竞赛积累

作者：Huang

目录

第 1 章 数学分析

1.1 阶的估计

1.2 函数的一致连续性

在函数的一致连续性部分，我们要注意的是一些技巧和结论的证明，重在探索的思维而不是对于结论的背诵，当然，也有一些比较有意思的习题我会放在这里，如反向洛必达等

首先我们来一题反向洛必达的题

例题 1.1 设$m>0, yg'(y)$ 是 $[a,+\infty)$ 上连续递增函数，且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(y)}{y^m}=A$, 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g'(y)}{y^{m-1}}=mA$$

证明 观察到

$$\int g'(y)\,dy=\int\frac{yg'(y)}{y}dy=xg'(x)\int\frac{1}{y}dy$$

只需考虑消去对数即可，于是对 $c>1$, 考虑到

$$g(cx)-g(x)=\int_x^{cx}g'(y)\,dy=\int_x^{cx}\frac{yg'(y)}{y}dy\geq xg'(x)\int_x^{cx}\frac{1}{y}dy=xg'(x)\ln c$$

又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{g(cx)}{x^m}=c^mA,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x^m}=A$$

我们有

$$xg'(x)\ln c\leq g(cx)-g(x)\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\sup\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\leq\lim_{x\to+\infty}\sup\frac{1}{\ln c}\left(\frac{g(cx)}{x^m}-\frac{g(x)}{x^m}\right)=\frac{A}{\ln c}(c^m-1)$$

令 $c\to1^+$, 此时有

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\leq mA$$

同理，$0<c<1$ 时，我们有

$$\int_{cx}^{x}g\prime(y)\,dy=g(x)-g(cx)\leq xg\prime(x)\ln\frac{1}{c}$$

显然有

$$\lim_{x\to+\infty}\inf\frac{g(x)}{x^{m-1}}\geq\frac{1-c^m}{\ln\frac{1}{c}}A$$

令 $c\to1^-$, 此时有

$$\lim_{x\to+\infty}\inf\frac{g'(x)}{x^{m-1}}\geq mA$$

综上，结论得证

接下来我们来两题反向 *stolz* 其中分别为离散的情况和连续的情况，我们先来一题连续的情况

例题 1.2 $f(x)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty), f''(x)>-\frac{C}{x^2}$, 求证

$$\lim_{x\to0}xf'(x)=0$$

证明 像这类题，不妨考虑一下构造对偶式的手法

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\theta_1)h^2, f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(\theta_2)h^2$$

由此我们可得

$$|xf'(x)|=|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}x-\frac{f''(\theta_1)}{2}hx|\leq|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}x|+\frac{C}{2\theta_1^2}hx\leq|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}x|+\frac{C}{2x}h$$

$$|xf'(x)|=|\frac{f(x)-f(x-h)}{h}x+\frac{f''(\theta_1)}{2}hx|\geq-|\frac{f(x)-f(x-h)}{h}x|-\frac{C}{2x}h$$

我们希望对结果进行夹逼来得到我们需要的答案，但很显然，这样的式子没法夹出我们想要的答案看，于是我们要对其经行修正

令 $h=\eta x$，则我们有

$$\lim_{x\to0^+}\sup|xf'(x)|\leq\lim_{x\to0^+}|\frac{f(x+\eta x)-f(x)}{\eta}|+\frac{\eta C}{2}=\frac{\eta C}{2}$$

$$\lim_{x\to0^+}\inf|xf'(x)|\geq\lim_{x\to0^+}-|\frac{f(x)-f(x-h)}{\eta}|-\frac{\eta C}{2}=-\frac{\eta C}{2}$$

由于 η 的任意性，结论得证

接下来我们来到离散版本的反向 *stolz*

例题 1.3 如果对于某个$C>0$，有$n(a_n-a_{n-1})\geq-C,n\geq2$且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=a$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

证明 不妨设 $a=0$, 否则用 a_k-a 代替 a，记 $b_n=a_n-a_{n-1}(n\geq2),b_1=1,S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$

待定 m，我们想办法用 S_{m+n},S_n 表示出 a_n

注意到

$$\begin{aligned}S_{n+m}-S_n&=a_{n+m}+a_{n+m-1}+\cdots+a_n\\&=b_{n+m}+a_{n+m-1}+b_{n+m-1}+a_{n+m-1}+\cdots+a_n\\&=b_{n+m}+2b_{n+m-1}+\cdots+mb_{n+1}+ma_n\end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{S_{n+m}-S_n}{m}-\frac{b_{n+m}+2b_{n+m-1}+mb_{n+1}}{m}\\&\leq\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}+\frac{1}{m}\left[\frac{C}{n+m}+\frac{2C}{n+m-1}+\cdots+\frac{mC}{n}\right]\\&\leq\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}+\frac{1}{m}\left[\frac{C}{n}+\frac{2C}{n}+\cdots+\frac{mC}{n}\right]\\&=\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}+\frac{C(m+1)}{2n}\end{aligned}$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{n}=a$$

我们有

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,n>N,\text{有}|S_n|\leq n\varepsilon$$

于是，我们就有

$$\begin{aligned}a_n&\leq\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}+\frac{C(m+1)}{2n}\\&\leq\frac{(2n+m)\varepsilon}{m}+\frac{C(m+1)}{2n}\end{aligned}$$

取 $m=n\varepsilon$，我们就有

$$\lim_{n\to\infty}\sup a_n\leq3\varepsilon+\frac{C}{2}\varepsilon$$

对于另一边不等式，同理

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{S_{n+m}-S_n}{m}-\frac{b_{n+m}+2b_{n+m-1}+mb_{n+1}}{m}\\
&\geq \frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}-\frac{1}{m}\left[\frac{C}{n+m}+\frac{2C}{n+m-1}+\cdots+\frac{mC}{n}\right]\\
&\geq -\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}-\frac{1}{m}\left[\frac{C}{n+m}+\frac{2C}{n+m}+\cdots+\frac{mC}{n+m}\right]\\
&\geq -\frac{|S_{n+m}|+|S_n|}{m}-\frac{C\left(m+1\right)}{2\left(n+m\right)}
\end{aligned}$$

取 $m=n\varepsilon$，我们就有

$$\lim_{n\to\infty}\inf a_n\leq -3\varepsilon-\frac{C}{2}\varepsilon$$

由 ε 的任意性，结论得证

例题 1.4 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续，则存在 $M>0$, 使得 $\frac{f(x)}{x}\leq M(x\geq 1)$

证明 不妨取 $\varepsilon=1$, 于是存在 $\delta>0$, 使得只要 $x,y\in[1,+\infty)$ 且 $|x-y|\leq\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leq 1$$

现在我们要将一致连续性缩小到区间长度为 δ 的区间内，对 $x\in[1,+\infty)$, $\exists n\in\mathbb{N}$, 使得对 $x\in[1+(n-1)\delta,1+n\delta)$ 我们有

$$\begin{aligned}
|f\left(x\right)| &\leq |f\left(x\right)-f\left(1+n\delta\right)|+|f\left(1+n\delta\right)-f\left(1\right)|+|f\left(1\right)|\\
&\leq 1+|f\left(1\right)|+|f\left(1+n\delta\right)-f\left(1\right)|\\
&= 1+|f\left(1\right)|+|\sum_{k=1}^{n}f\left(1+k\delta\right)-f\left(1+\left(k-1\right)\delta\right)|\\
&\leq 1+|f\left(1\right)|+n
\end{aligned}$$

又因为

$$1+(n-1)\delta\leq x$$

我们有

$$n-1\leq\frac{x-1}{\delta}$$

于是

$$|f(x)|\leq|\frac{x-1}{\delta}+2+|f(1)|$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup|\frac{f\left(x\right)}{x}|\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x-1}{\delta}+2+|f(1)|}{x}=\frac{1}{\delta}$$

则存在 $M>0$, 使得 $\frac{f(x)}{x}\leq M(x\geq 1)$

注 **一致连续函数几乎可被线性函数控制**

例题 1.5 $f(x)\in C[a,b]$，则对任何 $\varepsilon>0$ 存在 $C>0$, 使得

$$|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|+\varepsilon,\forall x,y\in[a,b]$$

证明

$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $x,y\in[a,b]$ 且 $|x-y|\leq\delta$, 就有

$$|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$$

法一 (最值定理):

记 $\sup\limits_{x\in[a,b]}f\left(x\right)=M$，此时我们有

$$|f\left(x\right)-f\left(y\right)|\leq 2M=\frac{2M\delta}{\delta}\leq\frac{2M|x-y|}{\delta}$$

取 $C = \frac{2M}{\delta}$ 即可得证

法二 (介值定理):

当 $|f(x) - f(y)| > C|x - y|$ 不妨设 $(y > x), f(y) > f(x)$

令 $f(y) - f(x) = kt, k \in \mathbb{N}, t \in (\varepsilon, 2\varepsilon]$，此时

$$(\varepsilon, +\infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (k\varepsilon, 2\varepsilon]$$

显然，不同的 $(k\varepsilon, 2\varepsilon]$ 是相交的

由介值定理，我们存在 $x = x_0 < x_1 \leq \cdots \leq x_n = y$, 使得

$$f\left(x_j\right) = f(x) + jt, j = 0, 1, 2, \cdots, k$$

因此，我们有

$$f(x_j) - f(x_{j-1}) = t > \varepsilon, j = 0, 1, 2, \cdots, k$$

于是 $x_j - x_{j-1} > \delta, j = 0, 1, 2, \cdots, k$

故 $y - x \leq k\delta$

则

$$|f(x) - f(y)| = kt = \frac{kt\delta}{\delta} \leq \frac{t}{\delta}|y - x| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}|y - x|$$

此时取 $C = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ 即可

注 法二中我们用到了一种分割区间的想法，把整体的性质体现在局部上

例题 1.6 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 一致连续，且 $\forall x > 0, \lim_{n\to\infty} f(x + n) = 0$ 证明

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $x, y \in [0, +\infty]$ 且 $|x - y| \leq \delta$, 就有

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

取 $m > \frac{1}{\delta}$，考虑

$$[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}), i = 1, 2, \cdots, m$$

由题，我们有

$$\exists K \in \mathbb{N}, n \geq K, \text{我们有} |f(\frac{i}{m} + n)| \leq \varepsilon$$

现在对 $x \geq K + 1$, 存在自然数 $N \geq K$, 使得

$$x - N \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$$

此时我们有

$$|f(x) - f(\frac{i}{m} + N)| \leq \varepsilon$$

于是

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(\frac{i}{m} + N)| + |f(\frac{i}{m} + N)| \leq 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，结论得证

例题 1.7 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续, 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $[1, +\infty)$ 一致连续

证明

$\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得只要 $x, y \in [0, +\infty]$ 且 $|x - y| \leq \delta$, 就有

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right| = \left|\frac{xf(y)-yf(x)}{xy}\right| &\le \left|\frac{xf(y)-yf(y)+yf(y)-yf(x)}{xy}\right| \\
&\le \frac{y|f(x)-f(y)|}{xy}+\frac{|y-x|}{xy}|f(y)| \\
&\le |f(x)-f(y)|+\frac{|y-x|}{y}|f(y)|
\end{aligned}
$$

由之前的结论，我们有

$$\exists M>0, \frac{|f(y)|}{y}\le M$$

于是我们有

$$\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|\le |f(x)-f(y)|+M|x-y|$$

取 $\delta=\min\left\{\delta,\frac{\varepsilon}{M}\right\}$, 当 $|x-y|\le\delta$, 我们有

$$\left|\frac{f(y)}{y}-\frac{f(x)}{x}\right|\le 2\varepsilon$$

原命题得证

1.3 函数性态分析

单调性，凹凸性，奇偶性等，这些都是函数的性态，这些在高中耳熟能详的性质在大学又有什么幺蛾子呢？

定理 1.1 (*Arzela – Ascoli* 定理)

设 X 是一个拓扑空间，Λ 是指标集，$\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset C(X,\mathbb{R}^n)$

如果 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 满足条件

(1)X 是可分的，即有可数稠密子集

(2)$\forall x\in X, \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}|f_\lambda(x)|<\infty$

(3)$\forall x\in X, \varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使得$\exists x$的领域$V$，都有

$$|f_\lambda(y)-f_\lambda(x)|\le\varepsilon, \forall y\in V, \lambda\in\Lambda$$

那么存在 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和 $f\in C(X,\mathbb{R}^n)$, 使得 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 在X的任何紧子集成立

证明

不妨设 Λ 是一个可数指标集，即 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}=\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

为了构造一个可能满足条件的 f，我们用逐点有界，此时有界数列必有收敛子列收敛子列，但是有无穷多个点，证明的话会有技术困难，于是我们加入了条件 (1)

不妨设 X 的一个可数稠密子集是 $M=\{a_1,a_2,\cdots,\cdots\}$

则对于每个 $j\in\mathbb{N}$, 都有 $\left\{f_m(a_j)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，接下来我们要用到一个重要的对角线法

$$
\begin{aligned}
f_{m_1}(a_1), f_{m_2}(a_1), \cdots, f_{m_n}(a_1) &\to f(a_1) \\
f_{m_{12}}(a_2), f_{m_{22}}(a_2), \cdots, f_{m_{n2}}(a_2) &\to f(a_2) \\
f_{m_{13}}(a_3), f_{m_{23}}(a_3), \cdots, f_{m_{n3}}(a_3) &\to f(a_3) \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

注意到下一排总是上一排的子列，现在考虑其对角线 $\{f_{m_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$

不妨把 $\{f_{m_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ 记成 $\{f_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$, 于是我们有

$$\lim_{i\to\infty}f_{m_i}\left(a_j\right)=f\left(a_j\right)$$

现我们已经利用逐点有界的条件在稠子集中做好了 f，现在我们要将其延拓到其它点上，显然只有第三个条件是探索邻域信息的

$\forall x\in X,\varepsilon>0$ 存在开集 $U_x\subset X$, 使得对每一个 f_m 都有

$$|f_m(y)-f_m(x)|\le\varepsilon,\forall y\in U_x$$

现在我们取 $a\in M\cap U_x,N\in\mathbb{N}$ 使得

$$|f_{m_i}(a)-f_{m_j}(a)|<\varepsilon$$

因此对 $z\in U_x,i,i\ge N$, 我们有

$$|f_{m_i}(z)-f_{m_j}(z)|\le|f_{m_i}(z)-f_{m_i}(x)|+|f_{m_i}(x)-f_{m_i}(a)|+|f_{m_i}(a)-f_{m_j}(a)|+|f_{m_j}(z)-f_{m_j}(x)|+|f_{m_j}(x)-f_{m_j}(a)|\le5\varepsilon$$

于是，$\forall x\in X,\varepsilon>0$ 存在开集 $U_x\subset X,N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|f_{m_i}(z)-f_{m_j}(z)|\le5\varepsilon,\forall z\in U_x,i,j\ge N$$

此时我们证明了收敛性，接下来证明连续性 $\forall x\in X,\varepsilon>0$ 存在开集 $U_x\subset X,N\in\mathbb{N}$, 使得

$$|f_{m_i}(y)-f_{m_i}(z)|\le\varepsilon,\forall y\in U_x,i\ge N$$

令 $i\to\infty$, 我们有

$$|f(y)-f(z)|\le\varepsilon,\forall y\in U_x,i\ge N$$

故 f 在 x 连续

接下来一个定理，十分地好用

定理 1.2 (*baire* 纲定理)

设 $V\subset\mathbb{R}^n$ 中的一个开集，那么 V 中一列无内点之闭集也无内点 (V 中一列稠密开集之交也为开集)

接下来我们要对这个定理进行应用

例题 1.8 设开集 $U\subset\mathbb{R}^n,\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 连续函数，对任何 $x\in U\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 有界

证明：必然有一个开集 $V\subset U$, 使得 $f_n(x)$ 在 V 上一致有界

证明

这类题的思想就是条件翻译成集合语言然后直接得到答案 (并翻译成存在，交翻译成任意)

由题

$$U=\bigcup_{m=1}^\infty\{x\in U:\||f_n(x)|\le m,\forall n\in\mathbb{N}\}$$

由 f_n 连续,$\{x\in U:|f_n(x)|\le m,\forall n\in\mathbb{N}\}$ 为闭集，U 本身为自己的开集

于是

$$\exists m_0,\text{使得}V\subset\{x\in U:|f_n(x)|\le m,\forall n\in\mathbb{N}\}$$

因此

$$|f_n(x)|\le m_0,\forall n\in\mathbb{N},x\in V$$

例题 1.9 $f(x)\in D^1(a,b)$, 证明存在一个区间 $(c,d)\subset(a,b),f'(x)$ 在 (c,d) 中有界

证明

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)|}{\frac{1}{n}}$$

又因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)|}{\frac{1}{n}}$ 逐点有界，由上题结论

存在开区间 $(c,f)\subset(a,b),M>0$ 使得 $\frac{|f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)|}{\frac{1}{n}}\le M,\forall x\in(c,d)$

取极限即可得到结论

例题 1.10 设 $f\in C[0,+\infty)$, 如果对任何 $a\in(0,+\infty)$, 都有 $\lim_{n\to\infty} f(na)$ 存在且相等，证明

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\text{存在}$$

证明 本来题目是逐点的条件，却要带来整体的效果，我们可以用 *baire* 纲定理在局部上带来整体的效果，然后想办法从局部扩张到整体

不失一般性，设 $\lim_{n\to\infty} f(na)=0$，我们来翻译一下

$$(0,+\infty)=\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\in(0,+\infty):|f(nx)|\le\varepsilon\}$$

注意到 $\bigcap_{n=N}^{\infty}\{x\in(0,+\infty):|f(nx)|\le\varepsilon\}$ 是 $(0,+\infty)$ 的闭集，因此

$$\exists N_0\ge 1,\text{和}\,[a,b]\,,\text{使得}\,[a,b]\subset\bigcap_{n=N_0}^{\infty}\{x\in(0,+\infty):|f(nx)|\le\varepsilon\}$$

即

$$|f(nx)|\le\varepsilon,\forall x\in[a,b]\,,n\ge N_0$$

这就是 *baire* 纲定理的本质，在局部上带来一个一致的东西

现在我们要将这个结论扩展到整体，我们期望把充分大的 x 用 $x=nt,t\in[a,b]$ 表示出来，并且期望 $(n+1)a\le nb$，即 $n\ge\frac{a}{b-a}$，因此我们取 $N'=\max\left\{\left[\frac{a}{b-a}\right]+1,N_0\right\}$

显然我们有

$$\bigcup_{n=N'}[na,nb]\supset[N'a,+\infty)$$

于是

$$\forall x\ge N'a,\exists t\in[a,b]\,,\text{使得}x=nt,\text{从而}|f(x)|=|f(nt)|\le\varepsilon$$

这就是我们想得到结论的定义

例题 1.11 设自然数$k_0<k_1<\cdots<k_n,A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathbb{R}$, 判断

$$f(x)=\sin(k_0x)+\sum_{j=1}^{n}A_j\sin\left(k_jx\right)$$

在 $[0,2\pi)$ 至少有多少个零点

证明

主要部分由第一项决定，因为积分越多，后面就越小

$A_1=A_2=\cdots=A_n=0$ 时，显然在 $[0,2\pi)$ 有 $2k_0$ 个零点

下证对任意的 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathbb{R}$，$f$ 在 $[0,2\pi)$ 有 $2k_0$ 个零点

$$f_1(x)=-\frac{1}{k_0^2}\sin(k_0x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{k_j^2}\sin\left(k_jx\right)$$

$$f_2(x)=\frac{1}{k_0^4}\sin(k_0x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{k_j^4}\sin\left(k_jx\right)$$

$$\cdots$$

$$f_s(x)=\frac{(-1)^s}{k_0^{2s}}\sin(k_0x)+\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^sA_j}{k_j^{2s}}\sin\left(k_jx\right)}_{\text{高阶无穷小}}$$

只要我们证明了，对足够大的 s,f_s 在 $[0,2\pi)$ 至少有 $2k_0$ 个零点，由罗尔定理就可得到 f 在 $[0,2\pi)$ 有 $2k_0$ 个

零点，因此我们来证明

$$g(x)=\sin(k_0x)+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^s k_0^{2s}A_j}{k_j^{2s}}\sin\left(k_jx\right)\text{在 }[0,2\pi)\text{至少有}2k_0\text{个零点}$$

对于 $x\in[0,2\pi)$,$k_0x\in[0,2\pi k_0)$,$0\le\frac{\pi}{6}+n\pi\le 2k_0\pi\to n\ge1,n\le 2k_0-1$

对于每个 n，考虑到

$$g\left(\frac{nx+\frac{\pi}{6}}{k_0}\right)=\sin\left(nx+\frac{\pi}{6}\right)+*$$
$$g\left(\frac{nx-\frac{\pi}{6}}{k_0}\right)=\sin\left(nx-\frac{\pi}{6}\right)+*$$

不妨设 $\sin\left(nx+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，则 $\sin\left(nx-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

不妨取足够大的 s，使得 $\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^s k_0^{2s}A_j}{k_j^{2s}}\right|<\frac{1}{2}$

于是

$$g\left(\frac{nx+\frac{\pi}{6}}{k_0}\right)=\sin\left(nx+\frac{\pi}{6}\right)+*>\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$
$$g\left(\frac{nx-\frac{\pi}{6}}{k_0}\right)=\sin\left(nx-\frac{\pi}{6}\right)+*<-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

故 f_s 在 $(0,2\pi)$ 至少有 $2k_0-1$ 个零点, 又 $f_s(0)=0$,f_s 在 $[0,2\pi)$ 至少有 $2k_0$ 个零点, 得证

当然，一些必要的数论知识对于数分来说是有必要

定理 1.3 (狄拉克雷定理)

设$\theta\in\mathbb{R}$, $\forall Q\in(1,+\infty)$, 那么存在$p,q\in\mathbb{Z}$, 且满足

$$1\le q<Q,\left|\theta-\frac{p}{q}\right|\le\frac{1}{Qq}$$

证明 记 $\{x\}$ 为取小数部分

如果我们对 $Q\in\mathbb{N}$ 证明了该结果，只需证明对 $Q\notin\mathbb{N}$ 也成立即可。

在所有的凸性问题里面，几何意义都是可以直接使用的，甚至连画图都是严谨的。下面列出来的结果可以直接使用，只要不考证明我们就不用证明

定理 1.4

开区间上的凸函数在每一点左右导数都存在，从而连续

证明 我们有这样一个事实

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{在}x>x_0\text{和}x<x_0\text{都是递减的}$$

注意到

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0},\forall x>x_0>y$$

所以

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{存在}$$

故连续

(x, y)

1.4 函数的逼近

对于函数的逼近，我们主要是以下五点

1、黎曼可积函数可以用连续函数逼近（积分误差任意小）

2、闭区间上的连续函数可以用多项式逼近（并且是一致的）、连续的周期函数可以用三角多项式逼近（并且是一致的）

3、单调函数可以用单调的阶梯函数逼近（积分误差任意小）

4、凸函数可以用折线段逼近（并且是一致的，斜率具有单调性）

5、可测函数可以用可测简单函数（相当于阶梯函数）逼近（并且是一致的）

定理 1.5 ($Stone-weierstrass$ 定理)

设 K 为紧 $Hausdorff$ 空间，$C(K)$ 表示实值连续函数全体，赋予上确界范数设 $M \subset C(K)$ 为子代数，满足

(1)M 是闭子代数（一致收敛封闭性）

(2) 对于 $x_1 \neq x_2 \in K$, 存在 $g \in M, g(x_1) \neq g(x_2)$(可分点性)

(3)$\forall x \in K, \exists g \in M$, 使得 $g \neq 0$

则 $M = C(K)$

注

(1) 若 $1 \in M$, 则上述的 (3) 自动成立

(2) 所谓 M 为子代数，即 M 是线性空间，且对乘法封闭

(3) 所谓一致封闭性，即 $f_n(f_n \in M)$ 一致收敛到 f，则 $f \in M$

(4) 实际应用中只需验证 (2)(3) 即可推出 M 在 $C(K)$ 中稠密（$C(K)$ 中函数可以被 M 中函数一致逼近）

证明

第一步：我们要先证明对于每个 $n \in \mathbb{N}, |x|$ 可用多项式在 $[-n, n]$ 一致逼近 (参考 $rudin$，用卷积构造)

第二步：我们定义 $f \vee g = \max\{f, g\}, f \wedge g = \min\{f, g\}$

接着我们有：

若 $f, g \in M$, 则 $|f|, f \vee g, f \wedge g \in M$

证明如下：

由于 $f, g \in M$，则 $\exists C \in \mathbb{N}$, 使得 $|f(x)| < C, \forall x \in K$

于是在 $[-C, C]$ 上，取多项式 $p_n(x)$, 使得

$$||x| - p_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \forall x \in [-C, C]$$

现在 $||f(x)| - p_n(f(x))| \leq \frac{1}{n}, \forall x \in K$

因为 M 是代数，所以 $p_n(f(x)) \in M$, 而 M 闭，所以

$$|f| \in M, f \vee g = \frac{f + g + |f - g|}{2} \in M, f \wedge g = \frac{f + g - |f - g|}{2} \in M$$

第三步：

$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \in K$, 则存在 $f \in M$, 使得 $f(x_1) = c_1, f(x_2) = c_2$

证明：

$\exists g, h, k \in M$，使得 $g(x_1) \neq g(x_2), h(x_1) \neq 0, k(x_2) \neq 0$

类似于拉格朗日插值，可直接写出

$$f(x) = c_1 \frac{g(x) - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \frac{h(x)}{h(x_1)} + c_2 \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} \frac{k(x)}{k(x_2)} \text{即为所求}$$

第四步 (综合一下)：

对任何 $h \in C(K)\varepsilon > 0$, 存在 $f \in M, |f(x) - h(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in K$

证明：

$\forall t, s \in K$ 取 $f_{ts} \in M$, 使得 $f_{ts}(t) = h(t), f_{ts}(s) = h(s)$

因为 $f_{ts}(s) = h(s) \in C(K)$, 于是存在一个领域 $U(s)$ 使得

$$f_{ts}(x) \geq h(x) - \varepsilon, \forall x \in U(s)$$

当 s 遍历 K 时，由于 K 是紧集，因此我们有有限覆盖

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} U(s_i)$$

取 $f_t(x) = f_{ts_1} \vee f_{ts_2} \vee f_{ts_3} \cdots \vee f_{ts_m}$，则有

$$f_t(x) \geq h(x) - \varepsilon, \forall x \in K$$

现在对于每个 t, 存在一个领域 $U(t)$ 使得

$$f_t(x) \leq h(x) - \varepsilon, \forall x \in U(s)$$

当 t 遍历 K 时，由于 K 是紧集，因此我们有有限覆盖

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} U(t_i)$$

取 $f(x) = f_{t_1} \wedge f_{t_2} \wedge f_{t_3} \cdots \wedge f_{t_n}$，则有

$$f(x) \leq h(x) - \varepsilon, \forall x \in K$$

反着来，我们有

$$f(x) \geq h(x) - \varepsilon, \forall x \in K$$

则得证

由此我们可以得出，**只要一个集合 A 在另一个集合 B 中稠密，则 B 可被 A 中的元素给逼近**

我们还有下述的逼近定理

定理 1.6 (维斯特拉斯第一定理)

$\mathbb{R}[x]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密

如：

$$M = span\left\{e^{\lambda x} : \lambda \in \mathbb{N}\right\} \text{在} C[a,b] \text{中稠密}$$

定理 1.7 (维斯特拉斯第二定理)

周期为 $T > 0$ 的连续函数可以被三角多项式逼近

由这些定理，我们可以得到有限阶导数的一致逼近推广

例题 1.12 $f \in C^k[a,b], a < b, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, 则对任何$\varepsilon > 0$，存在多项式 $p(x)$, 使得

$$|f^j(x) - p(x)| \leq \varepsilon, \forall j = 0, 1, \cdots, k, x \in [a,b]$$

证明 由泰勒展开的积分形式 (需要积累)，我们有

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1} f^{(k)}(t)\,dt$$

由逼近定理，对于任何的 $\varepsilon > 0$, 存在多项式 $q(t)$, 使得

$$|q(t) - f^{(k)}(t)| \leq \varepsilon. \forall t \in [a,b]$$

构造如下函数

$$p(x)=\sum_{j=0}^{k-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}q(t)\,dt$$

显然，我们有 $p^k(x)=q(x)$, 对于 $s=0,1,\cdots,k-1$, 我们有

$$p^{(s)}(x)=\sum_{j=0}^{k-s-1}\frac{f^{(j+s)}(a)}{j!}(x-a)^j+\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}q(t)\,dt$$

于是，我们有

$$|f^{(s)}(x)-p^{(s)}(x)|=\frac{1}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}|f^{(k)}(t)-q(t)|dt\le\frac{\varepsilon}{(k-s-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-s-1}dt=\frac{\varepsilon(x-a)^{k-s}}{(k-s-1)!}\le\frac{\varepsilon(b-a)^{k-s}}{(k-s-1)!}$$

注 我们逼近只能做到同时逼近有限阶导数，不能逼近无穷阶导数

现在我们来一题用指数逼近的题目, 这里要用到上面的结论

例题 1.13 设 $f(x)\in C^1[a,b],a<b,a,b\in\mathbb{R}$, 记 $V=span\left\{e^{\lambda x}:\lambda\in\mathbb{R}\right\}$, 那么对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $p(x)\in V$, 使得

$$\sup_{x\in[a,b]}\left[|f'(x)-p'(x)|+|f(x)-p(x)|\right]\le\varepsilon$$

证明 不妨记 $M=span\left\{e^{\lambda x}:\lambda\in\mathbb{N}\right\}$

显然有 M 在 $C[a,b]$ 中稠密，现在对 $\forall\varepsilon>0$, 我们取 $P\in M$，我们有

$$\sup_{x\in[a,b]}|P(x)-f'(x)|\le\min\left\{\frac{\varepsilon}{2(b-a)},\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

由上一题的结论，这是显然的 (这里为什么这么取，看下面的证明)

然后我们考虑到

$$p(x)=f(a)+\int_a^x P(y)\,dy\in V, \text{这是因为}\int_a^x e^{\lambda y}dy=\frac{e^{\lambda x}-e^{\lambda a}}{\lambda}\in V,\lambda>0$$

此时 $p'(x)=P(x)$, 于是我们有

$$|p(x)-f(x)|=|f(a)+\int_a^x P(y)\,dy-f(x)|=\int_a^x|P(y)-f'(y)|dy\le|P(y)-f'(y)|(x-a)\le(b-a)|P(y)-f'(y)|$$

而对于 $(b-a)|P(y)-f'(y)|$，我们有

$$(b-a)|P(y)-f\prime(y)|\le(b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2}$$

现在，我们有

$$\sup_{x\in[a,b]}\left[|f'(x)-p'(x)|+|f(x)-p(x)|\right]\le\varepsilon$$

现在我们考虑到一个有意思的 *Bernstein* 多项式

定义 1.1 (*Bernstein* 多项式)

设 $f(x)\in[0,1]$, 则 $f(x)$ 的 *Bernstein* 多项式为

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

并且有

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,x)=f(x)$$

引理 1.1

设 $f\in C[0,1]$,$\varphi(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right]$, 那么有

$$B_n'(f,x)=B_{n-1}(\varphi,x),n\geq 2$$

证明

$$\begin{aligned}
&B_n'(f,x)=\left[\sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right]'=\sum_{k=1}^{n} kf\left(\tfrac{k}{n}\right)C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\tfrac{k}{n}\right)C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)f\left(\tfrac{k+1}{n}\right)C_n^{k+1}x^k(1-x)^{n-k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)f\left(\tfrac{k}{n}\right)C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\\
&=\cdots\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\tfrac{k}{n-1}\right)C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-k-1}\\
&=B_{n-1}(\varphi,x)
\end{aligned}$$

定理 1.8

如果 f 递增或者递减，则 $B_n(f,x)$ 也一样

证明 如果 f 递增，则有

$$B_n(f,x)\leq B_{n+1}(f,x)$$

这个对于 *Bernstein* 多项式的定义来说，是显然的，递减情景类似，于是得证

定理 1.9

如果 f 在 $[0,1]$ 是凸函数，则 $B_n(f,x)$ 也一样，并且有

$$B_n(f,x)\geq B_{n+1}(f,x)$$

证明

不妨设 f 下凸，由引理，不妨设

$$B_n''(f,x)=B_{n-1}'(\varphi,x)=B_{n-2}(\psi,x),\text{其中}\psi=(n-1)\left[\varphi\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right]$$

于是，我们有

$$B_{n-2}(\psi,x)=\sum_{j=0}^{n-2}\left[\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{j}{n-1}\right)\right]C_{n-1}^j(1-x)^{n-2-j}x^j$$

则有

$$\frac{\varphi\left(\frac{j+1}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{j}{n-1}\right)}{2n}=\frac{f\left(\frac{j+2}{n}\right)-f\left(\frac{j}{n}\right)}{2}-f\left(\frac{\frac{j+2}{n}+\frac{j}{n}}{2}\right)\geq 0$$

凸性得证，单调性按照定义写出来形式就行了，很显然

接着，我们来到对定积分的逼近，对函数和定积分的逼近构成逼近专题的两大江山

定理 1.10 (定积分的逼近)

设 $f \in R[a,b]$, 则$\forall \varepsilon > 0$, 存在$g \in C[a,b]$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \le \varepsilon$$

证明

翻译 f 黎曼可积，即

$\forall \varepsilon > 0$，存在一个划分

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon$$

用线段连接 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ 和 $(x_i, f(x_i))$，即可得到 g，我们断言 g 即为所求函数

此时

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - g(x)| dx \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i (x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon$$

得证

接着我们将其推广至一个加强版的结论，为此我们首先要定义一个新的东西

$$C_c \triangleq \left\{ g \in C(a,b) : cl\{x \in (a,b) : g(x) \ne 0\} \text{是一个含于} (a,b) \text{的紧集} \right\}$$

用通俗易懂的话来说，就是

$$\exists a < c < d < b, g(x) = 0, x \in [a,c) \cup (d,b]$$

然后我们就有下述推论

推论 1.1

设 $f \in R[a,b]$, 则$\forall \varepsilon > 0$, 存在$g \in C_c(a,b)$, 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \le \varepsilon$$

证明

对于 $\varepsilon \in (0,1)$, 对 f 用之前的结果，我们存在 $g \in C[a,b]$ 使得

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \le \frac{\varepsilon}{4}$$

我们取 $\delta > 0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx \le \frac{\varepsilon}{4}, \int_{b-\delta}^{b} |f(x)| dx \le \frac{\varepsilon}{4}, \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |g(x)| dx \le \frac{\varepsilon}{16}, \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |g(x)| dx \le \frac{\varepsilon}{16},$$

设 $g_1(x) = h(x) g(x) \in C_c(a,b)$, 其中$h \in C^\infty(\mathbb{R}), 0 \le h(x) \le 1$

其中

$h(x) = 0, x \in (-\infty, a+\delta) \cup (b-\delta, +\infty)$

$h(x)=1, x\in[a+2\delta,b-2\delta]$

则

$$\int_a^b |f(x)-g_1(x)|dx=\int_a^b |f(x)-h(x)g(x)|dx=\int_a^{a+\delta}|f(x)-h(x)g(x)|dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-h(x)g(x)|dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)-h(x)g(x)|dx$$

$$=\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-h(x)g(x)|dx=\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)g(x)|dx$$

$$\le\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-g(x)|dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx$$

$$\le\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|dx+\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx$$

$$\le\int_a^{a+\delta}|f(x)|dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|dx+\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx+\int_{a+2\delta}^{b-2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx+\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx$$

$$\le\frac{3\varepsilon}{4}+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx+\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|dx$$

$$\le\frac{3\varepsilon}{4}+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)|dx+\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)|dx=\varepsilon$$

这题中**截断**的思想，需要大家好好品一品

接下来我们来到一个很有趣的黎曼可积的结论, 其的证明用到了数值分析中特别重要的扰动法

定理 1.11 (可积函数的多项式逼近)

$f\in R[a,b]$ 的充要条件是对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $p,q\in\mathbb{R}[x]$，使得

(1) $\int_a^b [p(x)-q(x)]\,dx\le\varepsilon$

(2) $q(x)\le f(x)\le p(x)$

证明

$\Leftarrow$

对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $p,q\in\mathbb{R}[x]$，使得

(1) $\int_a^b [p(x)-q(x)]\,dx\le\frac{\varepsilon}{2}$

(2) $q(x)\le f(x)\le p(x)$

此时显然 f 有界，这是因为多项式此时有界

此时我们取一个划分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}p(x)(x_i-x_{i-1})\le\int_a^b p(x)\,dx+\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}q(x)(x_i-x_{i-1})\ge\int_a^b q(x)\,dx-\frac{\varepsilon}{4}$$

记$\omega_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x)-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x)$

此时我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})\le\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}p(x)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=1}^{n}\inf_{[x_{i-1},x_i]}q(x)(x_i-x_{i-1})\le\int_a^b p(x)dx+\frac{\varepsilon}{4}-\int_a^b q(x)dx+\frac{\varepsilon}{4}\le\int_a^b(p(x)-q(x))dx+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon$$

于是 $f\in R[a,b]$

$\Rightarrow$

思路：

对 $f\in R[a,b]$，假设我们只找到了 $p,q\in C[a,b]$ 满足要求，此时由先前的逼近理论，存在实系数多项式 p',q' 使得

$$q-\varepsilon\le q'\le q,p\le p'\le p+\varepsilon$$

于是我们有

$$\int_a^b p'-q'dx\le\int_a^b p-qdx+\int_a^b 2\varepsilon dx\le[1+2(b-a)]\varepsilon$$

加上

$$q'\le q\le f\le p\le p'$$

即可完成证明

理论成立，我们来实际看看

由于 $f\in R[a,b]$，$\forall\varepsilon>0$，存在一个划分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})\le\frac{\varepsilon}{4}$$

此时 $M_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}f,m_i=\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}f,\omega_i=M_i-m_i$

这里我们取 $q_0(x)=m_i,x\in[x_{i-1},x_i)$, 此时有 $q_0(b)=m_n$

此时有

$$\int_a^b f(x)-q_0(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)-q_0(x)dx\le\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x_i-x_{i-1})\le\frac{\varepsilon}{4}$$

显然此时有 $q_0\le f$, 但是其不连续，于是我们要对其进行扰动，在不改变原有信息的前提下使其连续

想法如下图

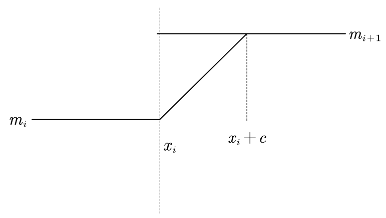

图 1.1

待定 $c>0$, 我们对 $i=1,2,\cdots,n-1$, 如果有 $m_i\le m_{i+1}$, 对于 $x\in[x_i,x_i+c]$, 我们取

$$q(x)=\frac{x_i+c-x}{c}m_i+\frac{x-x_i}{c}m_{i+1}$$

如果有 $m_i\ge m_{i+1}$, 对于 $x\in[x_i-c,x_i]$, 我们取

$$q(x)=\frac{x_i-x}{c}m_i+\frac{x-x_i+c}{c}m_{i+1}$$

在其它地方令 $q(x)=q_0(x)$, 则 $q\in C[a,b], q\le q_0\le f$

此时

$$\int_a^b q_0-qdx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} q_0-qdx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_i+c-x}{c}m_i+\frac{x-x_i}{c}m_{i+1}-m_idx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_i-x}{c}m_i+\frac{x-x_i}{c}m_{i+1}dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{x_i-x}{c}m_i+\frac{x-x_i}{c}m_{i+1}dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(m_{i+1}-m_i)}{c}\int_{x_i}^{x_{i+1}}x-x_idx=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(m_{i+1}-m_i)}{c}\int_{x_i}^{x_i+c}x-x_idx=\frac{c}{2}\sum_{i=1}^{n-1}|m_{i+1}-m_i|\le\frac{c}{2}(n-1)\max\left\{\sup_{[a,b]}f,\inf_{[a,b]}f\right\}$$

此时只要 c 充分小，就有

$$\int_a^b q_0-qdx\le\frac{\varepsilon}{4}$$

因此，我们有

$$\int_a^b f-qdx=\int_a^b f-q_0+q_0-qdx=\int_a^b f-q_0dx+\int_a^b q_0-qdx\le\frac{\varepsilon}{2}$$

类似的，我们也可以选取 $p\in C[a,b]$, 使得

$$f\le p,\int_a^b f-pdx\frac{\varepsilon}{2}$$

此时就有

$$\int_a^b p-qdx\le\varepsilon$$

我们所需要的 p,q 便得出来了

我们来点应用

练习 1.1 设$\beta_n\to 0$, 函数f在 $[-1,2]$ 有界， $[0,1]$ 黎曼可积，证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$$

证明

不妨设 f 在 $[-1,2]$ 黎曼可积，只需要说明其在 $[0,1]$ 之外的积分为 0 即可，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\sum_{1\le k\le-n\beta_n\text{或}n\ge k\ge n(1-\beta_n)}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)|\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sup_{[-1,2]}f}{n}(2n\beta_n+1145141919810)=0$$

于是极限的值集中在 $[0,1]$

此时不妨将 f 在 $[0,1]$ 外的值修正为 0, 由先前的结论，存在 $p,q\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$p\le f\le q,\int_0^1 qdx-\varepsilon\le\int_0^1 fdx\le\int_0^1 pdx+\varepsilon$$

此时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}q\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 qdx\le\int_0^1 fdx+\varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 pdx\ge\int_0^1 fdx-\varepsilon$$

于是乎即可得证

练习 1.2 设$p\ge 1,\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx<\infty$, 证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}|f(x+h)-f(x)|^p dx=0$$

证明 对于 $f\in C_c(\mathbb{R})$，即 $f\in C(\mathbb{R})$ 且$cl\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$是$\mathbb{R}$中紧集，则此时$f$是一致连续的

不妨设 $[a,b]\supset cl\{x\in\mathbb{R}:f(x)=0\}$，此时对 $h\in(0,1)$, 我们有

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x+h)-f(x)|^p dx=\int_{[a,b]}|f(x+h)-f(x)|^p dx$$

由一致连续性，显然我们有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{[a,b]}|f(x+h)-f(x)|^p dx=0$$

如果我们证明了 (证明放在磨光那一部分写)，对于一般的满足 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx<\infty$ 的 f，如果证明了 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\varepsilon$$

那么我们就有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\|f(x+h)-f(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}&\le\lim_{h\to 0^+}\|f(x+h)-g(x+h)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|g(x+h)-g(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\|f(x)-g(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}\\&=2\|f(x)-g(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}+\lim_{h\to 0^+}\|g(x+h)-g(x)\|_{L^p(\mathbb{R})}\le 2\varepsilon\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}|f(x+h)-f(x)|^p dx=0$$

练习 1.3 设$p\ge 1,\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx<\infty$, 证明

$$\lim_{|h|\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}|f(x-h)+f(x)|^p dx=2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx$$

证明

不失一般性，我们考虑在 $h\to+\infty$ 时候的情况

当 $f\in C_c(\mathbb{R})$, 设 $n\in\mathbb{N}$, 使得

$$suppf\subset(-n,n)$$

当 $h>2n$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f(x)+f(x-h)|^p dx&=\int_{|x|>n}|f(x)+f(x-h)|^p dx+\int_{-n}^{n}|f(x)+f(x-h)|^p dx\\&=\int_{|x|>n}|f(x-h)|^p dx+\int_{-n}^{n}|f(x)|^p dx\\&=\int_{|x+h|>n}|f(x)|^p dx+\int_{-n}^{n}|f(x)|^p dx\\&=2\int_{-n}^{n}|f(x)|^p dx=2\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\end{aligned}$$

对于一般的满足 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx<\infty$ 的 f，如下定义范数

$$\|f\|_p \triangleq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

对任何 $\varepsilon>0$, 存在 $g\in C_C^\infty(\mathbb{R})$, 使得

$$\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2+2^{\frac{1}{p}}}$$

那么此时当 h 充分大，我们有

$$\begin{aligned}\left|\|f(x-h)+f(x)\|_p-2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p\right| &\le \left|\|f(x-h)+f(x)\|_p-\|g(x-h)+g(x)\|_p\right|+\left|\|g(x-h)+g(x)\|_p-2^{\frac{1}{p}}\|g\|_p+2^{\frac{1}{p}}\|f\|_p-\|g\|_p\right|\\ &\le \|f(x)-g(x)+f(x-h)-g(x-h)\|_p+2^{\frac{1}{p}}\|f-g\|_p \le \|f(x)-g(x)\|_p+\|f(x-h)-g(x-h)\|_p+2^{\frac{1}{p}}\|f-g\|_p\\ &\le \left(2^{\frac{1}{p}}+2\right)\|f-g\|_p=\varepsilon\end{aligned}$$

接下来我们来到一个重要的技巧，即函数的磨光, 这也是一种逼近技术，只不过是用光滑的（任意阶连续可导）函数逼近一般的函数，并且一般来说，这个光滑函数是一致收敛到我们的目标函数的！而且它保留了原来的函数的各种基本信息，比如单调性，凹凸性这种，同时积分误差（因为一致收敛）将会任意小，所以这是一个很强有力的工具。

它最大的功效就是：原先一个函数，你希望用分部积分，求导，甚至求二阶导这些方式来研究它（或解决问题），但是条件不够，没有光滑性使得这些操作“不合法”，但是假如我允许你如上操作，问题又会变得异常简单，那怎么办？你是否忍不住要导或者积？这样磨光技术就派上用场了，它能使得你的一切操作合理。

定义 1.2 (磨光函数)

定义 $\chi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{1-|x|^2}}dx}e^{\frac{1}{1-|x|^2}}, |x|<1\\ 0, |x|\ge 1\end{cases}$ 为磨光函数，并且 $\chi_\delta(x)=\frac{\chi(\frac{x}{\delta})}{\delta}$，$\delta>0$

其满足：$\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, χ是非负偶函数，$\int_{\mathbb{R}}\chi dx=1$ ♣

注 若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 内闭可积，则 $f_\delta(x)\triangleq \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)\chi_\delta(x-y)\,dy\in C^\infty(\mathbb{R})$

我们来到一个历史遗留问题

例题 1.14 对于一般的满足 $\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx<\infty$ 的 f，如果证明了 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $g\in C_c(\mathbb{R})$, 使得

$$\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\varepsilon$$

解

这里我们给出两种证明方法

方法一 (截断法):

对于 $\varepsilon\in(0,1)$, 对 f 用之前的结果，我们存在 $g\in C(\mathbb{R})$ 使得

$$\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\frac{\varepsilon}{4}$$

我们取 $\delta>0$, 使得

$$\int_a^{a+\delta}|f(x)|^p dx\le\frac{\varepsilon}{4},\ \int_{b-\delta}^{b}|f(x)|^p dx\le\frac{\varepsilon}{4},\ \int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)|^p dx\le\frac{\varepsilon}{16},\ \int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)|^p dx\le\frac{\varepsilon}{16},$$

设 $g_1(x)=h(x)g(x)\in C_c(\mathbb{R})$, 其中$h\in C^\infty(\mathbb{R})$, $0\le h(x)\le 1$

其中

$h(x)=0, x\in(-\infty,a+\delta)\cup(b-\delta,+\infty)$

$h(x)=1, x\in[a+2\delta,b-2\delta]$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-g_1(x)|^p dx=\int_a^b|f(x)-h(x)g(x)|^p dx=\int_a^{a+\delta}|f(x)-h(x)g(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-h(x)g(x)|^p dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)-h(x)g(x)|^p dx$$
$$=\int_a^{a+\delta}|f(x)|^p dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-h(x)g(x)|^p dx=\int_a^{a+\delta}|f(x)|^p dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-g(x)+g(x)-h(x)g(x)|^p dx$$
$$\le\int_a^{a+\delta}|f(x)|^p dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|f(x)-g(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx$$
$$\le\int_a^{a+\delta}|f(x)|^p dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|^p dx+\int_a^{b}|f(x)-g(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx$$
$$\le\int_a^{a+\delta}|f(x)|^p dx+\int_{b-\delta}^{b}|f(x)|^p dx+\int_a^{b}|f(x)-g(x)|^p dx+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx+\int_{a+2\delta}^{b-2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx+$$
$$\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx$$
$$\le\frac{3\varepsilon}{4}+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx+\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)-h(x)g(x)|^p dx$$
$$\le\frac{3\varepsilon}{4}+\int_{a+\delta}^{a+2\delta}|g(x)|^p dx+\int_{b-2\delta}^{b-\delta}|g(x)|^p dx=\varepsilon$$

这样就很套路地解决了这道题，截断法的思路大多是连续逼近，然后手动截断。

方法二 (磨光法)

第一步，紧支化：

$$\forall\varepsilon>0,\text{取}n\in\mathbb{N},\text{使得}2^p\int_{|x|>n}|f(x)|^p dx\le\varepsilon$$

我们取 $h\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 使得 $h(x)=1,x\in(-n,n),0\le h(x)\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$

即

$$\int_{\mathbb{R}}|h(x)f(x)-f(x)|dx=\int_{|x|>n}|h(x)f(x)-f(x)|dx\le 2^p\int_{|x|>n}|f(x)|^p dx\le\varepsilon$$

此时我们证明了 f 有紧支撑

第二步，磨光

我们引用磨光核 $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 使得

$$\int_{\mathbb{R}}\chi(x)\,dx=1$$

(χ 为非负偶函数且 $0\le\chi\le 1$)

令 $\chi_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 我们考虑卷积 $f*\chi_\varepsilon\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, 运用卷积不等式，我们有

$$\|f*\chi_\varepsilon\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^p}\text{, 由此我们可以证明}\lim_{\varepsilon\to 0}\|f*\chi_\varepsilon-f\|_{L^p}=0$$

于是我们有

$$f_\delta(x)=\int_{\mathbb{R}}f(y)\chi_\delta(x-y)\,dy\overset{y=x-\delta y}{=}\int_{\mathbb{R}}f(x-\delta y)\chi(y)\,dy=\int_{-1}^{1}f(x-\delta y)\chi(y)\,dy$$

当 $x\notin[-n-\delta,n+\delta]$, 则 $x-\delta y\notin[-n,n]$

因此 $f_\delta(x)=0,x\notin[-n-\delta,n+\delta]\forall y\in[-1,1]$

直观上，f_δ 的支撑比原来的大了 δ 的距离

于是 $f_\delta\in C_c^\infty(\mathbb{R})$

我们有

$$\|f_\delta-f\|_p=\left\|\int_{\mathbb{R}}f(x-\delta y)\chi(y)\,dy-\int_{\mathbb{R}}f(x)\chi(y)\,dy\right\|_p=\left\|\int_{\mathbb{R}}(f(x-\delta y)-f(x))\chi(y)\,dy\right\|_p\le\int_{-1}^{1}\|(f(x-\delta y)-f(x))\|_p\chi(y)\,dy$$

由勒贝格积分的连续性，我们有

$$\lim_{h\to 0}\|(f(x-h)-f(x))\|_p=0$$

注意到 $\forall y \in [-1,1], \delta y$ 一致趋向于 0，则

$$\lim_{\delta\to 0}\|f_\delta - f\|_p \le \lim_{\delta\to 0}\int_{-1}^{1}\|(f(x-\delta y)-f(x))\|_p \chi(y)\,dy = 0$$

于是我们得证

例题 1.15 $f \in C^1(\mathbb{R})$, 且 $|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)| \le Mt^2$, 证明

$$|f'(x+t)-f'(x)| \le M|t|$$

证明 若 f 光滑，则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{|f(x+t)-2f(x)+f(x-t)|}{t^2} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{|f'(x+t)-f'(x-t)|}{2t}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{|f''(x+t)+f''(x-t)|}{2}\\ &= \left|f''(x)\right| \le M, \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

由拉格朗日中值定理，可得

$$|f'(x+t)-f'(x)| = |t|\left|f''(x)\right| \le M|t|$$

这样就结束了，但事实上 f 不一定光滑，我们考虑将其磨光

即

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\chi_\delta(x-y)\,dy \overset{y=x-\delta y}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x-\delta y)\chi(y)\,dy$$

于是乎

$$|f_\delta(x+t)-2f_\delta(x)+f_\delta(x-t)| \le \int_{\mathbb{R}}|f(x+t-\delta y)-2f(x-\delta y)+f(x-t-\delta y)|\chi(y)\,dy \le M|t|^2\int_{\mathbb{R}}\chi(y)\,dy = M|t|^2$$

现在我们就有

$$|f_\delta'(x+t)-f_\delta'(x)| \le M|t|$$

又因为

$$f'_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}} f(y)\chi_\delta'(x-y)\,dy = -\int_{\mathbb{R}} f(y)\,d\chi_\delta(x-y) \overset{\text{分部积分}}{=} \underbrace{-f(y)\chi_\delta(x-y)}_{=0} + \int_{\mathbb{R}} f'(y)\chi_\delta(x-y)dy$$

于是我们有

$$|f'_\delta(x)-f'(x)| = |\int_{\mathbb{R}}(f'(x-\delta y)-f'(x))\chi_\delta(y)dy| \le \int_{|y|\le 1}|(f'(x-\delta y)-f'(x))|\chi_\delta(y)dy$$

由于 f' 连续，δy 关于 $y \in [-1,1]$ 一致趋向于 0. 于是

$$\lim_{\delta\to 0^+}|f'_\delta(x)-f'(x)| \le \lim_{\delta\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}|(f'(x-\delta y)-f'(x))|\chi_\delta(y)dy = 0$$

则结论得证

接下来我们来证明一下非连续版本的黎曼定理

例题 1.16 设 $A \subset \mathbb{R}$ 是集合，f 在 A 上绝对可积, g 是周期 $T > 0$ 的有界可积函数, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f(y)g(xy)dy = \frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy$$

证明

我们不妨假设 $A = \mathbb{R}$, 否则在 A 外补充 f 定义为 0

现考虑磨光函数 $f_\delta, g_\delta \in C^\infty(\mathbb{R})$

此时对 f_δ 我们有

$$|f_\delta(x)| = |\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_\delta(x-y)\,dy| \le \int_{\mathbb{R}}|f(x)|\chi_\delta(x-y)\,dy \le \frac{\sup\chi}{\delta}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dy$$

此时对 g_δ 我们有

$$g_\delta(x+T)=\int_{\mathbb{R}} g(x+T)\chi_\delta(x-y)\,dy=g_\delta(x)$$

于是由连续版本的黎曼定理，结论显然成立 (具体证明过程需要大家掌握)

现在就有

$$\lim_{x\to+\infty}\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy=\frac{1}{T}\int_A f_\delta(y)\,dy\int_0^T g_\delta(y)\,dy$$

于是

$$|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy|$$

$$=|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy+\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f_\delta(y)\,dy\int_0^T g_\delta(y)\,dy+\frac{1}{T}\int_A f_\delta(y)\,dy\int_0^T g_\delta(y)\,dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy|$$

$$\le|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy|+|\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f_\delta(y)\,dy\int_0^T g_\delta(y)\,dy|+|\frac{1}{T}\int_A f_\delta(y)\,dy\int_0^T g_\delta(y)\,dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy|$$

注意到

$$\begin{aligned}|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy|&=|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g(xy)dy+\int_A f(y)\,g_\delta(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy|\\&\le|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g(xy)dy|+|\int_A f_\delta(y)\,g(xy)dy-\int_A f_\delta(y)\,g_\delta(xy)dy|\\&=|\int_A[f(y)-f_\delta(y)]\,g(xy)\,dy|+|\int_A f_\delta(y)\,[g(xy)-g_\delta(xy)]dy|\\&\le\sup|g||\int_A f(y)-f_\delta(y)dy|+\frac{\frac{\sup\chi}{\delta}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dy}{x}|\int_A g(xy)-g_\delta(xy)dy|\end{aligned}$$

此时，我们令 $x\to+\infty$ 有

$$|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy|\le\sup|g||\int_A f(y)-f_\delta(y)dy|+|\frac{1}{T}\int_A f_\delta(y)\,dy\int_0^T g_\delta(y)\,dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy|$$

再令 $\delta\to0^+$, 就有

$$\lim_{x\to+\infty}|\int_A f(y)\,g(xy)dy-\frac{1}{T}\int_A f(y)\,dy\int_0^T g(y)\,dy|=0$$

得证