



微分几何应试版教材

作者：Huang

时间：May 17, 2025

目录

第 1 章	曲线论	1
1.1	求弧长参数/弧长	1
1.2	切平面和法平面	2
1.3	主法线、副法线、密切平面、从切平面	3
1.4	曲率挠率	5
第 2 章	曲面论	6
2.1	切平面和法线	6
2.2	曲面的第一基本形式	7
2.3	第二基本形式	10
2.4	法曲率的计算	11
2.5	曲面的渐进方向	11
2.6	主方向	13
2.7	主曲率、高斯曲率、平均曲率	14
2.8	可展曲面	17

第 1 章 曲线论

1.1 求弧长参数/弧长

求弧长参数，三步走

1. 求 \vec{r}'
2. 求 $|\vec{r}'|$
3. 求积分 $\int |\vec{r}'| dt$

例题 1.1 将圆柱螺线 $\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$ 化为弧长参数

证明 三步走

1. 求导数 \vec{r}' :
对参数 t 求导得:

$$\vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

2. 求模长 $|\vec{r}'|$:
计算导数的模:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

3. 求弧长参数 s :
积分模长得弧长:

$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} d\tau = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot t$$

解得 $t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 代入原参数方程得:

$$\vec{r}(s) = \left(a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \frac{bs}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

例题 1.2 求双曲螺线 $\vec{r} = (a \cosh t, a \sinh t, at)$ 的弧长参数表示。

证明 三步走

1. 求导数 \vec{r}' :
对参数 t 求导得:

$$\vec{r}'(t) = (a \sinh t, a \cosh t, a)$$

2. 求模长 $|\vec{r}'|$:
利用双曲恒等式 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$:

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2 \sinh^2 t + a^2 \cosh^2 t + a^2} = a\sqrt{2 \cosh^2 t} = a\sqrt{2} \cosh t$$

3. 求弧长参数 s :
积分模长得弧长:

$$s(t) = \int_0^t a\sqrt{2} \cosh \tau d\tau = a\sqrt{2} \sinh t$$

反解得 $t = \sinh^{-1} \left(\frac{s}{a\sqrt{2}} \right)$, 代入原方程得弧长参数化表示:

$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{a^2 + \frac{s^2}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, a \sinh^{-1} \left(\frac{s}{a\sqrt{2}} \right) \right)$$

例题 1.3 求旋轮线 $\vec{r} = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ 在 $0 \leq t \leq 2\pi$ 时的弧长。

证明 三步走:

1. 求导数
- \vec{r}'
- :

对参数 t 求导得:

$$\vec{r}'(t) = (a(1 - \cos t), a \sin t)$$

2. 求模长
- $|\vec{r}'|$
- :

利用三角恒等式 $1 - \cos t = 2 \sin^2(t/2)$:

$$|\vec{r}'(t)| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = 2a \sin(t/2)$$

3. 求总弧长:

积分模长得总弧长:

$$L = \int_0^{2\pi} 2a \sin(t/2) dt = [-4a \cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8a$$

1.2 切平面和法平面

切线方程的坐标表示:

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

法平面方程的坐标表示:

$$[x - x(t_0)]x'(t_0) + [y - y(t_0)]y'(t_0) + [z - z(t_0)]z'(t_0) = 0$$

例题 1.4 求圆柱螺线 $\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, bt\}$ 在 $t = \frac{\pi}{3}$ 处的切线方程**证明** 三步走:

1. 求导向量:

$$\vec{r}'(t) = \{-a \sin t, a \cos t, b\}$$

2. 求
- $t = \frac{\pi}{3}$
- 处的点和切向量:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{b\pi}{3}\right), \quad \vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, b\right)$$

3. 写切线方程:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z - \frac{b\pi}{3}}{b}$$

例题 1.5 对于圆柱螺线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$, 求它在 $(1, 0, 0)$ 时的切线与法平面。**证明** 三步走:

1. 确定参数
- t
- :

由 $x = 1$ 得 $\cos t = 1 \Rightarrow t = 0$, 对应点 $(1, 0, 0)$

2. 求导向量:

$$\vec{r}'(t) = \{-\sin t, \cos t, 1\} \Rightarrow \vec{r}'(0) = (0, 1, 1)$$

3. 切线方程:

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$

4. 法平面方程:

法向量为 $\vec{r}'(0) = (0, 1, 1)$, 方程为:

$$0(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Rightarrow y + z = 0$$

例题 1.6 求三次挠曲线 $\vec{r} = \{at, bt^2, ct^3\}$ 在 t_0 时的切线和法平面。

证明 三步走：

1. 求导向量：

$$\vec{r}'(t) = \{a, 2bt, 3ct^2\}$$

2. 求 t_0 处的点和切向量：

$$\vec{r}(t_0) = \{at_0, bt_0^2, ct_0^3\}, \quad \vec{r}'(t_0) = \{a, 2bt_0, 3ct_0^2\}$$

3. 切线方程：

$$\frac{x - at_0}{a} = \frac{y - bt_0^2}{2bt_0} = \frac{z - ct_0^3}{3ct_0^2}$$

4. 法平面方程：

$$a(x - at_0) + 2bt_0(y - bt_0^2) + 3ct_0^2(z - ct_0^3) = 0$$

1.3 主法线、副法线、密切平面、从切平面

定义 1.3.1 (Frenet 标架)

设 r 为正则曲线， s 为弧长参数。

- 记 $T(s) = r'(s)$ (自动为单位向量)
- 注意到 $|T(s)|^2 = 1 \Rightarrow T(s)' \cdot T(s) = 0$
- 若 $r'(s) \neq 0$ ，则令 $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$ ，最后令 $B(s) = T(s) \times N(s)$ 。

在 $r'(s) \neq \vec{0}$ 的地方总是可以定义以下坐标系 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$ ，称其为曲线 r 的 Frenet 标架。

定义 1.3.2 (主法线)

设正则曲线 $r(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$ ，则：

- 向量 $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$ 称为曲线在 s 处的主法线向量。
- 主法线方向是曲线弯曲方向的正交单位化结果。

定义 1.3.3 (副法线)

在 Frenet 标架中：

- 向量 $B(s) = T(s) \times N(s)$ 称为曲线在 s 处的副法线向量。
- 副法线方向由右手法则确定，且 $B(s)$ 始终垂直于密切平面。

定义 1.3.4 (密切平面)

在 Frenet 标架 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$ 中：

- 由切向量 $T(s)$ 和主法线向量 $N(s)$ 张成的平面称为密切平面。
- 密切平面方程为： $(X - r(s)) \cdot B(s) = 0$ ，即所有与副法线正交的点构成的平面。

定义 1.3.5 (从切平面)

对于 Frenet 标架 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$ ：

- 由切向量 $T(s)$ 和副法线向量 $B(s)$ 张成的平面称为从切平面 (亦称矫正平面)。
- 从切平面方程为： $(X - r(s)) \cdot N(s) = 0$ ，即所有与主法线正交的点构成的平面。

定义 1.3.6 (法平面)

- 由主法线 $N(s)$ 和副法线 $B(s)$ 张成的平面称为法平面。
- 法平面方程为: $(X - r(s)) \cdot T(s) = 0$, 即所有与切线正交的点构成的平面。



例题 1.7 求 $\vec{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 在 $(1, 0, 0)$ 处的法平面、副法线、密切平面、主法线及从切平面。

证明

1. 确定参数 t 值由 $\cos t = 1$ 且 $\sin t = 0$, 得 $t = 0$, 对应点 $(1, 0, 0)$ 。

2. 计算 **Frenet** 标架:

(a). 切向量 \vec{T} :

$$\vec{r}'(t) = \{-\sin t, \cos t, 1\} \Rightarrow \vec{r}'(0) = \{0, 1, 1\}$$

单位化得:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

(b). 主法线 \vec{N} : 计算二阶导数:

$$\vec{r}''(t) = \{-\cos t, -\sin t, 0\} \Rightarrow \vec{r}''(0) = \{-1, 0, 0\}$$

单位化得主法线方向:

$$\vec{N} = \frac{\vec{r}''(0)}{\|\vec{r}''(0)\|} = \{-1, 0, 0\}$$

(c). 副法线 \vec{B} :

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

3. 几何对象方程:

(a). 切线方程:

方向向量 $\vec{r}'(0) = \{0, 1, 1\}$, 过点 $(1, 0, 0)$:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$$

(b). 法平面方程:

法向量为 $\vec{r}'(0)$, 方程为:

$$0(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow y+z=0$$

(c). 主法线方程:

方向向量 $\vec{N} = \{-1, 0, 0\}$, 过点 $(1, 0, 0)$:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

(d). 副法线方程:

方向向量 $\vec{B} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, 过点 $(1, 0, 0)$:

$$x=1, \quad \frac{y}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(e). 密切平面方程:

法向量为 \vec{B} , 方程为:

$$0(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-0) = 0 \Rightarrow z=y$$

(f). 从切平面方程:

法向量为 \vec{N} , 方程为:

$$-1(x-1) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0 \Rightarrow x = 1$$

1.4 曲率挠率

定义 1.4.1 (曲率)

我们称 $k(s) = |T'(s)| = |r''(s)|$ 为曲线的曲率。

定义 1.4.2 (挠率)

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s)$$

对于一般参数 t

$$\begin{aligned} k(t) &= k(s) = T'(s) \cdot N(s) \\ &= \frac{|r' \times r''|}{|r'|^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) \\ &= \frac{[r', r'', r''']}{|r' \times r''|^2}. \end{aligned}$$

例题 1.8 求 $\vec{r} = \{a(3t - t^3), 3at^2, a(3t + t^3)\}$ 的曲率和挠率。

证明

1. 计算导数:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) &= \{a(3 - 3t^2), 6at, a(3 + 3t^2)\} \\ \vec{r}''(t) &= \{-6at, 6a, 6at\} \\ \vec{r}'''(t) &= \{-6a, 0, 6a\} \end{aligned}$$

2. 计算叉乘 $\vec{r}' \times \vec{r}''$:

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a(3 - 3t^2) & 6at & a(3 + 3t^2) \\ -6at & 6a & 6at \end{vmatrix} = (18a^2(t^2 - 1), -36a^2t, 18a^2(1 + t^2))$$

模长为:

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = 18a^2\sqrt{2}(t^2 + 1)$$

3. 计算曲率:

$$k(t) = \frac{|\vec{r}' \times \vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3} = \frac{18a^2\sqrt{2}(t^2 + 1)}{(3a\sqrt{2}(t^2 + 1))^3} = \frac{1}{3a(t^2 + 1)^2}$$

4. 计算三重标量积:

$$[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}'''] = \begin{vmatrix} a(3 - 3t^2) & 6at & a(3 + 3t^2) \\ -6at & 6a & 6at \\ -6a & 0 & 6a \end{vmatrix} = 216a^3$$

5. 计算挠率:

$$\tau(t) = \frac{[\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''']}{|\vec{r}' \times \vec{r}''|^2} = \frac{216a^3}{(18a^2\sqrt{2}(t^2 + 1))^2} = \frac{1}{3a(t^2 + 1)^2}$$

第2章 曲面论

2.1 切平面和法线

u-曲线: 令 $v = v_0$,

$$r(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)).$$

只有 u 作为参数, 是面上的曲线。其对应的切向量为

$$r'(u)|_{u_0} = r_u(u_0, v_0).$$

v-曲线: 令 $u = u_0$,

$$r(u_0, v) = (x(u_0, v), \dots)$$

其对应的切向量为

$$r'(v)|_{v_0} = r_v(u_0, v_0).$$

定义 2.1.1 (切平面)

设 $p \in S$ 为曲面上一点。

定义 $T_p S$ 为所有经过 p 且在 S 上的曲线在 p 点处的切向量构成的集合。

称为曲面 S 在 p 点处的切平面 (切空间)。

$$T_p S = \{\text{所有过 } p \text{ 且在曲面 } S \text{ 上的曲线在 } p \text{ 点处的切向量}\}$$

命题 2.1.1

$T_p S$ 是由 $\text{Span}\{r_u|_{(u_0, v_0)}, r_v|_{(u_0, v_0)}\}$ 张成的线性空间。因此, $T_p S$ 是一个线性空间。

$$0 \iff (u_0, v_0) \iff P.$$

定义 2.1.2 (法向量与正则曲面片)

我们称单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

为曲面片在参数域上的定向法向量。

对于正则曲面片, 若其参数化满足 $r_u \times r_v \neq \mathbf{0}$, 则可在每一点定义法向量。严格来说, \mathbf{n} 和 $-\mathbf{n}$ 均可作为法向量方向, 对应两种不同的定向方式 (称为分法(2))。

例题 2.1 设曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{u + v, u - v, uv\}$, 求点 $(1, 2)$ 处的单位法向量、切平面方程、法线方程

证明

1. 计算偏导数:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \Big|_{(1,2)} = \{1, 1, 2\}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big|_{(1,2)} = \{1, -1, 1\}$$

2. 求法向量:

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{3, 1, -2\}$$

模长 $|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$, 单位法向量:

$$\vec{n}_0 = \left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}} \right\}$$

3. 切平面方程:

点 $\vec{r}(1, 2) = (3, -1, 2)$, 法向量 \vec{n} :

$$3(x-3) + 1(y+1) - 2(z-2) = 0 \Rightarrow 3x + y - 2z = 4$$

4. 法线方程:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

例题 2.2 求球面 $\vec{r} = (\theta, \varphi) = \{a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta\}$ 上任意点的切平面和法线方程。

证明

1. 计算偏导数:

$$\vec{r}_\theta = \{-a \sin \theta \cos \varphi, -a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta\}$$

$$\vec{r}_\varphi = \{-a \cos \theta \sin \varphi, a \cos \theta \cos \varphi, 0\}$$

2. 求法向量:

$$\vec{n} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = -a^2 \cos \theta \cdot \{a \cos \theta \cos \varphi, a \cos \theta \sin \varphi, a \sin \theta\}$$

单位法向量:

$$\vec{n}_0 = -\frac{\vec{r}}{a} \quad (\text{指向球心})$$

3. 切平面方程:

$$\cos \theta \cos \varphi \cdot x + \cos \theta \sin \varphi \cdot y + \sin \theta \cdot z = a$$

4. 法线方程:

$$\frac{x - a \cos \theta \cos \varphi}{\cos \theta \cos \varphi} = \frac{y - a \cos \theta \sin \varphi}{\cos \theta \sin \varphi} = \frac{z - a \sin \theta}{\sin \theta}$$

2.2 曲面的第一基本形式

定义 2.2.1 (第一基本形式)

设正则曲面片 $r: D \rightarrow \mathbb{E}^3$, 对任意点 $p \in S$, 其切空间 $T_p S$ 由基向量 $\{r_u, r_v\}$ 张成。定义第一基本形式 I 为:

$$I = E du \otimes du + 2F du \otimes dv + G dv \otimes dv,$$

其中系数由基向量的内积确定:

$$E = r_u \cdot r_u, \quad F = r_u \cdot r_v, \quad G = r_v \cdot r_v.$$

对应的度量张量矩阵为:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$



第一基本形式的公式

设切向量 $\alpha = a_1 r_u + b_1 r_v$ 和 $\beta = a_2 r_u + b_2 r_v$, 则:

$$I(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = E a_1 a_2 + F(a_1 b_2 + b_1 a_2) + G b_1 b_2.$$

第一基本形式的几何意义

(一) 曲线上的曲线长度

设曲线上的曲线为 $r(t) = r(u(t), v(t))$, 其中 $t \in [a, b]$ 。

在点 p 处, 参数 t 对应于 t_0 。

曲线在点 p 处的切向量为:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} r(t) = u_t \cdot r_u + v_t \cdot r_v \in T_p S$$

曲线在点 p 处的长度元素为:

$$\left| \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} r(t) \right| = \sqrt{E(u_t)^2 + 2F(u_t)(v_t) + G(v_t)^2} = \sqrt{I \left(\frac{d}{dt} \gamma(t), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right)}$$

定义 2.2.2 (曲线长度)

设曲线上的曲线为 $r(t) = r(u(t), v(t))$ 。

曲线的长度 l 定义为:

$$l = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{I \left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt} \right)} dt$$

其中, I 表示第一基本形式。



例题 2.3 计算 $S = \vec{r}(u, v) = \{a \cos u, a \sin u, v\}$ ($a > 0$) 上曲线 $u = t, v = t, t \in [0, 1]$ 的长度。

证明

1. 确定曲线参数方程:

将 $u = t$ 和 $v = t$ 代入曲面方程, 得曲线:

$$\vec{r}(t) = \{a \cos t, a \sin t, t\}, \quad t \in [0, 1]$$

2. 计算第一基本形式:

• 曲面偏导数:

$$\vec{r}_u = \{-a \sin u, a \cos u, 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0, 0, 1\}$$

• 第一基本量:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1$$

$$\text{第一基本形式: } ds^2 = a^2 du^2 + dv^2$$

3. 计算弧长微分:

曲线参数变化率 $\frac{du}{dt} = 1, \frac{dv}{dt} = 1$, 代入第一基本形式:

$$ds = \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{a^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1} dt = \sqrt{a^2 + 1} dt$$

4. 积分求总长:

$$l = \int_0^1 \sqrt{a^2 + 1} dt = \sqrt{a^2 + 1} \cdot \int_0^1 dt = \boxed{\sqrt{a^2 + 1}}$$

(二) 曲面上区域的面积

曲面的面积元素 $d\sigma$ 定义为:

$$d\sigma = |r_u \times r_v| du dv$$

展开为:

$$d\sigma = |r_u \times r_v|(\Delta u)(\Delta v)$$

进一步化简为:

$$d\sigma = \sqrt{|r_u|^2|r_v|^2 - (r_u \cdot r_v)^2}(\Delta u)(\Delta v)$$

即:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

其中, $E = |r_u|^2$, $F = r_u \cdot r_v$, $G = |r_v|^2$ 。

定义 2.2.3 (曲面面积)

曲面的面积 $A(r(D))$ 定义为:

$$A(r(D)) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

其中, $D \subset \mathbb{R}^2$ 。



例题 2.4 求球面 $\vec{r}(\varphi, \theta) = a\{\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi\}$ 的面积。

证明

1. 计算偏导数:

$$\vec{r}_\varphi = \{-a \sin \varphi \cos \theta, -a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi\}$$

$$\vec{r}_\theta = \{-a \cos \varphi \sin \theta, a \cos \varphi \cos \theta, 0\}$$

2. 计算第一基本量:

$$E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = a^2, \quad F = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\theta = 0, \quad G = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = a^2 \cos^2 \varphi$$

3. 计算面积元:

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2 \cos \varphi$$

4. 确定参数范围:

标准球面参数域 $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

5. 积分求面积:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \varphi d\varphi d\theta = 2\pi a^2 \cdot 2 = \boxed{4\pi a^2}$$

例题 2.5 计算圆柱面 $S: \vec{r}(u, v) = \{a \cos u, a \sin u, v\}$ ($a > 0$) 上由曲线 $u = 1, v = 0, u - v = 0$ 所围成曲面的面积。

证明

1. 确定参数区域 D :

曲线 $u = 1, v = 0, u - v = 0$ 在参数平面内围成三角形区域:

$$D = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\}$$

2. 计算第一基本量:

$$\vec{r}_u = \{-a \sin u, a \cos u, 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0, 0, 1\}$$

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = a$$

3. 积分求面积:

$$A = \iint_D a \, du dv = a \int_0^1 \int_0^u dv du = a \int_0^1 u \, du = \boxed{\frac{a}{2}}$$

2.3 第二基本形式

定义 2.3.1 (第二基本形式)

$$II = L \, du \otimes du + M \, du \otimes dv + M \, dv \otimes du + N \, dv \otimes dv$$

其中,

$$II \sim \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

也是 $T_p S$ 上的一个张量积, 线性、对称, 但不一定正定。

其中:

$$L = r_{uu} \cdot n = (r_u \cdot n)_u - r_u \cdot n_u$$

$$M = r_{uv} \cdot n = -r_u \cdot n_v = -r_v \cdot n_u$$

$$N = r_{vv} \cdot n = -r_v \cdot n_v$$



例题 2.6 计算悬链面 $\vec{r} = \{\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u\}$ 的第一、第二类基本量。

证明

1. 第一类基本量:

(a). 计算偏导数:

$$\vec{r}_u = \{\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1\}, \quad \vec{r}_v = \{-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0\}$$

(b). 计算第一基本量:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \cosh^2 u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \cosh^2 u$$

2. 第二类基本量:

(a). 计算二阶偏导数:

$$\vec{r}_{uu} = \{\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0\}$$

$$\vec{r}_{uv} = \{-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0\}$$

$$\vec{r}_{vv} = \{-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0\}$$

(b). 计算单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left\{ -\frac{\cos v}{\cosh u}, -\frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u \right\}$$

(c). 计算第二基本量:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = -1, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 0, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = 1$$

2.4 法曲率的计算

命题 2.4.1 (法曲率的一般公式)

若 v 非单位向量, 则 $\frac{v}{|v|}$ 为单位向量。

定义

$$\begin{aligned} k_n(v) &\equiv k_n\left(\frac{v}{|v|}\right) = II\left(\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\right) \\ &= \frac{1}{|v|^2} II(v, v) = \frac{II(v, v)}{I(v, v)} \end{aligned}$$

上述称为法曲率的一般公式。



例题 2.7 计算椭圆抛物面 $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ ($a, b > 0$) 在点 $(0, 0, 0)$ 处沿任一方向 $\frac{dx}{dy}$ 的法曲率

证明

1. 参数化曲面:

将椭圆抛物面表示为 $\vec{r}(x, y) = (x, y, \frac{1}{2}(ax^2 + by^2))$

2. 计算一阶偏导数:

$$\vec{r}_x = (1, 0, ax), \quad \vec{r}_y = (0, 1, by)$$

在点 $(0, 0, 0)$ 处:

$$\vec{r}_x = (1, 0, 0), \quad \vec{r}_y = (0, 1, 0)$$

3. 第一类基本量:

$$E = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_x = 1, \quad F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = 0, \quad G = \vec{r}_y \cdot \vec{r}_y = 1$$

4. 计算单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_y|} = (0, 0, 1)$$

5. 计算二阶偏导数:

$$\vec{r}_{xx} = (0, 0, a), \quad \vec{r}_{xy} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{yy} = (0, 0, b)$$

6. 第二类基本量:

$$L = \vec{r}_{xx} \cdot \vec{n} = a, \quad M = \vec{r}_{xy} \cdot \vec{n} = 0, \quad N = \vec{r}_{yy} \cdot \vec{n} = b$$

7. 法曲率公式:

设方向比为 $k = \frac{dx}{dy}$, 则方向向量为 $(k, 1)$, 法曲率为:

$$k_n = \frac{Lk^2 + N}{k^2 + 1} = \frac{ak^2 + b}{k^2 + 1}$$

2.5 曲面的渐进方向

• 我们称 $V \in T_p S$ 是一个渐进方向, 若 $k_n(v) = \frac{II(v, v)}{I(v, v)} = 0$ 。

若 $r(s) = r(u(s), v(s))$ 的切方向 $r'(s)$ 是渐进方向, 则称 $r(s)$ 为曲面上的一条渐进线。此时 $k_n(r'(s)) \equiv 0$ 。

渐进线方程

$$k_n(r'(s)) \equiv 0 \iff II(r'(s), r'(s)) \equiv 0.$$

$$\Leftrightarrow L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \left(\frac{du}{ds} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right) + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow L \left(\frac{du}{dv} \right)^2 + 2M \left(\frac{du}{dv} \right) + N = 0.$$

将 u 视为 v 的函数:

$$\frac{du}{dv} = \frac{du/ds}{dv/ds}$$

方程有解的必要条件是判别式 $\Delta \geq 0$:

$$\Delta \geq 0 \iff \det II \leq 0 \iff K \leq 0.$$

解得 $u = f(v) + C$, 于是可以讨论曲线 $u = f(v) + C$:

$$F(u, v) = C$$

例题 2.8 求双曲抛物面 $\vec{r}(u, v) = \{2(u+v), u-v, 2uv\}$ 在点 $(0, 0, 0)$ 的渐近方向。

证明

1. 二阶偏导数计算:

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{uv} = (0, 0, 2), \quad \vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$$

2. 单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = (0, 0, -1)$$

3. 第二基本量:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = 0, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = -2, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = 0$$

4. 渐近方向方程:

$$0 \cdot (du)^2 + 2(-2)dudv + 0 \cdot (dv)^2 = 0 \Rightarrow du \cdot dv = 0$$

解得渐近方向为 $\boxed{du=0}$ 或 $\boxed{dv=0}$, 对应直母线方向。

例题 2.9 试求圆柱面 $S: \vec{r}(u, v) = \{a \cos u, a \sin u, v\}$ ($a > 0$) 上的渐近线。

证明

1. 二阶偏导数计算:

$$\vec{r}_{uu} = (-a \cos u, -a \sin u, 0), \quad \vec{r}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$$

2. 单位法向量:

$$\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$$

3. 第二基本量:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = -a, \quad M = 0, \quad N = 0$$

4. 渐近线方程:

$$-a(du)^2 = 0 \Rightarrow du = 0$$

解得渐近线为 $\boxed{u = \text{常数}}$, 即圆柱面的直母线。

例题 2.10 曲面 $z = xy^2$ 的渐近线。

证明

1. 参数化与二阶偏导数:

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, xy^2), \quad \vec{r}_{xx} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{xy} = (0, 0, 2y), \quad \vec{r}_{yy} = (0, 0, 2x)$$

2. 单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{(-y^2, -2xy, 1)}{\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}}$$

3. 第二基本量:

$$L = 0, \quad M = \frac{2y}{\sqrt{D}}, \quad N = \frac{2x}{\sqrt{D}} \quad (D = y^4 + 4x^2y^2 + 1)$$

4. 渐近线方程:

$$4ydx dy + 2x(dy)^2 = 0 \Rightarrow 2dy(2ydx + xdy) = 0$$

解得渐近线为:

$$\boxed{y = C} \quad \text{或} \quad \boxed{x = Cy^{-1/2}} \quad (C \text{ 为常数})$$

2.6 主方向

定义 2.6.1

设 $(d)du : dv$ 为曲面 $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 在 $P(u, v)$ 点的一个方向, 则 (d) 为主方向当且仅当

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du dv & dv^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$



例题 2.11 计算双曲抛物面 $\vec{r} = \{a(u+v), b(u-v), 2uv\}$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的主方向。

证明

1. 计算一阶偏导:

$$\vec{r}_u = (a, b, 2v), \quad \vec{r}_v = (a, -b, 2u)$$

在 $(u, v) = (0, 0)$ 处:

$$\vec{r}_u = (a, b, 0), \quad \vec{r}_v = (a, -b, 0)$$

2. 计算第一基本量:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2 + b^2$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = a^2 - b^2$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = a^2 + b^2$$

3. 计算单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{(0, 0, -2ab)}{2|ab|} = (0, 0, -1)$$

4. 计算二阶偏导:

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{uv} = (0, 0, 2), \quad \vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$$

5. 计算第二基本量:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = 0$$

6. 主方向判别式：设主方向为 $du : dv = k : 1$ ，代入主方向判别式：

$$\begin{vmatrix} k^2 & -k & 1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} k^2 & -k & 1 \\ a^2 + b^2 & a^2 - b^2 & a^2 + b^2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式（按第三行）：

$$0 \cdot \begin{vmatrix} -k & 1 \\ a^2 - b^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ a^2 + b^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} k^2 & -k \\ a^2 + b^2 & a^2 - b^2 \end{vmatrix}$$

只剩中间项：

$$2 \cdot [k^2(a^2 + b^2) - 1(a^2 + b^2)] = 2(a^2 + b^2)(k^2 - 1) = 0$$

所以 $k^2 = 1$ ，即 $k = \pm 1$ 。

7. 主方向为 $du : dv = 1 : 1$ 和 $du : dv = -1 : 1$ ，即沿 $u = v$ 和 $u = -v$ 方向。

$$\boxed{du : dv = 1 : 1 \quad \text{和} \quad du : dv = -1 : 1}$$

2.7 主曲率、高斯曲率、平均曲率

定义 2.7.1 (主曲率)

我们称 W 的曲线在两个特征值（可以相等） k_1, k_2 处的方向为曲面在该点的主曲率。

定理 2.7.1

曲面 $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 在点 $P(u, v)$ 处的的主曲率 k_n 满足

$$\begin{vmatrix} L - k_n E & M - k_n F \\ M + k_n F & N - k_n G \end{vmatrix} = 0$$

$$(EG - F^2) k_n^2 + (LG - 2MF + NE)k_n + (LN - M^2) = 0 \quad (\text{一元二次方程})$$

定义 2.7.2 (中曲率和高斯曲率)

- 高斯曲率 (K):

$$K = k_1 \cdot k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

其中 k_1 和 k_2 是主曲率， E, F, G 是第一基本形式的系数， L, M, N 是第二基本形式的系数。

- 中曲率 (H):

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{LG + NE - 2MF}{2(EG - F^2)}$$

两者完全决定了曲面在一点处的弯曲

例题 2.12 计算曲面 $\vec{r}(u, v) = \{u + v, u^2 - v^2, u - v\}$ 在点 $(0, 0)$ 处的曲率。

证明

- 计算一阶偏导：

$$\vec{r}_u = (1, 2u, 1), \quad \vec{r}_v = (1, -2v, -1)$$

在 $(u, v) = (0, 0)$ 处:

$$\vec{r}_u = (1, 0, 1), \quad \vec{r}_v = (1, 0, -1)$$

2. 计算第一基本形式系数:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = 1^2 + 0^2 + 1^2 = 2$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

3. 计算单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{(0, 2, 0)}{2} = (0, 1, 0)$$

4. 计算二阶偏导:

$$\vec{r}_{uu} = (0, 2, 0), \quad \vec{r}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{vv} = (0, -2, 0)$$

5. 计算第二基本形式系数:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = (0, 2, 0) \cdot (0, 1, 0) = 2$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = (0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = (0, -2, 0) \cdot (0, 1, 0) = -2$$

6. 代入主曲率判别式:

$$(EG - F^2)k_n^2 + (LG - 2MF + NE)k_n + (LN - M^2) = 0$$

代入 $E = 2, F = 0, G = 2, L = 2, M = 0, N = -2$ 得

$$(2 \times 2 - 0^2)k_n^2 + (2 \times 2 - 2 \times 0 \times 0 + (-2) \times 2)k_n + (2 \times -2 - 0^2) = 0$$

$$4k_n^2 + (4 - 4)k_n - 4 = 0$$

$$4k_n^2 - 4 = 0$$

$$k_n^2 = 1 \implies k_n = \pm 1$$

7. 高斯曲率与平均曲率:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{2 \times (-2) - 0^2}{2 \times 2 - 0^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$H = \frac{LG + NE - 2MF}{2(EG - F^2)} = \frac{2 \times 2 + (-2) \times 2 - 0}{2 \times 4} = \frac{4 - 4}{8} = 0$$

8.

$$\text{主曲率: } k_1 = 1, \quad k_2 = -1$$

$$\text{高斯曲率: } K = -1$$

$$\text{平均曲率: } H = 0$$

例题 2.13 计算正螺面 $S: \vec{r}(u, v) = \{u \cos v, u \sin v, v\}$ 的高斯曲率和平均曲率。

证明

1. 计算一阶偏导:

$$\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0), \quad \vec{r}_v = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

2. 计算第一基本形式系数:

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \cos v \cdot (-u \sin v) + \sin v \cdot (u \cos v) + 0 \cdot 1 = 0$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = (-u \sin v)^2 + (u \cos v)^2 + 1^2 = u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + 1 = u^2 + 1$$

3. 计算单位法向量:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

先计算叉积:

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v, -\cos v, u)$$

其模长为

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}$$

所以

$$\vec{n} = \left(\frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right)$$

4. 计算二阶偏导:

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

5. 计算第二基本形式系数:

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\begin{aligned} M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} &= (-\sin v, \cos v, 0) \cdot \left(\frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \\ &= -\frac{\sin^2 v}{\sqrt{1 + u^2}} - \frac{\cos^2 v}{\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} &= (-u \cos v, -u \sin v, 0) \cdot \left(\frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \\ &= -u \cos v \cdot \frac{\sin v}{\sqrt{1 + u^2}} + (-u \sin v) \cdot \left(-\frac{\cos v}{\sqrt{1 + u^2}} \right) \\ &= -\frac{u \sin v \cos v}{\sqrt{1 + u^2}} + \frac{u \sin v \cos v}{\sqrt{1 + u^2}} = 0 \end{aligned}$$

6. 高斯曲率与平均曲率公式:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{LG + NE - 2MF}{2(EG - F^2)}$$

代入 $E = 1, F = 0, G = u^2 + 1, L = 0, M = -\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}, N = 0$ 得

$$EG - F^2 = 1 \cdot (u^2 + 1) - 0 = u^2 + 1$$

$$K = \frac{0 \cdot 0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \right)^2}{u^2 + 1} = -\frac{1}{(u^2 + 1)^2}$$

$$H = \frac{0 \cdot (u^2 + 1) + 0 \cdot 1 - 0}{2(u^2 + 1)} = 0$$

7. 结论:

$$\text{高斯曲率: } K = -\frac{1}{(u^2 + 1)^2}$$

$$\text{平均曲率: } H = 0$$

2.8 可展曲面

定义 2.8.1 (直纹面)

称由单参数直线族给出的曲面为直纹面，换言之，直纹面一定有以下参数表达。

$$r(u, v) = a(u) + vb(u).$$

定义 2.8.2 (可展曲面)

$K = 0$ 的直纹面称为可展曲面。

命题 2.8.1

直纹面可展 $\Leftrightarrow [a'(u), b(u), b'(u)] \equiv 0$.

例题 2.14 证明 $\vec{r} = \{u^2 + \frac{1}{3}v, 2u^3 + uv, u^4 + \frac{2}{3}u^2v\}$ 是可展曲面。

证明

方法一：高斯曲率法

1. 写为直纹面形式：

$$a(u) = (u^2, 2u^3, u^4), \quad b(u) = \left(\frac{1}{3}, u, \frac{2}{3}u^2\right)$$

2. 计算一阶偏导：

$$\vec{r}_u = (2u, 6u^2 + v, 4u^3 + \frac{4}{3}uv)$$

$$\vec{r}_v = \left(\frac{1}{3}, u, \frac{2}{3}u^2\right) = b(u)$$

3. 计算二阶偏导：

$$\vec{r}_{uu} = (2, 12u, 12u^2 + \frac{4}{3}v)$$

$$\vec{r}_{uv} = (0, 1, \frac{4}{3}u)$$

$$\vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$$

4. 计算法向量：

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

5. 计算 E, F, G, L, M, N ，代入高斯曲率公式，可验证 $K \equiv 0$ 。

方法二：混合积法

1. $a(u) = (u^2, 2u^3, u^4), \quad b(u) = (\frac{1}{3}, u, \frac{2}{3}u^2)$

2. $a'(u) = (2u, 6u^2, 4u^3), \quad b'(u) = (0, 1, \frac{4}{3}u)$

3. 计算混合积

$$[a'(u), b(u), b'(u)] = \det \begin{pmatrix} 2u & \frac{1}{3} & 0 \\ 6u^2 & u & 1 \\ 4u^3 & \frac{2}{3}u^2 & \frac{4}{3}u \end{pmatrix}$$

展开可得 $[a'(u), b(u), b'(u)] \equiv 0$, 所以是可展曲面。

例题 2.15 证明 $\vec{r} = \{\cos v - (u+v)\sin v, \sin v + (u+v)\cos v, u+2v\}$ 是可展曲面。

证明 方法一：高斯曲率法

1. 写为直纹面形式：

$$a(u) = \{-u \sin v, u \cos v, u\}, \quad b(u) = \{\cos v - v \sin v, \sin v + v \cos v, 2v\}$$

但更直接地, 视为 $a(u) = (0, 0, u)$, $b(u) = (\cos v - v \sin v, \sin v + v \cos v, 2v)$, 参数交换也可。

2. 计算 K , 可验证 $K \equiv 0$ 。

方法二：混合积法

$$1. a(u) = (0, 0, u), \quad b(u) = (\cos v - v \sin v, \sin v + v \cos v, 2v)$$

$$2. a'(u) = (0, 0, 1), \quad b'(u) = (-\sin v - v \cos v, \cos v - v \sin v, 2)$$

3. 计算混合积

$$[a'(u), b(u), b'(u)] = \det \begin{pmatrix} 0 & \cos v - v \sin v & -\sin v - v \cos v \\ 0 & \sin v + v \cos v & \cos v - v \sin v \\ 1 & 2v & 2 \end{pmatrix}$$

展开可得 $[a'(u), b(u), b'(u)] \equiv 0$, 所以是可展曲面。

例题 2.16 证明正螺面 $\vec{r} = \{v \cos u, v \sin u, au + b\}$ 不是可展曲面。

证明 方法一：高斯曲率法

1. 写为直纹面形式：

$$a(u) = (0, 0, au + b), \quad b(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

2. 计算 K , 可得 $K \neq 0$, 不是可展曲面。

方法二：混合积法

$$1. a(u) = (0, 0, au + b), \quad b(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$2. a'(u) = (0, 0, a), \quad b'(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$$

3. 计算混合积

$$[a'(u), b(u), b'(u)] = \det \begin{pmatrix} 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = a(\cos^2 u + \sin^2 u) = a \neq 0$$

所以不是可展曲面。