算子代数

作者：h and m

时间：April 9, 2022

你这个学历的基米无权哈我

目录

第 1 章 代数基础

1.1 代数的基本概念

定义 1.1.1 (F 代数)

F 为一个域，A 为 F 上的线性空间，若

$$A \times A \xrightarrow{m} A$$

为一个二元运算（结合律），则称 (A, m) 为一个 F 代数。若满足 m 为双线性且满足结合律，则称为结合代数。

例题 1.1 非结合代数 典型的非结合代数为矩阵代数 $M_n(F)$（矩阵代数组成 F 域）。

例题 1.2 函数代数 Ω 集合，F 域，F^{Ω} 定义加法、数乘：

$$\begin{aligned} f, g \in F^{\Omega}, \quad (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ \lambda f(x) &:= \lambda f(x) \\ f \cdot g(x) &:= f(x) g(x) \end{aligned}$$

为 F 代数。

定义 1.1.2 (子代数)

若 A 为 F 代数，B 为 A 的非空子集，若 B 对 $+$、数乘、乘法封闭，则称 B 为一个子代数。

命题 1.1.1

若 A 为 F 代数，B 为非空子集，则

$$B\text{为子代数} \iff B\text{对}+\text{、数乘、乘法封闭}$$

证明 $(\Rightarrow)$ 显然。

$(\Leftarrow)$ 若 B 乘法双线性还存在，只需验证 B 继承了 A 的双线性性质。对任意 $x, y, z \in B$ 和 $\lambda \in F$，由于 B 对加法和数乘封闭，有

$$\begin{aligned} (x+y)z &= xz + yz \in B \\ x(y+z) &= xy + xz \in B \\ (\lambda x)y &= \lambda(xy) \in B \\ x(\lambda y) &= \lambda(xy) \in B \end{aligned}$$

这些性质从 A 继承而来，因此 B 为子代数。

例题 1.3 $\ell^{\infty}(\Omega)$ 为 $\mathbb{C}^{\Omega}$ 的子代数。（$\ell^{\infty}(N)$ 为全体有界序列）

定义 1.1.3 (理想)

A 为一个 F 代数，I 为 A 的非空子集，满足：

1. I 为 A 的线性子空间；
2. $\forall x \in A$，有 $xI = \{xy : y \in I\} \subset I$（左吸收性）；
3. $Ix = \{yx : y \in I\} \subset I$（右吸收性）。

则称 I 为 A 的一个理想，并称 A 为吸收理想，则称为理想代数。

注 一个代数，只有零理想，则称为单代数。例如 $M_n(F)$ 为单代数。

定义 1.1.4 (含幺代数)

若 A 为代数，且存在幺元（单位元 1），则称 A 为一个含幺代数。

定义 1.1.5 (保幺同态)

若 $A \xrightarrow{f} B$ 同态，A、B 含幺，称 f 为保幺同态若 $f(1_A) = 1_B$。

命题 1.1.2

$A \xrightarrow{f} B$ 为代数同态，则 $\ker f$ 为 A 的理想。

证明 对任意 $x \in A$，$y \in \ker f$，有

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) = f(x) \cdot 0 = 0$$

因此 $xy \in \ker f$。类似地，

$$f(yx) = f(y) \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$$

故 $yx \in \ker f$。因此 $\ker f$ 对左右乘法都封闭，即为理想。

此外，由于 f 是线性映射，$\ker f$ 显然是 A 的线性子空间。综上，$\ker f$ 为 A 的理想。

定义 1.1.6 (商代数)

A 为一个 F 代数，I 为 A 的理想，则 A/I 为商空间。在 A/I 中定义乘法：

$$\forall [x], [y] \in A/I, \quad [x] \cdot [y] = [xy]$$

证明 下证良定义：设 $[x] = [x']$，$[y] = [y']$，则需证 $[xy] = [x'y']$，即 $[xy - x'y'] = 0$。

考虑

$$\begin{aligned} xy - x'y' &= xy - xy' + xy' - x'y' \\ &= x(y - y') + (x - x')y' \end{aligned}$$

由于 $y - y' \in I$ 且 $x - x' \in I$，而 I 为理想，因此

$$x(y - y') \in I, \quad (x - x')y' \in I$$

故 $xy - x'y' \in I$，即 $[xy - x'y'] = 0$。因此乘法定义良定。

定理 1.1.1 (同态基本定理)

已知 $A \xrightarrow{f} B$ 为代数同态，则存在唯一的单同态 $\tilde{f} : A/\ker f \to B$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\ker f \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

其中 $\pi : A \to A/\ker f$ 为自然投射，$\tilde{f}([x]) = f(x)$，且 $\tilde{f}$ 为单同态。

证明 定义 $\tilde{f}([x]) = f(x)$。首先验证良定义性：若 $[x] = [y]$，则 $x - y \in \ker f$，故 $f(x - y) = 0$，即 $f(x) = f(y)$。

下证 $\tilde{f}$ 保乘法：

$$\begin{aligned} \tilde{f}([x][y]) &= \tilde{f}([xy]) = f(xy) \\ &= f(x)f(y) = \tilde{f}([x])\tilde{f}([y]) \end{aligned}$$

下证 $\tilde{f}$ 为单射：若 $\tilde{f}([x]) = 0$，则 $f(x) = 0$，即 $x \in \ker f$，故 $[x] = 0$。因此 $\ker \tilde{f} = \{0\}$，$\tilde{f}$ 为单射。

显然 $\tilde{f} \circ \pi = f$，且由于 π 为满射，$\tilde{f}$ 由 f 唯一确定。

1.2 谱理论基础

定义 1.2.1 (谱)

A 为含幺 F 代数，$a \in A$。定义

$$\sigma(a) = \{\lambda \in F : \lambda 1_A - a \text{ 不可逆}\} \subset F$$

称 $\sigma(a)$ 为 a 在 A 中的谱（允许 F）。

命题 1.2.1

A 为含幺代数，$a \in A$。则 a 可逆 $\iff 0 \notin \sigma(a)$。

证明 只需证 a 不可逆 $\iff 0 \in \sigma(a)$。

$$\begin{aligned} a\text{不可逆} &\iff -a\text{不可逆} \\ &\iff 0 \cdot 1_A - a\text{不可逆} \\ &\iff 0 \in \sigma(a) \end{aligned}$$

例题 1.4 $M_n(\mathbb{C})$ 为 $\mathbb{C}$ 代数，$A \in M_n(\mathbb{C})$。则

$$\sigma(A) = \{\lambda : \lambda I_n - A \text{ 不可逆}\}$$

为 A 的全体特征值。

反设 λ 为 A 的特征值 $\in \sigma(A)$。则存在 $x \neq 0$ 使得

$$Ax = \lambda \mathrm{id} \cdot x \implies (\lambda \mathrm{id} - A)x = 0 \implies \ker(\lambda \mathrm{id} - A) \neq 0$$

故 $\lambda \mathrm{id} - A$ 非单 $\implies$ 不可逆。

定义 1.2.2 (可除代数)

若 A 为含幺代数，满足每一个非零元可逆（$A \neq 0$），则称 A 为一个可除代数。

命题 1.2.2

若 A 为一个可除 F 代数，$\forall a \in A$，$\sigma(a) \neq \emptyset$，则 $A \cong F$。

证明 构造映射 $\theta : F \to A$，$\lambda \mapsto \lambda 1_A$。显然 θ 为单同态，下证 θ 为满射。

$\forall a \in A$，由于 $\sigma(a) \neq \emptyset$，$\exists \lambda \in \sigma(a)$ 使得 $\lambda 1_A - a$ 在 A 中不可逆。

由于 A 为可除代数，故 $\lambda 1_A - a = 0$，即 $\theta(\lambda) = a$。因此 θ 为满射，$A \cong F$。

1.3 幺元化

定义 1.3.1 (幺元化)

A 为代数，$\hat{A}$ 为含幺 F 代数，$\theta : A \to \hat{A}$，若

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & \hat{A} \arrow[d, dashed, "\exists ! \hat{f}"'] \\ & B \end{tikzcd}$$

对任意含幺代数 B 及 $f : A \to B$（保幺同态），使图交换，则称 $(\hat{A}, \theta)$ 为 A 的一个幺元化。

注[Banach 代数幺元化] $\hat{A} \cong A \times F$（$A \oplus F$）。

命题 1.3.1

若 B 为含幺 F 代数，A 为 B 的子代数，则 $A+F\cdot 1$ 为它含 A 与 1 的最小子代数（Rmk: k 可以不同于 F）。

证明 显然 $A+F\cdot 1$ 为子代数。

往取 C 为含 A 与 1 的子代数，则 $C\supset A$，$C\supset 1$。因此 $C\supset A+F\cdot 1$。

定义 1.3.2 (生成子代数)

A 为代数，$\Omega\subset A$，$\forall b$，$\Omega\subset A$ 中若 b 子代数，称为由 Ω 生成的子代数。

命题 1.3.2

$A+\Omega$ 生成的子代数存在唯一性。

证明 $C\triangleq\cap\{B:\Omega\subset B\text{且}B\text{为}A\text{的子代数}\}$。

命题 1.3.3

若 A 为 B 的子代数，1 为 B 的幺元，则

1. $1\in A\Longleftrightarrow A\cap F1=\{F0\}$
2. $1\notin A\Longleftrightarrow F1\subset A$

命题 1.3.4

若 $\hat{A}=A+F1$ 且 $A\cap F1=\{0\}$（i.e. $A\oplus F1$），则 $A\hookrightarrow\hat{A}$，$(\hat{A},\iota)$ 为一个幺元化。

定义 1.3.3 (幺元化)

A 为代数，$\hat{A}$ 为含幺 F 代数，若存在映射 $\theta:A\to\hat{A}$，使得对任意含幺代数 B 和代数同态 $f:A\to B$，存在唯一的代数同态 $\hat{f}:\hat{A}\to B$ 满足下图交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & \hat{A} \arrow[d, dashed, "\exists!\hat{f}"] \\ & B(\text{含幺}) \end{tikzcd}$$

则称 $(\hat{A},\theta)$ 为 A 的一个幺元化。

证明 若 $\hat{f}$ 存在，则 $\hat{f}(a+\lambda 1)=f(a)+\lambda 1_B$，故 $\hat{f}$ 唯一。

下证存在。定义 $\hat{f}:\hat{A}\to B$，由 $\hat{A}=A\oplus F1$，

$$a+\lambda 1\longmapsto f(a)+\lambda 1_B$$

则 $\hat{f}$ 为代数同态，故幺元化存在且唯一。

定理 1.3.1 (幺元化存在性)

若 A 为 F 代数，则 A 存在幺元化。

证明 定义 $\hat{A}=A\oplus F$。在 $\hat{A}$ 中定义乘法：

$$(a,\lambda)\cdot(b,\mu)\triangleq(ab+\mu a+\lambda b,\lambda\mu)$$

验证这定义了一个含幺代数结构，幺元为 $(0,1)$。

定义 $\theta:A\to\hat{A}$，$a\mapsto(a,0)$，则 θ 为代数单同态。

对任意含幺代数 B 和代数同态 $f: A \to B$，若存在 $\hat{f}: \hat{A} \to B$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & \hat{A} \arrow[d, dashed, "\exists! \hat{f}"'] \\
& B
\end{tikzcd}$$

则 $\hat{f}$ 存在。定义 $\hat{f}: \hat{A} \to B$，

$$a + \lambda 1 \mapsto f(a) + \lambda 1_B$$

若 $\hat{f}$ 存在，则 $\hat{f}(a + \lambda 1) = f(a) + \lambda 1_B$，故 $\hat{f}$ 唯一。
下证存在。定义 $\hat{f}: \hat{A} \to B$，由 $\hat{A} = A \oplus F1$，

$$a + \lambda 1 \mapsto f(a) + \lambda 1_B$$

则 $\hat{f}$ 为代数同态，故幺元化唯一。

命题 1.3.5 (幺元化唯一性)

若 A 有两个幺元化 (B_1, θ_1) 及 (B_2, θ_2)，则 $B_1 \cong B_2$，代数同构。

证明 由泛性质，存在唯一的代数同态 $\sigma: B_1 \to B_2$ 和 $\tau: B_2 \to B_1$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[loop left, "Id_{B_1}"] \arrow[rr, bend left, "\exists! \sigma"] & & B_2 \arrow[loop right, "Id_{B_2}"] \arrow[ll, bend left, "\exists! \tau"] \\
& A \arrow[ul, "\theta_1"] \arrow[ur, "\theta_2"'] &
\end{tikzcd}$$

由于 (B_1, θ_1) 和 (B_2, θ_2) 都是幺元化，应用泛性质：

- 对 (B_1, θ_1)，存在唯一 $\sigma: B_1 \to B_2$ 使得 $\sigma \circ \theta_1 = \theta_2$
- 对 (B_2, θ_2)，存在唯一 $\tau: B_2 \to B_1$ 使得 $\tau \circ \theta_2 = \theta_1$

则 $\tau \circ \sigma: B_1 \to B_1$ 满足 $(\tau \circ \sigma) \circ \theta_1 = \theta_1$，而 Id_{B_1} 也满足此性质。由唯一性，$\tau \circ \sigma = Id_{B_1}$。
同理，$\sigma \circ \tau = Id_{B_2}$。故 $B_1 \cong B_2$。

命题 1.3.6

若 $A \xrightarrow{\theta} \hat{A} = \theta(A) \oplus F1_{\hat{A}}$，$A \xrightarrow{\sigma} B$ 为含幺代数同态，则 $B = \sigma(A) \oplus F1_B$。

证明 考虑下图：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\sigma"'] & \hat{A} = \theta(A) \oplus F1_{\hat{A}} \arrow[d, dashed, "\exists! \tau"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

由幺元化的泛性质，存在唯一的代数同态 $\tau: \hat{A} \to B$ 使得 $\tau \circ \theta = \sigma$。
因此 $B = \sigma(A) \oplus F1_B$。

例题 1.5 若 Ω 为局部紧 T_2 空间，Ω 非紧 $\Rightarrow \hat{\Omega}$ 为全幺元化。

$C_0(\Omega)$ 表示 $\Omega \to \mathbb{C}$ 的全体在无穷远处趋于 0 的连续函数 ($\forall \varepsilon > 0$, $\exists K \subset \Omega$ 紧, s.t.$\forall x \in \Omega \setminus K$, 有 $|f(x)| < \varepsilon$)。

命题 1.3.7

$C_0(\Omega)$ 为一个 $\mathbb{C}$ 代数（不一定含幺）。
$C(\hat{\Omega})$ 表示 $\hat{\Omega}$ 上的全体连续函数（含幺代数）。
则 $C(\hat{\Omega})$ 为 $C_0(\Omega)$ 的幺元化。

定义 $\theta: C_0(\Omega) \to C(\hat{\Omega})$，$f \mapsto \hat{f}$，其中

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \infty \\ 0 & x = \infty \end{cases}$$

1.4 谱的性质

命题 1.4.1

若 A 为含幺代数，$a, b \in A$，则

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$$

证明 只要证：$\forall \lambda \in F$，若 $\lambda \neq 0$，则 $\lambda 1 - ab$ 可逆 $\iff \lambda 1 - ba$ 可逆。

引理 1.4.1

若 A 为环，$a, b \in A$，则 $1 - ab$ 可逆 $\iff 1 - ba$ 可逆。

证明 显然：$\lambda - ab$ 可逆 $\iff 1 - \frac{1}{\lambda} ab$ 可逆。

定理 1.4.1

若 $A \hookrightarrow \hat{A}$ 为幺元化，A 含幺元 e，则有 $\forall a \in A$，$\sigma_{\hat{A}}(a) \cup \{0\} = \sigma_A(a)$

证明 $(\subset)$ $\forall \lambda \in \sigma_A(a)$。

(1) 是 $\lambda = 0$，A 是 $\hat{A}$ 的真理想。

Rmk: 1 为 A 的代数理想 $\iff I$ 为 A 的环理想，因为 $\lambda x = \lambda \cdot 1_{\hat{A}} \cdot x = (\lambda 1_{\hat{A}}) x \in I_{\hat{A}}$。

A 是 $\hat{A}$ 的真理想 $\Rightarrow a \in A \Rightarrow e$ 在 $\hat{A}$ 中可逆 $e \Rightarrow a$ 在 $\hat{A}$ 中不可逆

$\Rightarrow -a = 0 \cdot 1 - a$ 在 $\hat{A}$ 中不可逆 $\Rightarrow 0 \in \sigma(a)_{\hat{A}}$

由 $\lambda \in \sigma_{\hat{A}}(a)$，得 $\lambda e - a$ 在 A 中不可逆，要证 $\lambda 1 - a$ 在 $\hat{A}$ 中不可逆。

考虑交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \hat{A} \arrow[d, dashed, "\exists ! \psi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

其中 $\psi: \hat{A} \to A$，$a + \lambda 1 \longmapsto \varphi(e) + \lambda \varphi(1) = a + \lambda e$。

验证 $\psi(-a + \lambda 1) = -a + \lambda e$。$\psi$ 保存 $\Rightarrow$ 保可逆性，由 $\lambda e - a$ 不可逆，知 $\lambda 1 - a$ 不可逆。

$(\supset)$ 下证 $\sigma_A(a) \subset \sigma_{\hat{A}}(a) \cup \{0\}$。

若 $0 \in \sigma_{\hat{A}}(a) \Rightarrow 0 \in$ 右边。

若 $\lambda \neq 0$，由 $\lambda \in \sigma_{\hat{A}}(a)$，$\lambda 1 - a$ 在 $\hat{A}$ 中不可逆。

要证 $\lambda \in \sigma_A(a)$，即 $\lambda e - a$ 在 A 中不可逆。

反证：若 $\lambda e - a$ 在 A 中可逆，设 $b \in A$ 使得 $(\lambda e - a) b = b(\lambda e - a)$。

要证 $\lambda 1 - a$ 在 $\hat{A}$ 中有逆元 $b + \frac{1}{\lambda}(1 - e)$：

$$(\lambda 1 - a)\left(b + \frac{1}{\lambda}(1 - e)\right) = (\lambda 1 - a) b + (\lambda 1 - a) \frac{1}{\lambda}(1 - e) = e + 1 - e - 0 = 1$$

$$\hat{A} \xrightarrow{\ \varphi\ } A$$

$$\lambda 1 + a \longmapsto \lambda e + a$$

其中 $\ker\varphi = F(1-e)$。

若存在 c 使得 $(\lambda e - a)\varphi(c) = e = \varphi(c)(\lambda e - a)$，考虑映射：

$$\begin{aligned} \hat{A} &\xrightarrow{\quad\varphi\quad} I_0 \\ x+\lambda 1 &\longmapsto x+\lambda e \\ \lambda 1 - a &\longmapsto \lambda e - a \\ c &\longmapsto \varphi(c) \end{aligned}$$

由 $\varphi(e)=e$，$b\in A \Rightarrow b=\varphi(b)$，$\varphi(b-c)=0 \Rightarrow b-c\in\ker\varphi$。

$\ker\varphi = \{x+\lambda 1 : x+\lambda e = 0\} = \{x+\lambda 1 : x = -\lambda e\} = \{-\lambda e + \lambda 1, \lambda\in F\} = F(1-e)$。

由 $b-c\in\ker\varphi$，设 $c-b=\mu(1-e)$，则 $c = b+\mu(1-e)$。

由 $(\lambda 1 - a)c = 1 = c(\lambda 1 - a) \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$。

1.5 谱的例子

Ω 为 Top sp.，$C(\Omega)$ 表示 Ω 上全体 $\mathbb{C}$ 值连续函数。

例题 1.6 $C(\Omega)$ 为 $\mathbb{C}$ 代数

左图（乘法连续）：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \Omega \arrow[r, "f\cdot g"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\text{乘法连续}"] \\ (x,y) \arrow[r, mapsto] & \Omega\times\Omega \arrow[r, "f\times g"] & \mathbb{C}\times\mathbb{C} \end{tikzcd}$$

其中 $(x,y)\longmapsto(f(x),f(y))$

右图（标量乘法）：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \Omega \arrow[r, "\lambda f"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{C} \\ f(x) & \mathbb{C} \arrow[ur, "\ell_\lambda"'] & \end{tikzcd}$$

例题 1.7 $C_b(\Omega)$ 表示 Ω 上全体有界连续函数（Def: $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 有界 $\Longleftrightarrow \ell^\infty(\Omega) = C_b(\Omega)$（若 Ω 赋离散拓扑）

例题 1.8 $f\in C(\Omega)$ 为谱，$\sigma(f) = f(\Omega)$。（像是谱）

证明 $\sigma(f) = \{\lambda\in\mathbb{C} : \lambda 1 - f \text{ 不可逆 }\} = \{\lambda\in\mathbb{C} : \exists x, \lambda - f(x) = 0\}$

$\Omega\xrightarrow{f}\mathbb{C}$ 可逆 $\Longleftrightarrow \forall x\in\Omega$，$f(x)\neq 0$。

$\frac{1}{f}(x) \triangleq \frac{1}{f_x}$。$\Omega\xrightarrow{f}\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\frac{1}{f}"'] & \mathbb{C}\setminus\{0\} \arrow[d] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

f 在 $C_b(\Omega)$ 中的谱，$\sigma(f) = \overline{f(\Omega)}$

注 $C_b(\Omega)$ 中 f 可逆 $\Longleftrightarrow \exists\delta>0$，使 $\forall x\in\Omega$ 有 $|f(x)|>\delta$。

证明 $(\Rightarrow)$ 设 $f\cdot g = 1 = g\cdot f$，$\Rightarrow g = \frac{1}{f}$。

$\forall x\in\Omega$，$|g(x)| = \frac{1}{|f|} > \frac{1}{M} > 0$

$(\Leftarrow)$ 由已知 $\frac{1}{f}$ 存在，连续。

$\forall x$，$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$，$\frac{1}{f} \in C_b(\Omega)$
($\Leftarrow$) 上述等价于 $d(f(\Omega), 0) > 0$

命题 1.5.1

f 不可逆 $\Longleftrightarrow d(f(\Omega), 0) = 0 \Longleftrightarrow 0 \in \overline{f(\Omega)}$

证明 $\lambda 1 - f$ 不可逆 $\Longleftrightarrow 0 \in \overline{(\lambda 1 - f)(\Omega)}$
$(\lambda 1 - f)(x) = \lambda 1 x - f(\lambda)$
($\Rightarrow$) $\overline{(\lambda 1 - f)(\Omega)} = \overline{\lambda - f(\Omega)} = \lambda - \overline{f(\Omega)}$
$\Longleftrightarrow \lambda \in \overline{f(\Omega)}$

1.6 谱与特征

定义 1.6.1 (谱集)

A 为 F 代数，ΣA 表示 A 上所有唯一 0 同态 τ 的 F 值函数集合。
即 $\Sigma A \triangleq \{\tau \in F^A : \tau$ 的唯一 0 同态 $\}$，称为 A 的谱。
($A \xrightarrow{\tau} F$ 是 0 同态，称为 A 的一个特征)

命题 1.6.1

若 A 为含幺代数，τ 为特征 $\Longleftrightarrow \tau$ 为保幺同态。

证明 ($\Leftarrow$) 保幺：$\tau(1) = 1$。
($\Rightarrow$) $A \xrightarrow{\tau} F$
$1 \longmapsto \tau(1)$ 为 $\tau(A)$ 中幺元，$\dim F = 1 \Rightarrow \tau$ 满射，$\tau(A) = F$。

1.6.1 Banach 代数

Banach 代数 A，$a \in A$。

定理 1.6.1

A 为含幺交换 Banach 代数，$a \in A$ 则

$$\sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Sigma A\}$$

定义 1.6.2 (谱性质)

若 F 代数 A 满足，$\forall B$ 为 F 代数，$A \xrightarrow{f} B$ 满同态，有 $\forall b \in B$，$\sigma_B(b) \neq \phi$，称 A 具有谱性质（易知 $A \neq \{0\}$）。
e.g. 交换含幺 Banach 代数具有谱性质。

命题 1.6.2

A 具有谱性质 $\Longleftrightarrow \forall M$ 为 A 的极大理想，A/M 每个元素谱非空。

命题 1.6.3

$A \xrightarrow{\varphi} B$ 保幺代数同态，$a \in A$ 则 $\sigma_B(\varphi(a)) \subset \sigma_A(a)$。

证明 $\forall \lambda \in \sigma_B(\varphi(a)) \Rightarrow \lambda 1_B - \varphi(a)$ 在 B 中不可逆
$\Rightarrow \lambda 1_A - a$ 中不可逆 $\Rightarrow \lambda \in \sigma_A(a)$

证明 (⇐) 因 $A \xrightarrow{\pi} A/M$ 满同态 $\Rightarrow A/M$ 每个元素谱非空。

(⇐) 往取 $A \xrightarrow{f} B \neq 0$，满同态，$\ker f$ 为 A 的真理想，故 $\ker f$ 含于某个极大理想 M。

有交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/M \arrow[ur, dashed, "\exists!\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

存在唯一同态（满）$\Rightarrow$ 保幺。

由已知 A/M 中每个元素谱非空 $\Rightarrow B$ 中每个元素谱非空。

定理 1.6.2

若 A 为交换含幺代数且具有谱性质，则

$$\forall a \in A, \quad \sigma(a) = \{\tau(a) : \tau \in \Sigma A\}$$

证明 ($\supset$) $\forall \tau \in \Sigma A$，须证 $\tau(a) \in \sigma(a)$。

i.e. $\tau(a)1 - a$ 在 A 中不可逆。

$A \xrightarrow{\tau} F$ 保幺：

$\tau(a)1 - a \longmapsto \tau(a) - \tau(a) = 0$，不可逆 $\Rightarrow \tau(a)1 - a$ 在 A 中不可逆。

($\subset$) $\forall \lambda \in \sigma(a)$，要证 λ 形如某个 $\tau(a)$。

由已知 $\lambda 1 - a$ 在 A 中不可逆。

注 若 R 为交换幺环，λ 为不可逆元，则 $\exists M$ 极大理想，s.t. $\lambda \in M$。

证明 对于 λ，$R\lambda$ 为含幺的最小理想，由 λ 不可逆

$\Rightarrow R\lambda \subsetneq R$（包含，若 $R\lambda = R$，$1 \in R\lambda$，$\exists y \in R$，$y\lambda = 1$）。

仍存在极大理想 $M \supset R\lambda \ni \lambda$，因

由 A 的交换幺环，$\exists M$ 为极大理想。

考虑 $A \xrightarrow{\pi} A/M$ 商代数。

A/M 为域，可除代数，由 A 有谱性质。

A/M 每个元素谱非空，由已证 $A/M \cong F$。

交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend right, "\tau=\theta\circ\pi"'] & A/M \arrow[r, "\theta"] & F \end{tikzcd}$$

$\tau(a)$ 满足：

$\lambda 1 - a \longmapsto 0 \longmapsto 0$，$\tau(\lambda 1 - a) = 0$

$\Rightarrow \tau(\lambda 1) = \tau(a) \Rightarrow \lambda = \tau(a)$

命题 1.6.4

$\Sigma A \cup \{0\} \xrightarrow{\Theta} \Sigma \hat{A}$ 为双射。

$\tau \longmapsto \hat{\tau}$

交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\tau"'] & \hat{A} \arrow[d, "\exists!\hat{\tau}"] \\ & F \end{tikzcd}$$

证明 $\tau_1 \longmapsto \hat{\tau}_1$，若 $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2 \Rightarrow \tau_1 = \hat{\tau}_1|_A = \hat{\tau}_2|_A = \tau_2$

$\tau_2 \longmapsto \hat{\tau}_2 \Rightarrow$ 单射

命题 1.6.5

若 A 为含幺代数，$\Omega \subset A$，则

$$\langle \Omega \cup \{1\} \rangle_{al} = \Omega\text{生成的含幺的含幺代数}$$

证明 记 $B = \langle \Omega \cup \{1\} \rangle_{al}$，$C$ 为 Ω 生成的含幺的含幺代数。

($\supset$) 要证 $C \supset B$。

因 C 是含 Ω 的含幺子代数，故 $1_A \in C$，从而 $\Omega \cup \{1_A\} \subset C$。

由 $B = \langle \Omega \cup \{1\} \rangle_{al}$ 是包含 $\Omega \cup \{1\}$ 的最小子代数，得 $B \subset C$。

($\subset$) 要证 $B \supset C$。

由 $\Omega \subset \Omega \cup \{1\} \subset B$，故 B 是包含 Ω 的子代数。

又 $1_A \in \Omega \cup \{1\} \subset B$，故 B 是含幺子代数。

由 C 是包含 Ω 的最小含幺子代数，得 $C \subset B$。

综上，$B = C$。

命题 1.6.6

若 A 为含幺代数（不一定交换）

$$\Omega \subset A \Rightarrow \langle \Omega \rangle = A \cdot \Omega \cdot A = \left\{ \sum a_i \cdot x_i \cdot b_i, \quad \substack{a_i \in A \\ x_i \in \Omega \\ b_i \in A} \right\}$$

命题 1.6.7

A 为代数，$\Omega \subset A$，若 $\forall x, y \in \Omega$，$xy = yx$，则 $\langle \Omega \rangle_{al}$ 为交换子代数（Ω 称为交换子集）

定义 1.6.3 (对换)

A 为代数，$\Omega \subset A$，$\Omega \neq \emptyset$（结合）

$$\Omega' \triangleq \{a \in A : \forall x \in \Omega, ax = xa\}$$

命题 1.6.8

Ω' 为子代数，$\forall a, b \in \Omega'$，$(a + b) \in \Omega'$，$ab \in \Omega'$，$\lambda a \in \Omega'$

证明 $\langle \Omega \rangle_{al}$ 交换 $\Longleftrightarrow \langle \Omega \rangle_{al} \subset \langle \Omega \rangle'_{al}$

$\Longleftrightarrow \Omega \subset \langle \Omega \rangle'_{al} \Longleftrightarrow \langle \Omega \rangle_{al} \subset \Omega'$

$\Longleftrightarrow \Omega \subset \Omega' \Longleftrightarrow \Omega$ 交换

1.7 多项式代数

定义 1.7.1

$F[x]$ 表示以 x 为变元的多项式代数。

命题 1.7.1

若 A 为含幺 $\sim F$ 代数，$a \in A$，则存在唯一同态 $\hat{a}$：

$$F[x] \xrightarrow{\hat{a}} A \quad f_{a \in t}, \quad \hat{a}(f) = f(a)$$

$$x \longmapsto a$$

定理 1.7.1 (谱映射定理)

若 A 为含幺 F 代数，F 代数同态，$a \in A$，$f \in F[x]$，则

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$$

其中 $f(\sigma(a)) \triangleq \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$。♡

注 若 S 为幺半群，$x, y \in S$，且 $xy = yx$，则 xy 可逆 $\Longleftrightarrow x$ 与 y 可逆。

证明 $(\Leftarrow)$ 显然

$(\Rightarrow)$ $xy \cdot a := e = a \cdot xy = a \cdot yx$，$x$ 有右逆，x 有左逆 $\Rightarrow x$ 可逆。

证明 $(\subset)$ $\forall \lambda \in \sigma(f(a)) \Rightarrow \lambda 1 - f(a)$ 不可逆。

$\Rightarrow (\lambda - f) \cdot a$，设 $(\lambda - f) = c(x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$，$c \neq 2$

$(\lambda - f) \cdot a = c(a - \lambda_1 1) \cdots (a - \lambda_n 1)$

不可逆 $\Rightarrow \exists \lambda_i$，s.t. $a - \lambda_i 1$ 不可逆。

$\Rightarrow \lambda_i \in \sigma(a)$

而 $(\lambda - f)(\lambda_i) = \lambda - f(\lambda_i)$

$= 0 \Rightarrow \lambda = f(\lambda_i) \Rightarrow \lambda \in f(\sigma(a))$

$(\supset)$ $\forall \lambda \in f(\sigma(a))$，要证 $\lambda \in \sigma(f(a))$

i.e. $\lambda 1 - f(a)$ 不可逆。

1.8 乘子代数

$(A^{op}, +, \cdot,$ 数乘 $)$，$A^{op} \triangleq A$，加法、数乘不变

$x \cdot y \triangleq yx$（反乘法）易知 A^{op} 为代数

A, B 为 F 代数，直和代数 $A \oplus B$，乘法

$$(a, b) \cdot (a', b') \triangleq (aa', bb')$$

满足结合律、分配律

定义 1.8.1

$\mathrm{End}_F(A) \oplus \mathrm{End}_F(A)^{op}$ 为一个 F 代数

$$A \xrightarrow{\ell} \mathrm{End}(A) \qquad A \xrightarrow{r} \mathrm{End}(A)^{op} \quad \text{同态}$$

$$a \longmapsto \ell_a \qquad a \longmapsto r_a$$

♣

$A \xrightarrow{\varphi} C$ 同态，$A \xrightarrow{\psi} D$ 同态，定义 $A \xrightarrow{(\varphi,\psi)} C \oplus D$ 为同态

$$x \longmapsto (\varphi(x), \psi(x))$$

$$x + y \longmapsto (\varphi(x) + \varphi(y), \psi(x) + \psi(y))$$

$$xy \longmapsto (\varphi(x) \cdot \varphi(y), \psi(x) \cdot \psi(y))$$

$$1 \longmapsto (1_C, 1_D) \text{ 若保幺}$$

定义 1.8.2

$$A \xrightarrow{\Theta} \mathrm{End}_F(A) \oplus \mathrm{End}_F(A)^{op} \text{ 为代数同态}$$

$$a \longmapsto (\ell_a, r_a)$$

♣

命题 1.8.1

$\forall a \in A$，有以下性质

1. $\ell_a(x)y = \ell_a(xy)$
2. $xr_a(y) = r_a(xy)$
3. $x\ell_a(y) = xay = r_a(x)y$

定义 1.8.3

$\forall (L,R) \in \mathrm{End}_F(A) \oplus \mathrm{End}_F(A)^{op}$

称 (L,R) 为 A 上的一个乘子，若满足，$\forall x,y \in A$，有

1. $L(x)y = L(xy)$
2. $xR(y) = R(xy)$
3. $xL(y) = R(x)y$

A 上全体乘子记为 $M(A)$。

命题 1.8.2

$M(A)$ 为 $\mathrm{End}_F(A) \oplus \mathrm{End}_F(A)^{op}$ 的含幺子代数，幺元为 (id_A, id_A)

证明 $(L,R),(L',R') \in M(A)$

$(L,R)+(L',R') \in M(A)$?

$\forall x,y \in A$，1 $(L+L')(x)y = (L(x)+L'(x))y = L(x)y + L'(x)y$

$= L(xy) + L'(xy) = (L+L')(xy)$

同理 $R+R'$ 满足 2

$x(L+L')(y) = x(L(y)+L'(y)) = xL(y) + xL'(y) = R(x)y + R'(x)y$

$= (R+R')(x)y$ 3

数乘易证。

$(L,R)\cdot(L',R') = (L\circ L', R\circ R') \in M(A)$

$(L\circ L')(x)y = L(L'(x))y = L(L'(x)y) = L(L'(xy))$

$= (L\circ L')(xy)$ 1

$x(L\circ L')(y) = xL(L'(y)) = R(x)L'(y) = R'(R(x))y$

$= (R'\circ R)(x)y$ 3

$x(R'\circ R)(y) = xR'(R(y)) = R'(xR(y))$

$= R'(R(xy)) = R'\circ R(xy)$

定义 1.8.4 (典范同态)

$$A \xrightarrow{\Theta} M(A)$$
$$a \longmapsto (\ell_a, r_a)$$

$M(A)$ 称为 A 的乘子代数

命题 1.8.3

$A \xrightarrow{\Theta} M(A)$ 典范同态，则 $\Theta(A) \triangleleft M(A)$ 理想。

证明 $\Theta(A)$ 线性 op，下证、吸收率。

$\forall a \in A$，$(\ell_a, r_a) \in \Theta(A)$，$\forall (L,R) \in M(A)$，要证

$(L,R)(\ell_a,r_a)$ 及 $(\ell_a,r_a)(L,R)$ 都在 $\Theta(A)$ 中。

$(L\ell_a, Rr_a)$=(ℓ_b, r_b)，$(l_a L, Rr_a)$=(ℓ_c, r_c)

若 A 含幺 1 代入上式，$L\ell_a(1) = L(a) = \ell_b(1) = b$

$Rr_a(1) = R(a) = r_c(1) = c$

$\Rightarrow$ 下证 $(L\ell_a, r_a R) = (\ell_{L(a)}, r_{L(a)})$

及 $(l_a L, Rr_a) = (\ell_{R(a)}, r_{R(a)})$

$\forall x \in A$，有 $(L\ell_a)(x) = L(ax) = L(a)x = \ell_{L(a)}(x)$

$(r_a R)(x) = R(xa) = xR(a) = r_{L(a)}(x)$

$(l_a L)(x) = aL(x) = R(a)x = \ell_{R(a)}(x)$

$(Rr_a)(x) = R(xa) = xR(a) = r_{R(a)}(x)$

命题 1.8.4

A 含幺 $\Leftrightarrow A \xrightarrow{\theta} M(A)$ 同构

证明 $(\Leftarrow)$ 显然。

$(\Rightarrow)$ $A \xrightarrow{\theta} M(A)$ 单射。

若 $a \longmapsto (0,0)$，则 $\ell_a = 0$，$r_a = 0 \Rightarrow \ell_a(1) = 0 \Rightarrow a = 0$

$\ker\theta = \{0\} \Rightarrow \theta$ 单射

$\theta(A)$ 是理想，含幺，$\Rightarrow \theta(A) = M(A)$

故 θ 为同构。

定理 1.8.1

任取含幺 F 代数 B，若 A 是 B 的理想，则 $\exists B \xrightarrow{\tau} M(A)$ 保幺同态，s.t. $\tau|_A = \theta$。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\theta"'] & B \arrow[d, "\tau"] \\ & M(A) \end{tikzcd}$$

证明 定义

$$B \xrightarrow{\tau} M(A)$$
$$b \longmapsto (L_b, R_b)$$

其中

$$A \xrightarrow{L_b} A, \quad A \xrightarrow{R_b} A$$
$$x \longmapsto bx, \quad x \longmapsto xb$$

易知 $L_b, R_b \in \mathrm{End}_F(A)$ 且 (L_b, R_b) 为乘子。

e.g. $M(C(X)) = C(X)$ $\quad M(K(H)) = B(H)$

定义 1.8.5

称代数（或环）A 非退化，若满足 $\mathrm{ann}(A) = \{0\}$

定义 1.8.6

$\Omega \subset A$，$\mathrm{ann}(\Omega) := \{a \in A : a\Omega = \{0\} = \Omega a\}$

i.e. $\forall x \in A$，若 $xA = Ax = 0 \Rightarrow x = 0$（含 1 必不退化，$a1 = a = 0$）

命题 1.8.5

若 A 非退化，则 $A \xrightarrow{\theta} M(A)$ 为单射。

证明 $A \xrightarrow{\theta} M(A)$

若 $a \longmapsto (\ell_a, r_a) = (0,0)$，$\ell_a = 0$，$r_a = 0$

$\Rightarrow aA = Aa = 0 \Rightarrow a = 0$

反之若 θ 单，则 A 非退化。

设 $aA = Aa = 0 \Rightarrow \ell_a = r_a = 0 \Rightarrow (\ell_a, r_a) = (0,0) = \theta(a)$

θ 单 $\Rightarrow a = 0$

定义 1.8.7

A 为代数，I 为 A 的理想，称 I 为本性理想

若满足：$\mathrm{ann}(I) = \{0\}$

i.e. $\forall a \in A$，若 $aI = \{0\} = Ia$ 则 $a = 0$

注 $\circledast$ $I \triangleleft R$，$\forall J \in R$，若 $I \cap J = 0$ 则 $J = 0$（I 很大）（不等价）

命题 1.8.6

若 A 非退化，则 $\theta(A)$ 为 $M(A)$ 的本性理想。

证明 已证 $\theta(A) \triangleleft M(A)$。下设 $\forall (L,R) \in M(A)$ 且 $\forall a \in A$ 有：

$(L,R)(\ell_a, r_a) = (0,0)$ 且 $(\ell_a, r_a)(L,R) = (0,0)$ 则可 $(L,R) = (0,0)$

条件 $(\Leftrightarrow)$ $\forall a \in A$，$\forall x \in A$，$(L\ell_a)(x) = 0$

$(r_a R)(x) = 0$，$(R r_a)(x) = 0$，$(\ell_a L)(x) = 0$

$\Rightarrow \forall a \in A$，$\forall x \in A$，$L(ax) = 0 \Rightarrow L(a) \cdot x = 0$

$aL(x) = 0 \Rightarrow xL(a) = 0$

$\Rightarrow L(c)A = AL(c) = 0 \Rightarrow \forall c$，$L(c) = 0 \Rightarrow L = 0$

$R(x)a = 0$（$\Leftrightarrow$），$R(a)x = 0$，$R(xa) = xR(a) = 0$

$\Rightarrow R(c)A = AR(c) = 0 \Rightarrow \forall a$，$R(a) = 0 \Rightarrow R = 0$

定理 1.8.2

已知 A 非退化。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\theta"'] & B \arrow[d, "\exists!\tau"] \\ & M(A) \end{tikzcd}$$

任取 B 含幺代数，存在唯一的保幺同态 τ，使图交换。

证明 若 τ_1, τ_2 都满足条件，则要证 $\forall b \in B$。

有 $\tau_1(b) = \tau_2(b)$，在 $M(A)$ 中。A 非退化，知。

$\theta(A)$ 本性。从而只要证 $\forall a \in A$，有。

$\tau_1(b)\theta(a) = \tau_2(b)\theta(a)$

$\theta(a)\tau_1(b) = \theta(a)\tau_2(b)$

$\tau_1(b)\theta(a) = \tau_1(b)\tau_1(a) = \tau_1(ba) = \theta(ba)$

$\tau_2(b)\theta(a) = \tau_2(b)\tau_2(a) = \tau_2(ba) = \theta(ba)$

同理 $\theta(a)\tau_1(b) = \theta(a)\tau_2(b) = \theta(ab)$

进而。A 在 B 中本性 $\Leftrightarrow \tau$ 单。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "本性"] \arrow[dr, "\theta"'] & B \arrow[d, "\exists ! \tau"] \\ & M(A) \end{tikzcd}$$

$M(A)$ 为以 A 为本性理想的最大含幺代数。

1.9 ∗ 代数

定义 1.9.1

若 A 为一个 $\mathbb{C}$ 代数

$$A \xrightarrow{*} A \quad 映射满是以下性质$$
$$x \longmapsto *(x) \triangleq x^*$$

1. $\forall x \in A$ 有 $x^{**} = x$ （x 为时全）
2. $*$ 为共轭线性。i.e. $\forall x, y \in A$，有 $(x+y)^* = x^* + y^*$，$\forall \lambda \in \mathbb{C}$，$(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
3. $*$ 为反同态。i.e. $\forall x, y \in A$，有 $(xy)^* = y^* x^*$

♣

定义 1.9.2

若 A 为复代数，$*$ 为 A 上的一个星运算
称 $(A, *)$ 为一个 $*$ 代数。

♣

定义 1.9.3

A, B 为 $*$ 代数，$A \xrightarrow{f} B$ 映射。
称 f 为一个 $*$ 同态，若 f 为一个代数同态，且 $\forall x \in A$，有 $f(x^*) = f(x)^*$

♣

定义 1.9.4

A 为一个 $*$ 代数，$I \triangleleft A$。若满足、$\forall x \in I$，有 $x^* \in I$。
称 I 为一个 $*$ 理想，$(I^* = I)$

♣

命题 1.9.1

若 $A \xrightarrow{f} B$ 为 $*$ 同态。则 $\ker f$ 为 A 的 $*$ 理想。

♠

证明 已设 $\ker f$ 理想。$\forall x \in \ker f$，$f(x) = f(x) = 0 \Rightarrow x^* \in \ker f$。

命题 1.9.2

若 I 为 A 的 $*$ 理想。则 A/I 上可良定义 $*$ 运算
$\forall x \in A$，$[x]^* = [x^*]$ 并且 $(A/I, *)$ 为 $*$ 代数

♠

证明 若 $[x] = [y]$，$\Rightarrow x - y \in I$，$\Rightarrow (x-y)^* \in I \Rightarrow [x^*] = [y^*]$
下证

$$A/I \xrightarrow{*} A/I \text{ 是一个 } * \text{ 运算}$$
$$[x] \longmapsto [x]^*$$

1. $[x]^{**} = [x^*]^* = [x^{**}] = [x]$
2. $([x] + [y])^* = [x + y]^* = [(x + y)^*] = [x^* + y^*] = [x]^* + [y]^*$
3. $([x][y])^* = [xy]^* = [(xy)^*] = [y^*x^*] = [y]^*[x]^*$

I 为 A 的 $*$ 理想，

$$A \xrightarrow{\pi} A/I \text{ 为 } * \text{ 同态}$$
$$x \longmapsto [x]$$

$\pi(x^*) = [x^*] = [x]^* = \pi(x)^*$，$\ker\pi = I$

定理 1.9.1 (同态基本定理)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ A/\ker f \arrow[ur, "\exists!\bar{f}"'] & \end{tikzcd} \quad * \text{ 同态}$$

证明 $\bar{f}([x]^*) = \bar{f}([x^*]) = f(x^*) = f(x)^* = \bar{f}([x])^*$

命题 1.9.3

A 含 1，$\langle\Omega, 1\rangle_{*-al} = \Omega$ 生成的含 1 $*$ 子代数。

命题 1.9.4

若 $\Omega^* \subset \Omega$，则 $\langle\Omega\rangle = \langle\Omega\rangle_*$，$\langle\Omega\rangle_{al} = \langle\Omega\rangle_{*-al}$。

证明 1 $\langle\Omega\rangle \subset \langle\Omega\rangle_*$。

下证 $\langle\Omega\rangle \supset \langle\Omega\rangle_*$，只要证 $\langle\Omega\rangle$ 为一个 $*$ 理想。从而 $\langle\Omega\rangle \supset \langle\Omega\rangle_*$

$\forall x \in \langle\Omega\rangle$，要证 $x^* \in \langle\Omega\rangle$，定义 $B \triangleq \{x \in A : x^* \in \langle\Omega\rangle\}$

易知 $\langle\Omega\rangle \subset B$。下证 B 为一个理想，从而 $\langle\Omega\rangle \subset B$。

i.e. $\forall x \in \langle\Omega\rangle$，$x^* \in \langle\Omega\rangle$。

这是因为。$0 \in B$，$x, y \in B \Rightarrow x^*, y^* \in \langle\Omega\rangle$

$\Rightarrow (x + y)^* = x^* + y^* \in \langle\Omega\rangle \Rightarrow x + y \in B$。

$(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^* \in \langle\Omega\rangle \Rightarrow \lambda x \in B$。

$\forall x \in B$，$\forall a \in A$，有 $(ax)^* = x^*a^* \in \langle\Omega\rangle \Rightarrow ax \in B$。

故 B 为一个理想，$\Rightarrow \langle\Omega\rangle \subset B$。

2 $\langle\Omega\rangle_{al} \subset \langle\Omega\rangle_{*-al}$

下证 $\langle\Omega\rangle_{al} \supset \langle\Omega\rangle_{*-al}$，只要证 $\langle\Omega\rangle_{al}$ 为 $*$ 代数。

从而 $\langle\Omega\rangle_{al} \supset \langle\Omega\rangle_{*-al}$。

令 $B = \{\bar{x} : x \in \langle\Omega\rangle_{al}\}$。下证 B 为代数

类似证明

1.10 $*$ 代数幺元化

定义 1.10.1

A 为 $*$ 代数，$A \xrightarrow{\theta} B$ 为 $*$ 同态。

B 为含幺 $*$ 代数，若满足

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\exists!\tilde{f}"', "保幺同态"] \\ & C \text{ 含幺 } * \text{ 代数} \end{tikzcd}$$

命题 1.10.1

A 为 $*$ 代数幺元化存在唯一

证明 $A \xrightarrow{\theta} A \oplus \mathbb{C}$ 代数幺元化。其中 $(a,\lambda)(b,\mu) \triangleq (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)$

在 $A \oplus \mathbb{C}$ 中定义 $*$ 运算。

命题 1.10.2

$1^* = 1$，因为 $1^*x = 1^*x^{**} = (x^*1)^* = x^{**} = x \Rightarrow 1^* = 1$

$\forall (a,\lambda) \in A \oplus \mathbb{C}$，$(a,\lambda)^* \triangleq (a^*, \bar{\lambda})$

1. $(a,\lambda)^{**} = (a^{**}, \bar{\bar{\lambda}}) = (a,\lambda)$
2. $(r(a,\lambda))^* = (ra, r\lambda)^* = ((ra)^*, \overline{r\lambda}) = (ra^*, \bar{r}\bar{\lambda}) = \bar{r}(a,\lambda)^*$
3. $((a,\lambda)(b,\mu))^* = (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)^* = (b^*a^* + \bar{\mu}a^* + \bar{\lambda}b^*, \bar{\lambda}\bar{\mu})$

   $(b,\mu)^*(a,\lambda)^* = (b^*, \bar{\mu})(a^*, \bar{\lambda}) = (b^*a^* + \bar{\mu}a^* + \bar{\lambda}b^*, \bar{\lambda}\bar{\mu})$

$\theta(a^*) = (a^*, 0) = (a,0)^* = \theta(a)^*$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "f"', "*\text{同态}"] & A \oplus \mathbb{C} \arrow[d, "\exists!\tilde{f}"', "保幺同态"] \\ & B \text{ 含幺 } * \text{ 代数} \end{tikzcd}$$

下证 $\tilde{f}$ 保 $*$。

$\tilde{f}((a,\lambda)^*) = \tilde{f}((a^*, \bar{\lambda})) = f(a^*) + \bar{\lambda}1_B$

$\tilde{f}((a,\lambda))^* = (f(a) + \lambda 1_B)^* = f(a)^* + \bar{\lambda}1_B$

命题 1.10.3

$A \xrightarrow{\theta} M(A)$，$A$ 为 $*$ 代数。

$a \longmapsto (\ell_a, r_a)$。

则在 $M(A)$ 上可定义 $*$ 运算如下：$(L,R)^* = (R^*, L^*)$

其中 $L^*(x) \triangleq L(x^*)^*$，$R^*(x) = R(x^*)^*$，要证 $*$ 为 $M(A)$ 上的一个 $*$ 运算。

例题 1.9 $\mathbb{C}$ 为一个 $*$ 代数，$*$ 运算为共轭运算。

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$，$\lambda^* \triangleq \bar{\lambda}$

1. $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda$
2. $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} = a^* + b^*$，$(\lambda a)^* = \overline{\lambda a} = \bar{\lambda}\bar{a} = \bar{\lambda}a^*$
3. $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$

例题 1.10 $M_n(\mathbb{C})$，$*$ 运算为 $A^* = \bar{A}^T$

1. $A^{**} = A$
2. $(A+B)^* = A^* + B^*$，$(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$
3. $(AB)^* = \overline{AB}^T = \overline{AB}^T = B^T \bar{A}^T = B^*A^*$

定义 1.10.2

H_1, H_2 为 Hilbert 空间，$\mathcal{B}(H_1, H_2)$ 表示 H_1 到 H_2 的全体有界线性算子。

命题 1.10.4

若 $H_1 \xrightarrow{T} H_2$，$T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ 则存在唯一

$$H_2 \xrightarrow{T^*} H_1 T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$$

使得 $\forall x \in H_1$，$\forall y \in H_2$，有 $\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^* y\rangle_{H_1}$

证明 若 $H_2 \underset{B}{\overset{A}{\rightleftarrows}} H_1$ s.t. $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, By\rangle$

$\langle x, (A-B)y\rangle = 0$，$\forall y \Rightarrow A - B = 0$

命题 1.10.5

$T^{**} = T$

定理 1.10.1 (Riesz 表示定理)

给定 Hilbert 空间 H，有

$$H \xrightarrow{\theta} H^* \triangleq \mathcal{B}(H, \mathbb{C})$$

$$x \longmapsto \langle x, x\rangle$$

为保范共轭线性同构

证明 ① $x = 0$，$\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow ||\langle x, x\rangle|| = 0 = ||x||$

② $x \neq 0$，$||x|| \neq 0$，$\langle \frac{x}{||x||}, x\rangle = ||x||$，$\Rightarrow ||\langle x, x\rangle|| = ||x||$

$\lambda x \mapsto \langle x, \lambda x\rangle = \bar{\lambda}\langle x, x\rangle = \bar{\lambda}\theta(\lambda)$

共轭线性 $\Rightarrow$ 单

（存在）$\forall y \in H_2$，定义

$$H_1 \xrightarrow{\langle T*, y\rangle} \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto \langle Tx, y\rangle$$

$|\langle Tx, y\rangle| \leq ||Tx||||y|| \leq ||T||||x||||y|| \Rightarrow ||\langle Tx, y\rangle|| \leq ||T||||y||$。i.e. $\langle Tx, y\rangle \in H_1^*$

由 Riesz 表示定理，$\exists z \in H_1$，s.t.$\langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle$，记 $z = T^* y$

定义

$$T^* : H_2 \longrightarrow H_1$$

$$y \longmapsto T^* y$$

易知，$\forall x, y$，有 $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$

下证 T^* 线性。$\forall x$，$\forall y_1, y_2$。

$\langle Tx, y_1 + y_2\rangle = \langle x, T^*(y_1 + y_2)\rangle =$

$\langle Tx, y_1\rangle + \langle Tx, y_2\rangle = \langle x, T^* y_1\rangle + \langle x, T^* y_2\rangle = \langle x, T^* y_1 + T^* y_2\rangle \Rightarrow T^*(y_1 + y_2) = T^* y_1 + T^* y_2$（由正定）

$\langle Tx, \lambda y\rangle = \langle x, T^*(\lambda y)\rangle$

$= \bar{\lambda}\langle Tx, y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, T^* y\rangle = \langle x, \lambda T^* y\rangle \Rightarrow T^*(\lambda y) = \lambda T^* y$

由 Riesz 表示，$||T^* y|| = ||\langle Tx, y\rangle||$

对 y，$||T^* y|| \leq ||T||||y|| \Rightarrow ||T^*|| \leq ||T||$

$T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$

$||T|| = ||T^{**}|| \leq ||T^*|| \Rightarrow ||T^*|| \leq ||T||$

命题 1.10.6

1. $T^{**} = T$
2. $(T+S)^* = T^* + S^*$，且 $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
3. $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "TS"] & & H_2 \arrow[ll, bend left, "S^*"] \arrow[dl, "T"] \\
& H_3 \arrow[ul, bend left, "S^*T^*"] \arrow[ur, bend right, "T^*"'] &
\end{tikzcd}$$

命题 1.10.7

$\mathcal{B}(H)$ 为一个 $\mathbb{C} - *$ 代数，为 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(H)$ 的含幺子代数

命题 1.10.8

$\forall T \in \mathcal{B}(H)$ 有 $||T^*T|| = ||TT^*|| = ||T||^2$

命题 1.10.9

若 A 交换非退化代数，则 $M(A)$ 交换。

证明 $\forall (L,R),(L',R') \in M(A)$，要证 $(L,R)(L',R') = (L',R')(L,R)$ i.e. $(LL', R'R) = (L'L, RR')$

$\forall x,y \in A$，$L(L'(x))y = L'(L(x))y$（A 非退化）

$L(L'(x))y = yL(L'(x)) = R(y)L'(x) = L'(xR(y)) = L'(xR(y)) = L'(R(y)x) = L'(yL(x)) = L'(L(x))y$

命题 1.10.10

若 A 非退化，$(L,R),(L_1,R_2) \in M(A)$，则 $R_1 = R_2$

证明 $\forall x,y \in A$，有 $R_1(x)y = xL(y) = R_2(x)y$（非退化）$\Rightarrow R_1 = R_2$

引理 1.10.1

已知 I 为含幺代数 B 的本性理想，若 I 交换，则 B 交换。

证明 由 I 在 B 中 $*$ 性理想，知 I 非退化代数。

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\theta"'] & B \arrow[d, "\exists!\tau"', "\text{保幺单同态}"] \\
& M(I)
\end{tikzcd}$$

（$\forall x \in I$，若 $xI = 0 = Ix$，I 本性 $\Rightarrow x = 0$）

有 $M(I)$ 交换 $\Rightarrow B$ 交换

$\forall a,b \in B$，要证 $ab = ba$，由 I 本性，只要证 $(ab-ba)I = 0 = I(ab-ba)$

$\forall x \in I$，有 $(ab-ba)x = 0 = x(ab-ba)$

只要证 $\forall x,y \in I$，有 $(ab-ba)xy = 0 = y(ab-ba)x$（$I$ 本性）

W.S. $x(ab-ba)y = 0 = yx(ab-ba)$

1 $abxy = baxy$，$abxy = a(bx)y = ay \cdot bx = bx \cdot ay = ba \cdot xy$

全体 Hilbert 空间之间的有界线性算子满足

1. $T^{**} = T$（对合）$H \underset{T^*}{\overset{T}{\rightleftarrows}} H^*$

2. $(T+S)^* = T^* + S^*$（共轭线性）
3. $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$

证明 ② $\langle (T+S)x, y\rangle = \langle x, (T+S)^* y\rangle$

$\langle Tx, y\rangle + \langle Sx, y\rangle = \langle x, T^*y + S^*y\rangle$

③ $\langle T \circ Sx, y\rangle = \langle x, (T\circ S)^* y\rangle$

$\langle Sx, T^*y\rangle = \langle x, S^*T^*y\rangle$

例题 1.11 H 为一个 Hilbert 空间，$\mathcal{B}(H)$ 关于点态加、点态数乘、复合 ∗ 运算为一个 ∗ 代数。

例题 1.12 X 赋范空间，$\mathcal{B}(X)$ 为代数 ⇒ 赋范代数。

定义 1.10.3

若 A 为一个 F 代数，$\|\cdot\|$ 为 A 的一个代数，若满足 $\forall x, y \in A$ 有 $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$，则称 $(A, \|\cdot\|)$ 为一个赋范代数。

定义 1.10.4

若 $(A, \|\cdot\|)$ 为一个赋范代数且为 Banach 空间，称 $(A, \|\cdot\|)$ 为一个 Banach 代数。

（Banach 空间：X，$(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|)$ 是完备的，$\mathcal{B}(X)$ 为 Banach 空间）

命题 1.10.11

$H_1 \underset{T^*}{\overset{T}{\rightleftarrows}} H_2$，$\|T^*T\| = \|T\|^2$

证明 $\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$

下证 $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$

$\forall x \in H_1$，$\|x\| \le 1$，$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = |\langle x, T^*Tx\rangle| \le \|x\|\|T^*Tx\| \le \|T^*Tx\|$

$\Rightarrow \|T\| \le \|T^*T\|^{1/2} \Rightarrow \|T\|^2 \le \|T^*T\|$

定义 1.10.5

若 $(A, \|\cdot\|)$ 为赋范代数，A 为 ∗ 代数，满足：$\forall x \in A$，$\|x^*x\| = \|x\|^2$，称 $\|\cdot\|$ 满足 C^* 等式。

进一步，若 $(A, \|\cdot\|)$ 完备，称 $(A, \|\cdot\|)$ 为一个 C^* 代数。(i.e. A 为 Banach 代数，有 ∗，C^* 等式)

例题 1.13 H 为 Hilbert 空间，$(\mathcal{B}(H), \|\cdot\|, *)$ 为一个 C^* 代数。$A \le \mathcal{B}(H)$ 闭 ∗ 子代数亦为 C^* 代数。

- $(A_\alpha)_\alpha$ 为一族 F 代数

  在 $\prod A_\alpha$ 定义加、数乘、求法，使 $\prod A_\alpha$ 亦为 F 代数。

  $(x_\alpha)_\alpha + (y_\alpha)_\alpha \triangleq (x_\alpha + y_\alpha)_\alpha$

  $\lambda (x_\alpha)_\alpha \triangleq (\lambda x_\alpha)_\alpha$

  $(x_\alpha)_\alpha \cdot (y_\alpha)_\alpha \triangleq (x_\alpha y_\alpha)_\alpha$

定义 1.10.6

$(A_\alpha)_\alpha$ 为一族 ∗ 代数，$\prod A_\alpha$ 为直积，定义典范的 ∗ 运算。$\forall (x_\alpha)_\alpha \in \prod A_\alpha$，$(x_\alpha)_\alpha^* \triangleq (x_\alpha^*)_\alpha$

容易验证。

定义 1.10.7

$$\bigoplus_{\alpha}^{\ell^\infty} A_\alpha \triangleq \{(x_\alpha)_\alpha \in \prod A_\alpha : \{\|x_\alpha\| : \alpha \in \Lambda\}\text{有界}\}$$

命题 1.10.12

$\bigoplus_{\alpha}^{\ell^\infty} A_\alpha$ 为 $\prod A_\alpha$ 的子代数。

证明 $\forall\alpha$，$\|x_\alpha + y_\alpha\| \le \|x_\alpha\| + \|y_\alpha\| \le M_1 + M_2 \quad \|x_\alpha \cdot y_\alpha\| \le \|x_\alpha\|\|y_\alpha\| \le M_1 M_2$

注 $\bigoplus_{\alpha} A_\alpha \le \bigoplus_{\alpha}^{\ell^\infty} A_\alpha$

定义 1.10.8

$(\bigoplus_{\alpha} A_\alpha, \|\cdot\|_\infty)$ 为一个赋范代数。$\|\cdot\|_\infty := \sup_\alpha \|x_\alpha\|$

证明 $\|(x_\alpha)_\alpha\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall\alpha, \|x_\alpha\| = 0 \Rightarrow x_\alpha = 0 \Rightarrow (x_\alpha)_\alpha = 0$

$\|\lambda(x_\alpha)_\alpha\|_\infty = \sup_\alpha \|\lambda x_\alpha\| = |\lambda| \sup_\alpha \|x_\alpha\| = |\lambda| \|(x_\alpha)_\alpha\|_\infty$

$\|(x_\alpha)_\alpha + (y_\alpha)_\alpha\|_\infty = \sup_\alpha \|x_\alpha + y_\alpha\| \le \sup_\alpha(\|x_\alpha\| + \|y_\alpha\|) \le \sup_\alpha \|x_\alpha\| + \sup_\alpha \|y_\alpha\| \le \|(x_\alpha)_\alpha\|_\infty + \|(y_\alpha)_\alpha\|_\infty$

例题 1.14

$$\ell^\infty(\Omega) = \bigoplus_{\omega\in\Omega} \mathbb{C}$$

$$f \longleftrightarrow (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$$

引理 1.10.2

若 $(A_\alpha)_\alpha$ 为一族 Banach 代数，则 $\bigoplus_{\alpha}^{\ell^\infty} A_\alpha$ 为 Banach 代数。（取 Cauchy 列）

命题 1.10.13

若 A 为赋范代数，且为 $*$ 代数，满足：$\forall x \in A$，有 $\|x\|^2 \le \|x^* x\|$，则满足 C^* 等式。

证明 $\forall x \in A$，有 $\|x\|^2 \le \|x^* x\| \le \|x^*\|\|x\| \Rightarrow \|x\| \le \|x^*\|$，$\forall x$，$\Rightarrow \|x^*\| \le \|x^{**}\| = \|x\| \Rightarrow \|x\| = \|x^*\|$

$\|x^* x\| \le \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$

命题 1.10.14

若 $(A_\alpha)_\alpha$ 为一族 C^* 代数，则 $(\bigoplus_{\alpha}^{\ell^\infty} A_\alpha, \|\cdot\|_\infty)$ 为一个 C^* 代数。

证明 $\|(x_\alpha)_\alpha\|_\infty^2 = (\sup_\alpha \|x_\alpha\|)^2 = \sup_\alpha \|x_\alpha\|^2 = \sup_\alpha \|x_\alpha^* x_\alpha\| = \|((x_\alpha^*)_\alpha (x_\alpha)_\alpha)\|_\infty$

例题 1.15 A, B 为 C^* 代数，$(A \oplus B, \|\cdot\|_\infty)$ 为 C^* 代数。

命题 1.10.15

A 为一非零含幺 C^* 代数，则 $\|1\| = 1$

证明 $\|1\|^2 = \|1^* 1\| = \|1 \cdot 1\| = \|1\| \Rightarrow \|1\| = 1$

1.11 C^* 代数幺元化

A 为 C^* 代数，A 是否存在幺元化

C^* 代数 $A \xrightarrow{\theta} \tilde{A}$ 含幺 C^* 代数

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & \tilde{A} \arrow[d, "\exists!"', "保幺*同态\tilde{\varphi}"] \\ & B\ \forall\ 含幺\ C^*\ 代数 \end{tikzcd}$$

A 为 Banach 代数（或赋范代数），A 是否存在幺元化

$A \longrightarrow \tilde{A}$ 含幺 Banach alg

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & \tilde{A} \arrow[d, "\exists!\tilde{\varphi}"', "保有界、保幺"] \\ & B\ \forall B\ \text{Banach alg} \end{tikzcd}$$

A 为赋范代数（C-代数）

定义 $\tilde{A} \triangleq A \oplus \mathbb{C}$，$(a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$

$\|(a,\lambda)\|_1 \triangleq \|a\| + |\lambda|$，$A \oplus \mathbb{C}$ 为 1-范数

下证 $(\tilde{A}, \|\cdot\|_1)$ 为赋范代数。

$\|(a,\lambda)(b,\mu)\|_1 = \|(ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)\| = \|ab+\lambda b+\mu a\| + |\lambda\mu| \leq \|a\|\|b\| + |\lambda|\|b\| + |\mu|\|a\| + |\lambda||\mu|$

$\|(a,\lambda)\|_1\|(b,\mu)\|_1 = (\|a\|+|\lambda|)(\|b\|+|\mu|)$ 等于上面

命题 1.11.1

$A \xrightarrow{\theta} \tilde{A}$（$A$ 视为 $\tilde{A}$ 的理想）

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "连续同态"'] & \tilde{A} \arrow[d, "\forall\varphi\exists!\tilde{\varphi}"', "保幺同态"] \\ & B \end{tikzcd}$$

$\|\theta(a)\| = \|(a,0)\| = \|a\|$，等距嵌入

证明 下证 $\tilde{\varphi}$ 是连续的 $\Leftrightarrow$ $\tilde{\varphi}$ 有界

$\tilde{\varphi}((a,\lambda)) = \varphi(a) + \lambda 1_B \quad \|\tilde{\varphi}((a,\lambda))\| = \|\varphi(a)+\lambda 1_B\| \leq \|\varphi(a)\| + |\lambda|\|1_B\| \leq \|\varphi\|\|a\| + |\lambda|\|1_B\|$

记 $M = \max\{\|\varphi\|, \|1_B\|\} \Rightarrow \leq M(\|a\|+|\lambda|) = M\|(a,\lambda)\|_1$

进一步，若 A 为 Banach 代数，则 $(\tilde{A}, \|\cdot\|_1)$ 为 Banach 代数。

注 $(A \oplus \mathbb{C}, \|\cdot\|_1)$ 没有 C^* 等式。

注 Banach 代数范畴下态射是连续映射。

命题 1.11.2

C^* 代数 A 非退化。

证明 $\forall\lambda \in A$，若 $xA = 0 = Ax$，要证 $x = 0$。

$\Rightarrow xx^* = 0$。$\Rightarrow \|x\|^2 = \|xx^*\| = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$。

1.11.1 A 为含幺 (e) 的 C^* 代数

$A \xrightarrow{\theta} \tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$。

定义

$$\tilde{A} \xrightarrow{\sigma} A \oplus \mathbb{C}$$

$$(a,\lambda) \longmapsto (a + \lambda e, \lambda)$$

直接验证 σ 为同构。

定义 $\tilde{A}$ 上 $\|\cdot\|$，$\|(a,\lambda)\| \triangleq \max\{\|a+\lambda e\|, |\lambda|\}$ 从而 $\|\cdot\|$ 在 $\tilde{A}$ 中满足 C^* 等式

思路：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d] & A \arrow[rr, "\theta"] \arrow[drr, "\eta"] & & \tilde{A} \arrow[d, "\exists!\sigma"', "\text{保幺}*\text{同态，图交换}"] \\ (a,0) & & & A\oplus\mathbb{C}\ C^*\text{ 代数直和，有幺 }(e,1) \end{tikzcd}$$

$\sigma((a,\lambda)) = \eta(a) + \lambda 1_{A\oplus\mathbb{C}} = (a,0) + \lambda(e,1) = (a+\lambda e, \lambda)$。

证明 下证 σ 为双射。

σ 单：$(a,\lambda) \longmapsto (a+\lambda e, \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, a+\lambda e = 0 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow (a,\lambda) = 0$。$\sigma$ 单。

σ 满：$\sigma(A\times\{0\}) = A\times\{0\}$。$\sigma(\{0\}\times\mathbb{C}) \supset \{0\}\times\mathbb{C}$。

$\Rightarrow \sigma(\tilde{A}) \supset A\times\{0\}\cup\{0\}\times\mathbb{C}$。

$\Rightarrow \sigma(\tilde{A}) \supset A\oplus\mathbb{C}$。故 σ 满，

$\Rightarrow \sigma$ 为 $*$ 同构，把 $A\oplus\mathbb{C}$ 的范数拉回，

即为 $\tilde{A}$ 满足 C^* 等式的范数。

命题 1.11.3

F 为无限域，V 为 F-代数若 φ 为 $V\longrightarrow V$，线性映射满足任取 A,B，

有 $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ 或 $\varphi(AB) = \varphi(B)\varphi(A)$，则 φ 为 $V\longrightarrow V$ 乘法同态或反同态。

证明 任取 B，$V_B \triangleq \{A : \varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)\}$ $V_{B_2} \triangleq \{A : \varphi(AB) = \varphi(B)\varphi(A)\}$

下证 V_B、V_{B_2} 为线性 Sp。

$\forall x, y\in\mathbb{F}, \exists V_B$，$\varphi[(x+y)B] = \varphi(xB) + \varphi(yB) = \varphi(x)\varphi(B) + \varphi(y)\varphi(B) = \varphi(x+y)\varphi(B) \Rightarrow x+y\in V_B$。

$A\in V_B$，$\varphi(AB) = \lambda\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(\lambda A)B$。$\Rightarrow \lambda A\in V_B$。

故 V_B 为线性空间，同理 V_{B_2} 为线性空间

$V = V_B\cup V_{B_2}$，由 F 无限域，则有填不满定理 $\Rightarrow V_B = V$ 或 $V_{B_2} = V$。

记 $V_1 = \{B : V_B = V\}$，$V_2 = \{B : V_{B_2} = V\}$

下证 V_1，V_2 为线性 Sp。

$\forall B\in V_1$，要证 $\lambda B\in V_1$，$\forall\lambda\in\mathbb{F}$，$\forall A\in V$，$\varphi(A\lambda B) = \lambda\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(A)\varphi(\lambda B) \Rightarrow \lambda B\in V_1$。

$\forall\lambda,\gamma\in V_1$，$\forall A\in V$，$\varphi(A(\lambda+\gamma)) = \varphi(A\lambda) + \varphi(A\gamma) = \varphi(A)\varphi(\lambda) + \varphi(A)\varphi(\gamma) = \varphi(A)\varphi(\lambda+\gamma) \Rightarrow \lambda+\gamma\in V_1$

故 V_1 为线性 Sp，同理 V_2 为线性 Sp。

$V = V_1\cup V_2$，由填不满定理，$V_1 = V$ 或 $V_2 = V$

1.11.2 A 为 C^* 代数且不含幺

$A \xrightarrow{\theta} M(A)$，$*$ 代数/含幺代数

$$\Rightarrow \begin{cases} aA = 0 \Rightarrow a = 0 \\ Aa = 0 \Rightarrow a = 0 \\ a^*a = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$$

(C^* 代数性退化)

接下来在 $M(A)$ 上定义 $*$

- A 为 C^* 代数，$\varphi\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$ 定义 $\varphi^* : A\longrightarrow A$，$\varphi^*(x) \triangleq \varphi(x^*)^*$

  φ^* 线性。$\varphi^* : x\longmapsto x^* \xrightarrow{\varphi} \varphi(x^*) \longmapsto \varphi(x^*)^*$。

命题 1.11.4

任取 $(L,R) \in M(A)$，$(R^*,L^*) \in M(A)$。

证明 $\forall x,y \in A$。

1. $R^*(xy) = R(x^*)^*y = (y^*R(x^*))^* = (Ry^*x^*)^* = R^*(xy)$
2. $xL^*(y) = L^*(xy)$。（自行验证）
3. $L^*(x)y = xR^*(y)$
   $L^{(x)}y = L(x^*)^*y = (y^*L(x^*))^* = (Ry^*)x^*)^* = xRy^*)^* = xR^*(y)$

命题 1.11.5

若 A 为一个 $*$ 代数，则

$$\begin{aligned} M(A) &\xrightarrow{*} M(A) \\ (L,R) &\longmapsto (R^*,L^*) \end{aligned} \quad \text{为一个星运算}$$

证明 $\varphi^* = * \cdot \varphi \cdot *$，$(\varphi^*)^* = * \cdot \varphi^* \cdot * = * \cdot * \cdot \varphi \cdot * \cdot * = \varphi$

1. $(L,R)^* = (R^*,L^*)^* = (L^{**},R^{**}) = (L,R)$
2. $((L_1,R_1)+(L_2,R_2))^* = ((R_1+R_2)^*,(L_1+L_2)^*)$。$\stackrel{?}{=} (L_1,R_1)^* + (L_2,R_2)^* = (R_1^*,L_1^*) + (R_2^*,L_2^*)$
   由 $(\varphi+\psi)^* = x \cdot (\varphi+\psi) \cdot x = x \cdot \varphi \cdot x + x \cdot \psi \cdot x = \varphi^* + \psi^*$
   验证 ①② 两式相等
   $(\lambda(L,R))^* = (\lambda L, \lambda R)^* = ((\lambda R)^*,(\lambda L)^*) \stackrel{?}{=} \bar{\lambda}(L,R)^* = (\bar{\lambda}R^*, \bar{\lambda}L^*)$
3. $(\lambda\varphi)^*(x) = (\lambda\varphi)(x^*)^* = \bar{\lambda}\varphi(x^*)^* = \bar{\lambda}\varphi^*(x)$

反同态 $((L_1,R)(L_2,R_2))^* = (L_1L_2, R_2R_1)^* = ((R_2R_1)^*,(L_1L_2)^*)$。

$(L_2,R_2)^*(L_1,R_1)^* = (R_2^*,L_2^*)(R_1^*,L_1^*) = (R_2^*R_1^*, L_1^*L_2^*)$

$(\varphi \circ \psi)^* = * \cdot \psi \circ \varphi \circ * = * \cdot \varphi \circ * \cdot \psi \circ * = \varphi^* \circ \psi^*$

(因为 $*^{-1} = *$) 故上面两式相等

命题 1.11.6

$A \xrightarrow{\theta} M(A)$ 为一个 $*$ 同态。

证明 要证 $\theta(a)^* = \theta(a^*)$

$\theta(a)^* = (\ell_a, r_a)^* = (r_a^*, \ell_a^*)$

$\theta(a^*) = (\ell_{a^*}, r_{a^*})$

而由于 $r_a^*(x) = r_a(x^*)^* = (x^*a)^* = a^*x = \ell_{a^*}(x)$

上述两式相等。

- $A \hookrightarrow B$ 含幺 $*$ 代数。A 为 B 的 $*$ 理想。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr, "\theta"'] & B \arrow[d, "\exists\tau"', "\text{保幺}*\text{同态}"] \\ & M(A) \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} B &\xrightarrow{\tau} M(A) \\ b &\longmapsto (L_b, R_b) \end{aligned}$$

证明 只要证 τ 保 $*$

$\tau(b^*) = (L_{b^*}, R_{b^*})$

$\tau(b)^* = (L_b, R_b)^* = (R_b^*, L_b^*)$ 两式相等

引理 1.11.1

若 A 是 C^* 代数，$(L,R)\in M(A)$ 则：$L,R\in\mathcal{B}(A)\subset \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(A)$

证明 由 A 为 Banach Sp，$A\xrightarrow{L}A$，$A\xrightarrow{R}A$。

由闭图像 Thm. 要证 L 连续。只要证

若 $x_n\longrightarrow x$，且 $L(x_n)\longrightarrow y$ 则 $L(x)\longrightarrow y$

只要证：$\forall z\in A$，有 $zL(x)=zy$

$zL(x)=R(z)x$

命题 1.11.7

A 为赋范代数，则 $A\times A\xrightarrow{\cdot}A$ 连续

$$(x,y)\longmapsto xy$$

证明 $x_n\longrightarrow x$，$y_n\longrightarrow y\overset{?}{\Rightarrow}x_ny_n\longrightarrow xy$

$\|x_ny_n-xy\|=\|x_ny_n-x_ny+x_ny-xy\|\le\|x_n\|\|y_n-y\|+\|x_n-x\|\|y\|\longrightarrow 0$

回到主题，由 $x_n\longrightarrow x$，$\Rightarrow R(z)x_n=zL(x_n)\longrightarrow R(z)x$

由 $L(x_n)\longrightarrow y\Rightarrow zL(x_n)\longrightarrow zy$

故 $zy=R(z)x$ (T_2)

命题 1.11.8

若 A 为 C^* 代数，$(L,R)\in M(A)$ 则：$\|L\|=\|R\|$

证明 $\forall x\in A$ 且 $\|x\|\le 1$，$\forall y\in A$，$\|y\|\le 1$。

$\|yL(x)\|=\|R(y)x\|\le\|R(y)\|\|x\|\le\|R(y)\|\le\|R\|\|y\|\le\|R\|$

取 $y=L(x)^*$，则 $\forall x$，$\|x\|\le 1$，$\|L(x)\|^2\le\|R\|\|L(x)\|$

$\Rightarrow\forall x$，$\|x\|\le 1$，有 $\|L(x)\|\le\|R\|\Rightarrow\|L\|\le\|R\|$

同理 $\|R\|\le\|L\|$

注

$$\begin{aligned}A&\xrightarrow{r}\mathcal{B}(A)\\ a&\longmapsto r_a\end{aligned}\text{，为等距嵌入}$$

定义 1.11.1

若 A 为 C^* 代数，已证 $M(A)$ 上有典范 $*$ 运算。且 $\forall(L,R)\in M(A)$ $\|L\|=\|R\|$

定义 $\|(L,R)\|=\|L\|=\|R\|$

定理 1.11.1

$M(A)$ 为一个含幺 C^* 代数。且

$$\begin{aligned}A&\xrightarrow{\theta}M(A)\\ a&\longmapsto(\ell_a,r_a)\end{aligned}$$

为等距 $*$ 同构嵌入。

证明 $(M(A),\|\cdot\|)\hookrightarrow(\mathcal{B}(A)\oplus\mathcal{B}(A)^{op},\|\cdot\|_{eq})$ 为 Banach Sp.

$\|(\varphi,\psi)\|=\max\{\|\varphi\|,\|\psi\|\}\Rightarrow(M(A),\|\cdot\|)$ 为赋范空间。

下证 $M(A)$ 为闭子空间

设 $(L_n,R_n)\in M(A)$ 且 $(L_n,R_n)\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}(L,R)$

下证 $(L,R)\in M(A)$ $\forall x,y\in A$

$L_n(x)y = L_n(xy)$
$\downarrow$ 同理 $xR(y) = R(xy)$
$L(x)y = L(xy)$。
$xL_n(y) = R_n(x)y$
$\downarrow \quad \downarrow$
$xL(y) = R(x)y$
若 A 不含幺元，则 $A \subsetneqq M(A)$ 且 $\theta(A) \cap \mathbb{C}1 = \emptyset$。
$A \xrightarrow{\theta \cdot} \theta(A)(A(\text{挖补 Thm})) \oplus \mathbb{C}1. \subset M(A)$
$(a + \lambda 1)^* = a^* + \overline{\lambda} 1 \in \theta(A) \oplus \mathbb{C}1$。
故 $\theta(A) \oplus \mathbb{C}1 *$ 封闭
$M(A)$ Banach Sp. 下证 $A \oplus \mathbb{C}1$ 闭于 $M(A)$
由 A 闭 (Banach) $\mathbb{C}1$ 有限维 $\Rightarrow A \oplus \mathbb{C}1$ 闭（证明下一条）

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\forall\psi"', "*\text{同态}"] & A \oplus \mathbb{C}1 \subset M(A) \arrow[d, "\exists!\varphi"', "\text{保幺}*\text{同态}"] \\
& B\ \forall \text{ 含幺 } C^* \text{ 代数}
\end{tikzcd}$$

命题 1.11.9

若 X 为赋范 Sp，Y 为 X 的闭子空间，Z 为 X 的有限维子空间，则 $Y + Z$ 闭子 Sp

证明

$$\text{考虑商范数} X \xrightarrow{\pi} X/Y \quad \pi \text{ 有界线性}$$
$$Z \longmapsto \pi(Z) \text{ 为 } X/Y \text{ 的有限维线性 Sp}$$

从而 $\pi(Z)$ 闭于 X/Y，而 $\pi^{-1}\pi(Z) = \ker \pi + Z = Y + Z$，闭于 X。

$A \xrightarrow{f} B \quad A, B$ 为 C^* 代数， $f *$ 同态，$\mathrm{Hom}(A, B)$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"', "*\text{同态}"] & \tilde{A} \arrow[d, "\exists!\tilde{f}"', "\text{保幺}*\text{同态}"] \\
B \arrow[r] & \tilde{B}
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{\mathrm{id}_A} = \mathrm{id}_{\tilde{A}}$，$\widetilde{f \circ g} = \tilde{f} \circ \tilde{g}$，这是因为

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] \arrow[dd] & & B \arrow[dl, "f"] \arrow[dd] \\
& C \arrow[dd] & \\
\tilde{A} \arrow[rr, "\tilde{g}"] \arrow[dr, "\tilde{f}\circ\tilde{g}"'] & & \tilde{B} \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\
& \tilde{C} &
\end{tikzcd}$$

顶上变换，所有的侧面变换 $\Rightarrow$ 底部变换

故幺元化为函子

例题 1.16 Banach $*$ 代数

$(L^1(G), *)$ 为 Banach $*$ 代数，不是 C^* 代数。

定义 1.11.2

A 为 Banach 代数，且有 $*$ 运算，若满足：$\forall x \in A$，有 $\|x^*\| = \|x\|$，称 A 为 Banach $*$ 代数 ♣

定义 1.11.3

A 为含幺代数，$G(A)$ 表示 A 的全体可逆元。$G(A)$ 为乘法群 ♣

引理 1.11.2

若 A 为含幺 Banach 代数，则 $G(A)$ 为开集

e.g. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 开于 $M_n(\mathbb{R})$

det 连续，$\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ 开 ♡

命题 1.11.10

A 为含幺 Banach 代数，I_A 为幺元。则 $B(I_A, 1) \subset G(A)$ ♠

证明 $\forall a \in B(I_A, 1)$ 设 $a = 1 - x$，其中 $x \in B(0, 1)$

下证 a 可逆，i.e. 证 $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \cdots$

在 Banach sp（绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛）

先证 $\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\|$ 收敛，$\forall A$ Banach sp，知 $\sum x^n$ 收敛

$\forall n$，$\|x^n\| \le \|x\|^n$，$\sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n < +\infty \Leftarrow \|x\| < 1$

下证 $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(1-x) = 1 = (1-x)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)$

$(\sum_{n=0}^{\infty} x_n)y = (\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n)y =$ （右乘连续 $\Rightarrow$）$\lim_{N\to\infty}(\sum_{n=0}^{N} x_n y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y$

故 $(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n - x^{n+1}) = 1$ （$\|x^n\| \to 0$）

证明 $\forall a \in G(A)$，考虑

$$A \xrightarrow{l_a} A \text{为同胚}$$

$$x \longmapsto ax$$

$$1 \longmapsto a$$

1 为 $G(A)$ 内点，$\Rightarrow l_a(1) = a$ 为 $l_a(G(A)) = G(A)$ 的内点 $\Rightarrow G(A)$ 开。

命题 1.11.11

若 $a \in G(A)$，则 $B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|}) \subset G(A)$

证明 $\forall b \in B(a, \frac{1}{\|a^{-1}\|})$ 设 $b = a + x$，其中 $\|x\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$

考虑 $a^{-1}b = 1 + a^{-1}x$，要证 b 可逆，只要证 $a^{-1}b$ 可逆

由于 $B(1,1) \subset G(A)$，只要验证 $a^{-1}x < 1$

$\|a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\|\|x\| < 1$

命题 1.11.12

若 A 为 Banach 代数，M 为 A 的极大理想，则 M 闭。

命题 1.11.13

若 A 为赋范代数，

1. I 为理想，则 $\overline{I}$ 为理想
2. B 为子代数，则 $\overline{B}$ 仍为子代数

证明

1. $\forall n \in \overline{I}$，$\forall a \in A$，$\exists I$ 中序列

$$ax_n \longrightarrow ax \quad (\ell_a\text{连续})$$
$$x_n a \longrightarrow xa \quad (r_a\text{连续})$$

2. $\forall x, y \in \overline{B}$，$(x_n) \to x$，$(y_n) \to y$

   $(x_n y_n) \to (xy) \to xy = xy \in \overline{B}$

证明 由于 M 为理想 $\Rightarrow \overline{M}$ 为理想

而 $M \cap G(A) = \phi$ （真理想）

$\Rightarrow$ 由$G(A)$ 开 $\quad \overline{M} \cap G(A) = \phi$

$M \subset \overline{M} \subsetneq A \Rightarrow M = \overline{M}$

命题 1.11.14

若 A 为赋范代数，I 为闭理想，则 $(A/I, \|\cdot\|)$ 为一个赋范代数

证明 A/I 为商赋范空间，只需验证 $\forall \alpha, \beta \in A/I$，有 $\|\alpha\beta\| \leq \|\alpha\|\|\beta\|$

由商范数定义：$\|\alpha\| = \inf\{\|a\| : a \in \alpha\}$，$\|\beta\| = \inf\{\|b\| : b \in \beta\}$

对于 $\alpha\beta = [xy]$（其中 $x \in \alpha, y \in \beta$），有

$$\begin{aligned}
\|\alpha\beta\| &= \inf\{\|z\| : z \in \alpha\beta\} \\
&= \inf\{\|xy\| : x \in \alpha, y \in \beta\} \\
&\leq \inf\{\|x\|\|y\| : x \in \alpha, y \in \beta\} \\
&= \inf\{\|x\| : x \in \alpha\} \cdot \inf\{\|y\| : y \in \beta\} \quad (\text{集合大 inf 小}) \\
&= \|\alpha\|\|\beta\|
\end{aligned}$$

故 $(A/I, \|\cdot\|)$ 满足范数的次乘性，为赋范代数。

推论 1.11.1

A Banach sp，I 闭理想，则 $(A/I, \|\cdot\|)$ 为 Banach 代数

命题 1.11.15

若 A 为含幺交换 Banach 代数，M 为极大理想，则 $A/M \cong \mathbb{C}$

证明 A/M 为域（可除代数）若任意元素谱非空，则 $A/M \cong \mathbb{C}$（拓扑同构）

定理 1.11.2

若 A 为含幺复 Banach 代数，$a \in A$，则 $\sigma(a) \neq \emptyset$，且为 $\mathbb{C}$ 中紧子集

证明 先证 $\sigma(a)$ 为 $\mathbb{C}$ 中紧集

对 $\forall a$，定义连续映射

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\tau} A$$

$$\lambda \longmapsto \lambda 1 - a$$

$\lambda \in \tau^{-1}(G(A)^c) \Leftrightarrow \lambda 1 - a \in G(A)^c \Leftrightarrow \lambda 1 - a$ 不可逆 $\Leftrightarrow \lambda \in \sigma(a)$

由 $G(A)^c$ 闭 $\Rightarrow \tau^{-1}(G(A)^c)$ 闭集