常微分方程

作者：Huang

目录

第 1 章 体系建立

常微分方程，数学专业中最简单的一门课程，和解析几何半斤八两的存在，想掌握这门课程，需要我们建立一下对应的体系，具体如下（见课程）

本次讲义我们采取应试的形式，旨在提高同学们的应试能力

第 2 章 计算部分专练

2.1 可分离变量的微分方程

2.1.1 齐次微分方程

定义 2.1 (齐次微分方程)

我们定义形如 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$ 的为齐次微分方程

♣

注 对于形如这类方程的处理方法，我们通常是令

$$u = \frac{y}{x} \to \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

注 有的时候题目不是那么的显然，需要我们凑齐次

例题 2.1 求解

$$x^2y' + xy = y^2$$

例题 2.2 求解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^6 - 2x^2}{2xy^5 + x^2y^2}$$

例题 2.3 求解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 + 3xy^2 + x}{3x^2y + 2y^3 - y}$$

2.1.2 整体换元型微分方程

定义 2.2 (整体换元型微分方程)

我们定义形如 $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ 的为整体换元型微分方程

♣

注 对于这类方程，我们通常是令

$$u = ax + by + c \to \frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$$

注 这类的思想，主要是对于整体换元

例题 2.4 解

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$$

2.1.3 类齐次微分方程

定义 2.3 (类齐次微分方程)

我们定义形如 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ 的为类齐次微分方程

注 对于这类方程，我们的常规思路就是化成我们前面两个方程的形式

注 若 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 时，不妨设其存在解 $x = \alpha, y = \beta$, 如果我们令

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \rightarrow \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right)$$

则可将其化为已知的形式，其他情况类似，都可以转化为我们已经学过的形式

例题 2.5 解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

例题 2.6 解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{2x - 2y - 3}$$

2.2 一阶非齐次线性微分方程

2.2.1 不定积分方法特训 (分部积分)

2.2.1.1 多项式 × 三角 (指数)

例题 2.7

$$\int x \sin x \, dx$$

例题 2.8

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

例题 2.9

$$\int xe^x \ dx$$

例题 2.10

$$\int x^2e^x \ dx$$

2.2.1.2 三角函数 × 指数函数

例题 2.11

$$\int e^x \sin x \ dx$$

例题 2.12

$$\int e^{ax} \sin bx \ dx$$

2.2.1.3 任意函数 × 导一次变形函数

例题 2.13

$$\int x\arctan x \ dx$$

例题 2.14

$$\int x\ln(x+1) \ dx$$

2.2.2 常数变易法

定义 2.4 (一阶非齐次线性微分方程)

若方程形如

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

我们便称其为一阶非齐次线性微分方程

注 对于这类方程，我们只需要将方程两边同乘积分因子

$$e^{\int P(x)dx}$$

再同时积分即可

例题 2.15 解

$$y' + y\tan x = \cos x$$

例题 2.16 解

$$\left(y + x^2 e^{-x}\right)dx - xdy = 0$$

2.3 伯努利方程

定义 2.5 (伯努利方程)

若方程形如

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

我们便称其为伯努利方程

注 对于这类方程的解法，我们的核心思想是凑微分，常见的处理过程如下

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \to \underbrace{y^{-n}y'}_{\text{可凑微分}} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

例题 2.17 解

$$\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2$$

例题 2.18 解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

2.4 恰当方程

2.4.1 恰当方程

定义 2.6 (恰当方程)

若一一阶个方程可以写成

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = du(x, y)$$

则称其为恰当方程

注

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

为判断恰当方程的充要条件

注 求解恰当方程的方法和求解全微分方程的方法是一样的

例题 2.19 解

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$$

2.4.2 非恰当方程化为恰当方程

笔记 对于非恰当方程，即

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

我们可将其转化为积分因子。具体如下

$$\begin{cases} \mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}, \varphi(x) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \\ \mu(y) = e^{\int \varphi(y)dy}, \varphi(y) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \end{cases}$$

例题 2.20 解

$$(y - 1 - xy)dx + xdy = 0$$

例题 2.21 解

$$ydx + (y - x)dy = 0$$

2.5 一阶隐式微分方程

注 这类题目往往函数的导数过于复杂，我们的核心思想是化简导数

例题 2.22 解

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

例题 2.23 解

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$$

2.6 常系数齐次线性微分方程

定义 2.7 (常系数齐次线性微分方程)

我们称形如

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n = 0$$

为常系数齐次线性微分方程

注 n 次齐次线性微分方程组一定存在 n 个线性无关的解，这些解凑在一起成为一个基本解组

笔记

例题 2.24 求方程

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$$

的通解

例题 2.25 求方程

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + y = 0$$

的通解

例题 2.26 求方程

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$$

的通解

2.7 二阶常系数非齐次线性微分方程

2.8 常系数齐次线性微分方程

定义 2.8 (常系数非齐次线性微分方程)

我们称形如

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n = f(x)$$

为常系数非齐次线性微分方程

笔记

2.8.1 特解的求法

对于非齐次线性微分方程组，我们目前有三种方法求解，具体如下

$$y^* = \begin{cases} \text{待定系数法} \\ \text{拉普拉斯变换} \\ \text{微分算子法} \end{cases}$$

在这里我们引入求导算子 D，在我们的练习中会碰上下面的三种类型

2.8.1.1 $f(x) = ke^{\alpha x}$(D 换 α)

例题 2.27 求方程

$$y'' + 3y' + 2y = 5e^{3x}$$

的特解

例题 2.28 求方程

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

的特解

例题 2.29 求方程

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}$$

的特解

2.8.1.2 $f(x) = \sin(\alpha x)$ 或者 $f(x) = \cos(\alpha x)$(D^2 换 $-\alpha^2$)

例题 2.30 求方程

$$y'' + 3y = \sin 2x$$

的特解

例题 2.31 求方程

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

的特解

例题 2.32 求方程

$$y'' + 3y' - 2y = \sin 2x$$

的特解

2.8.1.3 $f(x) = P(x)Q(x)$

例题 2.33 求方程

$$y'' + 3y' - 2y = e^x \sin 2x$$

的特解

例题 2.34 求方程

$$y'' - 2y = 3x^2 + 1$$

的特解

例题 2.35 求方程

$$y'' + y = x\cos 2x$$

的特解

2.9 线性微分方程组

2.9.1 齐次线性微分方程组

定义 2.9 (基解矩阵)

若一个 $n \times n$ 矩阵的每一列都是齐次线性微分方程组的一个解，并且每一个都是线性无关，我们便称其为基解矩阵

♣

第 3 章 证明题部分专练

3.1 逐步逼近法

3.2 解的存在唯一性

3.3 解的延拓

3.4 解对初值的连续性和可微性