



# 拓扑学

作者: hzw

时间: April 9, 2022



你这个学历的基米无权哈我

# 目录

<b>第 1 章 拓扑空间基础</b>	<b>1</b>
1.1 拓扑空间的定义 . . . . .	1
1.2 开集与闭集 . . . . .	2
<b>第 2 章 连续映射</b>	<b>4</b>
<b>第 3 章 网与收敛</b>	<b>6</b>
3.1 预序集与定向集 . . . . .	6
3.2 网的定义与收敛 . . . . .	6
<b>第 4 章 拓扑的生成</b>	<b>8</b>
4.1 拓扑族的交 . . . . .	8
4.2 拓扑基与子基 . . . . .	8
<b>第 5 章 分离公理</b>	<b>11</b>
5.1 滤子与滤基 . . . . .	12
5.2 正则空间与正规空间 . . . . .	14
<b>第 6 章 紧致性</b>	<b>17</b>
6.1 紧空间 . . . . .	17
<b>第 7 章 完全正则空间与 Urysohn 引理</b>	<b>18</b>
7.1 完全正则空间 . . . . .	18
7.2 Urysohn 引理 . . . . .	19
<b>第 8 章 可分性与可数性公理</b>	<b>21</b>
8.1 可分空间与稠密性 . . . . .	21
8.2 Lindelöf 空间与正规性 . . . . .	21
8.3 第二可数空间 . . . . .	22
8.4 可度量空间 . . . . .	23
<b>第 9 章 乘积与和</b>	<b>28</b>
9.1 乘积拓扑与其子基 . . . . .	28

# 第1章 拓扑空间基础

## 1.1 拓扑空间的定义

我们首先引入拓扑和拓扑空间的概念

### 定义 1.1 (拓扑)

设  $X$  为集合, 拓扑  $\tau$  为  $X$  的子集族, 满足

1.  $\emptyset \in \tau$  且  $X \in \tau$ ;
2. 若  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$  则  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ ;
3. 若  $U_1, \dots, U_n \in \tau$  则  $\bigcap_{k=1}^n U_k \in \tau$



例如, 对于实数集  $\mathbb{R}$ , 常取由所有开区间生成的标准拓扑; 将所有子集都视为开集得到离散拓扑, 这个是最大的拓扑; 而仅有  $\emptyset$  和  $X$  为开集的则称为平凡拓扑。

**例题 1.1 Zariski 拓扑** 对域  $\mathbb{k}$  上的仿射空间  $\mathbb{k}^n$ , Zariski 拓扑定义为其闭集恰为多项式集合的零点集, 即对于任意  $S \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ , 令

$$V(S) = \{x \in \mathbb{k}^n : f(x) = 0 \text{ 对所有 } f \in S\}, \quad (1.1)$$

并以所有此类  $V(S)$  作为闭集产生拓扑。

### 定义 1.2 (拓扑空间)

设  $X$  为集合, 若  $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$  是一个拓扑, 则称  $(X, \tau)$  为拓扑空间。



### 定义 1.3 (邻域)

对拓扑空间  $(X, \tau)$  中的点  $x \in X$ , 若  $U \in \tau$  且  $x \in U$ , 则称  $U$  为点  $x$  的一个领域, 点  $x$  的所有领域所成的集合记为  $N(x)$ , 即

$$N(x) = \{U \in \tau : x \in U\}. \quad (1.2)$$



### 定义 1.4 (聚点)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间, 且  $A \subseteq X$ , 若对任意  $x \in X$  满足对任意领域  $U \in N(x)$ , 有

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \quad (1.3)$$

则称  $x$  为集合  $A$  的一个聚点。



### 定义 1.5 (闭包点)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间, 且  $A \subseteq X$ , 若对任意  $x \in X$  满足对任意领域  $U \in N(x)$ , 有  $U \cap A \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为集合  $A$  的一个闭包点, 集合  $A$  的闭包记为  $\overline{A}$ , 并可等价地表述为

$$\overline{A} = \{x \in X : U \cap A \neq \emptyset \text{ 对任意 } U \in N(x)\}. \quad (1.4)$$



### 定义 1.6 (导集)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间, 且  $A \subseteq X$ , 集合  $A$  的导集定义为所有属于  $A$  的聚点所构成的集合, 记为  $A'$ , 即

$$A' = \{x \in X : (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset \text{ 对任意 } U \in N(x)\}. \quad (1.5)$$



**定义 1.7 (内点)**

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间，且  $A \subseteq X$ ，若对任意  $x \in A$  存在一个邻域  $U \in \mathcal{N}(x)$  使得  $U \subseteq A$ ，则称  $x$  为集合  $A$  的一个内点，集合  $A$  的内记为  $A^\circ$ ，并可等价地表述为

$$A^\circ = \{x \in X : \exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } U \subseteq A\} = \bigcup \{U \in \tau : U \subseteq A\}. \quad (1.6)$$



**注** 回忆起度量空间定义的上面的东西，我们发现二者其实是等价的，即在度量空间  $(X, d)$  上由开球生成的拓扑与公理化拓扑下的内、闭、导集概念相容。

## 1.2 开集与闭集

**定义 1.8 (开集)**

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间，子集  $U \subseteq X$  若对任意  $x \in U$  存在邻域  $V \in \mathcal{N}(x)$  使得  $V \subseteq U$ ，则称  $U$  为  $X$  的一个开集

**命题 1.1**

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间，且  $U \subseteq X$ ，则  $U$  为开集当且仅当对任意  $x \in U$  存在邻域  $V \in \mathcal{N}(x)$  使得  $V \subseteq U$ 。



**证明** 左推右：若  $U$  为开集，则对任意  $x \in U$  按照开集的定义存在邻域  $V \in \mathcal{N}(x)$  使得  $V \subseteq U$ ；

右推左：若  $U$  为空，则显然为开集；若  $U$  非空，则对任意  $x \in U$  存在邻域  $V_x \in \mathcal{N}(x)$  使得  $V_x \subseteq U$ ，因此

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x, \quad (1.7)$$

故  $U$  为开集。

**命题 1.2**

若  $A$  为闭集，则有

$$\overline{A} = A \quad (1.8)$$



**证明** 左推右：先证明  $\overline{A} \subset A$ ，设  $x \in \overline{A}$ ，则按闭包的定义有

$$\forall U \ni x, \quad U \cap A \neq \emptyset, \quad (1.9)$$

若反设  $x \notin A$ ，则由于  $A$  为闭集， $X \setminus A$  为开集，故存在开邻域  $V \ni x$  且  $V \subset X \setminus A$ ，从而  $V \cap A = \emptyset$ ，与上式矛盾，因此  $x \in A$ ，于是  $\overline{A} \subset A$ 。

再证明  $A \subset \overline{A}$ ：设  $x \in A$ ，则对于任意开邻域  $U \ni x$  有  $x \in U \cap A$ ，从而  $U \cap A \neq \emptyset$ ，这说明  $x \in \overline{A}$ ，因此  $A \subset \overline{A}$ 。

右推左：若  $\overline{A} = A$ ，则对任意  $x \in X \setminus A$  有  $x \notin \overline{A}$ ，因此存在开邻域  $U \ni x$  使得

$$U \cap A = \emptyset, \quad (1.10)$$

从而  $X \setminus A$  为开集，故  $A$  为闭集。

**命题 1.3**

$\overline{A}$  为闭集



**证明** 设  $x \in X \setminus \overline{A}$ ，则由  $x \notin \overline{A}$  可知存在开邻域  $U \ni x$  使得  $U \cap A = \emptyset$ ，从而  $U \subset X \setminus \overline{A}$ ，说明  $X \setminus \overline{A}$  为开集，故  $\overline{A}$  为闭集。

**命题 1.4**

$\overline{A}$  为包含  $A$  的最小闭集



**证明** 若  $F$  为任一包含  $A$  的闭集，则由  $A \subset F$  及  $F$  的闭性可推出  $\overline{A} \subset F$ ，因此  $\overline{A}$  是包含  $A$  的最小闭集。

**注**

$E$  为含  $A$  的最小闭集当且仅当  $E = \overline{A}$

**证明**

右推左：已经证明过了

左推右：设  $E$  为含  $A$  的最小闭集，则由于  $\overline{A}$  是包含  $A$  的闭集，由最小性得  $E \subset \overline{A}$ ，另一方面由  $\overline{A}$  为所有包含  $A$  的闭集的交集可得  $\overline{A} \subset E$ ，因此

$$E = \overline{A}. \quad (1.11)$$

**命题 1.5**

若  $A$  为开集，则有

$$A^\circ = A \quad (1.12)$$

**证明** 左推右：由于  $A$  自身为开集且显然  $A \subset A$ ，由  $A^\circ$  作为所有包含于  $A$  的开集的并的定义可知  $A \subset A^\circ$ ，而先前已证明  $A^\circ \subset A$ ，因此  $A^\circ = A$ 。

右推左：因为  $A^\circ$  为开集且

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \quad (1.13)$$

故若  $A^\circ = A$  则  $A$  为开集，从而完成证明。

**命题 1.6**

$A$  的内点集（记  $A^\circ$ ）是所有包含于  $A$  的最大开集



**证明** 记

$$A^\circ = \bigcup\{U \mid U \subset A, U \text{ 为开集}\}, \quad (1.14)$$

则作为开集并的并集  $A^\circ$  本身为开集，且对任意开集  $U$  若  $U \subset A$  则有  $U \subset A^\circ$ ，因此  $A^\circ$  是所有包含于  $A$  的开集中的最大者。

**注**  $B$  为  $A^\circ$  当且仅当  $B$  为包含于  $A$  的最大开集

**证明** 类似

**命题 1.7**

$(X, \tau)$  拓扑空间， $A \subset X$ ，有

$$A^\circ = A^{c-c} \text{ (习题)} \quad (1.15)$$

**命题 1.8**

$A$  为开集当且仅当  $A^c$  为闭集



**证明** 左推右：若  $A$  为开集，则对任意  $A^c$  的极限点  $x$ ，若反设  $x \notin A^c$  即  $x \in A$ ，则由  $A$  的开性可取开邻域  $U$  使得  $x \in U \subset A$ ，从而  $U$  与  $A^c$  无交以违背  $x$  为极限点的假设，因此  $x \in A^c$ ，即  $A^c$  含其所有极限点，故  $A^c$  为闭集。

右推左：设  $A^c$  为闭集且  $x \in A$ ，则  $x \notin A^c$ ，故  $x$  不是  $A^c$  的极限点，因而存在开邻域  $U$  使得  $U \cap A^c = \emptyset$ ，从而  $U \subset A$ ，说明任意点  $x \in A$  都有包含于  $A$  的开邻域，即  $A$  为开集。

## 第2章 连续映射

本章讨论拓扑空间之间的连续映射及其性质。

### 定义 2.1 (连续性)

设拓扑空间  $(X, \mathcal{T}_X)$  与  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , 映射  $f : X \rightarrow Y$  在点  $x \in X$  处连续, 若对任意包含  $f(x)$  的开集  $V \in \mathcal{T}_{f(x)}$ , 存在包含  $x$  的开集  $U \in \mathcal{T}_X$  使得  $f(U) \subset V$ 。

### 命题 2.1

映射  $f : X \rightarrow Y$  在每一点连续当且仅当对于任意开集  $V \subset Y$ , 其原像  $f^{-1}(V)$  在  $X$  中为开集

**证明** 右推左: 设任意包含  $f(x)$  的开集  $V \in \mathcal{T}_{f(x)}$ , 由假设  $f^{-1}(V)$  在  $X$  中为开且包含  $x$ , 于是取  $U = f^{-1}(V)$  可得包含  $x$  的开邻域且  $f(U) \subset V$ , 故  $f$  在  $x$  处连续, 因  $x$  为任意点, 遂得  $f$  在每一点连续。

### 命题 2.2

映射  $f : X \rightarrow Y$  在  $X$  上连续当且仅当对于任意闭集  $C \subset Y$ , 其原像  $f^{-1}(C)$  在  $X$  中为闭集。

### 命题 2.3

$f : X \rightarrow Y$

1.  $\forall U \subset Y$ , 有  $f^{-1}(U^c) = f^{-1}(U)^c$
2.  $\forall A, B \subset Y$  有,  $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$
3. 任意一簇子集有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i). \quad (2.1)$$

4. 对于任意族  $\{U_i\}_{i \in I} \subset Y$ , 有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i).$$

5.  $f(B_1 \cap B_2) \subset f(B_1) \cap f(B_2)$

### 命题 2.4

设拓扑空间  $(X, \mathcal{T}_X)$  与  $(Y, \mathcal{T}_Y)$ , 映射  $f : X \rightarrow Y$ , 则以下四条等价

1. 对任意点  $x \in X$ ,  $f$  在  $x$  连续;
2. 对任意开集  $V \subset Y$ ,  $f^{-1}(V)$  在  $X$  中为开集;
3. 对任意闭集  $C \subset Y$ ,  $f^{-1}(C)$  在  $X$  中为闭集;
4. 若  $\forall A \subset X$ , 有

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad (2.2)$$

5.  $\forall B \subset Y$  有

$$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B}) \quad (2.3)$$

**证明** 1,2,3 相互等价已经证明过了, 下面证明 3 和 4 等价

我们先证明 3 推 4, 要证  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ , 只要证  $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ , 由于  $\overline{f(A)}$  为闭, 对于任意  $a \in A$  有

---

$f(a) \in f(A) \subset \overline{f(A)}$ , 故  $a \in f^{-1}(\overline{f(A)})$ , 即

$$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \quad (2.4)$$

而  $f^{-1}(\overline{f(A)})$  为闭集, 故包含  $\overline{A}$ , 于是  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ .

接下来是 4 推 3, 那我们任取一个闭集

$$E \subset Y, \quad E \text{ 闭}, \quad (2.5)$$

要证  $f^{-1}(E)$  闭于  $X$ , 只要证  $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(E)$ , 只要证  $f(\overline{f^{-1}(E)}) \subset E$ , 这是因为, 由于 3 对任意集合  $A$  成立, 将  $A = f^{-1}(E)$  代入得

$$f(\overline{f^{-1}(E)}) \subset \overline{f(f^{-1}(E))} \subset \overline{E} = E, \quad (2.6)$$

从而  $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(E)$ , 即  $f^{-1}(E)$  为闭集。

# 第3章 网与收敛

在一般拓扑空间中，序列的概念不足以刻画收敛性质，我们需要推广到网的概念。

## 3.1 预序集与定向集

### 定义 3.1 (预序集)

设  $(\Omega, \leq)$  为集合  $\Omega$  上带二元关系  $\leq$  的结构，如果对任意  $x, y, z \in \Omega$  都有 (i)  $x \leq x$  (自反性)，以及 (ii)  $x \leq y$  且  $y \leq z$  蕴含  $x \leq z$  (传递性)，则称  $(\Omega, \leq)$  为预序集



例题 3.1 比如说自然数就是一个预序集

### 定义 3.2 (定向集)

设  $(\Omega, \leq)$  为预序集，如果对任意有限子集  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Omega$  存在  $y \in D$  使得  $x_i \leq y$  对所有  $i = 1, \dots, n$  成立，则称  $(\Omega, \leq)$  为定向集。



例题 3.2 领域就是一个定向集

## 3.2 网的定义与收敛

### 定义 3.3 (网)

设  $(\Omega, \leq)$  为定向集， $X$  为集合，则称任意映射  $x : \Omega \rightarrow X$  为以  $\Omega$  为下标的网，记作  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ ，并称每个  $\alpha \in \Omega$  为该网的下标和位置



### 定义 3.4 (网的收敛)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间， $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  为以定向集  $(\Omega, \leq)$  为下标的网，则称  $(x_\alpha)$  收敛到  $x \in X$  (记作  $x_\alpha \rightarrow x$ ) 若对于任意包含  $x$  的邻域  $U$  存在  $\alpha_0 \in \Omega$  使得对所有  $\alpha \in \Omega$  若  $\alpha \geq \alpha_0$  则  $x_\alpha \in U$ ，即满足

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \exists \alpha_0 \in \Omega \forall \alpha \in \Omega (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U). \quad (3.1)$$



### 命题 3.1

存在一个以邻域族  $\mathcal{N}(x)$  为定向集的网  $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ ，使得对每个  $U \in \mathcal{N}(x)$  有  $x_U \in U$ ，并且该网收敛于  $x$ ，即

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) x_U \in U, \quad (x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow x. \quad (3.2)$$



**证明** 取定向集为邻域族  $\mathcal{N}(x)$  并以反包含关系作为偏序 (即对  $U, V \in \mathcal{N}(x)$  令  $U \geq V$  当且仅当  $U \subseteq V$ )，对每个  $U \in \mathcal{N}(x)$  任取  $x_U \in U$ ，则对于任意邻域  $W \in \mathcal{N}(x)$  取  $\alpha_0 = W$  有

$$\forall W \in \mathcal{N}(x) \exists \alpha_0 = W \in \mathcal{N}(x) \forall \alpha \in \mathcal{N}(x) (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in W), \quad (3.3)$$

从而  $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow x$ .

### 命题 3.2

设  $X$  为拓扑空间， $A \subseteq X$ ，则

$$x \in \overline{A} \iff \exists \text{ net } (x_\alpha)_{\alpha \in D} \subset A \text{ such that } (x_\alpha) \rightarrow x. \quad (3.4)$$



**证明**

若存在网  $(x_\alpha)_{\alpha \in D} \subset A$  且  $(x_\alpha) \rightarrow x$ , 则对任一邻域  $W \in \mathcal{N}(x)$  存在  $\alpha_0$  使得  $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in W$ , 从而  $W \cap A \neq \emptyset$ , 即  $x \in \overline{A}$ ;

反之, 若  $x \in \overline{A}$ , 则对每一邻域  $U \in \mathcal{N}(x)$  选取一点  $x_U \in A \cap U$ , 即

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \quad x_U \in A \cap U, \quad (3.5)$$

由此得到网  $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \subset A$ , 且对于任意  $W \in \mathcal{N}(x)$ , 当  $U \subset W$  时有  $x_U \in U \subset W$ , 因此

$$(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow x, \quad (3.6)$$

从而存在所需的网, 证明完成。

**命题 3.3**

$f$  在  $x$  连续当且仅当对于任意收敛到  $x$  的网  $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$  都有

$$(f(x_U))_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow f(x). \quad (3.7)$$

**证明 右推左**

我们首先有

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \quad (3.8)$$

. 因此对于任意收敛到  $x$  的网  $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ , 由于对于任一包含  $x$  的集合  $A$  有尾部最终包含于  $\overline{A}$  并且  $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ , 其像网收敛于  $f(x)$ , 即

$$(f(x_U))_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow f(x). \quad (3.9)$$

左推右: 设  $f$  在  $x$  处连续, 由  $x \in \overline{A}$ , 知  $U \cap A \neq \emptyset$  则存在来自  $A$  的网  $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$  收敛于  $x$ , 故由连续性其像网收敛于  $f(x)$ , 即

$$(f(x_U))_{U \in \mathcal{N}(x)} \rightarrow f(x). \quad (3.10)$$

# 第4章 拓扑的生成

本章讨论如何从给定的集合族生成拓扑。

## 4.1 拓扑族的交

### 命题 4.1

$X$  为集合, 若  $(\mathcal{T}_\alpha)_\alpha$  为  $X$  上的一族拓扑, 则

$$\mathcal{T} := \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha \quad (4.1)$$

为  $X$  上的拓扑, 且为包含所有  $\mathcal{T}_\alpha$  的最小拓扑, 而  $\bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$  未必为拓扑。◆

**证明** 具体地, 设  $\{U_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{T}$ , 则对任意  $\alpha$  有  $U_i \in \mathcal{T}_\alpha$ , 且由于每个  $\mathcal{T}_\alpha$  对任意并运算闭合, 我们有

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_\alpha \quad (\forall \alpha), \quad (4.2)$$

从而  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}$ , 类似地可证有限交运算的闭合性, 故  $\mathcal{T}$  为拓扑且显然为包含所有  $\mathcal{T}_\alpha$  的最小拓扑, 而  $\bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$  未必为拓扑。◆

## 4.2 拓扑基与子基

### 定义 4.1 (拓扑子基)

$(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间, 若由  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}$  为  $\mathcal{S}$  的最小拓扑, 则称  $\mathcal{S}$  为  $(X, \mathcal{T})$  上的拓扑子基。◆

### 命题 4.2

$f : X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  是拓扑的,  $\mathcal{S}$  是  $Y$  的子基, 则下列两个命题等价:

1.  $f$  连续;
  2. 对任意  $S \in \mathcal{S}$ , 有  $f^{-1}(S)$  开于  $X$ 。
- ◆

**证明** 1→2 显然

2→1 令

$$\mathcal{A} = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ 在 } X \text{ 中为开集}\} \quad (4.3)$$

只要证明  $\mathcal{A} \supset \mathcal{T}_Y$ , 从而对任意  $V \in \mathcal{T}_Y$  有  $f^{-1}(V)$  在  $X$  中开, 即  $f$  连续。

下证  $\mathcal{A} \supset \mathcal{T}_Y$ , 令  $\mathcal{B}$  为生成  $\mathcal{T}_Y$  的一组基, 任取  $V \in \mathcal{T}_Y$ , 则存在指标集  $I$  及基元  $\{B_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{B}$  使得  $V = \bigcup_{i \in I} B_i$ , 从而

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_X, \quad (4.4)$$

### 命题 4.3

若  $\mathcal{S}$  为拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  上的子基,  $(x_\alpha)_\alpha$  是  $X$  中的网,  $x \in X$ , 则以下等价

1.  $x_\alpha \rightarrow x$
- 2.

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \text{ 且 } U \in \mathcal{S} \exists \alpha_0 \in \Omega, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U. \quad (4.5)$$
 ◆

**证明** 1→2 显然

2→1 令

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathcal{T} \mid \exists \alpha_0 \in \Omega, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U, \} \quad (4.6)$$

下证  $\mathcal{A} = \mathcal{T}$

1.  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$  且  $\mathcal{A}$  包含由  $\mathcal{S}$  生成的拓扑：拓扑  $\mathcal{T}$  是由子基  $\mathcal{S}$  生成的，因此任意  $V \in \mathcal{T}$  包含一个有限交

$$B = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n,$$

其中每个  $S_i \in \mathcal{S}$  且  $x \in S_i$ 。由假设，每个  $S_i$  在某一  $\alpha_i$  后包含  $x_\alpha$ ，取  $\alpha_0 = \max \alpha_i$ ，则  $\forall \alpha \geq \alpha_0$ ，有  $x_\alpha \in B$ 。因此  $B \in \mathcal{A}$ 。由于  $B \subset V$  且  $\mathcal{A}$  对超集封闭，得  $V \in \mathcal{A}$ ，即  $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$ 。

2.  $\mathcal{A}$  是拓扑：由定义可见，若  $E_i \in \mathcal{A}$ ，则存在相应的  $\alpha_i$  使得网最终在  $E_i$  中。取  $\alpha_0 = \max \alpha_i$  可得网最终在有限交  $\bigcap_i E_i$  中；对任意族  $\{E_j\}$ ，网最终在某个  $E_j$  中即在其并集内，因此  $\mathcal{A}$  对有限交和任意并封闭，从而  $\mathcal{A}$  是拓扑。
3.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ ：由定义  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$  成立，因为每个  $E \in \mathcal{A}$  本身就是拓扑中的开集。综上， $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ 。由  $\mathcal{A} = \mathcal{T}$  可知，对任意邻域  $U \in \mathcal{N}(x)$ ，都有  $U \in \mathcal{A}$ ，即网最终进入  $U$ ，这正是  $x_\alpha \rightarrow x$  的定义。

#### 定义 4.2

$(X, \mathcal{T})$  是拓扑空间， $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ，若满足对任意  $U \in \mathcal{T}$ ，存在  $C \subset \mathcal{B}$  使得

$$U = \bigcup_{B \in C} B \text{ 也记作 } U = UC \quad (4.7)$$

成立，则称  $\mathcal{B}$  是  $(X, \mathcal{T})$  的拓扑基



**例题 4.1**  $(X, d)$  为度量空间，定义  $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$  则  $\mathcal{B}$  为  $(X, \mathcal{T}_d)$  的一个基。其中  $\mathcal{T}_d$  表示由度量  $d$  所诱导的拓扑，即由所有开球  $B(x, \varepsilon)$  生成的拓扑。

**证明** 设  $U \in \mathcal{T}_d$ ，则按定义  $U$  为  $d$ -开集，即

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ 使得 } B(x, \varepsilon_x) \subset U.$$

由此我们有

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x). \quad (4.8)$$

显然每个  $B(x, \varepsilon_x) \in \mathcal{B}$ ，且该并为  $U$  的覆盖，故  $\mathcal{B}$  为  $(X, \mathcal{T}_d)$  的一个基。

#### 命题 4.4

若  $\mathcal{B}$  是  $(X, \mathcal{T})$  的基， $\mathcal{B}$  是  $(X, \mathcal{T})$  的子基



**证明** 由假设  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ ，且  $\mathcal{T}$  中任意开集均为  $\mathcal{B}$  中元素的并。设  $\mathcal{T}'$  是由  $\mathcal{B}$  生成的拓扑，则：

1. 显然  $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$ ，且  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ ；
2. 对任意  $U \in \mathcal{T}$ ，由基的定义存在  $C \subset \mathcal{B}$  使得

$$U = \bigcup_{B \in C} B, \quad (4.9)$$

而这些  $B$  均在  $\mathcal{T}'$  中，因此  $U \in \mathcal{T}'$ 。

由此得  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$  且  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ ，故  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ ，从而  $\mathcal{B}$  亦为  $(X, \mathcal{T})$  的一个子基。

#### 命题 4.5

若  $\mathcal{S}$  为  $(X, \mathcal{T})$  的子基，则  $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$  为  $X$  的一个基。这里  $\mathcal{S}_{f\cap}$  为由  $\mathcal{S}$  取有限交得到的所有集合



**证明** 1. 由  $\mathcal{S}$  是  $(X, \mathcal{T})$  的子基可知， $\mathcal{S}_{f\cap} \subset \mathcal{T}$  且  $X \in \mathcal{T}$ ，从而  $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\} \subset \mathcal{T}$ 。

2. 设

$$\mathcal{A} \triangleq \{E \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\} \text{ 使得 } E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\},$$

则由子基定义知  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ , 反之由第 1 步知  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ , 故  $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ 。

下证  $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$  满足基的判别条件, 只要证  $\mathcal{A}$  为由  $\mathcal{S}$  生成的子拓扑, 具体如下:

1. 由于  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{f\cap} \subseteq \mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$ , 对任意  $E \in \mathcal{S}$ , 有  $E = E \cap E$ , 且  $E = \bigcup\{E\}$ , 因此  $E \in \mathcal{A}$ , 即  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ 。
2. 空集  $\emptyset$  可以表示为  $\emptyset = \bigcup \emptyset \in \mathcal{A}$ , 而  $X = \bigcup\{X\} \in \mathcal{A}$ ; 此外,  $\mathcal{A}$  对任意并封闭且对有限交封闭, 故  $\mathcal{A}$  为包含  $\mathcal{S}$  的拓扑。

## 第5章 分离公理

我们现在引入分离公理的概念，用以刻画拓扑空间中点与点之间的“可分离性”。

### 定义 5.1 ( $T_0$ 空间 (可分离空间))

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，若对任意  $x, y \in X$  且  $x \neq y$ ,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } y \notin U \quad \text{或} \quad \exists V \in \mathcal{N}(y) \text{ 使得 } x \notin V, \quad (5.1)$$

则称  $(X, \mathcal{T})$  为  $T_0$  空间 (或可分离空间)。

### 定义 5.2 ( $T_1$ 空间)

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，若对任意  $x, y \in X$  且  $x \neq y$ ,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } y \notin U, \quad (5.2)$$

则称  $(X, \mathcal{T})$  为  $T_1$  空间。

**注**  $T_1$  空间等价于：对任意  $x, y \in X$  且  $x \neq y$ ,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x) \text{ 使得 } y \notin U \quad \text{且} \quad \exists V \in \mathcal{N}(y) \text{ 使得 } x \notin V. \quad (5.3)$$

### 命题 5.1

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，则以下条件等价：

1.  $X$  为  $T_1$  空间；
2.  $X$  的每个单点集为闭集；
3.  $X$  的每个有限子集为闭集。

### 定义 5.3 ( $T_2$ 空间 (Hausdorff))

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，若对任意  $x, y \in X$  且  $x \neq y$ ,

$$\exists U \in \mathcal{N}(x), \exists V \in \mathcal{N}(y) \quad \text{使得} \quad U \cap V = \emptyset, \quad (5.4)$$

则称  $(X, \mathcal{T})$  为  $T_2$  空间 (或 Hausdorff 空间)。

**注** 显然有如下包含关系：

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0. \quad (5.5)$$

即任何 Hausdorff 空间都是  $T_1$  空间，任何  $T_1$  空间都是  $T_0$  空间。

### 命题 5.2

设  $(X, \mathcal{T})$  为  $T_2$  空间，则  $X$  中任意网的极限若存在必唯一。即若网  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  满足  $x_\alpha \rightarrow x$  且  $x_\alpha \rightarrow y$ ，则  $x = y$ 。

**证明** 反证法。假设  $x \neq y$ ，由于  $(X, \mathcal{T})$  为  $T_2$  空间，存在  $U \in \mathcal{N}(x)$  和  $V \in \mathcal{N}(y)$  使得

$$U \cap V = \emptyset. \quad (5.6)$$

由于  $x_\alpha \rightarrow x$ ，存在  $\alpha_1 \in \Omega$  使得对所有  $\alpha \geq \alpha_1$ ，有  $x_\alpha \in U$ ；

由于  $x_\alpha \rightarrow y$ ，存在  $\alpha_2 \in \Omega$  使得对所有  $\alpha \geq \alpha_2$ ，有  $x_\alpha \in V$ 。

由定向集的性质，存在  $\alpha_0 \in \Omega$  使得  $\alpha_0 \geq \alpha_1$  且  $\alpha_0 \geq \alpha_2$ ，从而

$$x_{\alpha_0} \in U \quad \text{且} \quad x_{\alpha_0} \in V, \quad (5.7)$$

即  $x_{\alpha_0} \in U \cap V$ 。但这与  $U \cap V = \emptyset$  矛盾。

因此必有  $x = y$ , 即极限唯一。

### 命题 5.3

设  $X$  为拓扑空间, 则以下条件等价:

1.  $X$  为  $T_2$  空间;
2.  $X$  具有网收敛的唯一性。



**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2): 由命题 5.2 已证。

(2)  $\Leftarrow$  (1): 反证法。假设  $X$  不为  $T_2$  空间, 则存在  $x, y \in X$  且  $x \neq y$ , 使得对任意  $U \in \mathcal{N}(x)$  和  $V \in \mathcal{N}(y)$ , 都有

$$U \cap V \neq \emptyset. \quad (5.8)$$

令

$$\Lambda = \{U \cap V : U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y), U \cap V \neq \emptyset\}. \quad (5.9)$$

对于  $\Lambda$  中任意两个元素  $A, B \in \Lambda$ , 设  $A = U_1 \cap V_1$ ,  $B = U_2 \cap V_2$ , 其中  $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(x)$ ,  $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(y)$ 。令  $C = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$ , 则  $C \in \Lambda$  且  $C \subseteq A$  且  $C \subseteq B$ 。因此  $\Lambda$  在反包含序下构成定向集。

对每个  $A \in \Lambda$ , 选取  $z_A \in A$ , 得到网  $(z_A)_{A \in \Lambda}$ 。

对任意  $U_0 \in \mathcal{N}(x)$ , 取  $A_0 = U_0 \cap X \in \Lambda$  (因为  $x \in U_0$  且  $y \in X$ ), 则当  $A \subseteq A_0$  时, 有  $z_A \in A \subseteq A_0 \subseteq U_0$ , 故  $z_A \rightarrow x$ 。

同理, 对任意  $V_0 \in \mathcal{N}(y)$ , 取  $B_0 = X \cap V_0 \in \Lambda$ , 可得  $z_A \rightarrow y$ 。

因此该网同时收敛到  $x$  和  $y$ , 但  $x \neq y$ , 这与网收敛的唯一性矛盾。

故  $X$  必为  $T_2$  空间。

## 5.1 滤子与滤基

### 定义 5.4 (有限交性质)

设  $X$  为集合,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。

称  $\mathcal{F}$  具有有限交性质, 若对任意  $E \subseteq \mathcal{F}$  且  $E$  有限, 存在  $x \in X$  使得  $x \in \bigcap E$ , 即

$$\bigcap_{A \in E} A \neq \emptyset. \quad (5.10)$$



### 定义 5.5 (滤子基)

设  $X$  为集合,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。

若  $\mathcal{F}$  满足:

1.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ;
2. 对任意  $A, B \in \mathcal{F}$ , 存在  $C \in \mathcal{F}$  使得  $C \subseteq A \cap B$ ,

则称  $\mathcal{F}$  为  $X$  上的一个滤子基。



### 定义 5.6 (滤子)

设  $X$  为集合,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。

若  $\mathcal{F}$  满足:

1.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$ ;
2. 对任意  $A, B \in \mathcal{F}$ , 有  $A \cap B \in \mathcal{F}$ ;
3. (向上封闭) 对任意  $A \in \mathcal{F}$  和  $B \subseteq X$ , 若  $B \supseteq A$ , 则  $B \in \mathcal{F}$ ,

则称  $\mathcal{F}$  为  $X$  上的一个滤子。

### 定义 5.7 (邻域基)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间,  $x \in X$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$ 。

称  $\mathcal{B}$  为点  $x$  的一个邻域基, 若对任意  $U \in \mathcal{N}(x)$ , 存在  $B \in \mathcal{B}$  使得

$$B \subseteq U. \quad (5.11)$$

### 命题 5.4

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间,  $x \in X$ ,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$ 。则  $\mathcal{B}$  是点  $x$  的邻域基当且仅当  $\mathcal{B}$  是一个滤子基。

### 定义 5.8 (滤子收敛)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间,  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ,  $x \in X$ 。

称  $\mathcal{F}$  收敛到  $x$ , 记作  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , 若对任意  $U \in \mathcal{N}(x)$ , 存在  $F \in \mathcal{F}$  使得

$$F \subseteq U. \quad (5.12)$$

### 命题 5.5

设  $X$  为  $T_2$  空间,  $\mathcal{F}$  为  $X$  中具有有限交性质的集族。则  $\mathcal{F}$  的收敛点若存在必唯一, 即若  $\mathcal{F} \rightarrow x$  且  $\mathcal{F} \rightarrow y$ , 则  $x = y$ 。

**证明** 反证法。假设  $x \neq y$ , 由于  $X$  为  $T_2$  空间, 存在  $U \in \mathcal{N}(x)$  和  $V \in \mathcal{N}(y)$  使得

$$U \cap V = \emptyset. \quad (5.13)$$

由于  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , 存在  $A \in \mathcal{F}$  使得  $A \subseteq U$ ;

由于  $\mathcal{F} \rightarrow y$ , 存在  $B \in \mathcal{F}$  使得  $B \subseteq V$ 。

因此  $A \cap B \subseteq U \cap V = \emptyset$ , 即  $A \cap B = \emptyset$ 。

但这与  $\mathcal{F}$  具有有限交性质矛盾 (因为  $A, B \in \mathcal{F}$  是有限子族, 其交应非空)。

故必有  $x = y$ , 收敛点唯一。

### 命题 5.6

设  $X$  为拓扑空间, 则下列命题等价:

1.  $X$  为  $T_2$  空间;
2.  $X$  中网收敛的极限唯一性;
3.  $X$  中满足有限交性质的集族收敛唯一性;
4.  $X$  中滤子基收敛唯一性;
5.  $X$  中滤子收敛唯一性。

**证明** 我们按照  $(1) \Leftrightarrow (2)$ ,  $(1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$ ,  $(4) \Rightarrow (2)$  的顺序证明。

$(1) \Leftrightarrow (2)$ : 由命题 5.3 已证。

$(1) \Rightarrow (3)$ : 由命题 5.5 已证。

$(3) \Rightarrow (4)$ : 显然, 因为滤子基是具有有限交性质的集族。

$(4) \Leftrightarrow (5)$ : 设  $\mathcal{B}$  为滤子基, 则  $\mathcal{B}_\uparrow$  为滤子。若  $\mathcal{B} \rightarrow x$  且  $\mathcal{B} \rightarrow y$ , 则  $\mathcal{B}_\uparrow \rightarrow x$  且  $\mathcal{B}_\uparrow \rightarrow y$ 。由滤子收敛唯一性得  $x = y$ 。反之, 滤子本身也是滤子基, 故滤子收敛唯一性蕴含滤子基收敛唯一性。

$(4) \Rightarrow (2)$ : 设  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$  为  $X$  中的网, 且  $x_\alpha \rightarrow x$  且  $x_\alpha \rightarrow y$ 。

令  $\mathcal{B} = \{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\} : \alpha \in \Omega\}$ , 即  $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$ 。

可以验证  $\mathcal{B}$  是一个滤子基:

- $\emptyset \notin \mathcal{B}$ , 因为每个  $E_\alpha$  至少包含  $x_\alpha$ ;
- 对任意  $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{B}$ , 由定向集性质存在  $\gamma \geq \alpha, \beta$ , 则  $E_\gamma \subseteq E_\alpha \cap E_\beta$ 。  
若  $x_\alpha \rightarrow x$ , 则对任意  $U \in \mathcal{N}(x)$ , 存在  $\alpha_0$  使得对所有  $\alpha \geq \alpha_0$  有  $x_\alpha \in U$ , 即  $E_{\alpha_0} \subseteq U$ , 故  $\mathcal{B} \rightarrow x$ 。  
同理  $\mathcal{B} \rightarrow y$ . 由滤子基收敛唯一性,  $x = y$ 。  
因此所有命题等价。

**定义 5.9**

设  $X$  为集合,  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . 定义

$$\mathcal{B}_\uparrow = \{ E \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得 } B \subseteq E \}. \quad (5.14)$$

**命题 5.7**

设  $\mathcal{B}$  为  $X$  上的一个滤子基, 则  $\mathcal{B}_\uparrow$  为  $X$  上的一个滤子。

**证明** 需要验证  $\mathcal{B}_\uparrow$  满足滤子的三个条件。

- (1) 若  $\emptyset \in \mathcal{B}_\uparrow$ , 则存在  $B \in \mathcal{B}$  使得  $B \subseteq \emptyset$ , 即  $B = \emptyset$ , 这与  $\emptyset \notin \mathcal{B}$  矛盾。故  $\emptyset \notin \mathcal{B}_\uparrow$ 。
- (2) 对任意  $E, F \in \mathcal{B}_\uparrow$ , 存在  $B_1 \in \mathcal{B}$  使得  $B_1 \subseteq E$ , 存在  $B_2 \in \mathcal{B}$  使得  $B_2 \subseteq F$ 。  
由于  $\mathcal{B}$  为滤子基, 存在  $B \in \mathcal{B}$  使得  $B \subseteq B_1 \cap B_2$ 。  
因此  $B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq E \cap F$ , 即  $E \cap F \in \mathcal{B}_\uparrow$ 。
- (3) (向上封闭) 若  $E \in \mathcal{B}_\uparrow$  且  $F \supseteq E$ , 则存在  $B \in \mathcal{B}$  使得  $B \subseteq E \subseteq F$ , 故  $F \in \mathcal{B}_\uparrow$ 。  
因此  $\mathcal{B}_\uparrow$  为  $X$  上的一个滤子。

**注** 此时称  $\mathcal{B}_\uparrow$  为包含  $\mathcal{B}$  的最小滤子, 或者说  $\mathcal{B}$  生成滤子  $\mathcal{B}_\uparrow$ 。

## 5.2 正则空间与正规空间

**定义 5.10 (正则空间)**

设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  为正则空间, 若对任意  $x \in X$  和任意闭集  $E \subseteq X$ , 若  $x \notin E$ , 则存在开集  $U, V$  使得

$$x \in U, \quad E \subseteq V \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.15)$$

**命题 5.8**

正则  $+ T_1 \Rightarrow T_2$ , 即: 若  $X$  为正则空间且为  $T_1$  空间, 则  $X$  为  $T_2$  空间。

**证明** 设  $X$  为正则且  $T_1$  的空间,  $x, y \in X$  且  $x \neq y$ 。

由于  $X$  为  $T_1$  空间,  $\{y\}$  为闭集。因为  $x \notin \{y\}$ , 由正则性, 存在开集  $U, V$  使得

$$x \in U, \quad \{y\} \subseteq V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.16)$$

因此  $x \in U$ ,  $y \in V$ , 且  $U \cap V = \emptyset$ , 故  $X$  为  $T_2$  空间。

**定义 5.11 ( $T_3$  空间)**

设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  为  $T_3$  空间, 若  $X$  既是正则空间又是  $T_1$  空间。

**注** 由命题 5.8,  $T_3 \Rightarrow T_2$ 。因此分离公理的层次为:  $T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ 。

**命题 5.9**

$X$  为正则空间当且仅当对任意  $x \in X$ , 对任意  $V \in \mathcal{N}(x)$ , 存在  $U \in \mathcal{N}(x)$  使得  $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。

**证明** ( $\Rightarrow$ ): 设  $X$  为正则空间,  $x \in X$ ,  $V \in \mathcal{N}(x)$ 。

不妨设  $V$  为开集 (否则取  $V$  的开邻域)。令  $E = V^c$ , 则  $E$  为闭集且  $x \notin E$ 。

由正则性, 存在开集  $U, W$  使得  $x \in U$ ,  $E \subseteq W$ , 且  $U \cap W = \emptyset$ 。

因为  $U \cap W = \emptyset$ , 所以  $U \subseteq W^c$ 。因此  $\overline{U} \subseteq \overline{W^c}$ 。

又因为  $W$  为开集, 所以  $W^c$  为闭集, 故  $\overline{W^c} = W^c$ 。

因为  $E \subseteq W$ , 所以  $W^c \subseteq E^c = V$ 。

综上,  $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$ 。

( $\Leftarrow$ ): 设条件成立, 即对任意  $x \in X$  和  $V \in \mathcal{N}(x)$ , 存在  $U \in \mathcal{N}(x)$  使得  $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。

设  $x \in X$ ,  $E$  为闭集且  $x \notin E$ 。则  $V = E^c$  为开集且  $x \in V$ 。

由条件, 存在开邻域  $U$  使得  $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V = E^c$ 。

令  $W = (\overline{U})^c$ , 则  $W$  为开集。

因为  $\overline{U} \subseteq E^c$ , 所以  $E \subseteq (\overline{U})^c = W$ 。

又因为  $U \cap W = U \cap (\overline{U})^c = \emptyset$ 。

因此  $x \in U$ ,  $E \subseteq W$ , 且  $U \cap W = \emptyset$ , 故  $X$  为正则空间。

### 定义 5.12 (正规空间)

设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  为正规空间, 若对任意  $A, B$  为  $X$  中不相交的闭集, 即  $A \cap B = \emptyset$ , 存在  $U, V$  为  $X$  中不相交的开集, 使得

$$A \subseteq U \quad \text{且} \quad B \subseteq V. \quad (5.17)$$

### 命题 5.10

$X$  为正规空间当且仅当对任意闭集  $A \subseteq X$ , 对任意开集  $V \supseteq A$ , 存在开集  $U$  使得  $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。



**证明** ( $\Rightarrow$ ): 设  $X$  为正规空间,  $A$  为闭集,  $V$  为开集且  $A \subseteq V$ 。

令  $B = V^c$ , 则  $B$  为闭集, 且  $A \cap B = \emptyset$ 。

由正规性, 存在开集  $U, W$  使得  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq W$ , 且  $U \cap W = \emptyset$ 。

因为  $U \cap W = \emptyset$ , 所以  $U \subseteq W^c$ 。因此  $\overline{U} \subseteq \overline{W^c}$ 。

又因为  $W$  为开集, 所以  $W^c$  为闭集, 故  $\overline{W^c} = W^c$ 。

因为  $B \subseteq W$ , 所以  $W^c \subseteq B^c = V$ 。

综上,  $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$ 。

( $\Leftarrow$ ): 设条件成立, 即对任意闭集  $A$  和开集  $V \supseteq A$ , 存在开集  $U$  使得  $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$ 。

设  $A, B$  为不相交的闭集, 即  $A \cap B = \emptyset$ 。则  $V = B^c$  为开集且  $A \subseteq V$ 。

由条件, 存在开集  $U$  使得  $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V = B^c$ 。

令  $W = (\overline{U})^c$ , 则  $W$  为开集。

因为  $\overline{U} \subseteq B^c$ , 所以  $B \subseteq (\overline{U})^c = W$ 。

又因为  $U \cap W = U \cap (\overline{U})^c = \emptyset$ 。

因此  $A \subseteq U$ ,  $B \subseteq W$ , 且  $U \cap W = \emptyset$ , 故  $X$  为正规空间。

### 定义 5.13 ( $T_4$ 空间)

设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  为  $T_4$  空间, 若  $X$  既是正规空间又是  $T_1$  空间。



### 命题 5.11

正规 + $T_1 \Rightarrow T_3$ , 即: 若  $X$  为正规空间且为  $T_1$  空间, 则  $X$  为正则空间。



**证明** 设  $X$  为正规且  $T_1$  的空间,  $x \in X$ ,  $E$  为闭集且  $x \notin E$ 。

由于  $X$  为  $T_1$  空间,  $\{x\}$  为闭集。因为  $\{x\} \cap E = \emptyset$ , 由正规性, 存在开集  $U, V$  使得

$$\{x\} \subseteq U, \quad E \subseteq V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \emptyset. \quad (5.18)$$

因此  $x \in U, E \subseteq V$ , 且  $U \cap V = \emptyset$ , 故  $X$  为正则空间。

由定义,  $X$  也是  $T_1$  空间, 因此  $X$  为  $T_3$  空间。

# 第6章 紧致性

## 6.1 紧空间

### 定义 6.1 (紧空间)

设  $X$  为拓扑空间，称  $X$  为紧空间，若对任意  $\mathcal{U}$  为  $X$  的开覆盖（即  $\mathcal{U}$  为开集族且  $\bigcup \mathcal{U} = X$ ），存在  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  使得  $\mathcal{V}$  为  $X$  的覆盖且  $\mathcal{V}$  为有限集（即存在有限子覆盖）。

### 定义 6.2 (Lindelöf 空间)

设  $X$  为拓扑空间，称  $X$  为 Lindelöf 空间，若对任意开覆盖，存在可数子覆盖。

**注** Lindelöf 空间有时也称为完全可数紧空间。其定义等价于：任意开覆盖  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  都存在可数子集  $\{U_{\alpha_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  使得  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\alpha_n} = X$ 。

### 定义 6.3 (可数紧空间)

设  $(X, \tau)$  为拓扑空间，称  $(X, \tau)$  为可数紧空间，若对任意可数开覆盖，存在有限子覆盖（即 CA<sub>2</sub>）。

### 定义 6.4 (序列紧空间)

设  $X$  为拓扑空间，称  $X$  为序列紧空间，若  $X$  中的每个序列  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  都有收敛子序列。

### 命题 6.1

CA<sub>2</sub>  $\Rightarrow$  Lindelöf 空间，即可数紧空间必为 Lindelöf 空间。

**证明** 设  $X$  为可数紧空间， $\mathcal{U}$  为  $X$  的任意开覆盖。

由已知， $X$  为 CA<sub>2</sub> 空间，即  $X$  为第二可数空间，存在可数拓扑基  $\mathcal{B}$ 。

由命题 8.3，存在  $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$  使得  $\overline{\mathcal{B}}$  覆盖  $X$  且  $\overline{\mathcal{B}}$  加细  $\mathcal{U}$ 。

因为  $\mathcal{B}$  可数，所以  $\overline{\mathcal{B}}$  也可数。

由引理 8.1，由于  $\overline{\mathcal{B}}$  可数且加细  $\mathcal{U}$ ，存在  $\mathcal{U}$  的可数子族覆盖  $X$ 。

因此  $X$  为 Lindelöf 空间。

### 命题 6.2

CA<sub>2</sub>  $\Rightarrow$  可分，即第二可数空间必为可分空间。

**证明** 设  $X$  为第二可数空间， $\mathcal{B}$  为  $X$  的可数拓扑基，且  $\phi \neq \mathcal{B}$ （即  $\mathcal{B}$  非空）。

对每个  $B \in \mathcal{B}$ ，取  $\alpha_B \in B$ 。

令  $D = \{\alpha_B : B \in \mathcal{B}\}$ 。

则  $D$  为可数集（可数集  $\mathcal{B}$  的像）。

下证  $\overline{D} = X$ 。

对任意  $x \in X$  和  $x$  的任意开邻域  $U$ ，由于  $\mathcal{B}$  为拓扑基，存在  $B \in \mathcal{B}$  使得  $x \in B \subseteq U$ 。

因为  $\alpha_B \in B \subseteq U$ ，所以  $\alpha_B \in U \cap D$ ，即  $U \cap D \neq \emptyset$ 。

因此  $x \in \overline{D}$ 。

由  $x$  的任意性， $\overline{D} = X$ 。

故  $X$  为可分空间。

# 第7章 完全正则空间与 Urysohn 引理

## 7.1 完全正则空间

### 定义 7.1 (完全正则空间)

设  $X$  为拓扑空间，称  $X$  为完全正则空间，若对任意  $x \in X$  和闭集  $F \subseteq X$  且  $x \notin F$ ，存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(x) = 0$  且  $f(F) \subseteq \{1\}$ 。

### 命题 7.1

完全正则的  $\Rightarrow$  正则，即：若  $X$  为完全正则空间，则  $X$  为正则空间。

**证明** 设  $x \in X$ ,  $F$  为闭集且  $x \notin F$ 。

由完全正则性，存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(x) = 0$  且  $f(F) \subseteq \{1\}$ 。

令

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right). \quad (7.1)$$

因为  $f$  连续， $[0, \frac{1}{2})$  和  $(\frac{1}{2}, 1]$  在  $[0, 1]$  中为开集，故  $U, V$  为开集。

因为  $f(x) = 0 \in [0, \frac{1}{2})$ ，所以  $x \in U$ 。

因为  $f(F) \subseteq \{1\} \subseteq (\frac{1}{2}, 1]$ ，所以  $F \subseteq V$ 。

因为  $[0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$ ，所以  $U \cap V = \emptyset$ 。

因此  $X$  为正则空间。

### 定义 7.2 ( $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间)

设  $X$  为拓扑空间，称  $X$  为  $T_{3\frac{1}{2}}$  空间，若  $X$  既是完全正则空间又是  $T_1$  空间。

### 定义 7.3

设  $X$  为拓扑空间，称  $X$  为完全正规空间，若对任意  $A, B$  为不相交闭集，存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(A) \subseteq \{0\}$  且  $f(B) \subseteq \{1\}$ ，则称  $X$  满足 Urysohn 可分离性。

### 命题 7.2

若  $X$  满足 Urysohn 可分离性，则  $X$  正规。

**证明** 设  $A, B$  为不相交闭集。

由 Urysohn 可分离性，存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(A) \subseteq \{0\}$  且  $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

令

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right). \quad (7.2)$$

因为  $f$  连续， $[0, \frac{1}{2})$  和  $(\frac{1}{2}, 1]$  在  $[0, 1]$  中为开集，故  $U, V$  为开集。

因为  $f(A) \subseteq \{0\} \subseteq [0, \frac{1}{2})$ ，所以  $A \subseteq U$ 。

因为  $f(B) \subseteq \{1\} \subseteq (\frac{1}{2}, 1]$ ，所以  $B \subseteq V$ 。

因为  $[0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \emptyset$ ，所以  $U \cap V = \emptyset$ 。

因此  $X$  为完全正则空间。

## 7.2 Urysohn 引理

### 引理 7.1 (Urysohn 引理的构造)

设  $\Lambda \rightarrow [0, 1]$  为有序对等，且  $\lambda \in \Lambda$ 。设  $X$  为拓扑空间， $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  为  $X$  中一族开集满足：对任意  $\alpha, \beta \in \Lambda$ ，若  $\alpha < \beta$ ，则  $U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta$ ，且  $U_1 = X$ 。则定义  $f : X \rightarrow [0, 1] \forall x$ ，

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\} \quad (7.3)$$

为连续函数。



**证明** 设  $c \in [0, 1]$ ，需证明  $f^{-1}([0, c))$  与  $f^{-1}((c, 1])$  均为  $X$  中开集。

证明  $f^{-1}([0, c))$  为开集：

$$\{x : f(x) < c\} = \{x : \exists \alpha \in \Lambda \text{ 且 } \alpha < c \text{ 使得 } x \in U_\alpha\} \quad (7.4)$$

$$= \bigcup_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \alpha < c}} U_\alpha \quad (7.5)$$

这是开集的并，故为开集。

证明  $f^{-1}((c, 1])$  为开集：

对于  $\inf > c$ ，即  $f(x) > c$ ，则对任意  $\alpha < c$  均有  $x \notin U_\alpha$ 。

$$\{x : f(x) > c\} = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ c < \alpha}} \overline{U_\alpha}^c \quad (7.6)$$

通过如下推理：若  $f(x) > c$ ，则  $\inf\{\alpha : x \in U_\alpha\} > c$ ，因此  $\exists \alpha \in \Lambda$  且  $c < \alpha < f(x)$  使得  $x \notin U_\alpha$ 。由于  $\overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta$  对任意  $\beta > \alpha$ ，可知  $x \notin \overline{U_\alpha}$ ，即  $x \in \overline{U_\alpha}^c$ 。

反之，若  $x \in \overline{U_\alpha}^c$  对某  $\alpha > c$ ，则  $x \notin \overline{U_\alpha}$ ，由  $U_\gamma \subseteq \overline{U_\gamma} \subseteq U_\alpha$  对  $\gamma < \alpha$ ，可知  $\forall \gamma < \alpha$  有  $x \notin U_\gamma$ ，因此  $\inf\{\beta : x \in U_\beta\} \geq \alpha > c$ ，即  $f(x) > c$ 。

因此  $\{x : f(x) > c\}$  为开集的并，故为开集。

综上， $f$  为连续函数。

### 定理 7.1 (Urysohn 引理)

设  $X$  为正规空间， $A, B$  为  $X$  中不相交闭集。则存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(A) \subseteq \{0\}$  且  $f(B) \subseteq \{1\}$ 。



**证明** 设  $A, B$  为不相交闭集，即  $A \cap B = \emptyset$ 。

由正规性，存在开集  $U_{\frac{1}{2}}$  使得

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c. \quad (7.7)$$

令  $\Lambda = \left\{ \frac{m}{2^n} : n, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n \right\}$  为  $[0, 1]$  中的二进有理数。

通过归纳法，对所有  $\alpha \in \Lambda \cap [0, 1]$ ，构造开集  $U_\alpha$  使得：对任意  $\alpha, \beta \in \Lambda$  且  $\alpha < \beta$ ，有

$$A \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta. \quad (7.8)$$

具体构造如下：假设对所有分母为  $2^n$  的  $\alpha \in \Lambda$  已构造  $U_\alpha$ 。对分母为  $2^{n+1}$  的  $\alpha = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$ ，由正规性，存在开集  $U_\alpha$  使得

$$\overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_{\frac{k+1}{2^{n+1}}}. \quad (7.9)$$

令  $U_1 = X$ 。则  $(U_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  满足引理 7.1 的条件。

定义  $f : X \rightarrow [0, 1]$  为

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}. \quad (7.10)$$

由引理 7.1,  $f$  为连续函数。

对  $x \in B$ , 因为  $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c$ , 所以  $x \notin \overline{U_{\frac{1}{2}}}$ , 因此对所有  $\alpha \in \Lambda \cap [0, 1]$ , 有  $x \notin U_\alpha$  (由嵌套性质)。故  $f(x) = 1$ 。

对  $x \in A$ , 因为  $A \subseteq U_\alpha$  对所有  $\alpha \in \Lambda \cap (0, 1]$ , 所以  $f(x) = 0$ 。

因此  $f(A) \subseteq \{0\}$  且  $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

### 推论 7.1

$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ , 即: 若  $X$  为  $T_4$  空间, 则  $X$  为  $T_{3\frac{1}{2}}$  空间。



**证明** 由  $T_4$  空间的定义,  $X$  为正规空间且为  $T_1$  空间。

设  $x \in X$ ,  $B$  为闭集且  $x \notin B$ 。

由  $T_1$  性质, 单点集  $\{x\}$  为闭集。

因为  $\{x\} \cap B = \emptyset$ , 由 Urysohn 引理 (定理 7.1), 存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(x) = 0$  且  $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

因此  $X$  为完全正则空间。

结合  $X$  为  $T_1$  空间, 故  $X$  为  $T_{3\frac{1}{2}}$  空间。

### 推论 7.2

正则 + 正规  $\Rightarrow$  完全正则, 即: 若  $X$  既是正则空间又是正规空间, 则  $X$  为完全正则空间。



**证明** 设  $x \in X$ ,  $B$  为闭集且  $x \notin B$ 。

由正则性, 存在开集  $U, V$  使得  $x \in U$ ,  $B \subseteq V$ , 且  $U \cap V = \emptyset$ 。

因此  $x \in U \subseteq V^c$ , 即  $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V^c = B^c$  (这里  $\overline{U} \subseteq V^c$  因为  $U \cap V = \emptyset$ )。

由于  $\{x\}$  和  $B$  为不相交闭集 ( $\{x\} \subseteq \overline{U}$  且  $\overline{U} \subseteq B^c$ ), 由 Urysohn 引理 (定理 7.1) 和正规性, 存在连续函数  $f : X \rightarrow [0, 1]$  使得  $f(\{x\}) = \{0\}$  且  $f(B) \subseteq \{1\}$ 。

因此  $X$  为完全正则空间。

# 第8章 可分性与可数性公理

## 8.1 可分空间与稠密性

### 定义 8.1 (稠密)

设  $X$  为拓扑空间,  $D \subseteq X$ 。称  $D$  在  $X$  中稠密, 若  $\overline{D} = X$ 。

### 定义 8.2 (可分空间)

设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  为可分空间, 若  $X$  中存在可数稠密子集, 即存在可数集  $D \subseteq X$  使得  $\overline{D} = X$ 。

**例题 8.1** 以下是可分空间的例子:

1.  $\mathbb{R}^n$  是可分的, 令  $D = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}\}$ , 则  $D$  可数且  $\overline{D} = \mathbb{R}^n$ 。
2. 可分空间的可分子空间也是可分的。

## 8.2 Lindelöf 空间与正规性

### 命题 8.1

正则 + Lindelöf  $\Rightarrow$  正规, 即: 若  $X$  既是正则空间又是 Lindelöf 空间, 则  $X$  为正规空间。

**证明** 设  $A, B$  为不相交闭集。

对每个  $a \in A$ , 由正则性, 存在开邻域  $U_a$  使得  $a \in U_a$  且  $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$ 。

对每个  $b \in B$ , 由正则性, 存在开邻域  $V_b$  使得  $b \in V_b$  且  $\overline{V_b} \cap A = \emptyset$ 。

由于  $A, B$  为闭集且  $X$  为 Lindelöf 空间, 由命题 8.2, 存在可数序列  $(U_n)_{n=1}^\infty$  为  $A$  的开覆盖, 满足对所有  $n$ , 有  $\overline{U_n} \cap B = \emptyset$ 。

类似地, 存在可数序列  $(V_n)_{n=1}^\infty$  为  $B$  的开覆盖, 满足对所有  $n$ , 有  $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ 。

定义新的开集序列:

$$U_n^* = U_n \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

$$V_n^* = V_n \setminus (\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \dots \cup \overline{U_n}), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.2)$$

则  $U_n^*$  和  $V_n^*$  均为开集 (开集减去有限个闭集的并)。

令

$$U^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^*, \quad V^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^* \quad (8.3)$$

则  $U^*, V^*$  为开集。

证明  $A \subseteq U^*$ :

对任意  $a \in A$ , 存在  $n$  使得  $a \in U_n$ 。由于  $\overline{V_k} \cap A = \emptyset$  对所有  $k$ , 所以  $a \notin \overline{V_k}$  对所有  $k \leq n$ 。因此  $a \in U_n^* \subseteq U^*$ 。

证明  $B \subseteq V^*$ :

类似地, 对任意  $b \in B$ , 存在  $n$  使得  $b \in V_n$ , 且  $b \notin \overline{U_k}$  对所有  $k \leq n$ , 因此  $b \in V_n^* \subseteq V^*$ 。

证明  $U^* \cap V^* = \emptyset$ :

对任意  $n, m \in \mathbb{N}$ , 不失一般性设  $n \leq m$ 。则

$$U_n^* \cap V_m^* = \left( U_n \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{V_k} \right) \cap \left( V_m \setminus \bigcup_{k=1}^m \overline{U_k} \right) \subseteq U_n \cap (\overline{U_n})^c = \emptyset \quad (8.4)$$

因为  $n \leq m$ , 所以  $\overline{U_n} \subseteq \bigcup_{k=1}^m \overline{U_k}$ , 从而  $V_m^* \subseteq (\overline{U_n})^c$ 。

因此  $U^* \cap V^* = \emptyset$ 。

故  $X$  为正规空间。

### 命题 8.2

若  $X$  为 Lindelöf 空间,  $A$  为  $X$  中闭集, 则对  $A$  的任意开覆盖  $\mathcal{U}$  (即由  $X$  中开集组成且覆盖  $A$ ), 存在  $\mathcal{U}$  的可数子覆盖覆盖  $A$ 。



**证明** 设  $X$  为 Lindelöf 空间,  $A$  为闭集,  $\mathcal{U}$  为  $A$  的开覆盖, 即  $\bigcup \mathcal{U} \supseteq A$ 。

考虑  $X$  的开覆盖  $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$ 。

由 Lindelöf 性质, 存在可数子覆盖覆盖  $X$ 。

若  $A^c$  在该子覆盖中, 则去掉  $A^c$  后, 剩余的可数个  $\mathcal{U}$  中的开集仍覆盖  $A$ 。

若  $A^c$  不在该子覆盖中, 则该子覆盖本身就是  $\mathcal{U}$  的可数子覆盖, 覆盖  $X$ , 因此也覆盖  $A$ 。

综上, 存在  $\mathcal{U}$  的可数子覆盖覆盖  $A$ 。

## 8.3 第二可数空间

### 定义 8.3 (第二可数空间)

设  $X$  为拓扑空间, 称  $X$  为第二可数空间 (即 CA<sub>2</sub> 空间), 若  $X$  存在可数拓扑基。



### 定义 8.4 (加细)

设  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 。称  $\mathcal{B}$  为  $\mathcal{A}$  的加细, 若对任意  $A \in \mathcal{A}$ , 存在  $B \in \mathcal{B}$  使得  $A \subseteq B$ 。



### 命题 8.3

若  $\mathcal{B}$  为  $X$  的拓扑基,  $\mathcal{U}$  为  $X$  的开覆盖, 即  $\bigcup \mathcal{U} = X$ , 则存在  $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$  使得  $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$ , 且  $\overline{\mathcal{B}}$  加细  $\mathcal{U}$ 。



### 引理 8.1

设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  为  $X$  的覆盖 (不要求是拓扑基), 且  $\mathcal{A}$  加细  $\mathcal{B}$ 。若  $\mathcal{A}$  可数, 则存在可数的  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$  使得  $\mathcal{B}'$  覆盖  $X$ 。



**证明** 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  均为  $X$  的覆盖,  $\mathcal{A}$  加细  $\mathcal{B}$ , 且  $\mathcal{A}$  可数。

由加细的定义, 对每个  $A \in \mathcal{A}$ , 存在  $B_A \in \mathcal{B}$  使得  $A \subseteq B_A$ 。

令  $\mathcal{B}' = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ 。

则  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 。

因为  $\mathcal{A}$  可数, 所以  $\mathcal{B}' = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$  也是可数的 (可数集的像)。

且

$$\bigcup \mathcal{B}' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B_A \supseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X \quad (8.5)$$

因此  $\mathcal{B}'$  是  $\mathcal{B}$  的可数子族且覆盖  $X$ 。

## 8.4 可度量空间

### 定义 8.5 (可度量空间)

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，称  $X$  为可度量空间。若满足： $\exists d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  (伪) 度量，使得：

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T} \quad (8.6)$$

**性质** 若  $X$  为一个可度量空间，则以下等价

1.  $X$  为  $CA_2$  的。
2.  $X$  为可分空间。
3.  $X$  为 Lindelöf 空间。

**证明**  $1 \Rightarrow 2$ : 设  $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  为  $X$  的可数拓扑基（定义 8.3）。对每个非空  $B_n$  取一点  $x_n \in B_n$ ，令  $D = \{x_n : B_n \neq \emptyset\}$ ，则  $D$  可数。任取非空开集  $U$ ，存在基元  $B_n \subset U$ ，故  $x_n \in D \cap U \neq \emptyset$ ，从而  $\overline{D} = X$ （定义 8.2），即  $X$  可分。

$1 \Rightarrow 3$ : 令  $\mathcal{U}$  为  $X$  的任一开覆盖。由命题 8.3，存在  $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$  使得  $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$  且  $\overline{\mathcal{B}}$  加细  $\mathcal{U}$ 。因  $\mathcal{B}$  可数， $\overline{\mathcal{B}}$  亦可数。由引理 8.1，存在  $\mathcal{U}$  的可数子族覆盖  $X$ ，故  $X$  为 Lindelöf 空间。

### 命题 8.4 (基的等价刻画)

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间， $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ 。则以下等价：

1.  $\mathcal{B}$  是  $(X, \mathcal{T})$  的拓扑基；
2. 对任意  $U \in \mathcal{T}$  与任意  $x \in U$ ，存在  $B \in \mathcal{B}$  使得  $x \in B \subset U$ 。

**证明**  $(1) \Rightarrow (2)$ : 设  $U \in \mathcal{T}$ 。由基的定义，存在  $C \subset \mathcal{B}$  使得  $U = \bigcup_{C \in C} C$ 。取  $x \in U$ ，则存在  $C \in C$  使  $x \in C$ ，且  $C \subset U$ ，令  $B = C$  即得。

$(2) \Rightarrow (1)$ : 设  $U \in \mathcal{T}$ ，令  $C = \{B \in \mathcal{B} : B \subset U\}$ 。一方面  $\bigcup C \subset U$ ；另一方面，任意  $x \in U$ ，由 (2) 存在  $B \in \mathcal{B}$  使  $x \in B \subset U$ ，故  $x \in \bigcup C$ 。于是  $U \subset \bigcup C$ ，从而  $U = \bigcup C$ 。

**证明** (补充： $2 \Rightarrow 1$  与  $3 \Rightarrow 1$ ，度量空间情形)

$2 \Rightarrow 1$ : 设  $(X, d)$  可分，取可数稠密集  $D$ 。对  $x \in D$  与  $n \in \mathbb{N}^*$ ，记  $B_{x,n} = B(x, 1/n)$ ，并令

$$\mathcal{B} = \{B_{x,n} : x \in D, n \in \mathbb{N}^*\}.$$

则  $\mathcal{B}$  为可数族。任取开集  $U$  与  $y \in U$ ，取  $\varepsilon > 0$  使  $B(y, \varepsilon) \subset U$ 。取  $n$  使  $2/n < \varepsilon$ ，由  $D$  稠密可取  $x \in D \cap B(y, 1/n)$ 。则  $y \in B(x, 1/n)$  且对任意  $z \in B(x, 1/n)$  有  $d(z, y) \leq d(z, x) + d(x, y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \varepsilon$ ，故  $B(x, 1/n) \subset B(y, \varepsilon) \subset U$ 。由命题 8.4 知  $\mathcal{B}$  为可数基，故  $X$  为  $CA_2$ 。

$3 \Rightarrow 1$ : 设  $(X, d)$  为 Lindelöf。对每个  $n \in \mathbb{N}^*$ ，考虑半径  $1/n$  的开球族

$$\mathcal{U}_n = \{B(x, 1/n) : x \in X\},$$

它覆盖  $X$ 。由 Lindelöf 性质，存在可数子族  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{U}_n$  覆盖  $X$ 。令  $\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{B}_n$ ，则  $\mathcal{B}$  可数。任取开集  $U$  与  $y \in U$ ，取  $\varepsilon > 0$  使  $B(y, \varepsilon) \subset U$ ，并取  $n$  使  $2/n < \varepsilon$ 。因  $\mathcal{B}_n$  覆盖  $X$ ，存在  $B(x, 1/n) \in \mathcal{B}_n$  使  $y \in B(x, 1/n)$ 。同理得  $B(x, 1/n) \subset B(y, \varepsilon) \subset U$ 。故由命题 8.4， $\mathcal{B}$  为可数基， $X$  为  $CA_2$ 。

### 命题 8.5 (紧的基刻画)

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间， $\mathcal{B}$  为  $X$  的一组拓扑基。则以下等价：

1.  $X$  为紧空间；
2. 对任意子族  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ ，若  $\bigcup \mathcal{U} = X$ ，则存在有限子族  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$  使得  $\bigcup \mathcal{U}_0 = X$ 。

**证明**  $(1) \Rightarrow (2)$ : 显然。由基元素构成的覆盖亦为开覆盖，紧性蕴含存在有限子覆盖。

$(2) \Rightarrow (1)$ : 任取开覆盖  $\mathcal{V}$ 。由命题 8.3，存在  $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$  使得  $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$  且  $\overline{\mathcal{B}}$  加细  $\mathcal{V}$ 。由 (2) 可取有限子族  $\overline{\mathcal{B}}_0 \subset \overline{\mathcal{B}}$  覆盖  $X$ 。对每个  $B \in \overline{\mathcal{B}}_0$ ，取相应的  $V_B \in \mathcal{V}$  使得  $B \subset V_B$ ，则  $\{V_B : B \in \overline{\mathcal{B}}_0\}$  为  $\mathcal{V}$  的有限子覆盖，故  $X$  紧。

**命题 8.6 (紧的等价刻画：闭集的有限交性质)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间。以下命题等价：

1.  $X$  为紧空间；
2. 对任意闭集族  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , 若  $\mathcal{F}$  具有有限交性质（即任意有限子族的交非空），则

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset.$$



**证明** (1) $\Rightarrow$ (2)：设  $\mathcal{F}$  为闭集族且具有有限交性质。若反设  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ , 则其补开的族  $\mathcal{U} := \{F^c : F \in \mathcal{F}\}$  为  $X$  的开覆盖。由紧性，存在有限子覆盖  $\{F_i^c\}_{i=1}^n$ , 则

$$X = \bigcup_{i=1}^n F_i^c \iff \bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset,$$

这与  $\mathcal{F}$  的有限交性质矛盾，故应有  $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设  $\mathcal{U}$  为  $X$  的开覆盖。令闭集族  $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ , 则  $\mathcal{F}$  具有有限交性质且若反设  $\mathcal{U}$  无有限子覆盖，则对任意有限子集  $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ , 有

$$U_1 \cup \dots \cup U_n \neq X \iff (X \setminus U_1) \cap \dots \cap (X \setminus U_n) \neq \emptyset,$$

因而  $\mathcal{F}$  具有有限交性质。由(2)得

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset \iff X \setminus \bigcup \mathcal{U} \neq \emptyset,$$

与  $\mathcal{U}$  为覆盖矛盾。故  $\mathcal{U}$  必有有限子覆盖， $X$  紧。

**定义 8.6 (滤子与滤子基的接触点)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间。

1. 若  $\mathcal{F}$  为  $X$  上的滤子，称  $x \in X$  为  $\mathcal{F}$  的接触点，若  $\forall A \in \mathcal{F}$  均有  $x \in \overline{A}$ 。等价地  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$ 。
2. 若  $\mathcal{B}$  为  $X$  上的滤子基，称  $x \in X$  为  $\mathcal{B}$  的接触点，若  $\forall B \in \mathcal{B}$  均有  $x \in \overline{B}$ 。等价地  $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ 。

**命题 8.7 (紧的等价刻画：滤子/滤子基的接触点)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，则以下等价：

1.  $X$  为紧空间；
2.  $X$  中任意滤子基都有接触点；
3.  $X$  中任意滤子都有接触点。



**证明** (2) $\Leftrightarrow$ (3)：若  $\mathcal{B}$  为滤子基，记其生成的滤子为  $\mathcal{B}_\uparrow$ 。则对任意  $x$ ,

$$x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \iff \forall F \in \mathcal{B}_\uparrow \exists B \in \mathcal{B} (B \subset F \& x \in \overline{B} \subset \overline{F}) \iff x \in \bigcap_{F \in \mathcal{B}_\uparrow} \overline{F}.$$

故两者的接触点集合一致。

(1) $\Rightarrow$ (2)：设  $X$  紧且  $\mathcal{B}$  为滤子基。闭集族  $\{\overline{B} : B \in \mathcal{B}\}$  具有有限交性质；由命题 8.6 得  $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \neq \emptyset$ , 取其中一点即为接触点。

(2) $\Rightarrow$ (1)：反证。若  $X$  不紧，取无有限子覆盖的开覆盖  $\mathcal{U}$ ，令闭集族  $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ , 则  $\mathcal{F}$  具有有限交性质且

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset.$$

定义由  $\mathcal{F}$  的有限交组成的族

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{i=1}^n F_i : F_i \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

则  $\mathcal{B}$  为滤子基，且每个  $B \in \mathcal{B}$  为闭集。由(2)存在接触点  $x \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ , 矛盾。故  $X$  紧。

**定义 8.7 (超滤子)**

设  $X$  为非空集合,  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$  为  $X$  上的一个滤子。称  $\mathcal{U}$  为  $X$  上的一个超滤子 (极大滤子), 若满足: 对任意  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ , 只要  $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{A}$ , 则  $\mathcal{A}$  不是  $X$  上的滤子。

**命题 8.8 (超滤子引理)**

任意  $X$  上的滤子  $\mathcal{F}$  均可扩张为一个超滤子  $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ 。



**证明** 令

$$C = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ 是 } X \text{ 上的滤子且 } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\},$$

以包含关系为序。任一链  $\{\mathcal{G}_i\}$  的并  $\mathcal{G}_* = \bigcup_i \mathcal{G}_i$  仍为滤子:  $\emptyset \notin \mathcal{G}_*$ ; 对有限交与向上封闭性逐一验证可得, 故每条链有上界。由 Zorn 引理, 存在极大元  $\mathcal{U}$ , 即所求超滤子。

**命题 8.9 (超滤子的等价性质)**

设  $\mathcal{U}$  为  $X$  上的滤子。则以下命题等价:

1.  $\mathcal{U}$  是  $X$  上的超滤子 (极大滤子);
2. 对任意  $A \subseteq X$ , 有  $A \in \mathcal{U}$  或  $A^c \in \mathcal{U}$ ;
3. 对任意  $A, B \subseteq X$ , 若  $A \cup B \in \mathcal{U}$ , 则  $A \in \mathcal{U}$  或  $B \in \mathcal{U}$ ;
4. 对任意  $U \subseteq X$ , 若对所有  $F \in \mathcal{U}$  有  $U \cap F \neq \emptyset$ , 则  $U \in \mathcal{U}$ 。



**证明** (1) $\Rightarrow$ (2): 对任意  $A \subseteq X$ , 若  $A \notin \mathcal{U}$ , 欲证  $A^c \in \mathcal{U}$ 。由(1) 超滤子定义,  $\mathcal{U} \cup \{A\}$  不能生成滤子 (否则  $\mathcal{U}$  不极大), 故不具有限交性质, 即存在  $F \in \mathcal{U}$  使

$$A \cap F = \emptyset \implies F \subseteq A^c.$$

由滤子向上封闭性得  $A^c \in \mathcal{U}$ 。故对任意  $A$ , 必有  $A \in \mathcal{U}$  或  $A^c \in \mathcal{U}$ 。

(2) $\Rightarrow$ (3): 设  $A, B \subseteq X$  且  $A \cup B \in \mathcal{U}$ 。由(2) 知  $A \in \mathcal{U}$  或  $B \in \mathcal{U}$ 。反设  $A \notin \mathcal{U}$  且  $B \notin \mathcal{U}$ , 则由(2) 得  $A^c, B^c \in \mathcal{U}$ , 从而

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{U}.$$

与  $A \cup B \in \mathcal{U}$  及滤子不含  $\emptyset$  矛盾。

(3) $\Rightarrow$ (4): 设  $U \subseteq X$  满足对任意  $F \in \mathcal{U}$  均有  $U \cap F \neq \emptyset$ 。因  $\mathcal{U}$  为滤子,  $X \in \mathcal{U}$ , 而  $X = U \cup U^c$ , 由(3) 得  $U \in \mathcal{U}$  或  $U^c \in \mathcal{U}$ 。若  $U^c \in \mathcal{U}$ , 则  $U \cap U^c = \emptyset$ , 与假设矛盾, 故  $U \in \mathcal{U}$ 。

(4) $\Rightarrow$ (1): 反证。若  $\mathcal{U}$  不是超滤子, 则存在滤子  $\mathcal{U}'$  满足  $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$ 。取  $U \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$ 。对任意  $F \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ , 因  $\mathcal{U}'$  为滤子, 有  $U \cap F \neq \emptyset$  (否则  $\emptyset \in \mathcal{U}'$  矛盾)。由(4) 得  $U \in \mathcal{U}$ , 矛盾。故  $\mathcal{U}$  为超滤子。

**定义 8.8 (滤子的收敛)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间。称滤子  $\mathcal{F}$  在  $x \in X$  收敛, 记为  $\mathcal{F} \rightarrow x$ , 若对任意  $x$  的邻域  $U$ , 有  $U \in \mathcal{F}$ 。

**命题 8.10 (超滤子的接触点与收敛)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间,  $\mathcal{U}$  为  $X$  上的超滤子,  $x \in X$ 。则以下等价:

1.  $x$  为  $\mathcal{U}$  的接触点;
2.  $\mathcal{U} \rightarrow x$ 。



**证明** (1) $\Rightarrow$ (2): 设  $x$  为  $\mathcal{U}$  的接触点。取  $x$  的任意邻域  $U$ 。由接触点定义,  $\forall F \in \mathcal{U}$  有  $U \cap F \neq \emptyset$ 。若  $U \notin \mathcal{U}$ , 因  $\mathcal{U}$  为超滤子, 必有  $U^c \in \mathcal{U}$ , 与  $U \cap U^c = \emptyset$  矛盾, 故  $U \in \mathcal{U}$ 。于是  $\mathcal{U} \rightarrow x$ 。

(2) $\Rightarrow$ (1): 若  $\mathcal{U} \rightarrow x$ , 则  $\forall$  邻域  $U \in \mathcal{U}$ 。任取  $F \in \mathcal{U}$ , 由滤子对有限交封闭,  $U \cap F \in \mathcal{U}$ , 故  $U \cap F \neq \emptyset$ 。于是  $x \in \overline{F}$ 。因  $F \in \mathcal{U}$  任意, 得  $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{U}} \overline{F}$ , 即  $x$  为  $\mathcal{U}$  的接触点。

**命题 8.11 (紧的等价刻画：极大滤子的接触点)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间，则以下等价：

1.  $X$  为紧空间；
2.  $X$  中任意滤子基都有接触点；
3.  $X$  中任意滤子都有接触点。
4.  $X$  中任意极大滤子都有接触点。
5.  $X$  中任意极大滤子收敛



**证明** (3) $\Rightarrow$ (4)：极大滤子本身是滤子，显然成立。

(4) $\Leftrightarrow$ (5)：由命题 8.10，对任意极大滤子  $\mathcal{U}$  与点  $x$ ， $x$  为  $\mathcal{U}$  的接触点当且仅当  $\mathcal{U} \rightarrow x$ 。于是“任意极大滤子有接触点”当且仅当“任意极大滤子收敛”。

(4) $\Rightarrow$ (3)：任取滤子  $\mathcal{F}$ 。由超滤子引理 8.8，存在极大滤子  $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$ 。由(4)取  $x$  使  $x$  为  $\mathcal{U}$  的接触点。因  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ ，对任意  $A \in \mathcal{F}$  亦有  $x \in \overline{A}$ ，故  $x$  为  $\mathcal{F}$  的接触点。

**命题 8.12 (滤子收敛的邻域基刻画)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间， $x \in X$ ，令  $\mathcal{B}_x$  为  $x$  的邻域基。对任意滤子  $\mathcal{F}$ ，有

$$\mathcal{F} \rightarrow x \iff \forall B \in \mathcal{B}_x, \exists F \in \mathcal{F} \text{ 使 } F \subseteq B.$$



**证明** ( $\Rightarrow$ ) 设  $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。任取  $B \in \mathcal{B}_x$ ，则  $B$  为  $x$  的邻域，故  $B \in \mathcal{F}$ ，取  $F = B$  即得  $F \subseteq B$ 。

( $\Leftarrow$ ) 设对任意  $B \in \mathcal{B}_x$ ，存在  $F \in \mathcal{F}$  使得  $F \subseteq B$ 。任取  $x$  的邻域  $U$ ，由邻域基性质，取  $B \in \mathcal{B}_x$  使  $B \subseteq U$ 。于是存在  $F \in \mathcal{F}$  满足  $F \subseteq B \subseteq U$ 。由滤子向上封闭性， $U \in \mathcal{F}$ 。故  $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。

**命题 8.13 (滤子收敛的邻域子基刻画)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间， $x \in X$ 。设  $\mathcal{S}$  为  $x$  的邻域子基，即令

$$\mathcal{S}_x = \{U \in \mathcal{S} : x \in U\}, \quad \mathcal{B}_x = \left\{ \bigcap_{i=1}^n U_i : n \in \mathbb{N}^*, U_i \in \mathcal{S}_x \right\} \cup \{X\},$$

则  $\mathcal{B}_x$  为  $x$  的邻域基。对任意滤子  $\mathcal{F}$ ，有

$$\mathcal{F} \rightarrow x \iff \forall U \in \mathcal{S} (x \in U \Rightarrow \exists F \in \mathcal{F} \text{ 使 } F \subseteq U).$$



**证明** ( $\Rightarrow$ ) 若  $\mathcal{F} \rightarrow x$ ，则每个  $x$  的邻域  $U$  都在  $\mathcal{F}$  中，尤其对任意  $U \in \mathcal{S}_x$ ，有  $U \in \mathcal{F}$ ，取  $F = U$  即得  $F \subseteq U$ 。

( $\Leftarrow$ ) 设对任意  $U \in \mathcal{S}_x$ ，存在  $F \in \mathcal{F}$  使  $F \subseteq U$ 。取  $\mathcal{B}_x$  为由  $\mathcal{S}_x$  的有限交与  $\{X\}$  生成的邻域基。任取  $B \in \mathcal{B}_x$ ：

- 若  $B = X$ ，任取  $F \in \mathcal{F}$ ，则  $F \subseteq X = B$ ；
- 若  $B \neq X$ ，则  $B = U_1 \cap \dots \cap U_n$  ( $n \geq 1$ ,  $U_i \in \mathcal{S}_x$ )。对每个  $i$  取  $F_i \in \mathcal{F}$  使  $F_i \subseteq U_i$ ；
- 由滤子对有限交封闭， $F = \bigcap_{i=1}^n F_i \in \mathcal{F}$  且  $F \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = B$ 。

于是对任意  $B \in \mathcal{B}_x$ ，存在  $F \in \mathcal{F}$  使  $F \subseteq B$ 。由命题 8.12 知  $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。

**命题 8.14 (紧的子基刻画 (Alexander 子基定理))**

设  $\mathcal{S}$  为  $X$  的子基。则  $X$  紧当且仅当：对任意  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ ，若  $\mathcal{U}$  覆盖  $X$ ，则存在有限子集  $\{U_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{U}$  亦覆盖  $X$ 。



**证明** ( $\Rightarrow$ ) 显然：紧空间的任意开覆盖（特别是由子基元素组成的覆盖）都有有限子覆盖。

( $\Leftarrow$ ) 假设对任意子基覆盖都有有限子覆盖。取任意超滤子  $\mathcal{U}$  于  $X$ 。若  $\mathcal{U}$  不收敛，则对每个  $x \in X$ ，由命题 8.13，可取  $U_x \in \mathcal{S}$  且  $x \in U_x$  使  $U_x \notin \mathcal{U}$ 。由超滤子性质（命题 8.9 的(2)）知  $U_x^c \in \mathcal{U}$ 。于是  $\{U_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{S}$  构成  $X$  的子基覆盖。由假设取有限多项  $U_{x_1}, \dots, U_{x_n}$  覆盖  $X$ ，则

$$\bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^c = \emptyset.$$

然而每个  $U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$ , 且超滤子对有限交封闭, 故  $\bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$ , 与滤子不含空集矛盾。故任意超滤子必收敛。由命题 8.11 中 (5) 与 (1) 的等价性, 得  $X$  紧。

### 定义 8.9 (网)

设  $\Lambda$  为定向集,  $x : \Lambda \rightarrow X$ 。称  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  为  $X$  中的网。



### 定义 8.10 (子网)

设  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  为  $X$  中的网。若存在定向集  $\Gamma$  与映射  $\theta : \Gamma \rightarrow \Lambda$ , 满足

1.  $\theta$  保序;

2.  $\theta(\Gamma)$  在  $\Lambda$  中无界, 即对任意  $\alpha \in \Lambda$ , 存在  $\beta_0 \in \Gamma$ , 使得  $\beta \geq \beta_0 \Rightarrow \theta(\beta) \geq \alpha$ ,

则称  $(x_{\theta(\beta)})_{\beta \in \Gamma}$  为  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  的子网。等价地, 可记为  $x \circ \theta : \Gamma \rightarrow X$ 。



# 第9章 乘积与和

## 9.1 乘积拓扑与其子基

### 命题 9.1 (乘积拓扑的刻画)

设  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  为拓扑空间族。记

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda} : \forall \alpha, x_\alpha \in X_\alpha\}.$$

对每个  $\alpha$  定义投影

$$p_\alpha : \prod_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma \rightarrow X_\alpha, \quad (x_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} \mapsto x_\alpha.$$

令

$$\mathcal{S} \equiv \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{p_\alpha^{-1}(U) : U \subseteq X_\alpha \text{ 为开集}\}.$$

则由子基  $\mathcal{S}$  生成的拓扑  $\tau$  使得每个投影  $p_\alpha$  连续；且若  $\tau'$  是  $\prod_\alpha X_\alpha$  上的拓扑并使所有  $p_\alpha$  连续，则  $\tau \subseteq \tau'$ 。因此  $\tau$  是使所有投影连续的最小拓扑（即乘积拓扑）。

**证明** 对任意  $\alpha$  与  $X_\alpha$  中开集  $U$ ，有  $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S} \subseteq \tau$ ，故  $p_\alpha$  连续。若  $\tau'$  使所有  $p_\alpha$  连续，则对每个开集  $U \subseteq X_\alpha$  均有  $p_\alpha^{-1}(U) \in \tau'$ ，于是  $\mathcal{S} \subseteq \tau'$ 。由“由子基生成的最小拓扑”的定义知  $\tau \subseteq \tau'$ 。证毕。

**注** 对命题 9.1 中的子基  $\mathcal{S}$ ，其有限交族  $\mathcal{S}_{f\cap}$  构成乘积拓扑的一个基。具体地，若取有限多指标  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  及开集  $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$ ，则

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_n) = \prod_{\gamma \in \Lambda} V_\gamma,$$

其中  $V_{\alpha_i} = U_i$ ，而当  $\gamma \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  时取  $V_\gamma = X_\gamma$ 。因此“盒子”形集合

$$\left\{ \prod_{\gamma \in \Lambda} V_\gamma : V_\alpha \text{ 为开集仅在有限多 } \alpha, \text{ 其余 } V_\gamma = X_\gamma \right\}$$

是乘积拓扑的一个基。特别地，当  $\Lambda$  有限（如  $\{1, \dots, n\}$ ）时，基可写为

$$\{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \subseteq X_i \text{ 为开集}\}.$$

### 命题 9.2 (推论：乘积拓扑的子基)

设  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  为拓扑空间族。则在  $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$  上，集合族

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{p_\alpha^{-1}(U) : U \subseteq X_\alpha \text{ 开}\}$$

是乘积拓扑的一个子基。

**证明** 由命题 9.1，乘积拓扑恰为包含上述集合族的最小拓扑，故该集合族为其子基。

### 命题 9.3 (推论：有限乘积的基)

设  $X_1, \dots, X_n$  为拓扑空间， $B_i$  为  $X_i$  的一组基。则

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_n : U_i \in B_i \ (i = 1, \dots, n)\}$$

为  $X_1 \times \cdots \times X_n$  的乘积拓扑的一组基。

**证明** 任取开盒  $V_1 \times \cdots \times V_n$  与点  $(x_1, \dots, x_n)$ 。由  $B_i$  为基，存在  $U_i \in B_i$  使  $x_i \in U_i \subseteq V_i$ 。则  $(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq V_1 \times \cdots \times V_n$ 。配合上文的“盒子基”描述可知该族满足基的判别条件，因而为一组基。

**命题 9.4 (连续满射下 Lindelöf 性保持)**

设  $f : X \rightarrow Y$  连续且满射。若  $X$  为 Lindelöf 空间，则  $Y$  为 Lindelöf 空间。



**证明** 任取  $Y$  的开覆盖  $\mathcal{U}$ 。则其拉回族

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

为  $X$  的开覆盖 (连续性保证开性, 满射保证覆盖)。由  $X$  的 Lindelöf 性, 存在可数子族  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$  使  $\{f^{-1}(U_n)\}$  覆盖  $X$ 。于是

$$Y = f(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(f^{-1}(U_n)) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n,$$

即  $\{U_n\}$  为  $\mathcal{U}$  的可数子覆盖,  $Y$  为 Lindelöf。

**定理 9.1 (Tychonoff 定理)**

若每个  $X_\alpha$  均为紧空间, 则赋以乘积拓扑的笛卡尔积

$$\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$$

亦为紧空间。



**证明** 取任意超滤子  $\mathcal{F}$  于  $\prod_\alpha X_\alpha$ 。对每个  $\alpha$ , 考虑投影  $p_\alpha : \prod_\gamma X_\gamma \rightarrow X_\alpha$ 。则  $p_\alpha(\mathcal{F})$  为  $X_\alpha$  上的超滤子; 由  $X_\alpha$  的紧性 (见命题 8.11 的等价刻画), 存在点  $x_\alpha \in X_\alpha$  使得

$$p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow x_\alpha.$$

令  $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Lambda} \in \prod_\gamma X_\gamma$ 。

下证  $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。由上文关于乘积拓扑“盒子基”的描述, 只需证: 对任意指标  $\alpha$  与含  $x_\alpha$  的开集  $U \subseteq X_\alpha$ , 有  $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ 。事实上, 由  $p_\alpha(\mathcal{F}) \rightarrow x_\alpha$  与滤子收敛的定义, 存在  $E \in p_\alpha(\mathcal{F})$  使  $E \subseteq U$ ; 按像滤子的定义,  $p_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{F}$  且  $p_\alpha^{-1}(E) \subseteq p_\alpha^{-1}(U)$ , 由滤子的向上封闭性得  $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ 。进而对任意有限族  $\{(\alpha_i, U_i)\}_{i=1}^n$  (每个  $U_i$  为  $x_{\alpha_i}$  的开邻域), 由滤子对有限交封闭性,

$$\bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}.$$

这些有限交构成  $x$  的一组基邻域, 故  $\mathcal{F}$  包含  $x$  的全部基邻域, 从而  $\mathcal{F} \rightarrow x$ 。

因任意超滤子于  $\prod_\alpha X_\alpha$  上皆收敛, 依命题 8.11 的等价性知  $\prod_\alpha X_\alpha$  紧。

**定义 9.1 (子空间拓扑)**

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间,  $Y \subseteq X$ 。定义

$$\mathcal{T}|_Y \equiv \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$$

为  $Y$  上的子空间拓扑。称  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  为  $(X, \mathcal{T})$  的子空间。

**命题 9.5 (度量空间)**

设  $(X, d)$  为度量空间,  $Y \subseteq X$ 。记  $d_Y : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  为限制度量  $d|_{Y \times Y}$ , 则由  $d$  在  $X$  上诱导的拓扑  $\mathcal{T}_d$  限制到  $Y$  上, 与由限制度量  $d_Y$  在  $Y$  上诱导的拓扑  $\mathcal{T}_{d_Y}$  相同, 即

$$\mathcal{T}_d|_Y = \mathcal{T}_{d_Y}.$$

**命题 9.6 (Lindelöf 子空间的刻画)**

设  $X$  为拓扑空间,  $\Omega \subseteq X$ 。则下列条件等价:

1.  $\Omega$  在子空间拓扑  $\mathcal{T}|_\Omega$  下为 Lindelöf 空间;

2. 对任意由  $X$  中开集组成的族  $\mathcal{U}$  且  $\bigcup \mathcal{U} \supseteq \Omega$ , 存在可数子族  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$  使得  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \supseteq \Omega$ .



**证明** (1)  $\Rightarrow$  (2): 设  $\Omega$  为 Lindelöf 子空间, 取  $X$  中开集族  $\mathcal{U}$  覆盖  $\Omega$ 。令

$$\mathcal{V} \equiv \{U \cap \Omega : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{T}|_\Omega.$$

则  $\mathcal{V}$  为  $\Omega$  的开覆盖 (子空间拓扑意义下)。由  $\Omega$  的 Lindelöf 性, 存在可数子族  $\{U_n \cap \Omega\}_{n \in \mathbb{N}}$  覆盖  $\Omega$ , 从而  $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$  为所需可数子覆盖。

(2)  $\Rightarrow$  (1): 设条件 (2) 成立, 取  $\Omega$  的任意开覆盖  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}|_\Omega$ 。对每个  $V \in \mathcal{V}$ , 由子空间拓扑定义, 存在  $X$  中开集  $U_V$  使  $V = U_V \cap \Omega$ 。令  $\mathcal{U} \equiv \{U_V : V \in \mathcal{V}\}$ , 则  $\mathcal{U}$  为  $X$  中开集族且覆盖  $\Omega$ 。由条件 (2), 存在可数子族  $\{U_{V_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  覆盖  $\Omega$ , 从而  $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{U_{V_n} \cap \Omega\}$  为  $\mathcal{V}$  的可数子覆盖。故  $\Omega$  为 Lindelöf 子空间。

### 引理 9.1 (管状邻域引理)

设  $X, Y$  为拓扑空间,  $\alpha \in X$ ,  $K \subseteq Y$  紧。若  $\Omega \subseteq X \times Y$  为开集且  $\{\alpha\} \times K \subseteq \Omega$ , 则存在  $\alpha$  的开邻域  $B \subseteq X$  与  $K$  的开邻域  $U \subseteq Y$  使得

$$\{\alpha\} \times K \subseteq B \times U \subseteq \Omega.$$



**证明** 对每个  $k \in K$ , 点  $(\alpha, k) \in \Omega$ 。由  $\Omega$  的开性与乘积拓扑的基, 存在  $X$  中开集  $B_k \ni \alpha$  与  $Y$  中开集  $U_k \ni k$  使  $B_k \times U_k \subseteq \Omega$ 。则  $\{U_k : k \in K\}$  为  $K$  的开覆盖; 由  $K$  的紧性, 存在有限子覆盖  $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$  覆盖  $K$ 。令

$$B \equiv \bigcap_{i=1}^n B_{k_i}, \quad U \equiv \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}.$$

则  $B$  为  $\alpha$  的开邻域 (有限交),  $U$  为  $K$  的开邻域 (包含  $K$ )。对任意  $(\beta, y) \in B \times U$ , 存在  $i$  使  $y \in U_{k_i}$ , 且  $\beta \in B \subseteq B_{k_i}$ , 从而  $(\beta, y) \in B_{k_i} \times U_{k_i} \subseteq \Omega$ 。故  $\{\alpha\} \times K \subseteq B \times U \subseteq \Omega$ 。

### 命题 9.7 (基在子空间中的限制仍为基)

设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间,  $\mathcal{B}$  为  $X$  的一组基,  $Y \subseteq X$ 。则

$$\mathcal{B}|_Y \equiv \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

为  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  的一组基。



**证明** 任取  $\Omega \in \mathcal{T}|_Y$  与  $y \in \Omega$ 。存在  $U \in \mathcal{T}$  使  $\Omega = U \cap Y$  且  $y \in U$ 。由  $\mathcal{B}$  为  $X$  的基, 存在  $B \in \mathcal{B}$  使  $y \in B \subseteq U$ 。则  $y \in B \cap Y \subseteq U \cap Y = \Omega$ , 且  $B \cap Y \in \mathcal{B}|_Y$ 。由基判定定理知  $\mathcal{B}|_Y$  为  $(Y, \mathcal{T}|_Y)$  的基。

### 命题 9.8 (子空间的乘积等于乘积的子空间)

设  $(X, \mathcal{T})$  与  $(Y, \mathcal{S})$  为拓扑空间,  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ 。则在  $A \times B$  上有

$$(\mathcal{T}|_A) \otimes (\mathcal{S}|_B) = (\mathcal{T} \otimes \mathcal{S})|_{A \times B}.$$



**证明** 记两边拓扑分别为  $\tau_1$  与  $\tau_2$ 。考察恒等映射  $\text{id}_{A \times B} : (A \times B, \tau_1) \rightarrow (A \times B, \tau_2)$ 。

为证  $\text{id}$  连续, 只需验证其对一个乘积基闭合: 对任意  $U \in \mathcal{T}$ ,  $V \in \mathcal{S}$ , 有

$$(U \cap A) \times (V \cap B) = (U \times V) \cap (A \times B),$$

右式为  $\tau_2$  的基元 (矩形与  $A \times B$  的交), 故  $\text{id}$  连续。

反向连续性同理: 对  $\tau_2$  的基元  $(U \times V) \cap (A \times B)$ , 其像即  $(U \cap A) \times (V \cap B)$ , 属  $\tau_1$  的基元, 故  $\text{id}^{-1}$  连续。由此  $\tau_1 = \tau_2$ 。

### 引理 9.2 (乘积中的常值截面连续)

设拓扑空间  $X, Y$ , 取  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ 。定义

$$\eta_{x_0} : Y \rightarrow X \times Y, y \mapsto (x_0, y), \quad \xi_{y_0} : X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, y_0).$$

则  $\eta_{x_0}$  与  $\xi_{y_0}$  均连续。



**证明** 对乘积基元  $U \times V$  ( $U \subset X, V \subset Y$  开), 有  $\eta_{x_0}^{-1}(U \times V) = \begin{cases} V, & x_0 \in U, \\ \emptyset, & x_0 \notin U, \end{cases}$  与  $\xi_{y_0}^{-1}(U \times V) = \begin{cases} U, & y_0 \in V, \\ \emptyset, & y_0 \notin V. \end{cases}$  皆为开集, 故两映射连续。

### 推论 9.1 (联合连续蕴含偏连续)

若  $f : X \times Y \rightarrow Z$  在  $(x_0, y_0)$  处连续, 则  $y \mapsto f(x_0, y) : Y \rightarrow Z$  在  $y_0$  连续, 且  $x \mapsto f(x, y_0) : X \rightarrow Z$  在  $x_0$  连续。



**证明** 由引理 9.2,  $\eta_{x_0}, \xi_{y_0}$  连续, 故复合  $f \circ \eta_{x_0}$  与  $f \circ \xi_{y_0}$  连续, 即得结论。

### 命题 9.9 (乘积的泛性质 (坐标映射判别连续))

设空间族  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  与空间  $Z$ 。给定映射  $f_\alpha : Z \rightarrow X_\alpha$  ( $\forall \alpha$ ), 则存在唯一映射

$$f : Z \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \quad z \mapsto (f_\alpha(z))_{\alpha \in \Lambda},$$

满足  $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ 。且  $f$  连续当且仅当每个  $f_\alpha$  连续。



**证明** 若  $g$  亦满足  $p_\alpha \circ g = f_\alpha$ , 则  $p_\alpha(g(z)) = p_\alpha(f(z))$  对所有  $\alpha$ , 故  $g(z) = f(z)$ 。

若  $f$  连续, 则  $f_\alpha = p_\alpha \circ f$  为连续。

反之, 若每个  $f_\alpha$  连续, 对任意  $\alpha$  与  $X_\alpha$  中开集  $U$ , 有

$$f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U)) = (p_\alpha \circ f)^{-1}(U) = f_\alpha^{-1}(U)$$

为  $Z$  中开集。乘积拓扑由子基  $\{p_\alpha^{-1}(U)\}$  生成, 故  $f$  连续。

**注** 上述命题中的坐标映射满足  $\forall \alpha : f_\alpha = p_\alpha \circ f$ 。

### 命题 9.10 (坐标连续推出乘积映射连续)

设空间族  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  与  $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 。若对每个  $\alpha$ , 映射  $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y_\alpha$  连续, 定义

$$\prod_\alpha f_\alpha : \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_\alpha, \quad (x_\alpha)_\alpha \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_\alpha,$$

则  $\prod_\alpha f_\alpha$  连续。



**证明** 对任意  $\beta \in \Lambda$ , 有交换恒等式

$$p_\beta \circ \left( \prod_\alpha f_\alpha \right) = f_\beta \circ p_\beta.$$

右端为连续映射复合, 故左端连续。由命题 9.9 (坐标判别:  $g$  连续  $\iff p_\alpha \circ g$  连续  $\forall \alpha$ ), 得  $\prod_\alpha f_\alpha$  连续。

### 定义 9.2 (拓扑和 (不交并))

设一族两两不交的拓扑空间  $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ 。记集合不交并

$$\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \coprod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha.$$

在该并集上定义拓扑  $\tau$ , 使每个包含映射

$$i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigsqcup_{\gamma \in \Lambda} X_\gamma$$

连续且为嵌入 (即  $i_\alpha : X_\alpha \rightarrow i_\alpha(X_\alpha)$  为同胚) 的最大拓扑。约定记号

$$\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \equiv (\bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \tau),$$

并在需要时亦记  $\tau = \mathcal{T}_{\Pi}$ 。称  $(\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}, \tau)$  为拓扑和。

### 命题 9.11 (拓扑和的显式刻画)

有

$$\mathcal{T}_{\Pi} = \left\{ \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha} : U_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha} (\forall \alpha) \right\}.$$



**证明** 记右侧集合族为  $\mathcal{J}$ 。先证  $\mathcal{J}$  为拓扑并使每个  $i_{\alpha}$  连续：对任意  $\Omega = \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha} \in \mathcal{J}$ ，有  $i_{\alpha}^{-1}(\Omega) = U_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}$ ，故  $i_{\alpha}$  连续。显然  $\mathcal{J}$  对任意并封闭；且

$$\left( \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cap \left( \bigsqcup_{\alpha} V_{\alpha} \right) = \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap V_{\alpha}) \in \mathcal{J},$$

故  $\mathcal{J}$  为拓扑。

因  $\mathcal{T}_{\Pi}$  是使所有  $i_{\alpha}$  连续的最大拓扑，得  $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}_{\Pi}$ 。

反之，任取  $\Omega \in \mathcal{T}_{\Pi}$ ，则  $i_{\alpha}^{-1}(\Omega) = \Omega \cap X_{\alpha} \in \mathcal{T}_{\alpha}$ 。令  $U_{\alpha} = \Omega \cap X_{\alpha}$ ，则

$$\Omega = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} (\Omega \cap X_{\alpha}) = \bigsqcup_{\alpha \in \Lambda} U_{\alpha} \in \mathcal{J}.$$

故  $\mathcal{T}_{\Pi} \subseteq \mathcal{J}$ ，两者相等。

### 引理 9.3 (嵌入引理)

设  $X$  为拓扑空间， $(Y_{\alpha})_{\alpha \in \Lambda}$  为拓扑空间族。令

$$f : X \rightarrow \prod_{\alpha \in \Lambda} Y_{\alpha}, \quad x \mapsto (f_{\alpha}(x))_{\alpha \in \Lambda},$$

其中  $f_{\alpha} \equiv p_{\alpha} \circ f$ 。则

1.  $f$  连续当且仅当每个  $f_{\alpha}$  连续。等价地，对任意  $x_0 \in X$ ， $f$  在  $x_0$  连续当且仅当每个  $f_{\alpha}$  在  $x_0$  连续；
2. 若  $f$  为单射，则族  $\{f_{\alpha}\}$  分离  $X$  的点：对任意  $x \neq y$ ，存在  $\alpha$  使  $f_{\alpha}(x) \neq f_{\alpha}(y)$ ；
3. 若  $\{f_{\alpha}\}$  分离  $X$  的点和闭集，则  $f : X \rightarrow f(X)$  为开映射。



**证明** 取任意开集  $U \subseteq X$  与点  $x \in U$ 。由假设族  $\{f_{\alpha}\}$  分离点与闭集，应用于闭集  $U^c$  与点  $x$ ，存在指标  $\alpha$  与  $Y_{\alpha}$  中开邻域  $V_{\alpha} \ni f_{\alpha}(x)$  使得  $f_{\alpha}(U^c) \subseteq V_{\alpha}^c$ 。因而  $f(x) \in p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \cap f(X)$ 。对任意  $x' \in X$ ，若  $f(x') \in p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \cap f(X)$ ，则  $f_{\alpha}(x') \in V_{\alpha}$ ，从而  $x' \notin U^c$ ；于是  $x' \in U$ ，并且  $f(x') \in f(U)$ 。故有

$$p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \cap f(X) \subseteq f(U).$$

其中  $p_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha})$  为乘积空间中的开集，故其与  $f(X)$  的交在子空间  $f(X)$  中开。于是  $f(U)$  在  $f(X)$  中对每点  $f(x)$  含有开邻域，故  $f(U)$  为  $f(X)$  的开集。命题 (3) 得证。

### 命题 9.12 (子空间中的闭包)

设  $A \subseteq Y \subseteq X$ 。则在子空间  $Y$  中  $A$  的闭包满足

$$\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y,$$

其中右侧闭包在  $X$  中取。



**证明** “ $\subseteq$ ”：设  $y \in \overline{A}^Y$ 。则对任意  $Y$  中开邻域  $B \in \mathcal{N}_Y(y)$ ，有  $B \cap A \neq \emptyset$ 。取  $X$  中开集  $U$  使  $B = U \cap Y$ ，得  $U \cap A \neq \emptyset$ ，故  $y \in \overline{A}$ ，进而  $y \in \overline{A} \cap Y$ 。“ $\supseteq$ ”：设  $y \in \overline{A} \cap Y$ 。任取  $B \in \mathcal{N}_Y(y)$ ，写作  $B = U \cap Y$  且  $U \in \mathcal{T}$  开。由  $y \in \overline{A}$  知  $U \cap A \neq \emptyset$ ，故  $B \cap A \neq \emptyset$ ，从而  $y \in \overline{A}^Y$ 。

**推论 9.2**

对任意  $A \subseteq X$ ,  $A$  在  $\overline{A}$  中稠密。等价地,

$$\overline{A}^{\overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}.$$

**推论 9.3**

若  $\Omega \subseteq X$  且  $\Omega \subseteq \overline{A}$ , 则  $A$  在  $\Omega$  中稠密, 即

$$\overline{A}^{\Omega} = \overline{A} \cap \Omega = \Omega.$$

**定义 9.3 (可度量化空间)**

设拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$ 。若存在度量  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  使由  $d$  诱导的拓扑  $\mathcal{T}_d$  与  $\mathcal{T}$  相同, 即  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ , 则称  $(X, \mathcal{T})$  为可度量化 (metrizable)。其中

$$\mathcal{T}_d \equiv \{U \subseteq X : \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B_d(x, \varepsilon) \subseteq U\}.$$

**定义 9.4 (完备可度量化空间)**

设拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$ 。若存在度量  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  使  $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$  且度量空间  $(X, d)$  完备, 则称  $(X, \mathcal{T})$  为完备可度量化 (completely metrizable)。

**命题 9.13 (同胚不变性)**

若  $X$  与  $Y$  同胚, 则  $X$  可完备度量化当且仅当  $Y$  可完备度量化。



**证明** 设  $h : X \rightarrow Y$  为同胚。先证 “ $\Rightarrow$ ”。若  $X$  可完备度量化, 则存在完备度量  $d_X$  使  $\mathcal{T}_{d_X} = \mathcal{T}_X$ 。定义

$$d_Y(y_1, y_2) \equiv d_X(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)), \quad y_1, y_2 \in Y.$$

则  $h : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  为等距同胚, 因而  $\mathcal{T}_{d_Y} = \mathcal{T}_Y$ 。取任意  $(Y, d_Y)$  的 Cauchy 列  $(y_n)$ , 则  $(x_n) = (h^{-1}(y_n))$  满足

$$d_X(x_n, x_m) = d_Y(y_n, y_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0,$$

故  $(x_n)$  为  $(X, d_X)$  的 Cauchy 列, 完备性给出  $x_n \rightarrow x$ 。由  $h$  的等距连续性,  $y_n = h(x_n) \rightarrow h(x)$ , 从而  $(Y, d_Y)$  完备。于是  $Y$  可完备度量化。反向 “ $\Leftarrow$ ” 同理, 取同胚  $h^{-1} : Y \rightarrow X$  即得。

**定义 9.5 (等价度量)**

设  $X$  为集合,  $d_1, d_2$  为  $X$  上度量。称  $d_1$  与  $d_2$  一致等价, 若恒等映射

$$\text{id} : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

为一致同胚。

**命题 9.14 (有界化度量与原度量等价)**

设  $d$  为  $X$  上度量, 定义

$$d_b(x, y) \equiv \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in [0, 1].$$

则  $d_b$  为  $X$  上度量, 且  $\mathcal{T}_{d_b} = \mathcal{T}_d$ , 因而  $d$  与  $d_b$  等价。



**证明** 度量性: 显然  $d_b(x, y) = d_b(y, x)$ , 且  $d_b(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$ 。对三角不等式, 记  $g(t) = t/(1+t)$ , 则对任意  $a, b \geq 0$ ,

$$g(a) + g(b) - g(a+b) = \frac{ab}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \geq 0,$$

故  $g(a+b) \leq g(a) + g(b)$ 。由  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  与  $g$  单调性得

$$d_b(x, z) = g(d(x, z)) \leq g(d(x, y) + d(y, z)) \leq g(d(x, y)) + g(d(y, z)) = d_b(x, y) + d_b(y, z).$$

拓扑等价:  $g$  严格增且  $g^{-1}(s) = s/(1-s)$  ( $0 \leq s < 1$ )。于是对任意  $0 < \varepsilon < 1$ ,

$$B_{d_b}(x, \varepsilon) = \{y : d_b(x, y) < \varepsilon\} = \{y : d(x, y) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\} = B_d\left(x, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right),$$

两拓扑相同。

#### 引理 9.4 (可数积的度量化)

设  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) 皆为可度量化空间, 则其乘积  $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$  (赋以乘积拓扑) 可度量化。



**证明** 对每个  $n$  取与  $X_n$  拓扑相容的度量  $d_n$ 。由命题 9.14 可不失一般性假设  $d_n \leq 1$ 。定义

$$d((x_n), (y_n)) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

则  $d$  为度量: 对任意  $(x_n), (y_n), (z_n)$ , 由每个  $d_n$  的三角不等式逐项相加得

$$d((x_n), (y_n)) \leq d((x_n), (z_n)) + d((z_n), (y_n)).$$

若每个  $(X_n, d_n)$  完备, 则  $d$  亦完备。任取  $d$ -Cauchy 列  $((x_n^k)_n)_{k \in \mathbb{N}}$ 。由

$$2^{-i} d_i(x_i^k, x_i^\ell) \leq d((x_n^k)_n, (x_n^\ell)_n) \xrightarrow[k, \ell \rightarrow \infty]{} 0,$$

知对每个  $i$ ,  $(x_i^k)_k$  为  $(X_i, d_i)$  的 Cauchy 列。由完备性, 存在  $x_i \in X_i$  使  $x_i^k \rightarrow x_i$ 。记  $x = (x_i)_i$ 。

取任意  $\varepsilon > 0$ 。先选  $N$  使  $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$ 。再为  $1 \leq i \leq N$  取  $\delta_i > 0$ , 令  $\sum_{i=1}^N 2^{-i} \delta_i < \varepsilon/2$ 。由  $x_i^k \rightarrow x_i$ , 对每个  $i \leq N$  存在  $K_i$  使  $k \geq K_i$  时  $d_i(x_i^k, x_i) < \delta_i$ 。令  $K = \max\{K_1, \dots, K_N\}$ , 则  $k \geq K$  时

$$d((x_n^k)_n, x) = \sum_{i=1}^N 2^{-i} d_i(x_i^k, x_i) + \sum_{n>N} 2^{-n} d_n(x_n^k, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故  $((x_n^k)_n)_k$  于  $d$  收敛到  $x$ ,  $d$  完备。记  $p_i : \prod X_n \rightarrow X_i$  为坐标投影。注意

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) \geq \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) \quad (\forall i),$$

故  $p_i : (\prod X_n, d) \rightarrow (X_i, d_i)$  连续。从而

$$\text{id} : (\prod_n X_n, d) \longrightarrow (\prod_n X_n, \tau_\Pi)$$

连续 (乘积拓扑由各  $p_i$  生成)。

取任意  $(x_n)$  与  $\varepsilon > 0$ 。选  $N$  使  $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$ 。由  $d_n \leq 1$  得

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\forall (y_n)).$$

为  $1 \leq i \leq N$  取  $\delta_i > 0$ , 使  $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} \delta_i < \varepsilon/2$ 。令

$$U \equiv B_{d_1}(x_1, \delta_1) \times \cdots \times B_{d_N}(x_N, \delta_N) \times \prod_{n>N} X_n,$$

则  $U$  是乘积拓扑的基本开邻域。对任意  $(y_n) \in U$ ,

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2^i} d_i(x_i, y_i) + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故  $U \subseteq B_d((x_n), \varepsilon)$ 。因而

$$\text{id} : (\prod_n X_n, \tau_\Pi) \longrightarrow (\prod_n X_n, d)$$

于  $(x_n)$  连续, 任意点同理。

综上,  $\tau_d = \tau_\Pi$ , 故  $\prod X_n$  可度量化。

**定理 9.2(乘积中的网收敛判别)**

设  $\{X_i\}_{i \in I}$  为一族拓扑空间。令  $((x_i^\alpha)_{i \in I})_\alpha$  为  $\prod_{i \in I} X_i$  中的一网，且  $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ 。则

$$(x_i^\alpha)_{i \in I} \rightarrow (x_i)_{i \in I} \iff \forall i \in I, x_i^\alpha \rightarrow x_i \text{ 于 } X_i.$$



**证明** “ $\Rightarrow$ ”：各坐标投影  $p_i : \prod X_i \rightarrow X_i$  连续，故由连续映像保持极限， $p_i((x_i^\alpha)_i) = x_i^\alpha \rightarrow p_i((x_i)_i) = x_i$ 。

“ $\Leftarrow$ ”：设对每个  $i \in I$  有  $x_i^\alpha \rightarrow x_i$ 。为证  $((x_i^\alpha)_i)$  在乘积空间中收敛，只需验证它对乘积拓扑的任一子基开集最终落入。取任意  $i_0 \in I$  与  $x_{i_0}$  的开邻域  $U \subset X_{i_0}$ ，则由  $x_{i_0}^\alpha \rightarrow x_{i_0}$ ，存在  $\beta$ ，使得对所有  $\alpha \succeq \beta$ ,  $x_{i_0}^\alpha \in U$ 。这当且仅当

$$(x_i^\alpha)_{i \in I} \in p_{i_0}^{-1}(U) \quad (\forall \alpha \succeq \beta),$$

即该网最终落入子基开集  $p_{i_0}^{-1}(U)$ 。由子基生成开集，遂该网在乘积拓扑下收敛到  $(x_i)_i$ 。

**定义 9.6(波兰空间)**

称拓扑空间  $X$  为波兰空间 (Polish space)，若  $X$  可分且完全可度量化，即存在完备度量  $d$  使由  $d$  诱导的拓扑与  $X$  的原拓扑一致 (记作  $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}_d$ )。亦即  $X$  为可分完全可度量化空间。

**定理 9.3(Urysohn 嵌入定理的等价刻画)**

设拓扑空间  $X$ ，记  $I = [0, 1]$  与  $I^\omega = [0, 1]^\mathbb{N}$ 。以下命题等价：

1.  $X$  为第二可数的  $T_3$  空间；
2.  $X$  为可分度量空间；
3.  $X$  同胚于某个可分度量空间的子空间；
4.  $X$  同胚于某个波兰空间的子空间；
5.  $X$  可嵌入  $I^\omega$ 。

此外， $I^\omega$  为波兰空间。

**证明**

$$1 \Rightarrow 5$$

第二可数  $\Rightarrow$  Lindelöf；而  $T_3 + \text{Lindelöf} \Rightarrow T_4$  (正规)，故可用 Urysohn 引理。取  $X$  的可数基  $\mathcal{B}$ 。令

$$\Lambda \equiv \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{U} \subset V\}.$$

对每个  $(U, V) \in \Lambda$ ，由 Urysohn 引理取连续映射

$$f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1] \quad \text{满足} \quad f_{U,V}(\overline{U}) \subset \{0\}, \quad f_{U,V}(V^c) \subset \{1\}.$$

定义

$$\Theta : X \rightarrow [0, 1]^\Lambda, \quad \Theta(x) \equiv (f_{U,V}(x))_{(U,V) \in \Lambda}.$$

各  $f_{U,V}$  连续，故  $\Theta$  连续；且  $\Lambda$  可数， $[0, 1]^\Lambda \cong I^\omega$ 。

分离性质：任意  $x \in X$  与闭集  $F \subset X$  且  $x \notin F$ ，由正则性与基可选  $U, V \in \mathcal{B}$  使  $x \in U, \overline{U} \subset V$  且  $F \subset V^c$ ，于是

$$f_{U,V}(x) = 0, \quad f_{U,V}(F) \subset \{1\}.$$

因而  $\Theta(x) \notin \Theta(F)$ ，即该函数族将点与闭集分离，故  $\Theta$  为嵌入， $X$  与  $\Theta(X)$  同胚，遂  $X$  可嵌入  $I^\omega$ 。

其余方向： $5 \Rightarrow 4$  因  $I^\omega$  为波兰空间； $4 \Rightarrow 2$  因波兰空间为可分度量，子空间仍为可分度量； $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  显然； $2 \Rightarrow 1$  因度量空间为  $T_3$  且可分  $\Rightarrow$  第二可数。