第二章作业

第四题

对于每个 $\alpha \in L^\infty[a,b]$，定义线性算子 $(Tx)(t) = \alpha(t)x(t)$，$\forall x \in L^p[a,b]$。求 $\|T\|$。

解:

求算子范数的过程如下：

1. 证明算子有上界(因为是有界线性算子)
2. 取特殊值(范数要为1)

由算子范数的原始定义,$\|T\| = \sup_{x\in L^p[a,b]} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

$\|Tx\| = \|\alpha x\| \le \|x\| \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$

于是$\|T\| = \sup_{x\in L^p[a,b]} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \sup_{x\in L^p[a,b]} \frac{\|x\| \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|}{\|x\|} = \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$

取 $x(t) = \operatorname{sign}(\alpha(t))$，则 $\|x\| = 1$，于是$\|T\| = \sup_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$ $\operatorname{sign}(\alpha(t))$的定义为：

$$\operatorname{sign}(\alpha(t)) = \begin{cases} 1, & \alpha(t) > 0 \\ 0, & \alpha(t) = 0 \\ -1, & \alpha(t) < 0 \end{cases}$$

第十一题

设 $f \in C[a,b]$ 的线性泛函 f 称为正泛函，若 $x(t) \ge 0, \forall t \in [a,b]$，则 $f(x) \ge 0$。证明：正泛函当且仅当 f 连续并且 $\|f\| = f(1)$，这里的 1 代表常数 $x(t) \equiv 1$。

证明:

$\Rightarrow$
对任意 $x \in C[a,b]$，由于 x 在闭区间上连续，必有界

设 $M = \max|x(t)|$，则 $M \cdot 1 \pm x(t) \ge 0$

由正泛函性质，$f(M \cdot 1 \pm x) \ge 0$,即 $M \cdot f(1) \pm f(x) \ge 0$

因此 $|f(x)| \le M \cdot f(1)$

所以 $|f(x)| \le f(1) \cdot \|x\|$，说明 f 有界，即连续

$\Leftarrow$
不妨设$0 \le x(t) \le 1$，否则用$x(t)$除以$\|x(t)\|$来表示

由范数定义,$f(1)$为该区间的最大值,于是有

$f(1) - f(x) \le f(1)$

$f(x) \ge 0$

第十三题

设 X, Y, Z 是线性赋范空间，$A \in B(Y,Z)$，$B \in B(X,Y)$，证明 $(AB)x = A(Bx)$，且 $AB \in B(X,Z)$ 并且 $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$。

证明:

先证明 $(AB)x = A(Bx)$

由于 $B \in B(X, Y)$，对任意 $x \in X$，有 $Bx \in Y$,由于 $A \in B(Y, Z)$，对任意 $y \in Y$，有 $Ay \in Z$

因此 $A(Bx)$ 是有意义的，且 $A(Bx) \in Z$,由复合映射的定义，$(AB)x = A(Bx)$

然后证明 $AB \in B(X, Z)$,先证明 AB 是线性的

对任意 $x_1, x_2 \in X$ 和标量 α

- $(AB)(\alpha x_1 + x_2)$
- $= A(B(\alpha x_1 + x_2))$
- $= A(\alpha Bx_1 + Bx_2)$（B 的线性性）
- $= \alpha A(Bx_1) + A(Bx_2)$（$A$ 的线性性）
- $= \alpha(AB)x_1 + (AB)x_2$

再证明有界性

$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\| \square$

第十四题

由定理2.1.5的证明知道对于算子序列 T_n，若 $\|T_n - T\| \to 0$，则 $\forall x \in X$，$\|T_n x - Tx\| \to 0$。此结论的逆不成立。试考虑算子序列：

$T_n : l^2 \to l^2, T_n(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)$

证明：

证明 $\forall x \in l^2$，$\|T_n x - Tx\| \to 0$

这里 T 是恒等算子，即 $T(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots)$。

对任意 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2$，有：
$\|T_n x - Tx\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2$

由于 $x \in l^2$，所以 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$

因此 $\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0 \ (n \to \infty)$

即 $\|T_n x - Tx\| \to 0$

证明 $\|T_n - T\| \nrightarrow 0$

对任意 n，取 $x^{(n)} = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$（第 $n+1$ 个分量为1，其余为0）

则 $\|x^{(n)}\| = 1$

$\|(T_n - T)x^{(n)}\| = 1$

因此 $\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)x\| \geq 1$

所以 $\|T_n - T\| \nrightarrow 0$

这就说明了逐点收敛（$\|T_n x - Tx\| \to 0$）不能推出算子范数收敛（$\|T_n - T\| \to 0$）。$\square$

第十九题

设 X, Y 是 Banach 空间，Z 是线性赋范空间，映射

$B : X \times Y \to Z, B(x, y) = z$

若对于每个固定的 $x_0 \in X$ 或者 Y，$B(x_0, y)$ 与 $B(x, y_0)$ 分别是关于 y, x 连续的线性算子（称 B 为双线性算子），则 $B(x, y)$ 关于两个变元连续并且存在 $\alpha > 0$，使 $\|B(x, y)\| \leq \alpha\|x\|\|y\|$，$\forall x \in X, y \in Y$。

证明：

先证 $B(x, y)$ 关于两个变元连续

设 $x_n \to x$，$y_n \to y$，需证 $B(x_n, y_n) \to B(x, y)$

$\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\|$
$= \|B(x_n, y_n) - B(x_n, y) + B(x_n, y) - B(x, y)\|$
$\leq \|B(x_n, y_n - y)\| + \|B(x_n - x, y)\|$

由于 $B(x_n, \cdot)$ 和 $B(\cdot, y)$ 分别是连续的线性算子，所以上式趋于0

再证存在 $\alpha > 0$ 使得 $\|B(x, y)\| \leq \alpha\|x\|\|y\|$

定义映射 $T : X \to B(Y, Z)$，$T(x)(y) = B(x, y)$

对任意固定的 x，$T(x)$ 是从 Y 到 Z 的连续线性算子

由闭图像定理，T 是闭的，从而是有界的

因此存在 $\alpha > 0$，使得 $\|B(x, y)\| \leq \alpha\|x\|\|y\|$

$\square$

第二十七题

设 H 中的算子构成映射 $A : H \to H$ 是 Hilbert 空间上的线性算子，并且 $(x, Ay) = (Ax, y)$，$\forall x, y \in H$，则 $A \in B(H)$。

证明：

先证 A 是闭算子

设 $x_n \to x$，$Ax_n \to z$，需证 $Ax = z$

对任意 $y \in H$，有：
$(x_n, Ay) = (Ax_n, y)$

当 $n \to \infty$ 时：

- 左边：$(x_n, Ay) \to (x, Ay)$（由内积的连续性）
- 右边：$(Ax_n, y) \to (z, y)$（由内积的连续性）

由于这对任意 $y \in H$ 成立，所以 $Ax = z$

再证 A 有界

由于 H 是 Hilbert 空间（从而是 Banach 空间），且 A 是闭算子

根据闭图像定理，A 是有界的

因此 $A \in B(H)$

□

第三十题

设 X, Y 是 Banach 空间，$T : X \to Y$ 是线性算子，如果对任意 $f \in Y^*$，$f \circ T \in X^*$，则 T 一定是有界线性算子。

证明：

先证 T 是闭算子

设 $x_n \to x$ 且 $Tx_n \to y$，需证 $Tx = y$

对任意 $f \in Y^*$，有：
$f(Tx_n) = (f \circ T)(x_n)$

当 $n \to \infty$ 时：

- 左边：$f(Tx_n) \to f(y)$（由 f 的连续性）
- 右边：$(f \circ T)(x_n) \to (f \circ T)(x)$（由 $f \circ T \in X^*$ 的连续性）

因此 $f(Tx) = f(y)$，$\forall f \in Y^*$

由 Y^* 的分离性，得 $Tx = y$

所以 T 是闭算子

再证 T 有界

由于 X, Y 是 Banach 空间，且 T 是闭算子

根据闭图像定理，T 是有界的

因此 $T \in B(X, Y)$

□