常微分方程

第四章：高阶微分方程

2024 年 4 月 21 日

总目录

章节目录

引言

n 阶线性微分方程

我们称形如

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) = f(t) \tag{1}$$

为 n 阶线性微分方程，其中 $a_i(t)$ 及 $f(t)$ 在区间 $a \le t \le b$ 上连续

特别的，若 $f(t) = 0$，则

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) = 0$$

称为 n 阶齐次线性微分方程，否则称为 n 阶非齐次线性微分方程

存在唯一性定理

如果 $a_i(t)$ 及 $f(t)$ 都是区间 $a \le t \le b$ 上的连续函数，则对于 $\forall t_0 \in [a, b]$ 以及任意 $x_0, x_0^1, \cdots, x_0^{n-1}$，方程 (1) 都存在唯一解 $x = \varphi(t)$ 定义于区间 $a \le t \le b$ 上，且满足初值条件

$$\varphi(t_0) = x_0, \frac{d\varphi(t_0)}{dt} = x_0^1, \cdots, \frac{d^{n-1}\varphi(t_0)}{dt^{n-1}} = x_0^{n-1}$$

齐次方程组的性质和解的结构

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t) = 0 \tag{2}$$

叠加原理

如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_{n-1}(t)$ 是 (2) 的解，则

$$c_1 x_1(t) + \cdots + c_{n-1}x_{n-1}(t) \tag{3}$$

也是 (2) 的解，其中 c_i 为任意常数

对定义在区间 $[\alpha, b]$ 上的函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$, 若存在不全为零的常数 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 使得

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_kx_k(t) \equiv 0, \quad t \in [a, b] \tag{4}$$

则称这些函数在此区间上线性相关，否则称线性无关, 如函数 $1, t, t^2, \cdots, t^{n-1}$ 在任何区间上线性无关

朗斯基行列式

对在区间 $[a,b]$上k 个 $k-1$ 次可微的函数 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$, 定义它们的朗斯基 (**Wronsky**) 行列式为

$$W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)]=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

定理 2

若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性相关，则在区间 $[a, b]$ 上 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] \equiv 0$

其的逆不一定成立，如

$$x_1(t) = \begin{cases} t^2, -1 \le t \le 0 \\ 0, 0 < t \le 1 \end{cases}$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, -1 \le t \le 0 \\ t^2, 0 < t \le 1 \end{cases}$$

定理 3

若函数 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上线性无关，则在区间 $[a, b]$ 上 $W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)]$ 恒不为 0

证明：

采用反证法. 设有某 $t_0(a \le t_0 \le b)$ 使得 $W(t_0) = 0$. 考虑关于 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases} c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0) = 0 \\ c_1 x_1'(t_0) + c_2 x_2'(t_0) + \cdots + c_n x_n'(t_0) = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_1 x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2 x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n x_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

其系数行列式 $W(t_0) = 0$, 故 (4.9) 有非零解 $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

现以这组常数构造函数

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t), a \leq t \leq b,$$

根据叠加原理，$x(t)$ 是方程 (2) 的解, 注意到 (5), 知道这个解 $x(t)$ 满足初值条件

$$x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0 \tag{6}$$

但是 $x = 0$ 显然也是方程 (2) 的满足初值条件 (6) 的解. 由解的唯一性，即知 $x(t) \equiv 0(\alpha \leq t \leq b)$, 即

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \equiv 0, \alpha \leq t \leq b \tag{7}$$

因为 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 不全为 0, 这就与 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 线性无关的假设矛盾, 于是得证

我们还能得到以下结论

结论

n 阶齐次线性微分方程的 n 个解构成的郎斯基行列式或者恒等于 0，或者在相关区间上处处不为 0.

定理 4

n 阶齐次线性微分方程 (2) 一定存在 n 个线性无关的解

定理 5

如果 $x_1(t),\quad x_2(t),\quad \cdots, x_n(t)$ 是方程 (2) 的 n 个线性无关的解，则方程的通解可表为

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t), \tag{8}$$

其中 c_i 是任意常数，且通解包含方程所有解.

证明：首先，由叠加原理知道 (8) 是 (2) 的解，它包含有 n 个任意常数。我们指出，这些常数是彼此独立的。事实上，

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial x}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial c_n} \\ \frac{\partial x'}{\partial c_1} & \frac{\partial x'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x'}{\partial c_n} \\ \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial x^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} = W[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)] \neq 0\,(a \leq t \leq b)$$

因而 ,(8) 为方程 (2) 的通解. 现在，我们证明它包括了方程的所有解. 由于方程的解唯一地决定于初值条件，所以只需证明：任给一初值条件

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \tag{9}$$

能够确定 (8) 中的常数 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的值，使 (8) 满足 (9)。
现令 (8) 满足条件 (9), 我们得到如下关于 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 的线性代数方程组：

$$\begin{cases} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) + \cdots + c_nx_n(t_0) = x_0 \\ c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) + \cdots + c_nx_n'(t_0) = x\prime_0 \\ \cdots\cdots \\ c_1x_1^{(n-1)}(t_0) + c_2x_2^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_nx_n^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1} \end{cases} \tag{10}$$

它的系数行列式就是 $W(t_0)$, 由定理 3 知, $W(t_0) \neq 0$. 根据线性方程组的理论，方程组的理论，方程组 (10) 有唯一解 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$. 因此，只要表达式 (8) 中常数取为 $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n$, 则它就满足条件 (9). 定理证毕

推论

方程 (2) 的线性无关解的最大个数等于 n.n 阶齐次线性微分方程的全部解构成一个 n **维线性空间**.
(2) 的一组 n 个线性无关的解称为一个基本解组。基本解组不是唯一的. $W(t_0)=1$ 时的基本解组称为**标准基本解组**.

非齐次线性微分方程与常数变易法

对于方程 (1)

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)=f(t)$$

和方程 (2)

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)=0$$

我们有如下性质

性质 1

如果 $\overline{x}(t)$ 是 (1) 的解，$x(t)$ 是 (2) 的解，则 $\overline{x}(t)+x(t)$也是(1)的解.

性质 2

(1) 的任意两个解的差是 (2) 的解

定理 6：通解结构定理

如果 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是 (2) 的基本解组，$\overline{x}(t)$ 是 (1) 的任一解，则 (1) 的通解可表为

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + \overline{x}(t) \tag{11}$$

其中 c_i 是任意常数，且通解包含方程所有解

常数变易法

由定理 6 知，要解非齐次线性微分方程，只需知道它的一个解和对应齐次方程的一个基本解组。进一步，只要知道对应齐次方程的一个基本解组，我们可以利用“常数变易法”求得非齐次方程的解。这与一阶线性方程的情形类似

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是 (4.2) 的基本解组，因而

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) \tag{12}$$

为 (2) 的通解，为了求得 (1) 的一个解，将上式中的 c_i 换成 t 的待定函数 $c_i(t)$, 于是有

$$x = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \cdots + c_n(t) x_n(t) \tag{13}$$

只要我们能找到特定的函数 $c_i(t)$, 使

$$x = c_1(t) x_1(t) + c_2(t) x_2(t) + \cdots + c_n(t) x_n(t)$$

满足方程 (1), 则问题就解决了, 我们可将方程 (13) 带入 (1), 设法让它满足方程 (1)
对 (13) 求导，我们可得到

$$x' = c_1(t) x_1'(t) + c_2(t) x_2'(t) + \cdots + c_n(t) x_n'(t) + c_1'(t) x_1(t) + c_2'(t) x_2(t) + \cdots + c_n'(t) x_n(t) \tag{14}$$

此时我们令

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) + \cdots + c_n'(t)x_n(t) = 0 \tag{15}$$

于是就能得到

$$x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t)$$

多次重复这样的过程，我们可以得到如下方程组

$$\begin{cases} x' = c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) + \cdots + c_n(t)x_n'(t) \\ x'' = c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) + \cdots + c_n(t)x_n''(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)} = c_1(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n-1)}(t) \\ x^{(n)} = c_1(t)x_1^{(n)}(t) + \cdots + c_n(t)x_n^{(n)}(t) + c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) \end{cases} \tag{16}$$

将 (16) 带入 (1), 我们可以得到

$$c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t) + \cdots + c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t)$$

于是 $c_i(t)$ 满足

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t)+c_2'(t)x_2(t)+\cdots+c_n'(t)x_n(t)=0 \\ c_1'(t)x_1'(t)+c_2'(t)x_2'(t)+\cdots+c_n'(t)x_n'(t)=0 \\ \vdots \\ c_1'(t)x_1^{(n-2)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-2)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-2)}(t)=0 \\ c_1'(t)x_1^{(n-1)}(t)+c_2'(t)x_2^{(n-1)}(t)+\cdots+c_n'(t)x_n^{(n-1)}(t)=f(t) \end{cases} \tag{17}$$

将它看作关于 $c_i'(t)$ 的方程组系数, 行列式 $W[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]\neq 0$, 故有解 : $c_i'(t)=\varphi_i(t), \quad i=1,2,...,n.$

所以可取:$c_i(t)=\int\varphi_i(t)dt,\quad i=1,2,...,n,\quad (1)\quad :$

$$\bar{x}=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)+\cdots+c_n(t)x_n(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t)c_i(t)=\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)dt \qquad (18)$$

(1) 的通解为:

$$\begin{aligned}x&=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)+\bar{x}\\&=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t)+\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\int\varphi_i(t)dt\\&=\sum_{i=1}^{n}x_i(t)\left[\int\varphi_i(t)dt+c_i\right]\end{aligned} \qquad (19)$$

例题 1

求 $x'' + x = \frac{1}{x^2}$ 的通解。(基本解组 $\cos t, \sin t$)

常数变易法 $$x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t,$$

代入方程得 $$\cos t c_1'(t) + \sin t c_2'(t) = 0$$

及 $$-\sin t c_1'(t) + \cos t c_2'(t) = \frac{1}{\cos t},$$

解得 $$c_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, c_2'(t) = 1,$$

因此 $$c_1(t) = \ln\left|\cos t\right| + \gamma_1, c_2(t) = t + \gamma_2,$$

故通解为

$$x = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t$$

例题 2

求方程 $tx'' - x' = t^2$ 于域 $t \neq 0$ 上的所有解.

求解对应的其次线性微分方程，我们很容易得到其的一组基础解系

$$x = \frac{1}{2}At^2 + B$$

这里 A, B 为任意常数我们可将方程改写为

$$x'' - \frac{1}{t}x' = t$$

带入 $x = c_1(t) + c_2(t)t^2$，我们即可得到

$$\begin{cases} c_1{\prime}(t) + t^2 c_2{\prime}(t) = 0 \\ 2tc_2'(t) = t \end{cases}$$

解上述方程，我们即可得到

$$\begin{cases} c_1(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \gamma_1 \\ c_2(t) = \frac{1}{2}t + \gamma_2 \end{cases}$$

所以我们即刻得到原方程的通解

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 t^2 + \frac{1}{3}t^3$$

章节目录

章节目录

坚持学习，不是为了输赢。