第一章作业

第七题

设 X 是线性赋范空间. 证明:

(1) 对于任何 $A, B \subset X$, $\overline{A}+\overline{B} \subset \overline{A+B}$.

(2) x_0+A 是开集(闭集) 当且仅当 A 是开集(闭集).

(3) A, B 中只要有一个是开集, $A+B$ 是开集.

(4) 若 $A^2 \neq \emptyset$, 则 $A-A$ 以 0 为内点.

证明:

(1)

设 $z \in \overline{A}+\overline{B}$，则存在 $x \in \overline{A}$，$y \in \overline{B}$ 使得 $z=x+y$。
由闭包定义，存在序列 $\{x_n\} \subset A$，$\{y_n\} \subset B$ 使得：
$x_n \to x$，$y_n \to y$

考虑序列 $\{x_n+y_n\}$，它属于 $A+B$。
由范数的连续性：
$\|z-(x_n+y_n)\| = \|(x+y)-(x_n+y_n)\| \leq \|x-x_n\|+\|y-y_n\| \to 0$

因此 $z \in \overline{A+B}$

(2)
先证明开集情况：

"$\Rightarrow$"：若 x_0+A 是开集，对任意 $a \in A$，x_0+a 是 x_0+A 的内点，
存在 $r>0$ 使得 $B(x_0+a, r) \subset x_0+A$。
则 $B(a, r)=-x_0+B(x_0+a, r) \subset A$，说明 a 是 A 的内点。

"$\Leftarrow$"：若 A 是开集，对任意 $a \in A$，存在 $r>0$ 使得 $B(a, r) \subset A$。
则 $B(x_0+a, r)=x_0+B(a, r) \subset x_0+A$，说明 x_0+A 是开集。

闭集情况类似，利用序列定义即可证明。

(3) 证明 A, B 中只要有一个是开集，$A+B$ 是开集：

不妨设 A 是开集。对任意 $z \in A+B$，存在 $a \in A$，$b \in B$ 使得 $z=a+b$。
因为 A 是开集，存在 $r>0$ 使得 $B(a, r) \subset A$。
则 $B(z, r)=B(a+b, r)=b+B(a, r) \subset b+A \subset A+B$。
因此 z 是 $A+B$ 的内点，$A+B$ 是开集。

(4) 证明若 $A^0 \neq \emptyset$，则 $A-A$ 以 0 为内点：

因为 $A^0 \neq \emptyset$，存在 $a \in A^0$。
由内点的定义，存在 $r>0$ 使得 $B(a, r) \subset A$。
对任意 $\|h\|<r$，有 $(a+h)-a=h \in A-A$。
因此 $B(0, r) \subset A-A$，即 0 是 $A-A$ 的内点。

第十九题

设 X 是线性赋范空间，若 X 有可数无穷 Hamel 基，则 X 不可能是完备的。

证明:

不妨设设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个 Hamel 基。

定义 E_n:

$E_n = \{x \in X : x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, \alpha_k \text{ 为标量}\}$

即 E_n 是由前 n 个基向量张成的有限维子空间。

由 Hamel 基的定义，我们有:

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

若 X 是完备的，则 X 是第二纲的,即其不能表示为可数个无处稠密闭集的并。

但在 X 中，E_n 是闭集且无处稠密的。

因此 X 不可能完备。

第二十一题

设 X 是度量空间，则以下条件等价:

(1) X 具有 Baire 性质.

(2) X 中可数多个无处稠密闭集合之并其内点是空集.

(3) X 中每个非空开集是第二纲的.

(4) X 中每个第一纲集的余集在 X 中稠密.

证明:

(1) $\Rightarrow$ (2):

若 X 具有 Baire 性质，则 X 不能表示为可数个无处稠密闭集的并

因此，若 $\{F_n\}$ 是可数个无处稠密闭集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 的内点必须是空集,不然 X 就可以表示为可数个无处稠密闭集的并。

(2) $\Rightarrow$ (3):

不妨设对于任意非空开集 $U \subset X$， U 是第一纲的。

则 $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，其中 F_n 是闭集且无处稠密。

这就出问题了,U 中可数多个无处稠密闭集合之并其内点是空集,这与 U 是开集矛盾。很坏。

(3) $\Rightarrow$ (4):

设 A 是第一纲集，则 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，其中 F_n 是无处稠密闭集

若 $X - A$ 不稠密，则存在非空开集 U 使得 $U \cap (X - A) = \emptyset$

这意味着 $U \subset A$，即 U 是第一纲的,这与 U 是开集矛盾。

(4) $\Rightarrow$ (1):

假设不具有 Baire 性质，则存在可数个无处稠密闭集 F_n 使得 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

则X 是第一纲集，由(4)知X在X的余集$\emptyset$在 X 中稠密，这与 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 矛盾。

第二十三题

设 X 是度量空间，证明集合 E 在 X 中稠密当且仅当 $\forall \varepsilon > 0, X = \bigcup_{x \in E} O(x, \varepsilon)$.

证明:

$\Rightarrow$

任取 $y \in X$，由 E 在 X 中稠密知:
$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in E$ 使得 $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$

此时 $y \in O(x, \varepsilon)$，因为 $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$，
所以 $y \in O(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{x \in E} O(x, \varepsilon)$

由 y 的任意性，得到 $X \subset \bigcup_{x \in E} O(x, \varepsilon)$

另一方向的包含显然成立，因为 $O(x, \varepsilon) \subset X$

因此 $X = \bigcup_{x \in E} O(x, \varepsilon)$

$\Leftarrow$

设 $\forall \varepsilon > 0, X = \bigcup_{x \in E} O(x, \varepsilon)$，证明 E 在 X 中稠密

任取 $y \in X$ 和 $\varepsilon > 0$

由条件知 $y \in \bigcup_{x \in E} O(x, \varepsilon)$，
因此存在 $x \in E$ 使得 $y \in O(x, \varepsilon)$，
即 $d(x, y) < \varepsilon$

这说明 $E \cap O(y, \varepsilon) \neq \emptyset$

由 y 和 ε 的任意性，得到 E 在 X 中稠密

第二十五题

设 (X, d) 是度量空间, $x \in X$, $E \subset X$, x 到 E 的距离是 $d(x, E)$, 证明:

(1) E 是闭集当且仅当 $\forall x \in X$, $d(x, E) = 0$ 时 $x \in E$.

(2) 若 E 是闭集, 则 $x \notin E$ 当且仅当 $d(x, E) > 0$.

证明:

(1)

$\Rightarrow$设 E 是闭集，取 $x \in X$ 使得 $d(x, E) = 0$

由距离定义：$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y) = 0$

因此存在序列 $\{y_n\} \subset E$ 使得 $d(x, y_n) \to 0$，即 $y_n \to x$

由 E 是闭集知 $x \in E$

$\Leftarrow$

取序列 $\{x_n\} \subset E$，且 $x_n \to x$

则 $d(x, x_n) \to 0$，因此 $d(x, E) = 0$

由条件知 $x \in E$，即 E 是闭集

(2)
$\Rightarrow$设 $x \notin E$，假设 $d(x,E)=0$

由 (1) 知 $x \in E$，这与 $x \notin E$ 矛盾

因此必有 $d(x,E)>0$

$\Leftarrow$设 $d(x,E)>0$，假设 $x \in E$

则 $d(x,E)=0$，这与 $d(x,E)>0$ 矛盾

因此必有 $x \notin E$

第三十二题

设 X 度量空间，$A \subset X$ 是紧集，则

(1) $\forall x \in X$，存在 $y \in A$，使得 $d(x,y)=d(x,A)$.

(2) $\exists x,y \in A$ 使得 $d(x,y)=\mathrm{diam} A$，后者为 A 的直径.

(3) 若另有 $B \subset X$ 和闭集，则 $A \cap B=\emptyset$ 当且仅当
$d(A,B)=\inf_{x\in A, y\in B} d(x,y)>0.$

(4) 举例说明，当 A 是闭集时，(1) 可以不成立.

证明:

证明：

(1)

任取 $x \in X$，由距离定义：$d(x,A)=\inf_{y\in A} d(x,y)$

因此存在序列 $\{y_n\} \subset A$ 使得 $d(x,y_n) \to d(x,A)$

由 A 的紧性，$\{y_n\}$ 有收敛子列 $\{y_{n_k}\}$，设其极限为 $y_0 \in A$

由距离的连续性：$d(x,y_0)=\lim_{k\to\infty} d(x,y_{n_k})=d(x,A)$

(2)

由直径定义：$\mathrm{diam} A=\sup_{x,y\in A} d(x,y)$

存在序列 $\{x_n\},\{y_n\} \subset A$ 使得 $d(x_n,y_n) \to \mathrm{diam} A$

由 A 的紧性，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 分别有收敛子列，设其极限分别为 $x_0,y_0 \in A$

由距离的连续性：$d(x_0,y_0)=\mathrm{diam} A$

(3)

($\Rightarrow$) 设 $A \cap B=\emptyset$

若 $d(A,B)=0$，则存在序列 $\{x_n\} \subset A$，$\{y_n\} \subset B$ 使得 $d(x_n,y_n) \to 0$

由 A 的紧性，$\{x_n\}$ 有收敛子列，其极限为 $x_0 \in A$

由 B 的闭性，$y_n \to x_0$ 且 $x_0 \in B$

这与 $A \cap B=\emptyset$ 矛盾，因此 $d(A,B)>0$

($\Leftarrow$) 设 $d(A,B)>0$，若 $A \cap B \neq \emptyset$

则存在 $z \in A \cap B$，此时 $d(z,z)=0$，这与 $d(A,B)>0$ 矛盾

(4)

在 $\mathbb{R}^2$ 中，令 $A=\{(x,\frac{1}{x}):x>0\}\cup\{(0,y):y\geq 0\}$，$x=(0,-1)$

在这个例子中，A 是闭集，但对于 $x=(0,-1)$，不存在 $y \in A$ 使得 $d(x,y)=d(x,A)$

第三十五题

证明度量空间中，若 A 在 B 中稠密，B 在 C 中稠密，则 A 在 C 中稠密.

证明:

任取 $c \in C$ 和 $\varepsilon>0$

因为 B 在 C 中稠密，存在 $b \in B$ 使得 $d(b,c)<\frac{\varepsilon}{2}$

因为 A 在 B 中稠密，存在 $a \in A$ 使得 $d(a,b)<\frac{\varepsilon}{2}$

由三角不等式:
$d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

这说明对任意 $c \in C$ 和 $\varepsilon>0$，都存在 $a \in A$ 使得 $d(a,c)<\varepsilon$

因此 A 在 C 中稠密。