泛函分析

作者：Huang

时间：November 13, 2024

目录

第 1 章 度量空间

1.1 压缩映射原理

练习 1.1 证明：完备空间的闭子集是一个完备的子空间，而任一度量空间中的完备子空间必是闭子集。

证明 先证：完备空间的闭子集是一个完备的子空间

不妨记子集为 M，由于 M 为闭集，其含有其所有的收敛点，即

$$\forall x_n \in M, \lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$$

于是，我们有

$$\forall x_n, x_m \in M, \|x_n - x_m\| \to 0$$

再证：任一度量空间中的完备子空间必是闭子集，即

$$\forall x_n \in M, \lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$$

。

由完备性，我们有

$$\forall x_n, x_m \in M, \|x_n - x_m\| \to 0$$

此时显然有属于 M 的极限，否则就不完备

练习 1.2 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的二次连续可微的实值函数，$\hat{x} \in (a,b)$ 使得 $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$. 求证：存在 $\hat{x}$ 的邻域 $U(\hat{x})$, 使得 $\forall x_0 \in U(\hat{x})$, 迭代序列

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

是收敛的，并且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \hat{x}.$$

证明 不妨记

$$T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

此时

$$T'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

于是，$\exists \hat{x} \in (a,b)$,s.t

$$T'(\hat{x}) = 0$$

故存在，$\hat{x}$ 的一个领域，使得只要 x 取自该领域，就有

$$|T'| = \alpha \leq 1$$

显然满足压缩映射条件，故收敛且收敛点唯一

练习 1.3 设 $(\mathscr{X}, \rho)$ 是度量空间，映射 $T : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ 满足

$$\rho(Tx, Ty) < \rho(x, y) \quad (\forall x \neq y),$$

并已知 T 有不动点，求证：此不动点是唯一的.

证明 不妨设不动点为 x, 下证唯一性

若不唯一，不妨设 y 为另一个不动点

由不动点的性质，我们有

$$\rho(Tx, Ty) = \rho(x, y)$$

与题设矛盾

✍ **练习 1.4** 设T 是度量空间上的压缩映射, 求证: T 是连续的.

证明

由于其为压缩映射，故 $\exists\alpha<1$, 使得

$$\rho(Tx_n,Tx)<\alpha\rho(x_n,x)\to 0$$

故连续

✍ **练习 1.5** 设T 是压缩映射, 求证: $T^n(n\in\mathbb{N})$ 也是压缩映射, 并说明逆命题不一定成立.

证明

由于 T 其为压缩映射，故 $\exists 0<\alpha<1$, 使得

$$\rho\left(T^n x,T^n y\right)<\alpha\rho\left(T^{n-1}x,T^{n-1}y\right)<\cdots<\alpha^{n-1}\rho\left(Tx,Ty\right)<\alpha^n\rho\left(x,y\right)$$

显然成立

✍ **练习 1.6** 设 M 是 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 中的有界闭集，映射 $T:M\to M$ 满足：$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)(\forall x,y\in M,x\neq y)$. 求证：$T$ 在 M 中存在唯一的不动点

证明

由 $\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)(\forall x,y\in M,x\neq y)$，则存在 $\alpha\in(0,1)$, 使得

$$\rho(Tx,Ty)<\alpha\rho(x,y)(\forall x,y\in M,x\neq y).$$

由压缩映射定理，得证

✍ **练习 1.7** 对于积分方程

$$x(t)-\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{t-s}x(s)\mathrm{d}s=y(t)$$

其中 $y(t)\in C[0,1]$ 为一给定函数，λ 为常数，$|\lambda|<1$, 求证：存在唯一解 $x(t)\in C[0,1]$.

证明

变形可得

$$e^{-t}x(t)=e^{-t}y(t)+\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}x(s)\mathrm{d}s$$

如下定义

$$T:e^{-t}x(t)\to e^{-t}y(t)+\lambda\int_0^1 \mathrm{e}^{-s}x(s)\mathrm{d}s$$

于是我们有

$$\rho(Tu,Tv)=\max_{t\in[0,1]}\left|\lambda\int_0^1 u(s)ds-\lambda\int_0^1 v(s)ds\right|\leq|\lambda|\max_{t\in[0,1]}\int_0^1|u(s)-v(s)|ds=|\lambda|\max_{t\in[0,1]}|u(t)-v(t)|=|\lambda|\rho(u,v)$$

由压缩映射原理得证

1.2 完备化

✍ **练习 1.8**

令S 为一切实 (或复) 数列

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$$

组成的集合, 在S 中定义距离为

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|},$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_k,\cdots)$. 求证:$S$ 为一个完备的度量空间.

证明 显然，满足非负性和对称性，下证满足三角不等式

考虑函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x}$$

显然其单调递增，又有

$$|x+y|<|x|+|y|$$

故

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leq\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

带入验证即可证明范数成立，下证完备性

记$x_m=(\xi_{1m},\xi_{2m},\cdots,\xi_{km},\cdots)$ 为 S 中的基本列

只要

$$\rho(x_{n+p},x_n)\to 0$$

即可

由于是基本列，此时

$$\rho(x_{n+p},x_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_{k(k+p)}-\xi_{kk}|}{1+|\xi_{k(k+p)}-\xi_{kk}|}<\frac{\varepsilon}{2^k}$$

对于其中的一项，我们有

$$\frac{1}{2^k}\frac{|\xi_{k(k+p)}-\xi_{kk}|}{1+|\xi_{k(k+p)}-\xi_{kk}|}<\frac{\varepsilon}{2^k}$$

此时我们有

$$|\xi_{k(k+p)}-\xi_{kk}|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

✍ **练习 1.9** 在一个度量空间 $(\mathscr{X},\rho)$ 上，求证：基本列是收敛列，当且仅当其中存在一串收敛子列.

证明 左推右，显然成立，因为基本列本身就是存在收敛子列的

右推左，一句话证明，子列收敛有极限，子列收敛于数列本身，基本列收敛。剩下的是常规数分写法

✍ **练习 1.10** 设 F 是只有有限项不为 0 的实数列全体，在 F 上引进距离

$$\rho(x,y)=\sup_{k\geqslant 1}|\xi_k-\eta_k|,$$

其中$x=\{\xi_k\}\in F,y=\{\eta_k\}\in F$, 求证: (F,ρ) 不完备, 并指出它的完备化空间.

证明 $x^{(n)}=\left(\underbrace{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\cdots\right)\in F,x^{(m)}=\left(\underbrace{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{m}}_{m},0,0,\cdots\right)\in F$

不妨设 $n>m$

$$\rho(x^{(n)},x^{(m)})=\frac{1}{m+1}\to 0$$

故为柯西列，下证完备性，不妨设收敛于 x

事实上

$$\rho(x^{(n)},x)=\frac{1}{n+1}\to 0$$

但 $x\notin F$, 故不完备

✍ **练习 1.11** 求证:[0,1] 上的多项式全体按距离

$$\rho(p,q)=\int_0^1 |p(x)-q(x)|\mathrm{d}x \quad (p,q\text{ 是多项式})$$

是不完备的,并指出它的完备化空间.

证明 不妨设 $p(x)=x^p, q(x)=x^q(p<q)$

则

$$\rho(p,q)=\int_0^1 |p(x)-q(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^q-x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{q+1}-\frac{1}{p+1}\to 0$$

直观上，多项式会收敛到任意连续函数，但连续函数不属于多项式空间，故不完备，完备化空间应为连续函数构成的空间

练习 1.12 在完备的度量空间 $(\mathscr{C},\rho)$ 中给定点列 $\{x_n\}$, 如果 $\forall\varepsilon>0$, 存在基本列 $\{y_n\}$, 使得

$$\rho(x_n,y_n)<\varepsilon \quad (n\in\mathbb{N}),$$

求证: $\{x_n\}$ 收敛.

证明

$$\rho\left(x_n,y\right)<\rho\left(x_n,y_n\right)+\rho\left(y_n,y\right)=2\varepsilon$$

1.3 列紧性

练习 1.13 在完备的度量空间中求证：子集 A 列紧的充要条件是对 $\forall\varepsilon>0$, 存在 A 的列紧的 ε 网

证明

左推右显然

右推左

不妨设 N 是 A 的列紧的 ε 网，于是于是其存在有限 ε 网，记其为 M，于是取 $x_n\in A, y_n\in N, z_n\in M$ 我们有

$$\rho(x_n,z_n)<\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,z_n)<2\varepsilon$$

于是得证

练习 1.14 在度量空间中求证：紧集上的连续函数必是有界的，并且达到它的上、下确界。

练习 1.15 在度量空间中求证：完全有界的集合是有界的，并通过考虑 l^2 的子集 $E=\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$e_k=\{\underbrace{0,0,\cdots,0,1}_{k},0,\cdots\},$$

来说明一个集合可以是有界但不完全有界的

练习 1.16 设 $(\mathscr{X},\rho)$ 是度量空间，F_1,F_2 是它的两个紧子集，求证：$\exists x_i\in F_i(i=1,2)$, 使得 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_1,x_2)$, 其中

$$\rho(F_1,F_2)\triangleq\inf\left\{\rho(x,y)|x\in F_1,y\in F_2\right\}.$$

练习 1.17 设M 是C[a,b] 中的有界集, 求证: 集合

$$\left\{F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t|f\in M\right\}$$

是列紧集

练习 1.18 设$E=\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$, 求证:$E$ 在$C[0,\pi]$ 中不是列紧的.

练习 1.19 求证：S 空间 (定义见习题 1.2.1) 的子集 A 列紧的充要条件是：$\forall n\in\mathbb{N},\exists C_n>0$, 使得对 $\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in A$, 有 $|\xi_n|\leqslant C_n(n=1,2,\cdots)$.

练习 1.20 设$(\mathscr{H},\rho)$ 是度量空间, M 是$\mathscr{H}$ 中的列紧集, 映射

$f: \mathscr{X} \to M$ 满足

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) < \rho(x_1, x_2) \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathscr{X}, x_1 \neq x_2).$$

求证: f 在$\mathscr{X}$ 中存在唯一的不动点.

✍ **练习 1.21** 设 (M, ρ) 是一个紧度量空间，又 $E \subset C(M), E$ 中的函数一致有界并满足下列 Hölder 条件：

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant C\rho(t_1, t_2)^{\alpha} \quad (\forall x \in E, \forall t_1, t_2 \in M),$$

其中$0 < \alpha \leqslant 1, C > 0$. 求证: E 在$C(M)$ 中是列紧集.