内积空间

定义

定义：内积空间

设 X 为线性空间，定义二元函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$，如果它对于任意的 $x, y, z \in X, \alpha \in \mathbb{R}$ 满足以下性质，则称该函数为内积，称 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间。

- 关于第一个变量线性：$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
- 关于第二个变量共轭线性：$\langle z, \alpha x + \beta y\rangle = \bar{\alpha}\langle z, x\rangle + \bar{\beta}\langle z, y\rangle$
- 共轭对称：$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
- 非负性：$\langle x, x\rangle \geq 0$
- 非退化性：$\langle x, x\rangle \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$

内积诱导的范数

性质：内积诱导出的范数

设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，定义 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$，则它是一个合法的范数。（之后默认内积空间的范数就为它）

- **证明** 非负性、非退化性、齐次性都比较容易证明，三角不等式证明见下表的两个性质。

性质：Schwarz 不等式 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，则 $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$，其中等号成立当且仅当 x, y 线性相关。

- **证明** 观察到 $\langle x - ay, x - ay\rangle = \|x\|^2 - \bar{a}\langle x, y\rangle - a\langle y, x\rangle + |a|^2\|y\|^2 \geq 0$，取 $a = \frac{\langle y, x\rangle}{\|y\|^2}$，可以直接得到结论。同理，等号成立时还可以利用非退化性得到 $x - ay = 0$。

性质：三角不等式 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，则 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$，其中等号成立当且仅当存在实数 $c \geq 0$ 使得 $x = cy$ 或者 $y = 0$。

- **证明**

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

对等号进行进一步分析容易得到上述结论。

性质：平行四边形等式 设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，则范数 $\|\cdot\|$ 是由某个内积诱导出来的当且仅当对平行四边形成立等式：

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

[注] 已知范数之后，可以反过来定义合法的内积。对于实内积，可以定义为

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

对于复内积，可以定义为

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

称它为极化恒等式。

内积的连续性,完备化

性质：连续性

设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为内积空间，$x_n, x, y_n, y \in X$，若 $x_n \to x, y_n \to y$，则 $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$。

- **证明** $|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0$，其中用到了 Schwarz 不等式。

定义：Hilbert 空间 = 内积空间 + 完备

设 $(X, \|\cdot\|)$ 为内积空间同时也是赋范空间，其范数为从内积诱导出来的，如果它还是 Banach 空间，则称它为 Hilbert 空间。

定义：内积空间下等距同构

设 $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X), (Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ 为内积空间，映射 $T: X \to Y$ 为线性算子，且为一一映射，对于由内积诱导出来的范数，满足 $\langle Tx_1, Tx_2\rangle_Y = \langle x_1, x_2\rangle_X, \forall x_1, x_2 \in X$，则称 T 为从 X 到 Y 的（内积空间意义下的）等距同构，称 X 和 Y（在内积空间意义下）等距同构。

- $\langle Tx_1, Tx_2\rangle_Y = \langle x_1, x_2\rangle_X, \forall x_1, x_2 \in X$ 和 $\|Tx\|_Y = \|x\|_X, \forall x \in X$ 等价。

性质：内积空间存在唯一完备化

设 X 为内积空间，则存在对应的 Hilbert 空间 $\hat{X}$，使得 X 与其在 $\hat{X}$ 的子空间 Y 等距同构，并且 Y 在 $\hat{X}$ 中稠密。这样的 Hilbert 空间是唯一的，即如果存在另外一个这样的 Hilbert 空间 $\hat{X}'$，则 $\hat{X}$ 和 $\hat{X}'$ 等距同构。

[例] 考虑函数空间 $C[0,1]$ 和上面的范数 $\|\cdot\|_\infty$，可以取 $x(t) = 1+t, y(t) = 1-t$，可以验证它不满足平行四边形等式，因此，该范数不是由某个内积诱导出来的。

[例] 考虑数列空间 l^p 和上面的范数 $\|\cdot\|_p$，取 $x = (1,1,0,0,\cdots), y = (1,-1,0,0,\cdots)$，可以验证，当 $p \ne 2$ 时不满足平行四边形。

[例] 考虑数列空间 l^2，定义内积为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$，考虑到 l^2 的性质和 Cauchy-Schwarz 不等式，容易验证它有限并且是合法的内积，由它诱导出来的范数为 $\|\cdot\|_2$。由于空间 l^2 完备，因此它是 Hilbert 空间。

[例] 考虑空间 $\mathbb{K}^n$，定义内积为 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，容易验证它是合法的内积，并且它诱导出来的范数就是 $\|\cdot\|_2$。由于空间 $\mathbb{K}^n$ 完备，因此它也是 Hilbert 空间。

[例] 考虑函数空间 $C[a,b]$，定义内积为 $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$，利用关于函数的 Cauchy-Schwarz 不等式，容易验证它是合法内积，由它诱导出来的范数为 $\|\cdot\|_2$。由于 $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ 不完备，因此它不是 Hilbert 空间。

正交补及正交投影

正交和正交补

[定义：元素正交] 设 X 为内积空间，对于 $x, y \in X$，若 $\langle x, y\rangle = 0$，则称 x 和 y 正交，记做 $x \perp y$。

[定义：元素和集合正交] 设 X 为内积空间，对于 $x \in X, M \subset X$，若 $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M$，则 x 和 M 正交，记做 $x \perp M$。

[定义：正交补] 设 X 为内积空间，对于 $M \subset X$，称 $M^\perp = \{x \in X : x \perp M\}$ 为 M 的正交补。

[定义：集合正交] 设 X 为内积空间，对于 $M, N \subset X$，若 $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M, x \in N$，则 M 和 N 正交，记做 $M \perp N$。

[性质：零元素的正交性] 0 与所有元素都正交；$X^\perp = \{0\}$。

[性质：正交补为闭线性子空间] $M^\perp$ 总为 X 的闭线性子空间。

- **[证明]** 对于 $M^\perp$ 中的任意两个元素 x, y，可以证明它们线性组合也正交于 M，因此 $M^\perp$ 为 X 的线性子空间。同时若 $M^\perp$ 中有一个收敛序列，利用内积的连续性，可以证明它的极限也正交于 M，因此 $M^\perp$ 为闭子集。

[定义：凸集] 设 X 为线性空间，C 为 X 的非空子集，并且对于任意的 $x, y \in C, \lambda \in [0,1]$，有 $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$，则称 C 为 X 的凸子集。

[性质：最佳逼近元唯一存在（完备非空凸集）] 设 X 为内积空间，M 为 X 的非空凸集，由内积诱导出的范数使得 M 完备，则对于 X 中任意一点 x 都存在 M 中的最佳逼近元。

- **[证明]** 根据元素列和集合距离定义，可以找到 M 中的数列 (y_n) 使得 $\|x-y_n\| \to \rho(x, M)$。然后利用柯西性【内积诱导出的范数】（平行四边形等式）和【凸集】的性质，证明数列 (y_n) 为柯西列（即，$\|y_n - y_m\| \to 0$）。然后利用 M 的完备性，说明存在 M 中的点 y 使得 $\|x-y\| = \rho(x, M)$。唯一性：如果存在另一点，则 $\|y - y'\| \to 0$。

[性质：最佳逼近元唯一存在（闭线性子空间）] 设 X 为 Hilbert 空间，M 为 X 的闭线性子空间，则对于 X 中任意一点 x 都存在 M 中的最佳逼近元 y；更进一步，有 $x - y \perp M$。

- **[证明]** 由于 X 完备，M 闭集，因此 M 也完备。显然，M 也是凸集，因此，直接利用前面的性质可以证得 M 中存在最佳逼近元。令 $z = x - y$，对于 M 中的任意一点 γ，观察到

$$\|z - \lambda\gamma\|^2 = \|x - (y + \lambda\gamma)\|^2 = \|z\|^2 - \frac{|\langle z, \gamma\rangle|^2}{\|\gamma\|^2}, \text{ for some } \lambda$$

注意到由于 M 为线性子空间，因此 $y + \lambda\gamma \in M$，因此，上式不可能小于 $\|z\|^2$，从而说明了 z 和 M 中任意一点正交 $\langle z, \gamma\rangle$，即有 $x - y \perp M$。

直和和正交分解定理

[定义：直和] 设 X 为线性空间，M、N 为 X 的线性子空间，对于 X 中的任意元素 x，都存在唯一的 $y \in M, z \in N$，使得 $x = y + z$；则称 X 为 M 和 N 的直和，记做 $X = M \oplus N$。

- **[等价定义]** $X = M \oplus N$ 当且仅当 $X = \operatorname{span}(M \cup N), M \cap N = \{0\}$。
- **[例]** 对于 $X = \mathbb{R}^2$，可以令 $M = \mathbb{R} \times \{0\}, N = \{0\} \times \mathbb{R}$。

[性质：正交分解定理] 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭子空间，则 $H = M \oplus M^\perp$。

- **[证明]** 利用前面的定义，可以看到，对于 H 中的任意元素 x，都在 M 中存在唯一一最佳逼近元 y，同时 $z = x - y \perp M$，即 $z \in M^\perp$。归纳起来就是，对于任意元素 x，都能找到 $y \in M, z \in M^\perp$，使得 $x = y + z$。下面证明唯一性，如果存在另外的 y' 和 z'，有 $x = y + z = y' + z' \Rightarrow y - y' = z - z' \in M \cap N = \{0\}$。

正交投影和正交投影算子

[定义：正交投影] 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭子空间，已知 $H = M \oplus M^\perp$，则对于 H 中的任意元素，都能找到 $y \in M, z \in M^\perp$，使得 $x = y + z$。定义 $P_M : H \to M, P_M x = y$ 为从 H 到 M 的正交投影。

[性质] P_M 为有界线性算子，$\|P_M\| \le 1$。

- **[证明]** 由正交分解定理可以知道，对于 H 中的任意元素 x，都能找到 $y \in M, z \in M^\perp$，使得 $x = y + z$。不难看出，P_M 为线性算子，即说明 $P_M(ax_1 + bx_2) = ay_1 + by_2 = aP_M x_1 + bP_M x_2$。为了证明有界性，观察到 $\|x\|^2 = \langle y+z, y+z \rangle = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geq \|y\|^2 = \|P_M x\|^2$ 即可。

[性质] $P_M^2 = P_M$。

- **[证明]** 观察到对于 $y \in M$，可以做正交分解 $y = y + 0$，即 $P_M(P_M x) = P_M y = y$。

[性质] 值域 $R(P_M) = M$，零空间 $N(P_M) = M^\perp$。

- **[证明]** 由定义可知，$R(P_M) \subset M$，同时对于 M 中任意的 y，都有 $P_M y = y$。类似地，对于 $M^\perp$ 中任意的 z，有 $P_M z = 0$。

[性质] 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的闭子空间，则 $(M^\perp)^\perp = M$。

- **[证明]** 显然就是在 M 中任意取一元素，证明它垂直于 $M^\perp$ 中任意元素（显然）；以及在 $(M^\perp)^\perp$ 中任意取一元素 x，证明它属于 M。对于任意的 $x \in (M^\perp)^\perp$，可以分解 $x = y + z$，其中 $y \in M \subset (M^\perp)^\perp$，则 $z = x - y \in (M^\perp)^\perp$（闭线性子空间）。由于 $z \in (M^\perp)^\perp \cap M^\perp$，可知 $z = 0$。因此，$x = y \in M$。

[性质] 设 X 为内积空间，M 为 X 的非空子集，则 $(\text{span}(M))^\perp = M^\perp, (\overline{M})^\perp = M^\perp$。

引理：内积的连续性

设 X 为内积空间，若 $x_n \to x$，$x, x_n, y \in X$，则有 $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$。

证明

利用 Schwarz 不等式:

$|\langle x_n, y \rangle - \langle x, y \rangle| = |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n - x\| \|y\| \to 0$

1.

由于 $M \subset \overline{M}$，因此 $(\overline{M})^\perp = \{x \in X : x \perp y, \forall x \in \overline{M}\} \subset \{x \in X : x \perp y, \forall x \in M\} = M^\perp$

对于任意的 $x \in M^\perp$，对于任意的 $y \in \overline{M}$，都存在数列 $y_n \in M$，使得 $y_n \to y$。由内积的连续性有:

$\langle x, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle = 0$

因此，$x \in (\overline{M})^\perp$，即 $M^\perp \subset (\overline{M})^\perp$。

综上，$M^\perp = (\overline{M})^\perp$。

2.

由于 $M \subset \text{span}(M)$，因此 $(\text{span}(M))^\perp = \{x \in X : x \perp y, \forall x \in \text{span}(M)\} \subset \{x \in X : x \perp y, \forall x \in M\} = M^\perp$。

对于任意的 $x \in M^\perp$，对任意的 $y \in \text{span}(M)$ 都可以表示为 $y = \sum_{i=1}^n a_i y_i$，其中 $y_i \in M, a_i \in \mathbb{K}$，可以看到:

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, a_i y_i \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} \langle x, y_i \rangle = 0$

即，有 $x \in (\text{span}(M))^\perp$，即 $M^\perp \subset (\text{span}(M))^\perp$。

因此，$M^\perp = (\text{span}(M))^\perp$。

完全集

[定义：完全集] 设 X 为赋范空间，$M \subset X$，并且 $\mathrm{span}(M)$ 在 X 中稠密，则称 M 为 X 的完全集。

[性质] 设 H 为 Hilbert 空间，M 为 H 的非空子集，则 M 在 H 中为完全集当且仅当 $M^\perp = \{0\}$。

- **[证明]** 若 M 为 H 的完全集，则有 $M^\perp = (\mathrm{span}(M))^\perp = (\overline{\mathrm{span}(M)})^\perp$，前一个等号用到前述定理，后一个等号为闭包相等。
- **[证明正向]** 当 $\overline{\mathrm{span}(M)} = H$ 时，$M^\perp = H^\perp = \{0\}$。
- **[证明反向]** 当 $(\mathrm{span}(M))^\perp = \{0\}$ 时，$H = \overline{\mathrm{span}(M)} \oplus \overline{\mathrm{span}(M)}^\perp$，即 $\mathrm{span}(M) = H$。

标准正交集和标准正交基

[定义：正交集、标准正交集、标准正交序列、标准正交组] 设 X 为内积空间，M 为 X 的非空子集：

- 如果 M 中两两元素正交，则称 M 为正交集
- 若 M 为 X 的正交集，且任给 $x \in M$ 有 $\|x\| = 1$，则称 M 为标准正交集
- 若标准正交集 M 为可数集，即 $M = \{e_n : n \geq 1\}$，则称 M 为标准正交序列
- 若标准正交集 M 为有限集，即 $M = \{e_1, \cdots, e_n\}$ 则称 M 为标准正交组

标准正交集

[定理：勾股定理] 设 X 为内积空间，M 为 X 的标准正交集，则对于任意不同的 $e_1, \cdots, e_n \in M$，存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$，使得 $\|\sum_{i=1}^n a_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$。

- **[证明]** 等号左边写成内积形式，利用【标准】和【正交】性质即可得到。

[定理：线性无关] 设 X 为内积空间，M 为 X 的标准正交集，则 M 线性无关。

- **[证明]** 如果存在 $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$，使得 $\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$，那么根据上面式子，可以得到所有的系数都为零，即线性无关。

[例] $\mathbb{K}^n$ 上的 $\{e_i : i \in [n]\}$，它表示只有第 i 位为 1，其他都为 0，它是一个标准正交基。

[例] l^2 上的 $\{e_i : i \geq 1\}$，它表示数列只有第 i 位为 1，其他都为 0，它是一个标准正交序列。

[例] 在 $C[0, 2\pi]$ 上定义内积 $\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)\overline{y(t)}dt$，$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, n \geq 0$ 构成标准正交序列。

[例] 在 $C[0, 2\pi]$（实函数）上定义内积 $\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$，$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), n \geq 0$ 构成标准正交序列。

[性质：Bessel 不等式] 设 X 为内积空间，$M = \{e_n : n \geq 1\}$ 为标准正交集，对于任意 $x \in X$，令 $y = \sum_{i=1}^N \langle x, e_i\rangle e_i$，$z = x - y$，有 $y \perp z$，$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle x, e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$。

- **[证明]** 利用内积空间性质容易证明。

[定理：Hilbert 空间中的标准正交序列] 设 $M = \{e_n : n \geq 1\}$ 为 Hilbert 空间 H 中的标准正交序列，$a_i \in \mathbb{K}$，则：

1. 级数 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ 在 H 收敛，当且仅当，$\sum_{i=1}^\infty |a_i|^2 < \infty$；
2. 若该级数在 H 中收敛于 $x = \sum_{i=1}^\infty a_i e_i$，则 $a_i = \langle x, e_i\rangle$；
3. 任取 $x \in H$，级数 $\sum_{i=1}^\infty \langle x, e_i\rangle e_i$ 在 H 收敛。

- **[证明 1]** 令 $s_n = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$，观察到 $S_n - S_m = s_n - s_m$，因此 S 为柯西列当且仅当 s 为柯西列。由于完备性，s 收敛，则 s 为柯西列，则 S 为柯西列，则 S 收敛。

- **[证明 2]** 由级数收敛的定义 $S_n \to x$，直接取内积就可以得到。
- **[证明 3]** 由 Bessel 不等式再加上第一个结论可以证明。

[性质：标准正交序列和重排完美性] 设 $a_i \in \mathbb{K}$ 为非零序列，设 $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为一一映射，则级数 $S_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ 和级数 $S'_n = \sum_{i=1}^n a_{\tau(i)} e_{\tau(i)}$ 的收敛性和收敛的极限一样。

- **[证明]** 观察到 $\sum_{i=1}^n a_{\tau(i)} = \sum_{i=1}^n a_i$，$\sum_{i=1}^n a_{\tau(i)} e_{\tau(i)} = \sum_{i=1}^n a_i e_i$。

[性质：每个元素关于标准正交集元素相关] 设 M 为内积空间 X 的标准正交集，对于 X 中的任意元素 x，$M_x = \{e \in M : \langle x, e \rangle \neq 0\}$ 为至多可数集。

- **[注]** X 中的标准正交集可能为不可数集合，但是对于任意一个元素来说，只有至多可数个正交集元素和它相关。
- **[证明]** 构造 $M_{x,m} = \{e \in M : |\langle x, e \rangle| > \frac{1}{m}\}$，有 $|M_{x,m}|/m \leq \sum_{e \in M_{x,m}} |\langle x, e \rangle|^2 \leq \|x\|^2$，可以看出 $M_{x,m}$ 元素个数有限，而 $M_x = \cup_{m=1}^{\infty} M_{x,m}$，因此，$M_x = \{e \in M : \langle x, e \rangle \neq 0\}$ 为至多可数集。

标准正交基

[定义：标准正交基] 设 H 为内积空间，M 为 H 的标准正交集，并且 $\overline{\mathrm{span}(M)} = H$，则称 M 为 H 的（完全）标准正交基。

[定理] 以下命题等价：

1. M 为标准正交基；
2. 任意 $x \in H$ 有 $x = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle e$；
3. 对于任意 $x, y \in H$，有 $\langle x, y \rangle = \sum_{e \in M} \langle x, e \rangle \langle e, y \rangle$；
4. 任意 $x \in H$，有 Parseval 等式 $\|x\|^2 = \sum_{e \in M} |\langle x, e \rangle|^2$。

- **[证明 1 to 2]** 1 中能利用的信息是 $z = x - y = 0 \Leftrightarrow x \in (\overline{\mathrm{span}(M)})^{\perp} = H^{\perp} \Leftrightarrow x \in M^{\perp} \Leftrightarrow z \perp M_x \text{ and } x \perp M/M_x$
- **[证明 2 to 3]** 对 x 和 y 都应用 2 中的结论，然后自然写出来就能得到 3 中结论。
- **[证明 3 to 4]** 只需令 $x = y$ 即可。
- **[证明 4 to 1]** 对于任意 $x \in (\overline{\mathrm{span}(M)})^{\perp} \subset H$，对其应用 3 中条件，可以得到 $\|x\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$，因此 $(\overline{\mathrm{span}(M)})^{\perp} = \{0\}$，由正交分解定理 $\overline{\mathrm{span}(M)} = H$。

[定理：Gram-Schmidt 标准正交化方法] 从内积空间 X 中一组线性无关的元素 $\{x_i\}$ 出发，每次令 $v_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle x_n, e_i \rangle e_i$，$e_n = v_n / \|v_n\|$，可以得到一组标准正交序列使得 $\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\} = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$。

- **[证明正交]** 写出来做内积，可以发现每一个 v 都和之前的 e 都正交。
- **[证明合理性]** 由于 x 线性无关，因此所有的 v 都不为零，因此不会出现被零除。
- **[证明 span 相同]** 对于任意的 n，n 之前的 e 为 n 之前的 x 的线性组合，因此，span 相同。

[定理] 设 H 为 Hilbert 空间，$H \neq \{0\}$，N 为 H 的标准正交集，则存在 H 的标准正交基 M，使得 $N \subset M$。

- **[推论]** 任意 Hilbert 空间 H 必有标准正交基。
- **[证明]** $N = \{x\}$，where $\|x\| = 1, x \in H$。
- **[证明]** 会用到 Zorn 引理，设一个 H 中包含 N 的标准正交集的集合，证明其极大元和标准正交基的的对应关系。

- **[H 可分时证明标准正交基存在性]** 这时有 Hamel 基或者 Schauder 基，再应用 Gram-Schmidt 可以知道肯定存在相应的标准正交基。

[注：可分 Hilbert 空间只有两类：$\mathbb{K}^n$ 和 l^2] 若 Hilbert 空间 H 为有限维，H 和 $\mathbb{K}^n$ 在内积空间意义下等距同构；若 Hilbert 空间 H 为无限维，H 和 l^2 在内积空间意义下等距同构。

Hilbert 空间上有界线性泛函的表示

有界线性泛函的表示

[定义：用内积定义的泛函] 设 X 为内积空间，对于 $y_0 \in X$，定义线性泛函 $f \in X^*$：
$f_{y_0}(x) = \langle x, y_0 \rangle, \forall x \in X$

- **[性质]** 上述泛函 $f \in X'$，并且 $\|f\| = \|y_0\|$。
- **[证明]** $|f_{y_0}(x)| \le \|y_0\|\|x\| \Rightarrow \|f_{y_0}\| \le \|y\|$，$f_{y_0}(y_0) = \|y_0\|^2 \Rightarrow \|f_{y_0}\| \ge \|y\|$。

[定理：有界线性泛函 Riesz] 若 H 为 Hilbert 空间，则任取 $f \in H'$，存在唯一的 $y_0 \in H$，使得
$f(x) = f_{y_0}(x)$。

- **[证明存在性]** 如果 $f = 0$，容易证明。考虑 $f \neq 0$，这时 $N(f) \subseteq H$，因此有 $N(f)^\perp \neq \{0\}$。考虑一个 $z_0 \in N(f)^\perp$，有
  $v = f(x)z_0 - f(z_0)x, \forall x \Rightarrow f(v) = 0 \Rightarrow \langle v, z_0 \rangle = 0 \Rightarrow f(x) = \langle x, \frac{f(z_0)z_0}{\|z_0\|^2} \rangle$
- **[证明唯一性]**
  $\langle x, y_1 - y_2 \rangle = 0, \forall x \Rightarrow \|y_1 - y_2\| = 0 \ (\text{let } x = y_1 - y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$
- **[注]** 完备性是必要的，不然不能应用正交分解定理得到 $N(f)^\perp \neq \{0\}$。

有界共轭双线性泛函

[定义：共轭双线性泛函] 设 X, Y 为线性空间，$f : X \times Y \to \mathbb{K}$ 为映射，如果满足以下要求，则称 f 为共轭双线性泛函。

- $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y), f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$
- $f(\alpha x, \beta y) = \alpha\overline{\beta} f(x, y)$

[例] 若 $X = Y$ 为内积空间，则 $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ 为共轭双线性泛函。

[定义：有界共轭双线性泛函] $f : X \times Y \to \mathbb{K}$ 为共轭双线性泛函，且存在常数 $C \ge 0$，使得
$|f(x, y)| \le C\|x\|\|y\|, \forall x \in X, y \in Y$。

[定义：有界共轭双线性泛函的范数] 定义范数为 $\|f\| = \sup_{x\neq 0, y \neq 0} \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$。

[例] 设 M, N 为内积空间，并且 $T \in B(M, N)$，令 $f(x, y) = \langle Tx, y \rangle_N$ 为有界共轭双线性泛函，并且
$\|f\| = \|T\|$。

- **[证明]** $\|f\| = \|T\| \Rightarrow |h(x, y)| \le \|Tx\|\|y\| \le \|T\|\|x\|\|y\|$。前一个不等号由 Schwarz 不等式得到，后一个不等式由有界线性算子的定义得到。
- **[证明]** $\|f\| = \|T\| \Rightarrow \|Tx\| = \sup_y \frac{|f(x,y)|}{\|y\|} \le \sup_y \|f\|\|x\| = \|f\|\|x\|, \forall x \in X$。

[定理：有界共轭双线性泛函 Riesz] 设 M, N 为 Hilbert 空间，$f : M \times N \to \mathbb{K}$ 为有界共轭双线性泛函，则存在唯一的 $T \in B(M, N)$，使得 $f(x, y) = \langle Tx, y \rangle_N$，并且 $\|f\| = \|T\|$。

- **[证明存在性]** 令 $T : M \to N$，令 $g(y) = f(x, y)$，利用前一个 Riesz 可以知道它存在于 N。T 的线性性由线性性和 Riesz 性质得到；通过 f 的有界性证明了 T 的有界性。
- **[证明唯一性]** 假设有 T_1, T_2，都满足 $x \in M, y \in N$ 的任意性证明了 $T_1 = T_2$。

- **[证明]** $\|f\| = \|T\|$ 见前面的例子。

伴随算子

[定义：伴随算子] 对于 $T \in B(M, N)$ 和 $T^* \in B(N, M)$，如果 $\langle Tx, y\rangle_N = \langle x, T^*y\rangle_M, \forall x \in M, y \in N$，则称 T^* 为 T 的伴随算子。

[性质: 伴随算子唯一存在] 对于任意 $T \in B(M, N)$，其伴随算子唯一存在。

- **[证明]** 可以定义 $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle_N$，令 $h : N \times M \to \mathbb{K}, h(y, x) = f(x, y)$，应用上述定理，可以知道，存在唯一的 $T^* \in B(N, M)$，使得 $\langle Tx, y\rangle_N = \langle x, T^*y\rangle_M, \forall x \in M, y \in N$。

[例] 矩阵 $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 可以看做从 $\mathbb{K}^n$ 到 $\mathbb{K}^m$ 的有界线性算子，其伴随算子为其共轭转置矩阵 $T^* = T^\top$。

[例] $T_a : l^2 \to l^2, T_a x = \{a_i x_i\}$，for some $a \in l^\infty$ 为有界线性算子，其伴随算子为 $T_a^* = T_a$。

[性质: 伴随算子] 设 M, N 为 Hilbert 空间，S, T 为从 M 到 N 的有界线性算子，则:

- $\|T\| = \|T^*\|$
- $(S + T)^* = S^* + T^*$
- $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
- $(T^*)^* = T$
- $\|T^*T\| = \|T\|^2$
- $T = 0 \Leftrightarrow T^* = 0$
- 若 L 也是 Hilbert 空间，R 为从 N 到 L 的有界线性算子，则 $(RS)^* = S^*R^*$
- **[证明]** 1: 根据伴随算子的定义和 Riesz 表示定理的定义，有 $\|T\| = \|f\| = \|T^*\|$；2-4: 根据定义和线性性；5: $\|T^*T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T^*Tx, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, Tx\rangle| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2$；6: 利用 5 的结论可以直接得到。