
AND THIS IS HOW IT IS
we go home
and we shut our doors
we don't sleep with them open
I don't buy much anymore
I used to walk in circles
Around department stores
And the curved edges of
Barstools
Searching
But it's all seemed to dissolve
Into a more filling hunger

数分

作者：Huang

定理 0.1 (*Bolzano – Weierstrass* 致密性定理)

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 E 是列紧集的充要条件是 E 为有界闭集

证明

$\Rightarrow$

先证明有界 ($ps.$ 其实列紧性和紧致性是等价的)、

正面做不好做，我们反证法

假设其发散

$$\forall M > 0, \exists x \in E, 使得 \|x\| > M$$

接下来的手法需要积累

取 $M = 1$，$\exists x_1 \in E$, 使得 $\|x\| > M$

取 $M = \max\{2, \|x_1\| + 1\}$，$\exists x_2 \in E$, 使得 $\|x_2\| > M$

$\cdots$

取 $M = \max\{k, \|x_{k-1}\| + 1\}$，$\exists x_k \in E$, 使得 $\|x_k\| > M$

这样取，构成了一个集合 $\{x_n\}$

由于 $\{x_n\} \subset E$ 是列紧集, 故可选取子列使其收敛，不妨选取 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \subset E$，其中 $\{x_{n_k}\}$ 收敛

但事实上，$\exists N, n_{k_1} > n_{k_2} > N$

$$\left\|x_{n_{k_1}} - x_{n_{k_2}}\right\| > n_{k_1} - n_{k_2}$$

此时发散，与子列收敛矛盾

再证明其为闭集

只需证明 E 中所有收敛数列的极限都收敛到 E 中即可

取 $\{x_n\} \subset E$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

对于 $\{x_n\}$，我们有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, n > N_1 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

下证 $x \in E$

由于 E 是列紧集，则

$$\exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}, 使得 \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in E$$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2, n > N_2 \Rightarrow \left\|x_{n_k} - x_0\right\| < \varepsilon$$

由于 x_{n_k} 为 x_n 子列，且 x_n 收敛，则有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_3, n > N_3 \Rightarrow \left\|x_{n_k} - x_n\right\| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$

$$\forall \varepsilon > 0, n > N, 有 \|x - x_0\| = \left\|x - x_n + x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - x_0\right\| < 3\varepsilon$$

则 $x \in E$

$\Leftarrow$

由于 E 为有界闭集，则

$$\forall x \in E, \exists \{x_{n_k}\} \subset \{x_n\} \subset E, 使得 \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x \in E$$

由此，E 是列紧集

定理 0.2 (*Heine – Borel* 有限覆盖定理)

$\mathbb{R}^n$ 中的集合 E 是紧致集的充要条件是 E 为有界闭集

证明

$\Rightarrow$

先证明有界

由题，我们可以构造以下开覆盖

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} B(0,i)$$

显然有

$$E \subset \mathbb{R}^n \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(0,i)$$

由有限覆盖定理，$\exists m > 0$ 使得

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(0,i)$$

显然有

$$B(0,i) \subset B(0,i+1)$$

于是

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(0,i) = B(0,m)$$

由于 $B(0,m)$ 有界，于是 E 有界

再证明其为闭集合 (这题的手法也很不错，大家积累积累)

要证为闭集合，只需证明其补集 E^c 为开集即可，即

$$\forall y \in E^c, \exists r_1 > 0, \text{使得} B(y,r_1) \subset E^c$$

由 $Hausdorff$ 定理

$$\forall x \in E, \exists \delta_x, \eta_x > 0, \text{使得} B(x,\delta_x) \cap B(y,\eta_x) = \oslash$$

显然有

$$\bigcup_{x\in E} B(x,\delta_x) \supset \bigcup_{x\in E} x = E$$

由紧致性，我们有

$$\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\delta_i) \supset \bigcup_{x\in E} x = E$$

于是乎，取 $r = \min\{\eta_{x_1}, \eta_{x_2}, \cdots, \eta_{x_m}\}$，我们有

$$B(y,r) \cap \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\delta_i) = \oslash \supset B(y,r) \cap \bigcup_{x\in E} x = E$$

因此，我们有

$$B(y,r) \cap E = \oslash$$

故

$$B(y,r) \subset E^c$$

$\Leftarrow$(可以参考习题 1.9，这里给出课上的做法)

我们反证，由于其为有界闭集，则存在一个矩形将该区间包住，

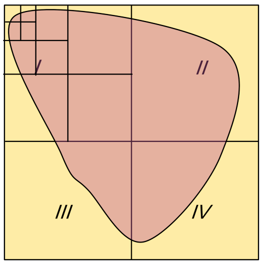

图 1

如图 (1.1)，我们将其该矩形四等分，则存在一些区域无法被有限个开覆盖覆盖，不失一般性，不妨假设是在 区在一区中，我们将其四等分，同样能找到不能被有限个开覆盖覆盖的区域，类似的，我们多次将其四等分，构成了一系列的非空的区间套，这些区间不能被有限个开覆盖覆盖，由区间套定理，我们可以找到一个唯一的 $x \in E$, 并且其不能被有限个开区间覆盖，但显然 $B(x,\delta)$ 可覆盖住 x，矛盾。于是原命题得证

定理 0.3

道路连通集一定是连通集

证明

不妨设 E 道路连通，下证其为连通集

令

$$E = A \cup B; A, B \neq \varnothing; A \cap B = \varnothing$$

只需证明

$$A \cap B' \neq \varnothing \text{或} B \cap A' \neq \varnothing$$

即可

取 $p \in A, q \in B$, 由于 E 道路连通，则存在一个向量函数 $\Phi(t), t \in [0,1]$，使得

$$\Phi(0) = p, \Phi(1) = q$$

令 $\begin{cases} S = \{t \in [0,1] | \Phi(t) \in A\} \\ T = \{t \in [0,1] | \Phi(t) \in B\} \end{cases}$

显然有

$$S \cup T = [0,1], S \neq \varnothing, T \neq \varnothing, S \cap T = \varnothing$$

（这里我们采用了一种部分代替整体的手法，可以积累一下）

由于 [0,1] 为连通的，则有

$$S \cap T' \neq \varnothing \text{或} T \cap S' \neq \varnothing$$

不妨设 $S \cap T' \neq \varnothing$，取 $x \in S \cap T'$, 则有 $\{x_n\} \subset T$, 使得 $\lim_{n\to\infty} x_n = x \, (x_n \neq x)$

于是有

$$\Phi(x) \in A, \Phi(x_n) \in B$$

由于 $\Phi(t)$ 连续，则

$$|\Phi(x_n) - \Phi(x)| < \varepsilon$$

于是 $\Phi(x) \in B'$，结论得证

定理 0.4

设 $D \subset \mathbb{R}^n, f: D \to \mathbb{R}$, 且 f 在 D 上连续，如果 D 是紧集，则 f 的值域 $f(D)$ 也是紧集

证明 要证明这个定理，我们需要用到两个个引理 (一个？)

引理 0.1

函数f：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 连续的充要条件是对于$\mathbb{R}$中的任意开集$U$，$f^{-1}(U)$为$\mathbb{R}^n$中的开集。

引理 0.2

设 X 为拓扑空间，Y 为 X 的紧致子集的充要条件是对每个由 X 中的开集构成的 Y 的覆盖均有有限子覆盖 (我证明好像没用上这个，就不证明了 OVO)

现我们开始证明

我们任取$f(D)$的开覆盖$\{U_\alpha\}(\alpha \in I)$，由引理 2.1，我们有$f^{-1}(U_\alpha)(\alpha \in I)$均为开集

因为

$$\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \supset f(D)$$

我们将左右两边同时作用 f^{-1} 算子，有

$$f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) \supset f^{-1}(f(D)) = D$$

猜想：若

$$\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha) \supset f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha) \supset f^{-1}(f(D)) = D$$

成立

由于 D 为紧集，则 $\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha)$ 存在有限子覆盖，不妨记为

$$\bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(U_i)$$

此时若

$$\bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

构成 $f(D)$ 的有限覆盖，则命题得证

不妨设其不能称为 $f(D)$ 的有限子覆盖，则

$$\exists x \in f(D), x \notin \bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(U_i)) = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$$

同时作用 f^{-1} 算子，我们有

$$\exists f^{-1}(x) \in f^{-1}(f(D)) = D, f^{-1}(x) \notin f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} f(f^{-1}(U_i))) = f^{-1}(\bigcup_{i=1}^{m} U_i)$$

但

$$\forall y \in f(D), \exists i, \text{使得} f^{-1}(y) \in f^{-1}(U_i)$$

故矛盾，命题得证

下证猜想

$$\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha) \supset f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha)$$

$$\forall x \in f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha), \text{存在}\alpha, \text{我们有} f(x) \in U_\alpha, \text{故} x \in f^{-1}(U_\alpha) \subset \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(U_\alpha)$$

得证

下证引理 (2.1)

证明

$\Rightarrow$

若 $f^{-1}(U)=\varnothing$，显然为开集

若 $f^{-1}(U)\neq\varnothing$, 我们取 $\forall x\in f^{-1}(U)$, 则有 $f(x)\in U$

由于 U 为开集，则有

$$\exists\varepsilon, B(f(x),\varepsilon)\subset U$$

又因为 f 连续，则有

$$f\left(B\left(x,\delta\right)\right)\subset B\left(f\left(x\right),\varepsilon\right)\subset U$$

同时作用 f^{-1}，则有

$$B\left(x,\delta\right)\subset f^{-1}\left(B\left(f\left(x\right),\varepsilon\right)\right)\subset f^{-1}\left(U\right)$$

$\Leftarrow$

任意 $x\in f^{-1}(U)$ 取 $B(f(x),\varepsilon)\subset U$, 则有

$$f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))\text{为开集}$$

又有 $x\in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$, 则有

$$\exists\delta>0, B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$$

于是有

$$f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$$

得证

定理 0.5

设$D\subset\mathbb{R}^n$ 是连通集，$f:D\to\mathbb{R}$, 且 f 在 D 上连续，则 $f(D)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连通集

证明

直接硬来，取 $f(D)=A\cup B, A\cap B=\varnothing$

$$\text{记}G=D\cap f^{-1}\left(A\right), F=D\cap f^{-1}\left(B\right)$$

我们有

$$D=G\cup F$$

由$A\subset\bar{A}$, 我们有$G=D\cap f^{-1}\left(A\right)\subset f^{-1}(\bar{A})$, 由于$f$连续,$\bar{A}$为闭集, 我们有$f^{-1}\left(\bar{A}\right)$为闭集 对前一式子取闭包，我们有

$$\bar{G}\subset\overline{f^{-1}(\bar{A})}=f^{-1}\left(\bar{A}\right)$$

因此，我们有

$$f\left(\bar{G}\right)\subset f\left(f^{-1}\left(\bar{A}\right)\right)=\bar{A}$$

现在我们只需要证明 $A'\cap B\neq\varnothing$ 即可，不妨证明逆否命题，加上 $A\cap B=\varnothing$ 的条件，我们有

$$\bar{A}\cap B=\varnothing, \text{即}f\left(\bar{G}\right)\cap B=\varnothing$$

显然有

$$B\supset f\left(F\right)$$

于是，我们有

$$\forall y\in B\subset f\left(D\right), f^{-1}\left(y\right)\in F=D\cap f^{-1}\left(B\right)\Rightarrow y\in f\left(F\right)$$

因此，我们有

$$B = f(F)$$

此时

$$f\left(\bar{G}\right) \cap B = f\left(\bar{G}\right) \cap f(F) = \oslash \Rightarrow \bar{G} \cap F = \oslash$$

逆否命题得证