微分几何应试版教材

作者：Huang

时间：May 17, 2025

目录

第 1 章 曲线论

1.1 求弧长参数/弧长

求弧长参数，三步走

1. 求 $\vec{r}'$
2. 求 $|\vec{r}'|$
3. 求积分 $\int |\vec{r}'|\, dt$

例题 1.1 将圆柱螺线 $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ 化为弧长参数

证明 三步走

1. 求导数 $\vec{r}'$：
   对参数 t 求导得：
$$\vec{r}'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ b)$$
2. 求模长 $|\vec{r}'|$：
   计算导数的模：
$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$
3. 求弧长参数 s：
   积分模长得到弧长：
$$s(t) = \int_0^t |\vec{r}'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\, d\tau = \sqrt{a^2+b^2}\cdot t$$
   解得 $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$，代入原参数方程得：
$$\vec{r}(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ a\sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\ \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

例题 1.2 求双曲螺线 $\vec{r} = (a\cosh t, a\sinh t, at)$ 的弧长参数表示。

证明 三步走

1. 求导数 $\vec{r}'$：
   对参数 t 求导得：
$$\vec{r}'(t) = (a\sinh t,\ a\cosh t,\ a)$$
2. 求模长 $|\vec{r}'|$：
   利用双曲恒等式 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$：
$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{a^2\sinh^2 t + a^2\cosh^2 t + a^2} = a\sqrt{2\cosh^2 t} = a\sqrt{2}\cosh t$$
3. 求弧长参数 s：
   积分模长得到弧长：
$$s(t) = \int_0^t a\sqrt{2}\cosh\tau\, d\tau = a\sqrt{2}\sinh t$$
   反解得 $t = \sinh^{-1}\left(\dfrac{s}{a\sqrt{2}}\right)$，代入原方程得弧长参数化表示：
$$\vec{r}(s) = \left(\sqrt{a^2 + \frac{s^2}{2}},\ \frac{s}{\sqrt{2}},\ a\sinh^{-1}\left(\frac{s}{a\sqrt{2}}\right)\right)$$

例题 1.3 求旋轮线 $\vec{r} = (a(t-\sin t), a(1-\cos t))$ 在 $0 \le t \le 2\pi$ 时的弧长。

证明 三步走：

1. 求导数 $\overrightarrow{r}'$:
   对参数 t 求导得:
$$\vec{r}'(t) = (a(1-\cos t),\ a\sin t)$$
2. 求模长 $|\overrightarrow{r}'|$:
   利用三角恒等式 $1-\cos t = 2\sin^2(t/2)$:
$$|\vec{r}'(t)| = a\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t} = 2a\sin(t/2)$$
3. 求总弧长:
   积分模长得总弧长:
$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin(t/2)\,dt = [-4a\cos(t/2)]_0^{2\pi} = 8a$$

1.2 切平面和法平面

切线方程的坐标表示:
$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$
法平面方程的坐标表示:
$$[x-x(t_0)]x'(t_0)+[y-y(t_0)]y'(t_0)+[z-z(t_0)]z'(t_0)=0$$

例题 1.4 求圆柱螺线 $\vec{r}(t)=\{a\cos t, a\sin t, bt\}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的切线方程

证明 三步走:
1. 求导向量:
$$\vec{r}'(t) = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}$$
2. 求 $t=\frac{\pi}{3}$ 处的点和切向量:
$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{b\pi}{3}\right), \quad \vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2}, b\right)$$
3. 写切线方程:
$$\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z-\frac{b\pi}{3}}{b}$$

例题 1.5 对于圆柱螺线 $x=\cos t, y=\sin t, z=t$，求它在 $(1,0,0)$ 时的切线与法平面。

证明 三步走:
1. 确定参数 t:
   由 $x=1$ 得 $\cos t = 1 \Rightarrow t=0$，对应点 $(1,0,0)$
2. 求导向量:
$$\vec{r}'(t) = \{-\sin t,\ \cos t,\ 1\} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'(0) = (0,1,1)$$
3. 切线方程:
$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad 或 \quad \begin{cases} x=1 \\ y=z \end{cases}$$
4. 法平面方程:
   法向量为 $\vec{r}'(0)=(0,1,1)$，方程为:
$$0(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0 \quad \Rightarrow \quad y+z=0$$

例题 1.6 求三次挠曲线 $\vec{r}=\{at, bt^2, ct^3\}$ 在 t_0 时的切线和法平面。

证明 三步走：

1. 求导向量：
$$\vec{r}'(t) = \{a, 2bt, 3ct^2\}$$
2. 求 t_0 处的点和切向量：
$$\vec{r}(t_0) = \{at_0, bt_0^2, ct_0^3\}, \quad \vec{r}'(t_0) = \{a, 2bt_0, 3ct_0^2\}$$
3. 切线方程：
$$\frac{x - at_0}{a} = \frac{y - bt_0^2}{2bt_0} = \frac{z - ct_0^3}{3ct_0^2}$$
4. 法平面方程：
$$a(x - at_0) + 2bt_0(y - bt_0^2) + 3ct_0^2(z - ct_0^3) = 0$$

1.3 主法线、副法线、密切平面、从切平面

定义 1.3.1 (Frenet 标架)

设 r 为正则曲线，s 为弧长参数。

- 记 $T(s) = r'(s)$（自动为单位向量）
- 注意到 $|T(s)|^2 = 1 \Rightarrow T(s)' \cdot T(s) = 0$
- 若 $r'(s) \neq 0$，则令 $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$，最后令 $B(s) = T(s) \times N(s)$。

在 $r'(s) \neq \vec{0}$ 的地方总是可以定义以下坐标系 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$，称其为曲线 r 的 Frenet 标架。♣

定义 1.3.2 (主法线)

设正则曲线 $r(s)$ 的 Frenet 标架为 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$，则：

- 向量 $N(s) = \frac{T'(s)}{|T'(s)|}$ 称为曲线在 s 处的主法线向量。
- 主法线方向是曲线弯曲方向的正交单位化结果。

♣

定义 1.3.3 (副法线)

在 Frenet 标架中：

- 向量 $B(s) = T(s) \times N(s)$ 称为曲线在 s 处的副法线向量。
- 副法线方向由右手法则确定，且 $B(s)$ 始终垂直于密切平面。

♣

定义 1.3.4 (密切平面)

在 Frenet 标架 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$ 中：

- 由切向量 $T(s)$ 和主法线向量 $N(s)$ 张成的平面称为密切平面。
- 密切平面方程为：$(X - r(s)) \cdot B(s) = 0$，即所有与副法线正交的点构成的平面。

♣

定义 1.3.5 (从切平面)

对于 Frenet 标架 $\{r(s); T(s), N(s), B(s)\}$：

- 由切向量 $T(s)$ 和副法线向量 $B(s)$ 张成的平面称为从切平面（亦称矫正平面）。
- 从切平面方程为：$(X - r(s)) \cdot N(s) = 0$，即所有与主法线正交的点构成的平面。

♣

定义 1.3.6 (法平面)

- 由主法线 $N(s)$ 和副法线 $B(s)$ 张成的平面称为法平面。
- 法平面方程为：$(X - r(s)) \cdot T(s) = 0$，即所有与切线正交的点构成的平面。

♣

例题 1.7 求 $\vec{r}(t) = \{\cos t, \sin t, t\}$ 在 $(1,0,0)$ 处的法平面、副法线、密切平面、主法线及从切平面。

证明

1. 确定参数 t 值由 $\cos t = 1$ 且 $\sin t = 0$，得 $t = 0$，对应点 $(1,0,0)$。
2. 计算 **Frenet** 标架：
   (a). 切向量 $\vec{T}$：
   $$\vec{r}'(t) = \{-\sin t, \cos t, 1\} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}'(0) = \{0,1,1\}$$
   单位化得：
   $$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
   (b). 主法线 $\vec{N}$：计算二阶导数：
   $$\vec{r}''(t) = \{-\cos t, -\sin t, 0\} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}''(0) = \{-1,0,0\}$$
   单位化得主法线方向：
   $$\vec{N} = \frac{\vec{r}''(0)}{\|\vec{r}''(0)\|} = \{-1,0,0\}$$
   (c). 副法线 $\vec{B}$：
   $$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
3. 几何对象方程：
   (a). 切线方程：
   方向向量 $\vec{r}'(0) = \{0,1,1\}$，过点 $(1,0,0)$：
   $$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \quad 或 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$$
   (b). 法平面方程：
   法向量为 $\vec{r}'(0)$，方程为：
   $$0(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + z = 0$$
   (c). 主法线方程：
   方向向量 $\vec{N} = \{-1,0,0\}$，过点 $(1,0,0)$：
   $$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0} \quad 或 \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
   (d). 副法线方程：
   方向向量 $\vec{B} = \left\{0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$，过点 $(1,0,0)$：
   $$x = 1, \quad \frac{y}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{z}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
   (e). 密切平面方程：
   法向量为 $\vec{B}$，方程为：
   $$0(x-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(y-0) + \frac{1}{\sqrt{2}}(z-0) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = y$$

(f). 从切平面方程：
法向量为 $\vec{N}$，方程为：

$$-1(x-1)+0(y-0)+0(z-0)=0 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

1.4 曲率挠率

定义 1.4.1 (曲率)

我们称 $k(s)=|T'(s)|=|r''(s)|$ 为曲线的曲率。♣

定义 1.4.2 (挠率)

$$\tau(s)=-B'(s)\cdot N(s)$$

♣

对于一般参数 t

$$\begin{aligned} k(t)=k(s)&=T'(s)\cdot N(s)\\ &=\frac{|r'\times r''|}{|r'|^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(t)=\tau(s)&=-B'(s)\cdot N(s)\\ &=\frac{[r',r'',r''']}{|r'\times r''|^2}. \end{aligned}$$

例题 1.8 求 $\vec{r}=\{a(3t-t^3),3at^2,a(3t+t^3)\}$ 的曲率和挠率。

证明

1. 计算导数：

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t)&=\{a(3-3t^2),\ 6at,\ a(3+3t^2)\}\\ \vec{r}''(t)&=\{-6at,\ 6a,\ 6at\}\\ \vec{r}'''(t)&=\{-6a,\ 0,\ 6a\} \end{aligned}$$

2. 计算叉乘 $\vec{r}'\times\vec{r}''$：

$$\vec{r}'\times\vec{r}''=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a(3-3t^2) & 6at & a(3+3t^2)\\ -6at & 6a & 6at \end{vmatrix}=\left(18a^2(t^2-1),\ -36a^2t,\ 18a^2(1+t^2)\right)$$

模长为：

$$|\vec{r}'\times\vec{r}''|=18a^2\sqrt{2}(t^2+1)$$

3. 计算曲率：

$$k(t)=\frac{|\vec{r}'\times\vec{r}''|}{|\vec{r}'|^3}=\frac{18a^2\sqrt{2}(t^2+1)}{\left(3a\sqrt{2}(t^2+1)\right)^3}=\frac{1}{3a(t^2+1)^2}$$

4. 计算三重标量积：

$$[\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''']=\begin{vmatrix} a(3-3t^2) & 6at & a(3+3t^2)\\ -6at & 6a & 6at\\ -6a & 0 & 6a \end{vmatrix}=216a^3$$

5. 计算挠率：

$$\tau(t)=\frac{[\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''']}{|\vec{r}'\times\vec{r}''|^2}=\frac{216a^3}{\left(18a^2\sqrt{2}(t^2+1)\right)^2}=\frac{1}{3a(t^2+1)^2}$$

第 2 章 曲面论

2.1 切平面和法线

u-曲线：令 $v = v_0$，

$$r(u, v_0) = \big(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)\big).$$

只有 u 作为参数，是曲面上的曲线。其对应的切向量为

$$r'(u)|_{u_0} = r_u(u_0, v_0).$$

v-曲线：令 $u = u_0$，

$$r(u_0, v) = \big(x(u_0, v), \dots\big)$$

其对应的切向量为

$$r'(v)|_{v_0} = r_v(u_0, v_0).$$

定义 2.1.1 (切平面)

设 $p \in S$ 为曲面上一点。
定义 T_pS 为所有经过 p 且在 S 上的曲线在 p 点处的切向量构成的集合。
称为曲面 S 在 p 点处的切平面（切空间）。

$$T_pS = \{\text{所有过}p\text{ 且在曲面}S\text{ 上的曲线在}p\text{ 点处的切向量}\}$$

命题 2.1.1

T_pS 是由 $\mathrm{Span}\{r_u|_{(u_0,v_0)}, r_v|_{(u_0,v_0)}\}$ 张成的线性空间。因此，T_pS 是一个线性空间。

$$0 \iff (u_0, v_0) \iff P.$$

定义 2.1.2 (法向量与正则曲面片)

我们称单位法向量

$$\mathbf{n} = \frac{r_u \times r_v}{\|r_u \times r_v\|}$$

为曲面片在参数域上的定向法向量。
对于正则曲面片，若其参数化满足 $r_u \times r_v \neq \mathbf{0}$，则可在每一点定义法向量。严格来说，$\mathbf{n}$ 和 $-\mathbf{n}$ 均可作为法向量方向，对应两种不同的定向方式（称为分法 (2)）。

例题 2.1 设曲面 $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = \{u + v, u - v, uv\}$，求点 $(1, 2)$ 处的单位法向量、切平面方程、法线方程

证明

1. 计算偏导数：

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\bigg|_{(1,2)} = \{1, 1, 2\}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\bigg|_{(1,2)} = \{1, -1, 1\}$$

2. 求法向量：

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \{3, 1, -2\}$$

模长 $|\vec{n}| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$，单位法向量：

$$\vec{n}_0 = \left\{\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}\right\}$$

3. 切平面方程：
   点 $\vec{r}(1,2) = (3,-1,2)$，法向量 $\vec{n}$：

$$3(x-3)+1(y+1)-2(z-2)=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+y-2z=4$$

4. 法线方程：

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

例题 2.2 求球面 $\vec{r} = (\theta,\varphi) = \{a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\}$ 上任意点的切平面和法线方程。

证明

1. 计算偏导数：

$$\vec{r}_\theta = \{-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta\}$$

$$\vec{r}_\varphi = \{-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi, 0\}$$

2. 求法向量：

$$\vec{n} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi = -a^2\cos\theta \cdot \{a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, a\sin\theta\}$$

   单位法向量：

$$\vec{n}_0 = -\frac{\vec{r}}{a} \quad \text{（指向球心）}$$

3. 切平面方程：

$$\cos\theta\cos\varphi\cdot x + \cos\theta\sin\varphi\cdot y + \sin\theta\cdot z = a$$

4. 法线方程：

$$\frac{x-a\cos\theta\cos\varphi}{\cos\theta\cos\varphi} = \frac{y-a\cos\theta\sin\varphi}{\cos\theta\sin\varphi} = \frac{z-a\sin\theta}{\sin\theta}$$

2.2 曲面的第一基本形式

定义 2.2.1 (第一基本形式)

设正则曲面片 $r: D \to \mathbb{E}^3$，对任意点 $p\in S$，其切空间 T_pS 由基向量 $\{r_u, r_v\}$ 张成。定义第一基本形式 I 为：

$$I = E\,du\otimes du + 2F\,du\otimes dv + G\,dv\otimes dv,$$

其中系数由基向量的内积确定：

$$E = r_u\cdot r_u, \quad F = r_u\cdot r_v, \quad G = r_v\cdot r_v.$$

对应的度量张量矩阵为：

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

♣

第一基本形式的公式

设切向量 $\alpha = a_1r_u + b_1r_v$ 和 $\beta = a_2r_u + b_2r_v$，则：

$$I(\alpha,\beta) = (a_1 \quad b_1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = Ea_1a_2 + F(a_1b_2+b_1a_2) + Gb_1b_2.$$

第一基本形式的几何意义

（一）曲面上的曲线长度

设曲面上的曲线为 $r(t) = r(u(t), v(t))$，其中 $t \in [a, b]$。

在点 p 处，参数 t 对应于 t_0。

曲线在点 p 处的切向量为:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} r(t) = u_t \cdot r_u + v_t \cdot r_v \in T_pS$$

曲线在点 p 处的长度元素为:

$$\left|\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} r(t)\right| = \sqrt{E(u_t)^2 + 2F(u_t)(v_t) + G(v_t)^2} = \sqrt{I\left(\frac{d}{dt}\gamma(t), \frac{d}{dt}\gamma(t)\right)}$$

定义 2.2.2 (曲线长度)

设曲面上的曲线为 $r(t) = r(u(t), v(t))$。

曲线的长度 l 定义为:

$$l = \int_a^b |r'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{I\left(\frac{dr}{dt}, \frac{dr}{dt}\right)} dt$$

其中，I 表示第一基本形式。

♣

例题 2.3 计算 $S = \vec{r}(u, v) = \{a\cos u, a\sin u, v\}$ $(a > 0)$ 上曲线 $u = t, v = t, t \in [0, 1]$ 的长度。

证明

1. 确定曲线参数方程:
   将 $u = t$ 和 $v = t$ 代入曲面方程，得曲线:
   $$\vec{r}(t) = \{a\cos t,\ a\sin t,\ t\}, \quad t \in [0, 1]$$
2. 计算第一基本形式:
   - 曲面偏导数:
   $$\vec{r}_u = \{-a\sin u,\ a\cos u,\ 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0,\ 0,\ 1\}$$
   - 第一基本量:
   $$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1$$
   $$\text{第一基本形式:} \quad ds^2 = a^2du^2 + dv^2$$
3. 计算弧长微分:
   曲线参数变化率 $\frac{du}{dt} = 1, \frac{dv}{dt} = 1$，代入第一基本形式:
   $$ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{a^2 \cdot 1 + 1 \cdot 1}\, dt = \sqrt{a^2 + 1}\, dt$$
4. 积分求总长:
   $$l = \int_0^1 \sqrt{a^2 + 1}\, dt = \sqrt{a^2 + 1} \cdot \int_0^1 dt = \boxed{\sqrt{a^2 + 1}}$$

(二) 曲面上区域的面积

曲面的面积元素 $d\sigma$ 定义为:

$$d\sigma = |r_u \times r_v| dudv$$

展开为：

$$d\sigma = |r_u \times r_v|(\Delta u)(\Delta v)$$

进一步化简为：

$$d\sigma = \sqrt{|r_u|^2|r_v|^2 - (r_u \cdot r_v)^2}(\Delta u)(\Delta v)$$

即：

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv$$

其中，$E = |r_u|^2$，$F = r_u \cdot r_v$，$G = |r_v|^2$。

定义 2.2.3 (曲面面积)

曲面的面积 $A(r(D))$ 定义为：

$$A(r(D)) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

其中，$D \subset \mathbb{R}^2$。

例题 2.4 求球面 $\vec{r}(\varphi, \theta) = a\{\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\}$ 的面积。

证明

1. 计算偏导数：

$$\vec{r}_\varphi = \{-a\sin\varphi\cos\theta,\ -a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\}$$

$$\vec{r}_\theta = \{-a\cos\varphi\sin\theta,\ a\cos\varphi\cos\theta,\ 0\}$$

2. 计算第一基本量：

$$E = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = a^2, \quad F = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\theta = 0, \quad G = \vec{r}_\theta \cdot \vec{r}_\theta = a^2\cos^2\varphi$$

3. 计算面积元：

$$\sqrt{EG - F^2} = a^2\cos\varphi$$

4. 确定参数范围：
   标准球面参数域 $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in [0, 2\pi]$
5. 积分求面积：

$$A = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\varphi\, d\varphi d\theta = 2\pi a^2 \cdot 2 = \boxed{4\pi a^2}$$

例题 2.5 计算圆柱面 $S : \vec{r}(u, v) = \{a\cos u, a\sin u, v\}$ $(a > 0)$ 上由曲线 $u = 1, v = 0, u - v = 0$ 所围成曲面的面积。

证明

1. 确定参数区域 D：
   曲线 $u = 1, v = 0, u - v = 0$ 在参数平面内围成三角形区域：

$$D = \{(u, v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le u\}$$

2. 计算第一基本量：

$$\vec{r}_u = \{-a\sin u,\ a\cos u,\ 0\}, \quad \vec{r}_v = \{0,\ 0,\ 1\}$$

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = a$$

3. 积分求面积：

$$A = \iint_D a\, dudv = a \int_0^1 \int_0^u dvdu = a \int_0^1 u\, du = \boxed{\frac{a}{2}}$$

2.3 第二基本形式

定义 2.3.1 (第二基本形式)

$$II = L\, du \otimes du + M\, du \otimes dv + M\, dv \otimes du + N\, dv \otimes dv$$

其中，

$$II \sim \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

也是 T_pS 上的一个张量积，线性、对称，但不一定正定。
其中：

$$L = r_{uu} \cdot n = (r_u \cdot n)_u - r_u \cdot n_u$$
$$M = r_{uv} \cdot n = -r_u \cdot n_v = -r_v \cdot n_u$$
$$N = r_{vv} \cdot n = -r_v \cdot n_v$$

♣

例题 2.6 计算悬链面 $\vec{r} = \{\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u\}$ 的第一、第二类基本量。

证明

1. 第一类基本量：
   (a). 计算偏导数：

$$\vec{r}_u = \{\sinh u \cos v,\ \sinh u \sin v,\ 1\}, \quad \vec{r}_v = \{-\cosh u \sin v,\ \cosh u \cos v,\ 0\}$$

   (b). 计算第一基本量：

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \cosh^2 u, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = \cosh^2 u$$

2. 第二类基本量：
   (a). 计算二阶偏导数：

$$\vec{r}_{uu} = \{\cosh u \cos v,\ \cosh u \sin v,\ 0\}$$

$$\vec{r}_{uv} = \{-\sinh u \sin v,\ \sinh u \cos v,\ 0\}$$

$$\vec{r}_{vv} = \{-\cosh u \cos v,\ -\cosh u \sin v,\ 0\}$$

   (b). 计算单位法向量：

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left\{-\frac{\cos v}{\cosh u},\ -\frac{\sin v}{\cosh u},\ \tanh u\right\}$$

   (c). 计算第二基本量：

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = -1, \quad M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 0, \quad N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = 1$$

2.4 法曲率的计算

命题 2.4.1 (法曲率的一般公式)

若 v 非单位向量，则 $\frac{v}{|v|}$ 为单位向量。

定义

$$k_n(v) \equiv k_n\left(\frac{v}{|v|}\right) = II\left(\frac{v}{|v|}, \frac{v}{|v|}\right)$$
$$= \frac{1}{|v|^2} II(v,v) = \frac{II(v,v)}{I(v,v)}$$

上述称为法曲率的一般公式。

例题 2.7 计算椭圆抛物面 $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ $(a, b > 0)$ 在点 $(0,0,0)$ 处沿任一方向 $\frac{dx}{dy}$ 的法曲率

证明

1. 参数化曲面：
   将椭圆抛物面表示为 $\vec{r}(x,y) = \left(x,\ y,\ \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)\right)$
2. 计算一阶偏导数：
   $$\vec{r}_x = (1,\ 0,\ ax)\,,\quad \vec{r}_y = (0,\ 1,\ by)$$
   在点 $(0,0,0)$ 处：
   $$\vec{r}_x = (1,0,0),\quad \vec{r}_y = (0,1,0)$$
3. 第一类基本量：
   $$E = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_x = 1,\quad F = \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y = 0,\quad G = \vec{r}_y \cdot \vec{r}_y = 1$$
4. 计算单位法向量：
   $$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{|\vec{r}_x \times \vec{r}_y|} = (0,0,1)$$
5. 计算二阶偏导数：
   $$\vec{r}_{xx} = (0,0,a),\quad \vec{r}_{xy} = (0,0,0),\quad \vec{r}_{yy} = (0,0,b)$$
6. 第二类基本量：
   $$L = \vec{r}_{xx} \cdot \vec{n} = a,\quad M = \vec{r}_{xy} \cdot \vec{n} = 0,\quad N = \vec{r}_{yy} \cdot \vec{n} = b$$
7. 法曲率公式：
   设方向比为 $k = \frac{dx}{dy}$，则方向向量为 $(k, 1)$，法曲率为：
   $$k_n = \frac{Lk^2 + N}{k^2 + 1} = \frac{ak^2 + b}{k^2 + 1}$$

2.5 曲面的渐进方向

- 我们称 $V \in T_pS$ 是一个渐近方向，若 $k_n(v) = \frac{II(v,v)}{I(v,v)} = 0$。
  若 $r(s) = r(u(s), v(s))$ 的切方向 $r'(s)$ 是渐近方向，则称 $r(s)$ 为曲面上的一条渐近线。此时 $k_n(r'(s)) \equiv 0$。
  渐近线方程

$$k_n(r'(s)) \equiv 0 \iff II(r'(s), r'(s)) \equiv 0.$$

$$\Leftrightarrow L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow L\left(\frac{du}{dv}\right)^2+2M\left(\frac{du}{dv}\right)+N=0.$$

将 u 视为 v 的函数：

$$\frac{du}{dv}=\frac{du/ds}{dv/ds}$$

方程有解的必要条件是判别式 $\Delta\geq 0$：

$$\Delta\geq 0 \iff \det II\leq 0 \iff K\leq 0.$$

解得 $u=f(v)+C$，于是可以讨论曲线 $u=f(v)+C$：

$$F(u,v)=C$$

例题 2.8 求双曲抛物面 $\vec{r}(u,v)=\{2(u+v),u-v,2uv\}$ 在点 $(0,0,0)$ 的渐近方向。

证明

1. 二阶偏导数计算：

$$\vec{r}_{uu}=(0,0,0),\quad \vec{r}_{uv}=(0,0,2),\quad \vec{r}_{vv}=(0,0,0)$$

2. 单位法向量：

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=(0,0,-1)$$

3. 第二基本量：

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=0,\quad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=-2,\quad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=0$$

4. 渐近方向方程：

$$0\cdot(du)^2+2(-2)dudv+0\cdot(dv)^2=0\quad\Rightarrow\quad du\cdot dv=0$$

解得渐近方向为 $\boxed{du=0}$ 或 $\boxed{dv=0}$，对应直母线方向。

例题 2.9 试求圆柱面 $S:\vec{r}(u,v)=\{a\cos u,a\sin u,v\}$ $(a>0)$ 上的渐近线。

证明

1. 二阶偏导数计算：

$$\vec{r}_{uu}=(-a\cos u,-a\sin u,0),\quad \vec{r}_{uv}=(0,0,0),\quad \vec{r}_{vv}=(0,0,0)$$

2. 单位法向量：

$$\vec{n}=(\cos u,\sin u,0)$$

3. 第二基本量：

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=-a,\quad M=0,\quad N=0$$

4. 渐近线方程：

$$-a(du)^2=0\quad\Rightarrow\quad du=0$$

解得渐近线为 $\boxed{u=\text{常数}}$，即圆柱面的直母线。

例题 2.10 曲面 $z=xy^2$ 的渐近线。

证明

1. 参数化与二阶偏导数：

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,xy^2),\quad \vec{r}_{xx}=(0,0,0),\quad \vec{r}_{xy}=(0,0,2y),\quad \vec{r}_{yy}=(0,0,2x)$$

2. 单位法向量：

$$\vec{n} = \frac{(-y^2, -2xy, 1)}{\sqrt{y^4 + 4x^2y^2 + 1}}$$

3. 第二基本量：

$$L = 0, \quad M = \frac{2y}{\sqrt{D}}, \quad N = \frac{2x}{\sqrt{D}} \quad (D = y^4 + 4x^2y^2 + 1)$$

4. 渐近线方程：

$$4ydxdy + 2x(dy)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2dy(2ydx + xdy) = 0$$

解得渐近线为：

$$\boxed{y = C} \quad \text{或} \quad \boxed{x = Cy^{-1/2}} \quad (C\text{为常数})$$

2.6 主方向

定义 2.6.1

设 $(d)du : dv$ 为曲面 $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ 在 $P(u, v)$ 点的一个方向，则 (d) 为主方向当且仅当

$$\begin{vmatrix} du^2 & -du\,dv & dv^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

♣

例题 2.11 计算双曲抛物面 $\vec{r} = \{a(u + v), b(u - v), 2uv\}$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的主方向。

证明

1. 计算一阶偏导：

$$\vec{r}_u = (a, b, 2v), \quad \vec{r}_v = (a, -b, 2u)$$

在 $(u, v) = (0, 0)$ 处：

$$\vec{r}_u = (a, b, 0), \quad \vec{r}_v = (a, -b, 0)$$

2. 计算第一基本量：

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2 + b^2$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = a^2 - b^2$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = a^2 + b^2$$

3. 计算单位法向量：

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{(0, 0, -2ab)}{2|ab|} = (0, 0, -1)$$

4. 计算二阶偏导：

$$\vec{r}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \vec{r}_{uv} = (0, 0, 2), \quad \vec{r}_{vv} = (0, 0, 0)$$

5. 计算第二基本量：

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = 2 \cdot (-1) = -2$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = 0$$

6. 主方向判别式：设主方向为 $du:dv=k:1$，代入主方向判别式：

$$\begin{vmatrix} k^2 & -k & 1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\begin{vmatrix} k^2 & -k & 1 \\ a^2+b^2 & a^2-b^2 & a^2+b^2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

展开行列式（按第三行）：

$$0\cdot\begin{vmatrix} -k & 1 \\ a^2-b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} k^2 & 1 \\ a^2+b^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} k^2 & -k \\ a^2+b^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

只剩中间项：

$$2\cdot\left[k^2(a^2+b^2) - 1(a^2+b^2)\right] = 2(a^2+b^2)(k^2-1) = 0$$

所以 $k^2=1$，即 $k=\pm1$。

7. 主方向为 $du:dv=1:1$ 和 $du:dv=-1:1$，即沿 $u=v$ 和 $u=-v$ 方向。

$$\boxed{du:dv=1:1 \quad \text{和} \quad du:dv=-1:1}$$

2.7 主曲率、高斯曲率、平均曲率

定义 2.7.1 (主曲率)

我们称 W 的曲线在两个特征值（可以相等）k_1, k_2 处的方向为曲面在该点的主曲率。♣

定理 2.7.1

曲面 $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ 在点 $P(u,v)$ 处的主曲率 k_n 满足

$$\begin{vmatrix} L-k_nE & M-k_nF \\ M+k_nF & N-k_nG \end{vmatrix} = 0$$

$(EG-F^2)$ k_n^2 + $(LG-2MF+NE)k_n$ + $(LN-M^2)=0$ （一元二次方程）♡

定义 2.7.2 (中曲率和高斯曲率)

- 高斯曲率（K）：

$$K = k_1\cdot k_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

  其中 k_1 和 k_2 是主曲率，E,F,G 是第一基本形式的系数，L,M,N 是第二基本形式的系数。

- 中曲率（H）：

$$H = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = \frac{LG+NE-2MF}{2(EG-F^2)}$$

两者完全决定了曲面在一点处的弯曲 ♣

例题 2.12 计算曲面 $\vec{r}(u,v)=\{u+v, u^2-v^2, u-v\}$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率。

证明

1. 计算一阶偏导：

$$\vec{r}_u=(1,2u,1), \quad \vec{r}_v=(1,-2v,-1)$$

在 $(u,v)=(0,0)$ 处：

$$\vec{r}_u=(1,0,1),\quad \vec{r}_v=(1,0,-1)$$

2. 计算第一基本形式系数：

$$E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u=1^2+0^2+1^2=2$$

$$F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=1\times1+0\times0+1\times(-1)=0$$

$$G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v=1^2+0^2+(-1)^2=2$$

3. 计算单位法向量：

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|}=\frac{(0,2,0)}{2}=(0,1,0)$$

4. 计算二阶偏导：

$$\vec{r}_{uu}=(0,2,0),\quad \vec{r}_{uv}=(0,0,0),\quad \vec{r}_{vv}=(0,-2,0)$$

5. 计算第二基本形式系数：

$$L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n}=(0,2,0)\cdot(0,1,0)=2$$

$$M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}=(0,0,0)\cdot(0,1,0)=0$$

$$N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}=(0,-2,0)\cdot(0,1,0)=-2$$

6. 代入主曲率判别式：

$$(EG-F^2)k_n^2+(LG-2MF+NE)k_n+(LN-M^2)=0$$

代入 $E=2,F=0,G=2,L=2,M=0,N=-2$ 得

$$(2\times2-0^2)k_n^2+(2\times2-2\times0\times0+(-2)\times2)k_n+(2\times-2-0^2)=0$$

$$4k_n^2+(4-4)k_n-4=0$$

$$4k_n^2-4=0$$

$$k_n^2=1\implies k_n=\pm1$$

7. 高斯曲率与平均曲率：

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=\frac{2\times(-2)-0^2}{2\times2-0^2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$H=\frac{LG+NE-2MF}{2(EG-F^2)}=\frac{2\times2+(-2)\times2-0}{2\times4}=\frac{4-4}{8}=0$$

8.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{主曲率：}\quad k_1=1,\quad k_2=-1\\[2em]\text{高斯曲率：}\quad K=-1\\[2em]\text{平均曲率：}\quad H=0\end{array}}$$

例题 2.13 计算正螺面 $S:\vec{r}(u,v)=\{u\cos v,u\sin v,v\}$ 的高斯曲率和平均曲率。

证明

1. 计算一阶偏导：

$$\vec{r}_u=(\cos v,\ \sin v,\ 0),\quad \vec{r}_v=(-u\sin v,\ u\cos v,\ 1)$$

2. 计算第一基本形式系数：

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = \cos v \cdot (-u \sin v) + \sin v \cdot (u \cos v) + 0 \cdot 1 = 0$$

$$G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = (-u \sin v)^2 + (u \cos v)^2 + 1^2 = u^2(\sin^2 v + \cos^2 v) + 1 = u^2 + 1$$

3. 计算单位法向量：

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

先计算叉积：

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v,\ -\cos v,\ u)$$

其模长为

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}$$

所以

$$\vec{n} = \left(\frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)$$

4. 计算二阶偏导：

$$\vec{r}_{uu} = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\vec{r}_{uv} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0)$$

$$\vec{r}_{vv} = (-u \cos v,\ -u \sin v,\ 0)$$

5. 计算第二基本形式系数：

$$L = \vec{r}_{uu} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M = \vec{r}_{uv} \cdot \vec{n} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0) \cdot \left(\frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)$$

$$= -\frac{\sin^2 v}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{\cos^2 v}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$N = \vec{r}_{vv} \cdot \vec{n} = (-u \cos v,\ -u \sin v,\ 0) \cdot \left(\frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}, -\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right)$$

$$= -u \cos v \cdot \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}} + (-u \sin v) \cdot \left(-\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}} \right)$$

$$= -\frac{u \sin v \cos v}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{u \sin v \cos v}{\sqrt{1+u^2}} = 0$$

6. 高斯曲率与平均曲率公式：

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{LG + NE - 2MF}{2(EG - F^2)}$$

代入 $E = 1, F = 0, G = u^2 + 1, L = 0, M = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, N = 0$ 得

$$EG - F^2 = 1 \cdot (u^2 + 1) - 0 = u^2 + 1$$

$$K = \frac{0 \cdot 0 - \left(-\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \right)^2}{u^2 + 1} = -\frac{1}{(u^2+1)^2}$$

$$H = \frac{0 \cdot (u^2+1) + 0 \cdot 1 - 0}{2(u^2+1)} = 0$$

7. 结论：

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{高斯曲率：} & K = -\dfrac{1}{(u^2+1)^2} \\ \\ \text{平均曲率：} & H = 0 \end{array}}$$

2.8 可展曲面

定义 2.8.1 (直纹面)

称由单参数直线族给出的曲面为直纹面，换而言之，直纹面一定有以下参数表达。

$$r(u,v) = a(u) + vb(u).$$

♣

定义 2.8.2 (可展曲面)

$K=0$ 的直纹面称为可展曲面。

♣

命题 2.8.1

直纹面可展 $\Leftrightarrow [a'(u), b(u), b'(u)] \equiv 0.$

♠

例题 2.14 证明 $\vec{r} = \{u^2 + \frac{1}{3}v, 2u^3 + uv, u^4 + \frac{2}{3}u^2 v\}$ 是可展曲面。

证明

方法一：高斯曲率法

1. 写为直纹面形式：

$$a(u) = \left(u^2,\ 2u^3,\ u^4\right), \quad b(u) = \left(\frac{1}{3},\ u,\ \frac{2}{3}u^2\right)$$

2. 计算一阶偏导：

$$\vec{r}_u = (2u,\ 6u^2 + v,\ 4u^3 + \frac{4}{3}uv)$$

$$\vec{r}_v = \left(\frac{1}{3},\ u,\ \frac{2}{3}u^2\right) = b(u)$$

3. 计算二阶偏导：

$$\vec{r}_{uu} = (2,\ 12u,\ 12u^2 + \frac{4}{3}v)$$

$$\vec{r}_{uv} = (0,\ 1,\ \frac{4}{3}u)$$

$$\vec{r}_{vv} = (0,\ 0,\ 0)$$

4. 计算法向量：

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

5. 计算 E, F, G, L, M, N，代入高斯曲率公式，可验证 $K \equiv 0$。

方法二：混合积法

1. $a(u) = (u^2,\ 2u^3,\ u^4)$，$b(u) = (\frac{1}{3},\ u,\ \frac{2}{3}u^2)$
2. $a'(u) = (2u,\ 6u^2,\ 4u^3)$，$b'(u) = (0,\ 1,\ \frac{4}{3}u)$

3. 计算混合积

$$[a'(u), b(u), b'(u)] = \det\begin{pmatrix} 2u & \frac{1}{3} & 0 \\ 6u^2 & u & 1 \\ 4u^3 & \frac{2}{3}u^2 & \frac{4}{3}u \end{pmatrix}$$

展开可得 $[a'(u), b(u), b'(u)] \equiv 0$，所以是可展曲面。

例题 2.15 证明 $\vec{r} = \{\cos v - (u+v)\sin v, \sin v + (u+v)\cos v, u+2v\}$ 是可展曲面。

证明 方法一：高斯曲率法

1. 写为直纹面形式：

$$a(u) = \{-u\sin v,\ u\cos v,\ u\}, \quad b(u) = \{\cos v - v\sin v,\ \sin v + v\cos v,\ 2v\}$$

但更直接地，视为 $a(u) = (0,0,u)$，$b(u) = (\cos v - v\sin v,\ \sin v + v\cos v,\ 2v)$，参数交换也可。

2. 计算 K，可验证 $K \equiv 0$。

方法二：混合积法

1. $a(u) = (0,0,u)$，$b(u) = (\cos v - v\sin v,\ \sin v + v\cos v,\ 2v)$
2. $a'(u) = (0,0,1)$，$b'(u) = (-\sin v - v\cos v,\ \cos v - v\sin v,\ 2)$
3. 计算混合积

$$[a'(u), b(u), b'(u)] = \det\begin{pmatrix} 0 & \cos v - v\sin v & -\sin v - v\cos v \\ 0 & \sin v + v\cos v & \cos v - v\sin v \\ 1 & 2v & 2 \end{pmatrix}$$

展开可得 $[a'(u), b(u), b'(u)] \equiv 0$，所以是可展曲面。

例题 2.16 证明正螺面 $\vec{r} = \{v\cos u, v\sin u, au+b\}$ 不是可展曲面。

证明 方法一：高斯曲率法

1. 写为直纹面形式：

$$a(u) = (0,0,au+b), \quad b(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

2. 计算 K，可得 $K \not\equiv 0$，不是可展曲面。

方法二：混合积法

1. $a(u) = (0,0,au+b)$，$b(u) = (\cos u, \sin u, 0)$
2. $a'(u) = (0,0,a)$，$b'(u) = (-\sin u, \cos u, 0)$
3. 计算混合积

$$[a'(u), b(u), b'(u)] = \det\begin{pmatrix} 0 & \cos u & -\sin u \\ 0 & \sin u & \cos u \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} = a(\cos^2 u + \sin^2 u) = a \neq 0$$

所以不是可展曲面。

2.9 曲面论基本定理、一些符号

$$\begin{array}{lllllllll} \text{高斯符号:} & u & v & du & dv & \vec{r_0} & \vec{r_1} & \vec{r_2} & \vec{r_{uv}} & \vec{r_{uv}}' \\ \text{张量符号:} & u^1 & u^2 & du^1 & du^2 & \vec{r}^1 & \vec{r}^2 & (\vec{r}^1)' & (\vec{r}^2)' & \vec{r_{12}} & \vec{r_{22}}' \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&(\text{高斯符号}) \quad E=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_u \quad F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v \quad G=\vec{r}_v\cdot\vec{r}_v\\
&\qquad\qquad L=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{n} \quad M=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n} \quad N=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}\\
&(\text{张量符号}) \quad g_{11}=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_1 \quad g_{12}=\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 \quad g_{22}=\vec{r}_2\cdot\vec{r}_2\\
&\qquad\qquad L_{11}=\vec{r}_{11}\cdot\vec{n} \quad L_{12}=\vec{r}_{12}\cdot\vec{n} \quad L_{22}=\vec{r}_{22}\cdot\vec{n}
\end{aligned}
$$

$$
(\text{高斯符号})\begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}=EG-F^2 \qquad \begin{vmatrix}E & F\\ F & G\end{vmatrix}^{-1} \qquad k=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}
$$

$$
(\text{张量符号})g=\begin{vmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix} \qquad (g^{ij})=\frac{1}{g}\begin{vmatrix}g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{vmatrix} \qquad k=\frac{L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}}{g}
$$

$$
\text{高斯符号}I=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2 \quad II=L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2
$$

$$
\text{张量符号}I=\sum_{i,j}g_{ij}\,du^i\,dv^j \quad (i,j=1,2) \quad II=\sum_{i,j}L_{ij}\,du^i\,dv^j \quad (i,j=1,2)
$$

$$
\Gamma_{ij}^k=\sum_l g^{kl}[ij,l]=\sum_l\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right), \quad i,j,k=1,2.
$$

Γ_{ij}^k 用E,F,G 表示:

$$
\Gamma_{11}^1=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{11}^2=\frac{E(2F_u-E_v)-FE_u}{2(EG-F^2)}
$$

$$
\Gamma_{12}^1=\frac{E_v-FG_u}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{12}^2=\frac{EG_u-FE_v}{2(EG+F^2)}
$$

$$
\Gamma_{22}^1=\frac{G(2F_v-G_u)-FG_v}{2(EG-F^2)}, \quad \Gamma_{22}^2=\frac{EG_v+F(2F_v-G_u)}{2(EG-F^2)}
$$

例题 2.17 Γ_{11}^1

证明 由 Christoffel 符号的定义:

$$
\Gamma_{ij}^k=\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l}\right)
$$

对于二维曲面，第一基本形式为

$$
(g_{ij})=\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}
$$

其逆矩阵为

$$
(g^{ij})=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}
$$

我们要求 Γ_{11}^1，即 $i=1,j=1,k=1$，代入得

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1&=\sum_{l=1}^{2}\frac{1}{2}g^{1l}\left(\frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1}+\frac{\partial g_{1l}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^l}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left[g^{11}\left(2\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\right)+g^{12}\left(2\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

注意 $g_{11}=E$, $g_{12}=F$, $u^1=u$, $u^2=v$，所以

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\left[g^{11}E_u+g^{12}(2F_u-E_v)\right]$$

其中 $E_u=\frac{\partial E}{\partial u}$，$F_u=\frac{\partial F}{\partial u}$，$E_v=\frac{\partial E}{\partial v}$。

再代入 $g^{11}=\frac{G}{EG-F^2}$，$g^{12}=-\frac{F}{EG-F^2}$，得

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2(EG-F^2)}\left[GE_u-F(2F_u-E_v)\right]$$

即

$$\boxed{\Gamma^1_{11}=\frac{GE_u-F(2F_u-E_v)}{2(EG-F^2)}}$$

例题 2.18 平面上取极坐标时，第一基本形式为 $ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2$，试计算第二类克里斯托费尔符号 Γ^k_{ij}

证明 极坐标下，第一基本形式为

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\theta^2$$

即

$$E=1,\quad F=0,\quad G=\rho^2$$

记 $u^1=\rho$, $u^2=\theta$。

计算各个分量的偏导数：

$$E_\rho=0,\quad E_\theta=0,\quad F_\rho=0,\quad F_\theta=0,\quad G_\rho=2\rho,\quad G_\theta=0$$

第一基本形式的逆矩阵为

$$(g^{ij})=\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix}G & -F\\ -F & E\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho^2}\begin{pmatrix}\rho^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\rho^2}\end{pmatrix}$$

下面分别计算各个 Γ^k_{ij}：

1. Γ^1_{11}：

$$\Gamma^1_{11}=\frac{GE_\rho-F(2F_\rho-E_\theta)}{2(EG-F^2)}=\frac{\rho^2\cdot 0-0\cdot(0-0)}{2\rho^2}=0$$

2. Γ^2_{11}：

$$\Gamma^2_{11}=\frac{E(2F_\rho-E_\theta)-FE_\rho}{2(EG-F^2)}=\frac{1\cdot(0-0)-0\cdot 0}{2\rho^2}=0$$

3. Γ^1_{12}：

$$\Gamma^1_{12}=\frac{E_\theta-FG_\rho}{2(EG-F^2)}=\frac{0-0\cdot 2\rho}{2\rho^2}=0$$

4. Γ^2_{12}：

$$\Gamma^2_{12}=\frac{EG_\rho-FE_\theta}{2(EG-F^2)}=\frac{1\cdot 2\rho-0\cdot 0}{2\rho^2}=\frac{2\rho}{2\rho^2}=\frac{1}{\rho}$$

5. Γ^1_{22}：

$$\Gamma^1_{22}=\frac{G(2F_\theta-G_\rho)-FG_\theta}{2(EG-F^2)}=\frac{\rho^2(0-2\rho)-0\cdot 0}{2\rho^2}=\frac{-2\rho^3}{2\rho^2}=-\rho$$

6. Γ^2_{22}：

$$\Gamma^2_{22}=\frac{EG_\theta+F(2F_\theta-G_\rho)}{2(EG-F^2)}=\frac{1\cdot 0+0\cdot(0-2\rho)}{2\rho^2}=0$$

综上，极坐标下非零的克里斯托费尔符号为：

$$\boxed{\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{\rho},\qquad \Gamma^1_{22}=-\rho}$$

其余分量均为零。