实变函数

作者：Huang

目录

第 1 章 集合论 **1**

第 2 章 测度论 **2**

2.1 可测函数的定义 2

2.2 可测函数的运算 2

2.3 用简单函数逼近可测函数 3

2.4 几乎处处收敛与叶果洛夫定理 3

2.5 依测度收敛 4

2.6 依测度收敛和几乎处处收敛的关系 4

第 3 章 积分理论 **6**

第 1 章 集合论

第 2 章 测度论

2.1 可测函数的定义

我们知道，对于一个可测函数来说，只需要做到博雷尔集的原像是博雷尔集即可，在简化我们的需求下，可测函数的定义可简化至下述形式

定义 2.1 (可测函数)

$f : E \longmapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 可测, 如果 $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E : f(x) > a\} := E(f > a)$ 可测

注 $f(x) > a$，事实上 $f(x) \in (a, \infty]$, 此时意味着 f 可以取到无穷大

类似的，我们可以推出可测的三个充要条件, 只需要注意

$$E(f \le a) = (E(f > a))^c, E(f \ge a) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E\left(f \ge a + \frac{1}{n}\right)$$

同时我们还可以得到一个可测的必要条件

定理 2.1

若f可测，则$E(a \le f < b)$可测

证明 考虑到

$$E(a \le f < b) = E(f \ge a) - E(f \ge b)$$

注 此时若 f 有界，则该条件也可为充分条件，因为取不到无穷大

2.2 可测函数的运算

在前面那一章节中，我们已经知道了可测函数的定义，现在我们想知道两个可测集之间的运算的结果，如可测集的加减乘除是否还是可测，首先我们要考虑到两个可测函数之间的和是否可测

定理 2.2

若 $f, g : E \longmapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 可测, 则 $f + g$ 仍可测

证明 对于这题的证明，我们按照定义，只需要证明 $\forall a, E(f + g > a)$ 即可证明

由于不等号一边存在两个未知量，考虑将其移到右边一个，即命题等价为 $\forall a, E(f > a - g)$，此时显然存在一个 r，使得 $f > r > a - g$, 那么命题就成立了

不妨记 $h = a - g$, 有可测集的简单运算，其可测。故我们只需要证明：存在一个 r，使得 $f > r > h$ 即可。即求证

$$E(f > h) = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} E(f > r) \cap E(h < r)$$

该命题是显然得证的，只需要左边包含右边，右边包含左边即可得证。故定理得证。

定理 2.3

$\{f_n(x)\}$是E上至多可数个可测函数，我们有

$$\mu(x) = \inf f_n(x), \lambda(x) = \sup f_n(x)$$

仍然可测

证明 由题，我们有

$$E(\mu \geq a) = \bigcap_n E(f_n(x) \geq a)$$

$$E(\lambda \leq a) = \bigcap_n E(f_n(x) \leq a)$$

由于 f 可测，并且可列个可测集的交仍然为可测集，于是命题得证

注 连续函数没有这样的性质，如

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ nx, 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1, x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

显然连续，但不满足上述的条件

为了证明可测函数的绝对值可积，我们如下定义可测函数的正部和负部

$$f = f^+ - f^-$$

2.3 用简单函数逼近可测函数

这一部分，我们需要用到一个特别重要的定理，即非负可测函数可用非负简单函数来逼近

定理 2.4

E 是 $\mathbb{R}^n$ 中非负可测函数，则存在非负可测简单函数列 $\{\varphi_k(x)\}$，满足 $\forall x, \varphi_k \leq \varphi_{k+1}$，使得

$$\lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) = f(x)$$

注 此时若 f，有界，则可以推出是一致收敛而不是点点收敛

2.4 几乎处处收敛与叶果洛夫定理

定义 2.2 (几乎处处)

若某个性质在去掉一个零测集之后成立，我们就称其为几乎处处成立

定理 2.5 (叶果洛夫定理)

$\{f_k\}, f(x)$ 是定义在E上的可测函数且几乎处处有限，$m(E) < +\infty$，若 $f_k(x) \to f(x), k \to \infty$在$E$上几乎处处成立，$\forall \delta > 0$, 存在$E_\delta \subset E, m(E_\delta) \leq \delta$, 使得 $\{f_k\}$ 在$E - E_\delta$上一致收敛于f

证明 不妨设 $\{f_k\}, f(x)$ 在 E 上有界，否则令 E_δ 为原来的 E_δ 并上前二者无界的部分

此时我们翻译以下题目中的几乎处处收敛的含义，即对于 x 属于不收敛的集合，此时该集合为零测集，用对应的语言如下

$$\exists x \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N > 0, n > N\text{时}，|f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

翻译成集合的语言就是

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{k=N}^{+\infty} \{x \| f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

是个零测集

我们知道

$$m(\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{k=N}^{+\infty}\{x||f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})\geq 0$$

于是乎，我们可得出

$$m(\bigcap_{N=1}^{+\infty}\bigcup_{k=N}^{+\infty}\{x||f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})=0$$

上述集合的测度的极限等价于

$$\lim_{k\to+\infty} m\left(\bigcup_{k=N}^{+\infty}\{x||f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

于是乎，$\forall\bar{\varepsilon}>0,\exists N'(\varepsilon,\bar{\varepsilon}),\forall N'>N(\varepsilon,\bar{\varepsilon})$, 我们有

$$m\left(\bigcup_{k=N'}^{+\infty}\{x||f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right)<\bar{\varepsilon}$$

考虑集合

$$\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcap_{N'=1}^{+\infty}\bigcup_{k=N'}^{+\infty}\{x||f_k(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}$$

此时该集合为零测集，取补即为所要的集合

注 这个定理说明了，几乎处处收敛和一致收敛只差了一个零测集。

注 若 $m(E)=\infty$ 则结论不成立

2.5 依测度收敛

定义 2.3

$\{f_k\},f(x)$ 是定义在E上的可测函数且几乎处处有限，，如果 $\forall\sigma>0,\lim_{k\to+\infty}m(E(|f_k(x)-f(x)|\geq\sigma))=0$, 则称 $\{f_k\}$ 依测度收敛于 f，记为

$$f_k(x)\Rightarrow f(x)$$

在一致收敛的时候，我们有一个结论，就是如果一个数列收敛于两个函数，那么这两个函数相等，同样的，在依测度收敛里，我们也有类似的结论

定理 2.6

若 $\{f_k\},f(x),g(x)$是定义在E上的可测函数且几乎处处有限，,$f_k(x)\Rightarrow f(x)$,$f_k(x)\Rightarrow g(x)$, 则 f 几乎处处相等于 g

证明 模仿几乎处处收敛的证明方法，我们可以得到

$$|f-g|<|f-f_k|+|g-f_k|$$

于是乎，我们可以得到

$$E(|f-g|<\varepsilon)\supset E\left(|f-f_k|<\frac{\varepsilon}{2}\right)\cap E\left(|g-f_k|<\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

取个补集即可得到

2.6 依测度收敛和几乎处处收敛的关系

在前面，我们讨论了依测度收敛和几乎处处收敛的关系

现在我们再列举一下

$\forall\varepsilon > 0$ 几乎处处收敛

$$mE\left(\lim_{k\to+\infty}|f_k - f| \geq \varepsilon\right) = 0$$

依测度收敛

$$\lim_{k\to+\infty} mE\left(|f_k - f| \geq \varepsilon\right) = 0$$

我们发现，这两个定理具有一定程度上的相似性，差别在于极限符号的有所不同，那有什么方法可以建立两者之间的关系呢？在我们前面证明叶果洛夫定理的时候，我们就证明了类似于依测度收敛的结论，其中我们用到了几乎处处有界以及 $m(E) < +\infty$，于是乎我们就能得到以下定理

定理 2.7

如果满足叶果洛夫定理条件，则 $f_k(x) \Rightarrow f(x)$

证明见上

同样的，还有一个定理建立起了依测度收敛和几乎处处收敛的关系

定理 2.8 (里斯定理)

如果在E上 $\{f_n\}$ 依测度收敛于f等价于存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 几乎处处收敛于f

第 3 章 积分理论