值定理 存在$0 < t_1 < 1$, 使得

$$\Phi(t_1) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right)$$

介值定理 存在$0 < t_2 < t_1 < 1$, 使得

$$\Phi(t_2) = \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}, \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)$$

...

多次构造，我们得到一个单调递减有下界的数列 $\{t_n\}$，显然其极限存在，但此时 $\Phi(t_n)=\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi},\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\right)$ 极限却不存在，这与道路连通矛盾，于是不道路连通

例题 1.3 在 $\mathbb{R}^n$ 中，开球是区域

1.5 习题部分

练习 1.1 试证明在一个度量空间中，半径为 7 的球不可能成为半径为 3 的球的真子集

证明 直接证明不好证明，我们反着来

$\|x-a\|<7 \Rightarrow \|x-b\|<3$

但事实上，若 $\|a-b\|<4$，对 $\|x-b\|<3$

则 $\|x-a\|=\|x-a+a-b\|<\|a-b\|+\|x-b\|<4+3=7$，与条件半径 7 的球为半径 3 的球的真子集矛盾

练习 1.2 证明：欧氏空间的基本列必是有界的

证明 设 x_n 为基本列，则 $\forall\varepsilon>0\exists N,i,j,$ 当 $i,j>N$ 时，有

$$\left\|x_i-x_j\right\|<\varepsilon$$

固定住 j，我们有

$$\|x_i\|=\left\|x_i-x_j+x_j\right\|<\left\|x_i-x_j\right\|+\left\|x_j\right\|=\varepsilon+\left\|x_j\right\|$$

得证

练习 1.3 针对以下各题中指定的集合 A，求出 A°，$\bar{A}$ 和 ∂A（直接写结论即可）

1.在$\mathbb{R}$中，$A=\left\{1，\frac{1}{2}，\frac{1}{3}，\cdots\right\}$

2.A为$\mathbb{R}^n$中的有限点集

3.在$\mathbb{R}^2$中，设$A=\{(x,y)\,|x,y\in\mathbb{Q}\}$

解

1.$A^\circ=\varnothing;\bar{A}=A\cup\{0\};\partial A=A\cup\{0\}$

2.$A^\circ=\varnothing;\bar{A}=A;\partial A=A$

3.$A^\circ=\varnothing;\bar{A}=\mathbb{R}^2;\partial A=\mathbb{R}^2$

练习 1.4 证明 $p\in\bar{A}$ 的充要条件是对任意 $r>0$, 有 $B_r(p)\cap A\neq\varnothing$

证明

$\Rightarrow$

若 $p\in A$, 结论显然成立

若 $p\in A'$, 则 $\forall r_1>0$, 使得 $\check{B}(p,r_1)\cap A\neq\varnothing$

必要性得证

$\Leftarrow$

我们取 $\{p_n\}\subset B(p,r)\cap A\neq\varnothing$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$，则 $\forall r_1>0$, 使得 $\check{B}(p,r_1)\cap A\neq\varnothing$

故 $p\in A'\subset\bar{A}$

充分性得证

练习 1.5 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 求证 ∂E 为闭集

证明

这里我们要用到定理 (1.1),取 $\{x_n\}\subset\partial E$, 并且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，下证 $x\in\partial E$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，$\forall\varepsilon>0,\exists N,$ 当$n>N$，有

$$\|x_n-x\|<\varepsilon$$

类似于定理 (1.3) 的取法，我们也可构造一个 $\{m_n\}\subset E$ 使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}m_n=x_n$

于是乎，对于上述 $\varepsilon,\exists N,n>N$ 时，有

$$\|m_n-x\|=\|m_n-x_n+x_n-x\|<\|m_n-x_n\|+\|x_n-x\|<2\varepsilon$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = x$，则 $\forall r > 0$, 使得 $B(x,r)\cap E \neq \varnothing$

同样的，我们也可证明 $\forall r > 0$, 使得 $B(x,r)\cap E^c \neq \varnothing$

即 $x \in \partial E$

✍ **练习 1.6** E 为闭集的充要条件是 $\partial E \subset E$

证明 $\Rightarrow$

现我们需证明 $\forall x \in \partial E, x \in E$,不妨假设$x \notin E$,

E 为闭集，则 E^c 为开，即 $\exists r > 0$, 使得 $B(x,r)\cap E = \varnothing$

这与 $\forall x \in \partial E$ 矛盾

$\Leftarrow$

不妨假设 E 为开，即 $\exists r > 0$, 使得 $B(x,r)\cap E^c = \varnothing$

任取 $x \in \partial E$, 则 $\forall r > 0, B(x,r)\cap E^c \neq \varnothing$，又 $\partial E \subset E$，则 $x \in E$, 与假设矛盾

✍ **练习 1.7** 设$F_1, F_2, \cdots, F_n$为$\mathbb{R}^n$的非空闭集，满足 $F_{k+1} \subset F_k (k \leq 1)$, 问是否一定有 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$，若改为非空紧集又如何？

解

若不能保证其为有界闭集，则结果不一定成立。但改为非空紧集则一定有。理由如下。

若 $\bigcap_k F_k = \varnothing$

则取补集，有 $\bigcup_k F_k^c = \mathbb{R}^n$

于是 $\left\{F_k^c, k \geq 1\right\}$ 构成了紧集F_1的开覆盖

根据紧集的性质，可以从中取出有限覆盖$F_{k_1}^c, F_{k_2}^c, \cdots, F_{k_n}^c$

由于其具有包含的关系，不妨记$F_{k_n}^c$ 为最大的有限覆盖

即$F_1 \subset F_{k_n}^c \Rightarrow F_1 \cap F_{k_n} = \varnothing$, 这与子集相交不为空矛盾

✍ **练习 1.8** 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为一有界闭集,$\{G_\alpha\}$ 为E的一个开覆盖,证明：必存在$\sigma > 0$(通常称该数为开覆盖G_α的$Lebesgue$数），使得只要集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ 满足条件

$$F \cap E \neq \varnothing, \mathrm{diam} F < \sigma$$

就能断言 F 能被 $\{G_\alpha\}$ 的某个开集所覆盖

证明 反证法：

$\forall \sigma > 0$，集合 $F \subset \mathbb{R}^n$ 满足条件

$$F \cap E \neq \varnothing, \mathrm{diam} F < \sigma$$

F 都不能能被 $\{G_\alpha\}$ 的某个开集所覆盖

翻译成数学语言就是

$$\forall \sigma > 0, \exists F \cap E \neq \varnothing, |F| < \sigma, \forall i \in \alpha, F \not\subset G_i$$

可以推出

$$\forall n \in N^*\ , \exists F \cap E \neq \varnothing, |F| < \frac{1}{n}, \forall i \in \alpha, F_n \not\subset G_i$$

此时我们构造一个数列 $\{x_n\}$，使得

$$x_n \in F \cap E \neq \varnothing$$

由聚点定理，可以从这数列中选取一个子列 $\{x_{n_k}\}$，使得其极限为 $\xi \in E$

现在取充分小的 ε, 使得

$$\exists i \in \alpha, B(\xi, \varepsilon) \subset G_i$$

对于上述的 ε，由数列极限的性质 $\exists N_1 > 0, n > N_1$, 使得

$$|x_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同样存在 $N_2>0, n>N_2$ 有

$$|F_n|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}, n>N$ 有

$$\forall x\in F_n, |x-\xi|=|x-x_{n_k}+x_{n_k}-\xi|<|x-x_{n_k}|+|x_{n_k}-\xi|<\varepsilon$$

这表明

$$\exists N, n>N, \exists i\in\alpha, \text{使得} F_n\subset B(\xi,\varepsilon)\subset G_i$$

这与题设矛盾，于是原命题得证

✍ **练习 1.9** 利用上题证明：设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为一有界闭集，$\{G_\alpha\}$ 为E的一个开覆盖, 则必能从 $\{G_\alpha\}$ 中选出有限个开集，它们仍能覆盖 E

证明

不妨假设有限个开集不能覆盖 E，从 $\{G_\alpha\}$ 选取子集

$$G_{n_1}, G_{n_2}, \cdots, G_{n_k}$$

构成一个新的集合 $\{G_{n_k}\}$

由题，则其不能覆盖 E，即

$$\exists x_1\in E, \text{但} x_1\notin\{G_{n_k}\}$$

于是存在充分小的 σ, 使得 $B(x,\frac{\sigma}{2})\subset E$

由上题的结论，则

$$\exists k_1\in\alpha, \text{使得} B(x_1,\frac{\sigma}{2})\subset G_{k_1}$$

于是 $\{G_{n_k}, G_{k_1}\}$ 构成一个新的子覆盖

多次重复上述过程，则有一个新的子覆盖

$$\{G_{n_k}, G_{k_1}, G_{k_2}, \cdots, G_{k_n}\}$$

满足

$$\exists x_{n_k+k_n+1}, \text{满足}, x_{n_k+k_n+1}\in E, x_{n_k+k_n+1}\notin G_{n_1}\cup G_{n_2}\cup\cdots\cup G_{k_n}$$

由于 E 为有界闭集，则存在一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得其极限为$\xi\in E$, 对于充分大的 k，有

$$\left\|x_{n_k}-\xi\right\|<\sigma$$

此时有

$$\xi\in B(x_{n_k},\frac{\sigma}{2})\subset G_{n_k}$$

事实上，当 $l>k$ 时，所有的 x_{n_k} 均发散至 $B(x_{n_k},\frac{\sigma}{2})$ 的外面，与收敛矛盾。故选取 x_n 和 G_n 的过程应该在有限次终止

✍ **练习 1.10** 证明：区域必是道路连通的

证明 反证，设区域两点内 a,b 没有道路联通，则定义 $\begin{cases}A_1=\left\{x\in X|\text{存在道路联通}x\text{和}a\right\}\\A_2=\left\{x\in X|\text{不存在道路联通}x\text{和}a\right\}\end{cases}$

显然 $\begin{cases}A_1,A_2\neq\oslash\\A_1\cap A_2=\oslash\\A_1\cup A_2=X\end{cases}$

由于 X 为区域，$\forall x\in A_1, \exists\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset X$, 在这个邻域中的点恒与 x 能联通，于是 $B(x,\delta)\subset A_1$ 则 A_1 为开集。同理可证明 A_2 为开集，于是 X 可分解为两个不相交开集的并，和为不连通矛盾。

✍ **练习 1.11** 设 $A\subset\mathbb{R}^n$, 如果 A 既为开集又为闭集，则 $A=\oslash$ 或 $A=\mathbb{R}^n$

证明 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，且 $E\neq\oslash, E\neq\mathbb{R}^n$

由 E 既为开集又为闭集，则 E^c 既是开集又是闭集，作为两个不交的非空闭集，显然没有公共的边界点，与二者互为补集矛盾

第 2 章 多元函数的极限与连续

2.1 2023/9/12

定义 2.1

设 $E \subset \mathbb{R}^n$,f 是一个规律，如果对于 E 中的任一点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，通过规律 f，在 R 中都有唯一一个实数 u 和此 x 对应，就称 f 为定义在 E 上的一个 n 元函数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为函数 f 的 n 个独立变量，f 在 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的值为 u，记为 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，通常采用如下符号记这个函数:

$$f:\ E \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \longmapsto u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

并称 E 为 f 的定义域。

♣

注

1. 直流电路中，$I = \frac{U}{R}$ 确定了 I 为 U, R 的二元函数；

2. 理想气体状态方程 $pV = RT$（R 为常数）根据问题的不同可以确定气体的体积、压力和温度中的一个为另外两个的二元函数。

例题 2.1 求函数 $f(x, y) = \frac{\arcsin\left(3-x^2-y^2\right)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域

解

由题，有

$$-1 \le 3 - x^2 - y^2 \le 1; x - y^2 > 0$$

解得

$$2 \le x^2 - y^2 \le 4; x > y^2$$

于是

$$\left\{(x, y) \,|2 \le x^2 - y^2 \le 4; x > y^2\right\}$$

定义 2.2

设二元函数 $f(x, y)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $P(x, y) \in D$，对应的函数值为 $z = f(x, y)$，这样，以 x 为横坐标、y 为纵坐标、z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$，当 (x, y) 取遍 D 上一切点时，得一个空间点集 $\{(x, y, z)|z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，这个点集称为二元函数的图形。

♣

如下图所示，其为一个二元函数的图形

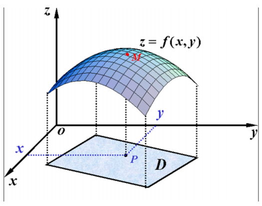

图 2.1

定义 2.3

设$D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ 为 D 的一个聚点，再设 l 是一个实数。如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $x \in D$ 且 $0 < \|x - a\| < \delta$，有

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon$$

就称 f 在 a 处有极限 l，也可以说当 x 趋于 a 时，$f(x)$ 趋于 l，记作

$$\lim_{x\to a} f(x) = l, \text{或} f(x) \to l\,(x \to a)$$

注

对于二元函数情形，设 $a = (x_0, y_0)$，$x = (x, y)$，则条件 $0 < \|x - a\| < \delta$ 通常有以下两种写法：

1.$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ (圆形邻域)

2.$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ (方形邻域描述)

一元函数极限的运算法则对于多元函数同样成立：

定理 2.1

设$D \subset \mathbb{R}^n, f, g : D \to \mathbb{R}, a \in D'$, 如果$f, g$均存在着极限

$$\lim_{x\to a} f(x) = l, \quad \lim_{x\to a} g(x) = m$$

则有

$\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$

$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = lm$

$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}\,(m \neq 0)$

定理 2.2

设函数f在以$a \in \mathbb{R}^n$为球心，r为半径的某个空心球$\check{B}(a, r)$ 上有定义，且 $\lim_{x\to a} f(x) = l$，一元函数 φ 在以 l 为球心的空心球 $U = \{t : 0 < |t - l| < \delta\}$ 上有定义, 且 $\lim_{t\to a} \varphi(t) = m$再设$f\left(\check{B}(a, r)\right) \subset U$，则有

$$\lim_{x\to a} \varphi(f(x)) = m$$

定理 2.3 (*Cauchy* 收敛原理)

设$D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}, a \in D'$, 那么极限 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在的充要条件是 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x', x'' \in D$, 且$0 < \|x - x'\| < \delta, 0 < \|x - x''\| < \delta$时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

与一元函数情形相同，如果 $\lim_{x\to a} f(x) = l$, 则当 x 以任何点列及任何方式趋于 a 时，$f(x)$ 的极限都是 l，反之，如果 x 以任何点列和任何方式趋于 a 时的极限都是 l，则 $f(x)$ 在 a 的极限就是 l。

练习 2.1 考察函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

在原点的极限

解

$$0 < \left|\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right| y^2 < y^2$$

由夹逼性定理，结果为 0

事实上，分母阶小于分子，原点处极限由分子决定

练习 2.2 考察函数

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

在原点的极限

解

$$-\left(x^2+y^2\right)<\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}<x^2+y^2$$

由夹逼性定理，结果为 0

练习 2.3 考察函数

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

在原点的极限

解 分子分母同阶，令 $y=kx$，我们可得到一个不定的极限，极限不存在

练习 2.4 考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, 0<y<x^2\\ 0, \text{其他情形}\end{cases}$$

在原点的极限

解 分别令 $y=2x^2$ 和 $y=\frac{x^2}{2}$, 我们可以得到极限不存在

2.2 2023/9/14

定义 2.4

设$D\subset\mathbb{R}^n, f:D\to\mathbb{R}, a\in D$，如果对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x\in D\cap\check{B}(a,\delta)$, 时，有

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

就称 f 在 a 连续，a 为 x 的连续点，D 中的非连续点就称为间断点。如果 $f(x)$ 在 D 上每点都连续，则称 $f(x)$ 在 D 上连续。

注 由定义

1.$f:D\to\mathbb{R}$ 在孤立点总是连续的

2. 当 $a\in D\cap D'$ 时，f 在 a 处连续的充要条件是

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

注 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续，则一元函数 $f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，$f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续，但反之不成立。例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\neq(0,0)\\ 0, (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

注 连续函数的运算法则对于多元函数也成立。利用初等函数的连续性及连续函数的运算法则可以求出函数的不连续点。

例：求函数 $u=\tan\left(x^2+y^2\right)$ 的不连续点。

定义 2.5

设$D\subset\mathbb{R}^n, f:D\to\mathbb{R}$, 如果对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当$x,y\in D$, 且$0<\|x-y\|<\delta$时，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 D 上一致连续

定理 2.4

设$D\subset\mathbb{R}^n, f:D\to\mathbb{R}$, 且 f 在 D 上连续，如果 D 是紧集，则 f 在 D 上一致连续。

证明

不妨设 f 不一致连续，则

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall k>0,\text{对于}x_k,y_k\in D,\text{且}0<\|x-y\|<\frac{1}{k}\text{时，有}|f(x_k)-f(y_k)|\geq\varepsilon_0$$

现在我们要导出矛盾，我们要用上紧集的条件，由于为紧集，则其为有界闭集，又因为有界点列闭有收敛子列，对于上述的 x_k, 我们显然可以找出一个子列 $\{x_{n_k}\}\subset\{x_k\}$，使得 $\lim_{n_k\to\infty}x_{n_k}=\xi$

显然，我们有 $n_k\geq k$, 于是我们有

$$\left\|y_{n_k}-\xi\right\|=\left\|y_{n_k}-x_{n_k}+x_{n_k}-\xi\right\|<\left\|y_{n_k}-x_{n_k}\right\|+\left\|x_{n_k}-\xi\right\|<\frac{1}{n_k}+\left\|x_{n_k}-\xi\right\|\xrightarrow{n_k\to\infty}0$$

由于 f 的连续性，我们有

$$\lim_{n_k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{n_k\to\infty}f(y_{n_k})=f(\xi)$$

这与前面的 $|f(x_k)-f(y_k)|\geq\varepsilon_0$ 矛盾

2.3 2023/9/18

定理 2.5

设$D\subset\mathbb{R}^n, f:D\to\mathbb{R}$, 且 f 在 D 上连续，如果 D 是紧集，则 f 的值域 $f(D)$ 也是紧集

证明 要证明这个定理，我们需要用到两个个引理 (一个？)

引理 2.1

函数f：$\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, 连续的充要条件是对于$\mathbb{R}$中的任意开集$U$，$f^{-1}(U)$为$\mathbb{R}^n$中的开集。

引理 2.2

设 X 为拓扑空间，Y 为 X 的紧致子集的充要条件是对每个由 X 中的开集构成的 Y 的覆盖均有有限子覆盖 (我证明好像没用上这个，就不证明了 OVO)

现我们开始证明

我们任取$f(D)$的开覆盖$\{U_\alpha\}(\alpha\in I)$，由引理 2.1，我们有$f^{-1}(U_\alpha)(\alpha\in I)$均为开集

因为

$$\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha\supset f(D)$$

我们将左右两边同时作用 f^{-1} 算子，有

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)\supset f^{-1}(f(D))=D$$

猜想：若

$$\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(U_\alpha)\supset f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I}U_\alpha)\supset f^{-1}(f(D))=D$$

成立

由于 D 为紧集，则 $\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(U_\alpha)$ 存在有限子覆盖，不妨记为

$$\bigcup_{i=1}^{m}f^{-1}(U_i)$$

此时若

$$\bigcup_{i=1}^{m}f(f^{-1}(U_i))=\bigcup_{i=1}^{m}U_i$$

构成 $f(D)$ 的有限覆盖，则命题得证

不妨设其不能称为 $f(D)$ 的有限子覆盖，则

$$\exists x \in f(D), x \notin \bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

同时作用 f^{-1} 算子，我们有

$$\exists f^{-1}(x) \in f^{-1}(f(D)) = D, f^{-1}(x) \notin f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(U_i))) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} U_i)$$

但

$$\forall y \in f(D), \exists i, 使得 f^{-1}(y) \in f^{-1}(U_i)$$

故矛盾，命题得证

下证猜想

$$\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha) \supset f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$$

$$\forall x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha), 存在\alpha, 我们有 f(x) \in U_\alpha, 故 x \in f^{-1}(U_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha)$$

得证

下证引理 (2.1)

证明

$\Rightarrow$

若 $f^{-1}(U) = \varnothing$，显然为开集

若 $f^{-1}(U) \neq \varnothing$, 我们取 $\forall x \in f^{-1}(U)$, 则有 $f(x) \in U$

由于 U 为开集，则有

$$\exists \varepsilon, B(f(x), \varepsilon) \subset U$$

又因为 f 连续，则有

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset U$$

同时作用 f^{-1}，则有

$$B(x,\delta) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) \subset f^{-1}(U)$$

$\Leftarrow$

任意 $x \in f^{-1}(U)$ 取 $B(f(x), \varepsilon) \subset U$, 则有

$$f^{-1}(B(f(x), \varepsilon)) 为开集$$

又有 $x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, 则有

$$\exists \delta > 0, B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$$

于是有

$$f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

得证

推论 2.1

设 $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$, 且 f 在 D 上连续，如果 D 是紧集，则 f 可以在 D 上取得最大最小值

证明 由定理 (2.5),$f(D)$ 也为紧集，即有界闭集。不失一般性，我们证明上有界的情况

记 $\sup f(x) = M$

则对于任意 k 都有 $x_k \in D$, 使得

$$M - \frac{1}{k} \leq f(x_k) \leq M$$

我们要用上紧集的条件，由于为紧集，则其为有界闭集，又因为有界点列闭有收敛子列，对于上述的 x_k, 我们显然可以找出一个子列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_k\}$，使得 $\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = \xi$. 由于 D 为闭集，则 $\xi \in D$

则有

$$M - \frac{1}{n_k} \leq f(x_{n_k}) \leq M$$

两边同取极限，我们有

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = M$$

由于 f 连续，我们有

$$f(\xi) = M$$

又 $\xi \in D$，则最大值可以在 D 中取到

定理 2.6

设$D \subset \mathbb{R}^n$ 是连通集，$f : D \to \mathbb{R}$, 且 f 在 D 上连续，则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连通集

证明

直接硬来，取 $f(D) = A \cup B, A \cap B = \varnothing$

$$记G = D \cap f^{-1}(A), F = D \cap f^{-1}(B)$$

我们有

$$D = G \cup F$$

由$A \subset \bar{A}$, 我们有$G = D \cap f^{-1}(A) \subset f^{-1}(\bar{A})$, 由于$f$连续,$\bar{A}$为闭集, 我们有$f^{-1}\left(\bar{A}\right)$为闭集 对前一式子取闭包，我们有

$$\bar{G} \subset \overline{f^{-1}(\bar{A})} = f^{-1}\left(\bar{A}\right)$$

因此，我们有

$$f\left(\bar{G}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\bar{A}\right)\right) = \bar{A}$$

现在我们只需要证明 $A' \cap B \neq \varnothing$ 即可，不妨证明逆否命题，加上 $A \cap B = \varnothing$ 的条件，我们有

$$\bar{A} \cap B = \varnothing, 即 f\left(\bar{G}\right) \cap B = \varnothing$$

显然有

$$B \supset f(F)$$

于是，我们有

$$\forall y \in B \subset f(D), f^{-1}(y) \in F = D \cap f^{-1}(B) \Rightarrow y \in f(F)$$

因此，我们有

$$B = f(F)$$

此时

$$f\left(\bar{G}\right) \cap B = f\left(\bar{G}\right) \cap f(F) = \varnothing \Rightarrow \bar{G} \cap F = \varnothing$$

逆否命题得证

2.4 2023/9/19

(今天的定理证明自己看书去)

定义 2.6

设 $f(x,y)$ 为二元函数，当 $x \to a$ 时，$f(x,y)$ 的极限存在

$$\lim_{x\to a} f(x,y) = \varphi(y)$$

而 $\varphi(y)$ 当 $y \to b$ 时的极限也存在并且等于 A，亦即

$$\lim_{y\to b} \varphi(y) = A$$

那么称 A 为 $f(x,y)$ 先对 x、后对 y 的二次极限，记为

$$\lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y) = A$$

同样可以定义先对 y、后对 x 的二次极限。

注 两个二次极限都不存在，而二重极限仍可能存在，例如：

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

该函数在原点极限为 0.

注 两个二次极限存在但可能不相等，例如：

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

注 两个二次极限存在且相等，但二重极限仍可能不存在，例如：

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

那么二重极限和二次极限有什么关系呢？以下定理给了我们答案

定理 2.7

若 $f(x,y)$ 在 (a,b) 的二重极限为

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = A$$

且对任一靠近 b 的 y，当 $x \to a$ 时，$f(x,y)$ 存在极限

$$\lim_{x\to a} f(x,y) = \varphi(y)$$

则二次极限 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a} f(x,y) = \lim\limits_{y\to b}\varphi(y)$ 存在且等于二重极限A。

注

1. 若某个二次极限和二重极限都存在，则两者一定相等；
2. 若两个二次极限存在但不相等，则二重极限一定不存在。

两个二次极限都存在且相等时，就称二次极限可以交换顺序。

第 3 章 偏导数与全微分

3.1 2023/8/19

定义 3.1

设多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $x_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0\right)$ 的邻域上有定义，对任意 $i = 1, 2, \cdots, n$，如果给 x_i 一个增量 $\varDelta x_i$，相应的函数值得到一个改变量：

$$\varDelta_{x_i} u = f\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_i^0 + \varDelta x_i, \cdots, x_n^0\right) - f\left(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_i^0, \cdots, x_n^0\right)$$

若极限

$$\lim_{\varDelta x_i \to 0} \frac{\varDelta_{x_i} u}{\varDelta x_i}$$

存在，则称此极限为函数 $f(x)$ 在 x_0 处关于 x_i 的偏导数，记为

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \text{或} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

也可记为

$$f_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{或} u_{x_i}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

♣

在一元函数中，可导一定连续；但在多元函数中，**各个偏导数存在未必连续**，例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \left(x^2 + y^2 \neq 0\right) \\ 0, \left(x^2 + y^2 = 0\right) \end{cases}$$

在原点不连续，但其各个偏导数都存在

3.2 2023/9/21

我们以二元函数为例，设 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上的一点，则

1.偏导数$f_x(x_0, y_0)$就是曲面被平面$y = y_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_x对x轴的斜率；

2.偏导数$f_y(x_0, y_0)$就是曲面被平面$x = x_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_y对y轴的斜率；

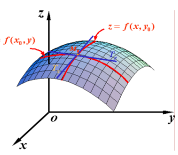

图 3.1

为简单起见，我们以二元函数为例讨论全微分：

定义 3.2

若函数 $u = f(x, y)$ 的全改变量 $\varDelta u$ 可表示为

$$\varDelta u = f(x + \varDelta x, y + \varDelta y) - f(x, y) = A\varDelta x + B\varDelta y + o\left(\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2}\right)$$

且其中A, B与$\varDelta x, \varDelta y$无关而仅与x, y有关，则称$f(x, y)$在 (x, y)可微，并称$A\varDelta x + B\varDelta y$ 为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，记为 du 或者 $df(x, y)$，即

$$du = df(x, y) = A\varDelta x + B\varDelta y$$

♣

注 若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微，则

$$A = f_x(x,y), B = f_y(x,y)$$

从而对多元函数来说，**可微一定可导**。

从而对于二元函数 $u = f(x,y)$：

$$du = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

同样对于 n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

但对于多元函数，**可导未必可微**，例如函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, \left(x^2+y^2 \neq 0\right) \\ 0, \left(x^2+y^2=0\right) \end{cases}$$

在原点处两个偏导数都存在，但不可微。

定理 3.1

若 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$ 在点 (x,y) 及其某邻域内存在，且在这一点它们都连续，则函数 $u = f(x,y)$ 在该点可微 ♡

证明

(3.1) 和 (3,2) 的证明颇为类似，具有套路性，这种手法需要大家积累

我们要证明可微，只需证明 $\varDelta u$ 可表示为

$$\varDelta u = f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x,y) = A\varDelta x + B\varDelta y + o\left(\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2}\right)$$

以下手法需要大家积累

考虑到

$$\varDelta u = f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x,y) = \underbrace{f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y)}_{x+\varDelta x\text{为不变量}} + \underbrace{f(x+\varDelta x, y) - f(x,y)}_{y\text{为不变量}}$$

由拉格朗日中值定理，我们有

$$f(x+\varDelta x, y+\varDelta y) - f(x+\varDelta x, y) = f_y(x+\varDelta x, y+\theta_1\varDelta y)\varDelta y\,(\theta_1 \in (0,1))$$
$$f(x+\varDelta x, y) - f(x,y) = f_x(x+\theta_2\varDelta x, y)\varDelta x\,(\theta_2 \in (0,1))$$

若此时我们令

$$f_y(x+\varDelta x, y+\theta_1\varDelta y) = f_y(x,y) + \beta$$
$$f_x(x+\theta_2\varDelta x, y) = f_x(x,y) + \alpha$$
$$\text{且满足}\varDelta x\text{，}\varDelta y \to 0, \boldsymbol{\alpha}, \beta \to 0$$

根据连续性，这几个函数值最多相差一个常数，显然成立

于是我们有

$$\varDelta u = f_x(x,y)\varDelta x + f_y(x,y)\varDelta y + \alpha\varDelta x + \beta\varDelta y$$

下证

$$\alpha\varDelta x + \beta\varDelta y = o\left(\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2}\right)$$

我们有

$$\lim_{\substack{\varDelta x \to 0 \\ \varDelta y \to 0}} \frac{\alpha\varDelta x + \beta\varDelta y}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2}} = \lim_{\substack{\varDelta x \to 0 \\ \varDelta y \to 0}} \frac{0\cdot\varDelta x + 0\cdot\varDelta y}{\sqrt{\varDelta x^2 + \varDelta y^2}} = 0$$

同时，我们还能得出可微和可导的关系

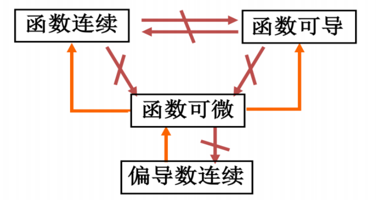

图 3.2

类似于一元函数，多元函数的偏导函数也可以考虑进一步求导，二阶和二阶以上的偏导数称为高阶偏导数。例如二元函数 $f(x,y)$ 存在以下四个二阶偏导数：

$$f_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$f_{yx}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$f_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
$$f_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

定理 3.2

若 f_{xy} 和 f_{yx} 在点 (x,y) 连续，则

$$f_{xy}=f_{yx}$$

证明

还是那原来的配方，还是那熟悉的味道, 思路不能说完全一样，只能说分毫不差，自己看书去，目的都是构造差分使用中值定理，给个提示

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)$$

一个是构造对偶，一个是增减项，这些都是十分重要的手法，希望积累

3.3 2023/9/25

今天的内容没啥好整理的, 不会的直接问我，主要以作业方式带大家巩固

练习 3.1

求下列函数的偏导数

(1)$u=f(x,y)$, 其中$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 求$\frac{\partial u}{\partial r},\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$

(3)$u=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$, 求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$

练习 3.2 验证下列各式：

(1)设$z=\varphi\left(x^2+y^2\right)$, 则$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$

(3)设$u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$, 则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

练习 3.3 若$u=f(r), r=\sqrt{x^2+y^2}$, 其中$f(r)$二次可微，试证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

练习 3.4 若 u,v 为 x,y 的函数,$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 试由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

证明等式

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

✍ **练习 3.5** 设φ和ψ是任意的二阶可导函数，证明

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

满足

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

✍ **练习 3.6** 设$u=\varphi(x+at)+\psi(x-at)$,其中$\varphi,\psi$是任意的二次可微函数，求证

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$