第一章

命题 1.10

通过复数的指数形式的乘除法我们不难发现有以下命题：

(1) $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2$；

(2) 若 $z_2\neq 0$，则 $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2$。

但是要注意以下命题：(3) $\operatorname{Arg}z^n\neq n\operatorname{Arg}z$，若 $n>1\in\mathbb{Z}$。

证明 (1) 和 (2) 直接按照定义来，这里需要再三强调两个辐角相加其实是集合相加，下面来看 (3)：

设 $\arg z=\theta$，则 $\operatorname{Arg}z=\{\theta+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$，我们有：

$$\arg z^n\equiv n\theta\pmod{2\pi}\implies\operatorname{Arg}z^n=\{n\theta+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}.$$

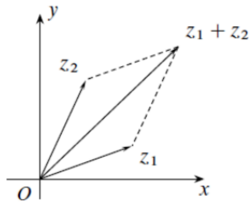
但另一边：

$$n\operatorname{Arg}z=n\cdot\{\theta+2m\pi\mid m\in\mathbb{Z}\}=\{n\theta+m\cdot 2n\pi\mid m\in\mathbb{Z}\}.$$

所以很明显有 $n\operatorname{Arg}z\subsetneq\operatorname{Arg}z^n$。 □

我们知道任意一个复数 $z=x+yi$ 可以对应于复平面上的一个点（也叫做 z）$z=(x,y)$，那么 z 本身也可以代表向量 $\overrightarrow{Oz}$，因此可以将复数和平面向量一一对应。

比如以 z_1 为起点，以 z_2 为终点的向量 $\overrightarrow{z_1z_2}$ 的坐标恰好就是 z_2-z_1，因此做复数减法就是做向量减法。当然同样的我们也可以定义两个向量的和，在几何上它和 z_1+z_2 算出来的复数所确定的向量是一致的。



命题 1.11 (利用复数刻画向量间的关系)

设平面向量 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 分别对应于复数 z_1 和 z_2，则我们有以下结论：

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\operatorname{Re}z_1\overline{z_2}$；注意左边的 $\cdot$ 是向量内积。

(2) $\vec{u}\perp\vec{v}\iff\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})=0$；

(3) $\vec{u}\parallel\vec{v}\iff\operatorname{Im}(z_1\overline{z_2})=0\iff\exists t\in\mathbb{R}$，使得 $z_1=tz_2$。

证明 设 $z_k=x_k+iy_k$，直接计算：

$$z_1\overline{z_2}=(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)=(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2).$$

容易看出 $x_1x_2+y_1y_2$ 就是 $\vec{u}\cdot\vec{v}$，而 $\vec{u}\parallel\vec{v}$ 也当且仅当 $x_2y_1-x_1y_2=0$。 □

注 通过上述命题我们发现，复平面上的圆周和直线的方程是可以统一成以下形式：

$$Kz\bar{z}+\bar{a}z+a\bar{z}+c=0.\tag{1.34}$$

其中 $K,c\in\mathbb{R}$，$a\in\mathbb{C}$ 且 $|a|^2>Kc$。我们知道上式表示一条直线当且仅当 $K=0$，否则把 K 除掉即得到圆周，这说明直线和圆周具有某种共性。在下一章中我们会知道直线事实上是过无穷远点的圆周，在后续的学习中我们也经常把直线视为特殊的圆周。

命题 1.14

设 $z=(x,y,0)$，则其对应的球面的像点为

$$P=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\frac{2y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right).\tag{1.37}$$

或者写回 $z=x+iy$，则对应的公式为

$$P=\left(\frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2+1},\frac{2\operatorname{Im}z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right).\tag{1.38}$$

第三章

定义 3.2 (可导和可微)

设 $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，$z_0 \in E^{\circ}$，我们称 f 在 z_0 处可导，若极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ 存在 } (\in \mathbb{C}) \tag{3.1}$$

我们称 f 在 z_0 处可微，若存在 $A \in \mathbb{C}$ 满足：

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\Delta f - A\Delta z}{\Delta z} = 0. \tag{3.2}$$

其中 $\Delta f = f(z) - f(z_0)$，$\Delta z = z - z_0$。条件 (3.2) 也经常会改写成

$$\Delta f = A\Delta z + o(\Delta z). \tag{3.3}$$

♣

定义 3.3 (解析函数)

我们称 $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 z_0 处解析，如果存在 z_0 的邻域 U 使得 f 在 U 上每一点都可导。

我们称 f 在 E 上解析，如果 f 对于 E 中每一点皆解析。

♣

定理 3.1 (Cauchy-Riemann)

$f(z)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处（复）可微的充要条件是：

(1) $\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y)$ 和 $\mathrm{Im}\, f(z) = v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处（实）可微；

(2) $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处满足 Cauchy-Riemann 方程，即

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \tag{3.11}$$

♡

推论 3.1 (导数公式)

若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在某点处解析，则我们有：

$$f'(z) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y. \tag{3.18}$$

♡

定义 3.5 (形式偏导)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{3.20}$$

被称为复函数 $f(z)$ 的形式偏导。

♣

命题 3.11 (保圆、保对称性)

分式线性变换满足以下性质：

(1) 任意分式线性变换一定是四种基础变换的复合。

(2) 分式线性变换将复平面上的圆周（包含直线）映成圆周（包含直线）。

(3) 分式线性变换将关于某圆周对称的一对点映成关于像圆周对称的一对点。

我们把性质 (2) 称为保圆性，把性质 (3) 称为保对称性。

3. （分式线性嘉年华，2分）$\boxed{f(z_1)>1}$. 那么 $(z_1,z_2,z_3,z_4)=(f(z_1),1,0$

证明：(1) 若分式线性变换将 ∞ 映成 ∞，则其为 $\mathbb{C}$ 上的线性变换。 $= f(z_1)>1$,

(2) 若分式线性变换拥有三个以上不同的不动点（可以有∞），则一定是 id。

(3) 若分式线性变换将实轴映成实轴，则对应的 a, b, c, d 可以全部即约为实数。

(4) 若分式线性变换将单位圆盘映成单位圆盘，将原点映成原点，则一定是旋转。

(5) 若$\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$在圆周上按顺时针或者逆时针排序，则一定有 $(z_1, z_2, z_3, z_4) > 1$。

第四章

定理 4.2 (四个等价)

设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中的单连通区域，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)\in C^1(D)$，则以下四条等价：

(1) $\forall\,(x,y)\in D$，$Q_x=P_y$。

(2) 对于 D 中任意分段可微闭曲线 γ，有

$$\int_\gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0. \tag{4.10}$$

我们把这条性质称为闭路积分为零。

(3) 对于 D 中任意两条分段可微曲线 γ_1 和 γ_2，如果它们的起点和终点对应一致，则

$$\int_{\gamma_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{\gamma_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y. \tag{4.11}$$

我们把这条性质称为积分与路径选取无关。

(4) 存在 $f(x,y)\in C^2(D)$（即二阶可微），满足

$$\mathrm{d}f=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y. \tag{4.12}$$

我们把这样的 f 称为 P,Q 的原函数，把这条性质称为原函数存在。

定理 4.5 (Cauchy-Goursat)

设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通区域，$f(z)$ 在 D 上解析，γ 为 D 中任意可求长闭曲线，则

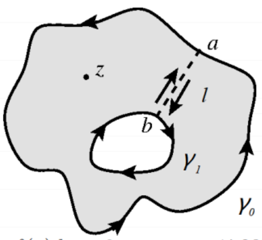
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0.$$

推论 4.2 (Cauchy-Goursat 多连通区域版)

设 $\gamma=\gamma_0+\gamma_1^-+\cdots+\gamma_n^-$ 为可求长 Jordan 曲线族，围出区域为 D，若 f 在 D 上解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0 \iff \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z. \tag{4.28}$$

证明 我们只对 $n=1$，也就是 $\gamma=\gamma_0+\gamma_1^-$ 的情况进行证明，一般的情况可以归纳。



这里的技巧我们称之为搭桥法。我们在内圈和外圈上各任取一点 a,b，连接一条路径 l（假设从 a 到 b），我们容易看出 $D\setminus l$ 事实上变成了一个单连通区域，而且 $D\setminus l$ 对应的边界恰好是（从 a 出发来看）

$$\partial(D\setminus l)=l+\gamma_0+l^-+\gamma_1^- \tag{4.29}$$

而 $f(z)$ 当然也在 $D\setminus l$ 上解析，因此根据 Cauchy-Goursat 定理我们知道有

$$\int_{\partial(D\setminus l)} f(z)\mathrm{d}z=0 \implies \int_l f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z+\int_{l^-} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_1^-} f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{4.30}$$

故而命题得证。 □

注 Cauchy-Goursat 的多连通区域版的结论用几何语言概括的话就是：如果函数在“外圈”和“内圈”中间的部分解析，那么函数在“外圈”的积分就等于在所有“内圈”的积分之和。这就是说在条件允许下，我们可以把积分区域向内缩，因为这个版本的 Cauchy-Goursat 经常被称为闭路连续形变原理。~~常见于各类工科教材~~

定理 4.6 (Cauchy 积分公式)

设 C 为复平面上任意可求长 Jordan 曲线，D 为其内部区域，设 $f(z)$ 在 D 上解析，在 $\overline{D}$ 上连续，则事实上 $f(z)$ 在 D 有任意阶的连续导数，并且 $\forall\,z_0\in D,\forall\,n\in\mathbb{N}$，有以下公式

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z \tag{4.34}$$

特别地，取 $n=0$，我们得到

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z. \tag{4.35}$$

推论 4.3 (解析即光滑)

设 D 为复平面区域，则 f 在 D 上解析的充要条件是 $f \in C^{\infty}(D)$。

证明 $\forall\, z_0 \in D$，可做 $B_r(z_0)$ 使得 $\overline{B}_r(z_0) \subset D$ 中，利用 Cauchy 积分公式可知 f 在 $B_r(z_0)$ 中有任意阶导数，因此 f 在 z_0 处任意阶可导，根据 z_0 的任意性可知 $f \in C^{\infty}(D)$。 □

注 事实上 Cauchy 高阶积分公式有一种便捷的记忆方法，假设 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 处有 Taylor 展开（当然目前还不清楚展开的存在性，事实上在第五章我们会证明这条对于解析函数是正确的）

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

那么带入公式 (4.34) 我们知道右边等于

$$I = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k}{(z - z_0)^{n+1-k}}\mathrm{d}z.$$

再假设积分与求和可换 ~~这位更是歌姬~~，我们发现只有一项的积分非零，即 $n = k$ 时，因此我们有：

定理 4.7 (Liouville)

若 $f(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析且有界，则 $f(z)$ 必为常值函数。

本节的一个主要的目的是学习并证明最大模原理，它是解析函数值分布理论中的重要结论。

定理 4.12 (最大模原理)

若 $f(z)$ 在区域 D 上解析且非常值函数，则 $|f(z)|$ 无法在 D 中取到最大值，换而言之，不存在这样的 $z_0 \in D$，使得 $f(z_0) = \sup\limits_{z\in D}|f(z)|$。

为了证明最大模原理，我们需要应用以下的结论，通常它被称之为平均值公式。

引理 4.2 (平均值公式)

若 $f(z)$ 在 $B_R(z_0)$ 上解析，则有：

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta. \quad \forall\, 0 < r < R \tag{4.58}$$

定理 4.14 (Schwarz 引理)

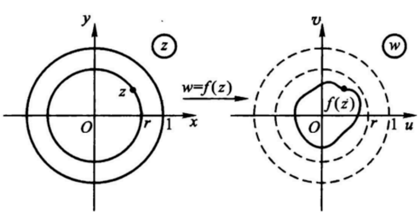
设 $D = B_1(0)$，即单位圆盘，设 $f(z)$ 在 D 上解析，且满足：

(1) $f(0) = 0$；　(2) $|f(z)| \le 1, \forall\, z \in D$。

那么有：(1) $|f(z)| \le |z|, \forall\, z \in D$；　(2) $|f'(0)| \le 1$。

同时，这两个不等式中的任意等号成立当且仅当 $\exists\, \theta \in \mathbb{R}$，满足 $f(z) = e^{i\theta}z$。

注 Schwarz 引理有一个非常棒的几何解释：对于任何一个把单位圆盘映到单位圆盘的解析函数，如果其把原点映成原点，则其他的点对应的像点到圆心的距离一定严格小于等于原像到圆心的距离。而一旦有一个像点将这个不等式取到等号，唯一的可能性是：这个映射是一个旋转。（参考右图）



第五章

定理 5.3 (Taylor)

设 $f(z)$ 在区域 D 上解析，则 $\forall\, a \in D$ 以及任意 $R > 0$ 满足 $B_R(a) \subset D$，$f(z)$ 均可以在 $B_R(a)$ 中展开成以下的级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall\, z \in B_R(a). \tag{5.20}$$

而对应的系数满足 $c_n = \dfrac{f^n(a)}{n!}$。这样的级数是唯一的，我们将其称为 $f(z)$ 在 a 处的Taylor 级数。

定理 5.4 (解析函数的等价描述，最终版)

设 D 为复平面区域，则以下五条等价：

(1) $f(z)$ 在 D 上解析；

(2) $f(z)$ 的实部虚部在 D 上可微且满足 Cauchy-Riemann 方程；　（w.r.t. Cauchy-Riemann 定理）

(3) 对于 D 的任意可求长简单闭曲线 γ，有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$；　（w.r.t. Cauchy-Goursat / Morera 定理）

(4) $f(z) \in C^\infty(D)$；　（w.r.t. Cauchy 积分公式）

(5) $f(z)$ 可以在 D 中每一点的邻域上展开成 Taylor 级数。　（w.r.t. Taylor 定理）

定理 5.6 (Laurent)

设 $f(z)$ 在圆环 $H: r < |z-a| < R$ 上解析，则 $\forall\, a \in H$，$f(z)$ 均可以在 H 中展开成双边幂级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \forall\, z \in H. \tag{5.34}$$

其对应的系数 c_n 总是唯一的，且满足以下公式：

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}z, \quad \forall\, r < \rho < R, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}. \tag{5.35}$$

第六章

定义 6.1 (零点和阶)

我们称 a 为 f 的一个零点，如果 f 在 a 的某个去心邻域 $B_\rho^*(a)$ 上解析，且在 $B_\rho^*(a)$ 上 f 对应的 Laurent 展开 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ 其系数满足 $c_n = 0, \forall\, n \le 0$。(即没有负幂次和常数项)

若 a 为 f 的零点，我们称其为一个m 阶的零点（$m \ge 1$），如果还有 $c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$，但 $c_m \neq 0$。

特别地，如果 f 也在 a 点解析，则 a 是 f 的零点等价于 $f(a) = 0$，同时 a 是 m 阶零点等价于

$$f(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

注　注意：我们在定义的时候并没有说这样的 m 是存在的，但事实上对于非零函数的 f，零点的阶总是确定的。

命题 6.1 (零点总是有阶)

设 f 在 D 上解析且不为零函数，$\forall\, a \in D$，若 a 是 f 的一个零点，则 a 有唯一确定的有限的阶。

推论 6.1 (零点孤立原理)

设 f 在 D 上解析且不为零函数：

(1) 若 $a \in D$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，则存在 D 上的解析函数 φ 满足 $\varphi(a) \neq 0$ 使得 $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$。

(2) $f(z)$ 在 D 上的零点（在 f 的零点集中）总是孤立的。

那么根据零点的孤立性我们就不难得到以下定理，这个定理一般被称为唯一性定理。

定理 6.1 (唯一性定理)

设 f 和 g 在区域 D 中解析，若存在 $E \subset D$ 满足：(1) $E' \cap D \neq \emptyset$，(2) $f(z) \equiv g(z), \forall\, z \in E$，则一定有

$$f(z) \equiv g(z), \quad \forall\, z \in D. \tag{6.5}$$

命题 6.4 (三类孤立奇点的极限刻画)

设 $a\in\mathbb{C}$ 为 f 的孤立奇点。

(1) a 是 f 的可去奇点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to a} f(z)\in\mathbb{C}$;

(2) a 是 f 的极点的充要条件是 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$;

(3) a 是 f 的本性奇点的充要条件是无法在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上定义 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$。

定义 6.5 (∞ 的奇性)

设 ∞ 为 f 的孤立奇点，则 f 可以在 ∞ 处展开为 Laurent 级数，形如 $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$，我们称其中的常数项以及正幂次 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 为其主要部分；称其中的负幂次 $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n$ 为其解析部分，那么：

(1) 我们称 ∞ 为 f 的一个可去奇点，如果对应的 Laurent 展开中的主要部分为 0;

(2) 我们称 ∞ 为 f 的一个 m 阶极点，如果对应的 Laurent 展开中的主要部分有限且最高的正幂次为 m;

(3) 我们称 ∞ 为 f 的一个本性奇点，如果对应的 Laurent 展开中的主要部分有无穷项。

通过定义我们可以看出命题 6.4 对于 ∞ 也成立，同时我们还有如下的命题：

命题 6.5 (∞ 的奇性的等价刻画)

(1) ∞ 是 f 的可去奇点的充要条件是 0 是 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的可去奇点或者解析点。

(2) ∞ 是 f 的 m 阶极点（本性奇点）的充要条件是 0 是 $f\left(\frac{1}{z}\right)$ 的 m 阶极点（本性奇点）。

定义 6.6 (全纯、亚纯、整函数)

设 $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ 上区域，我们称 f 为 D 上的全纯函数，若 f 在 D 上只有解析点和可去奇点。

我们称 f 为 D 上的亚纯函数，若 f 在 D 上只有解析点、可去奇点和极点。

最后，我们称 f 为整函数，如果 f 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。

注 注意到我们已经定义过了 ∞ 的奇性，因此我们可以把 ∞ 加入考虑，这就是为什么可以允许 $D\subset\overline{\mathbb{C}}$;

其次，我们知道 a 为 f 的极点充要于 $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$，因此如果可以将 f 视为一个 $D\to\overline{\mathbb{C}}$ 的函数，此时 a 就转为 f 的一个可去奇点（因为极限有定义!），故而 $D\to\mathbb{C}$ 上亚纯函数相当于 $D\to\overline{\mathbb{C}}$ 的全纯函数。

命题 6.6 (整函数的分类)

设 f 为整函数，若

(1) ∞ 是 f 的可去奇点 $\iff$ f 是常数;

(2) ∞ 是 f 的极点 $\iff$ f 是多项式;

若 ∞ 是 f 的本性奇点，我们称这样的 f 为超越整函数。

证明 既然 f 在全平面全纯，因此我们可以将 f 在 $0<|z|<+\infty$ 中展开为 Laurent 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$，根据 Laurent 展开唯一性不难看出这恰好也是 f 在 ∞ 处的 Laurent 展开，直接根据 ∞ 的奇性定义即可得到对应的结论。 □

第七章

定理 7.1 (留数定理)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线，$f(z)$ 在 γ 上连续，在 γ 内部只有有限个孤立奇点，不妨设为 $z_1,\cdots,z_n$，那么：

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]. \tag{7.10}$$

命题 7.9 (对数留数公式)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线，f 在 γ 上解析且不为 0，在 γ 内亚纯，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N(f,\gamma) - P(f,\gamma). \tag{7.45}$$

其中 $N(f,\gamma)$ 为 f 在 γ 内全体零点阶数之和，$P(f,\gamma)$ 为 f 在 γ 的全体极点阶数之和。

定理 7.4 (Rouché 定理)

设 γ 为可求长 Jordan 曲线，若 $f(z)$ 和 $\varphi(z)$ 满足：

(1) 两者在 γ 内解析，在 γ 上连续；(2) $|f(z)| > |\varphi(z)|, \quad \forall\, z \in \gamma$。

则有 $N(f+\varphi,\gamma) = N(f,\gamma)$。