拓扑学

作者：hjw
时间：April 9, 2022

你这个学历的基米无权哈我

目录

第 1 章 拓扑空间基础

1.1 拓扑空间的定义

我们首先引入拓扑和拓扑空间的概念

定义 1.1 (拓扑)

设 X 为集合，拓扑 τ 为 X 的子集族，满足

1. $\varnothing \in \tau$ 且 $X \in \tau$;
2. 若 $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \tau$ 则 $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$;
3. 若 $U_1, \ldots, U_n \in \tau$ 则 $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau$

♣

例如，对于实数集 $\mathbb{R}$，常取由所有开区间生成的标准拓扑；将所有子集都视为开集得到离散拓扑，这个是最大的拓扑；而仅有 $\varnothing$ 和 X 为开集的则称为平凡拓扑。

例题 1.1Zariski 拓扑 对域 $\Bbbk$ 上的仿射空间 $\Bbbk^n$，Zariski 拓扑定义为其闭集恰为多项式集合的零点集，即对于任意 $S \subseteq \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$，令

$$V(S) = \{x \in \Bbbk^n : f(x) = 0 \text{ 对所有} f \in S\}, \tag{1.1}$$

并以所有此类 $V(S)$ 作为闭集产生拓扑。

定义 1.2 (拓扑空间)

设 X 为集合，若 $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是一个拓扑, 则称 (X, τ) 为拓扑空间。

♣

定义 1.3 (邻域)

对拓扑空间 (X, τ) 中的点 $x \in X$，若 $U \in \tau$ 且 $x \in U$，则称 U 为点 x 的一个领域，点 x 的所有领域所成的集合记为 $\mathcal{N}(x)$，即

$$\mathcal{N}(x) = \{\, U \in \tau : x \in U \,\}. \tag{1.2}$$

♣

定义 1.4 (聚点)

设 (X, τ) 为拓扑空间，且 $A \subseteq X$，若对任意 $x \in X$ 满足对任意领域 $U \in \mathcal{N}(x)$，有

$$(U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing, \tag{1.3}$$

则称 x 为集合 A 的一个聚点。

♣

定义 1.5 (闭包点)

设 (X, τ) 为拓扑空间，且 $A \subseteq X$，若对任意 $x \in X$ 满足对任意领域 $U \in \mathcal{N}(x)$，有 $U \cap A \neq \varnothing$，则称 x 为集合 A 的一个闭包点，集合 A 的闭包记为 $\overline{A}$，并可等价地表述为

$$\overline{A} = \{\, x \in X : U \cap A \neq \varnothing \text{ 对任意 } U \in \mathcal{N}(x) \,\}. \tag{1.4}$$

♣

定义 1.6 (导集)

设 (X, τ) 为拓扑空间，且 $A \subseteq X$，集合 A 的导集定义为所有属于 A 的聚点所构成的集合，记为 A'，即

$$A' = \{\, x \in X : (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing \text{ 对任意 } U \in \mathcal{N}(x) \,\}. \tag{1.5}$$

♣

定义 1.7 (内点)

设 (X,τ) 为拓扑空间，且 $A\subseteq X$，若对任意 $x\in X$ 存在一个邻域 $U\in\mathcal{N}(x)$ 使得 $U\subseteq A$，则称 x 为集合 A 的一个内点，集合 A 的内记为 A°，并可等价地表述为

$$A^\circ=\{x\in X:\ \exists U\in\mathcal{N}(x)\ 使得\ U\subseteq A\}=\bigcup\{U\in\tau:\ U\subseteq A\}. \tag{1.6}$$

♣

注 回忆起度量空间定义的上面的东西，我们发现二者其实是等价的，即在度量空间 (X,d) 上由开球生成的拓扑与公理化拓扑下的内、闭、导集概念相容。

1.2 开集与闭集

定义 1.8 (开集)

设 (X,τ) 为拓扑空间，子集 $U\subseteq X$ 若对任意 $x\in U$ 存在邻域 $V\in\mathcal{N}(x)$ 使得 $V\subseteq U$，则称 U 为 X 的一个开集

♣

命题 1.1

设 (X,τ) 为拓扑空间，且 $U\subseteq X$，则 U 为开集当且仅当对任意 $x\in U$ 存在邻域 $V\in\mathcal{N}(x)$ 使得 $V\subseteq U$。♠

证明 左推右：若 U 为开集，则对任意 $x\in U$ 按照开集的定义存在邻域 $V\in\mathcal{N}(x)$ 使得 $V\subseteq U$；

右推左：若 U 为空，则显然为开集；若 U 非空，则对任意 $x\in U$ 存在邻域 $V_x\in\mathcal{N}(x)$ 使得 $V_x\subseteq U$，因此

$$U=\bigcup_{x\in U}V_x, \tag{1.7}$$

故 U 为开集。

命题 1.2

若 A 为闭集，则有

$$\overline{A}=A \tag{1.8}$$

♠

证明 左推右：先证明 $\overline{A}\subset A$, 设 $x\in\overline{A}$，则按闭包的定义有

$$\forall U\ni x,\quad U\cap A\neq\emptyset, \tag{1.9}$$

若反设 $x\notin A$，则由于 A 为闭集，$X\setminus A$ 为开集，故存在开邻域 $V\ni x$ 且 $V\subset X\setminus A$，从而 $V\cap A=\emptyset$，与上式矛盾，因此 $x\in A$，于是 $\overline{A}\subset A$.

再证明 $A\subset\overline{A}$：设 $x\in A$，则对于任意开邻域 $U\ni x$ 有 $x\in U\cap A$，从而 $U\cap A\neq\emptyset$，这说明 $x\in\overline{A}$，因此 $A\subset\overline{A}$。

右推左：若 $\overline{A}=A$，则对任意 $x\in X\setminus A$ 有 $x\notin\overline{A}$，因此存在开邻域 $U\ni x$ 使得

$$U\cap A=\emptyset, \tag{1.10}$$

从而 $X\setminus A$ 为开集，故 A 为闭集。

命题 1.3

$\overline{A}$ 为闭集 ♠

证明 设 $x\in X\setminus\overline{A}$，则由 $x\notin\overline{A}$ 可知存在开邻域 $U\ni x$ 使得 $U\cap A=\emptyset$，从而 $U\subset X\setminus\overline{A}$，说明 $X\setminus\overline{A}$ 为开集，故 $\overline{A}$ 为闭集。

命题 1.4

$\overline{A}$ 为包含 A 的最小闭集

证明 若 F 为任一包含 A 的闭集，则由 $A \subset F$ 及 F 的闭性可推出 $\overline{A} \subset F$，因此 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集。

注

E 为含 A 的最小闭集当且仅当 $E = \overline{A}$

证明

右推左：已经证明过了

左推右：设 E 为含 A 的最小闭集，则由于 $\overline{A}$ 是包含 A 的闭集，由最小性得 $E \subset \overline{A}$，另一方面由 $\overline{A}$ 为所有包含 A 的闭集的交集可得 $\overline{A} \subset E$，因此

$$E = \overline{A}. \tag{1.11}$$

命题 1.5

若 A 为开集，则有

$$A^\circ = A \tag{1.12}$$

证明 左推右：由于 A 自身为开集且显然 $A \subset A$，由 A° 作为所有包含于 A 的开集的并的定义可知 $A \subset A^\circ$，而先前已证明 $A^\circ \subset A$，因此 $A^\circ = A$。

右推左：因为 A° 为开集且

$$(A^\circ)^\circ = A^\circ \tag{1.13}$$

故若 $A^\circ = A$ 则 A 为开集，从而完成证明。

命题 1.6

A 的内点集（记 A°）是所有包含于 A 的最大开集

证明 记

$$A^\circ = \bigcup\{U \mid U \subset A,\ U \text{ 为开集}\}, \tag{1.14}$$

则作为开集并的并集 A° 本身为开集，且对任意开集 U 若 $U \subset A$ 则有 $U \subset A^\circ$，因此 A° 是所有包含于 A 的开集中的最大者。

注 B 为 A° 当且仅当 B 为包含于 A 的最大开集

证明 类似

命题 1.7

(X, τ) 拓扑空间，$A \subset X$，有

$$A^\circ = A^{c-c}(\text{习题}) \tag{1.15}$$

命题 1.8

A 为开集当且仅当 A^c 为闭集

证明 左推右：若 A 为开集，则对任意 A^c 的极限点 x，若反设 $x \notin A^c$ 即 $x \in A$，则由 A 的开性可取开邻域 U 使得 $x \in U \subset A$，从而 U 与 A^c 无交以违背 x 为极限点的假设，因此 $x \in A^c$，即 A^c 含其所有极限点，故 A^c 为闭集。

右推左：设 A^c 为闭集且 $x \in A$，则 $x \notin A^c$，故 x 不是 A^c 的极限点，因而存在开邻域 U 使得 $U \cap A^c = \varnothing$，从而 $U \subset A$，说明任意点 $x \in A$ 都有包含于 A 的开邻域，即 A 为开集。

第 2 章 连续映射

本章讨论拓扑空间之间的连续映射及其性质。

定义 2.1 (连续性)

设拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_X)$ 与 $(Y,\mathcal{T}_Y)$，映射 $f:X\to Y$ 在点 $x\in X$ 处连续，若对任意包含 $f(x)$ 的开集 $V\in\mathcal{T}_{f(x)}$，存在包含 x 的开集 $U\in\mathcal{T}_X$ 使得 $f(U)\subset V$。

命题 2.1

映射 $f:X\to Y$ 在每一点连续当且仅当对于任意开集 $V\subset Y$，其原像 $f^{-1}(V)$ 在 X 中为开集

证明 右推左：设任意包含 $f(x)$ 的开集 $V\in\mathcal{T}_{f(x)}$，由假设 $f^{-1}(V)$ 在 X 中为开且包含 x，于是取 $U=f^{-1}(V)$ 可得包含 x 的开邻域且 $f(U)\subset V$，故 f 在 x 处连续，因 x 为任意点，遂得 f 在每一点连续。

命题 2.2

映射 $f:X\to Y$ 在 X 上连续当且仅当对于任意闭集 $C\subset Y$，其原像 $f^{-1}(C)$ 在 X 中为闭集。

命题 2.3

$f:X\to Y$

1. $\forall U\subset Y$, 有 $f^{-1}(U^c)=f^{-1}(U)^c$
2. $\forall A,B\subset Y$ 有，$f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$
3. 任意一簇子集有
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(A_i),\qquad f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I}A_i\Big)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(A_i).\tag{2.1}$$
4. 对于任意族 $\{U_i\}_{i\in I}\subset Y$，有
$$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I}U_i\Big)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(U_i).$$
5. $f(B_1\cap B_2)\subset f(B_1)\cap f(B_2)$

命题 2.4

设拓扑空间 $(X,\mathcal{T}_X)$ 与 $(Y,\mathcal{T}_Y)$，映射 $f:X\to Y$, 则以下四条等价

1. 对任意点 $x\in X$，f 在 x 连续；
2. 对任意开集 $V\subset Y$，$f^{-1}(V)$ 在 X 中为开集；
3. 对任意闭集 $C\subset Y$，$f^{-1}(C)$ 在 X 中为闭集；
4. 若 $\forall A\subset X$，有
$$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}\tag{2.2}$$
.
5. $\forall B\subset Y$ 有
$$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\overline{B})\tag{2.3}$$
.

证明 1,2,3 相互等价已经证明过了，下面证明 3 和 4 等价

我们先证明 3 推 4，要证 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$, 只要证 $\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$，由于 $\overline{f(A)}$ 为闭，对于任意 $a\in A$ 有

$f(a) \in f(A) \subset \overline{f(A)}$，故 $a \in f^{-1}(\overline{f(A)})$，即

$$A \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \tag{2.4}$$

而 $f^{-1}(\overline{f(A)})$ 为闭集，故包含 $\overline{A}$，于是 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

接下来是 4 推 3，那我们任取一个闭集

$$E \subset Y, \quad E \text{ 闭}, \tag{2.5}$$

要证 $f^{-1}(E)$ 闭于 X，只要证 $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(E)$, 只要证 $f(\overline{f^{-1}(E)}) \subset E$，这是因为，由于 3 对任意集合 A 成立，将 $A = f^{-1}(E)$ 代入得

$$f(\overline{f^{-1}(E)}) \subset \overline{f(f^{-1}(E))} \subset \overline{E} = E, \tag{2.6}$$

从而 $\overline{f^{-1}(E)} \subset f^{-1}(E)$，即 $f^{-1}(E)$ 为闭集。

第 3 章 网与收敛

在一般拓扑空间中，序列的概念不足以刻画收敛性质，我们需要推广到网的概念。

3.1 预序集与定向集

定义 3.1 (预序集)

设 $(\Omega, \leq)$ 为集合 Ω 上带二元关系 $\leq$ 的结构，如果对任意 $x, y, z \in \Omega$ 都有 (i) $x \leq x$（自反性），以及 (ii) $x \leq y$ 且 $y \leq z$ 蕴含 $x \leq z$（传递性），则称 $(\Omega, \leq)$ 为预序集

例题 3.1 比如说自然数就是一个预序集

定义 3.2 (定向集)

设 $(\Omega, \leq)$ 为预序集，如果对任意有限子集 $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \Omega$ 存在 $y \in D$ 使得 $x_i \leq y$ 对所有 $i = 1, \ldots, n$ 成立，则称 $(\Omega, \leq)$ 为定向集。

例题 3.2 领域就是一个定向集

3.2 网的定义与收敛

定义 3.3 (网)

设 $(\Omega, \leq)$ 为定向集，X 为集合，则称任意映射 $x : \Omega \to X$ 为以 Ω 为下标的网，记作 $(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$，并称每个 $\alpha \in \Omega$ 为该网的下标和位置

定义 3.4 (网的收敛)

设 (X, τ) 为拓扑空间，$(x_\alpha)_{\alpha \in \Omega}$ 为以定向集 $(\Omega, \leq)$ 为下标的网，则称 (x_α) 收敛到 $x \in X$（记作 $x_\alpha \to x$）若对于任意包含 x 的邻域 U 存在 $\alpha_0 \in \Omega$ 使得对所有 $\alpha \in \Omega$ 若 $\alpha \geq \alpha_0$ 则 $x_\alpha \in U$，即满足

$$\forall U \in \mathcal{N}(x)\ \exists \alpha_0 \in \Omega\ \forall \alpha \in \Omega\ (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U). \tag{3.1}$$

命题 3.1

存在一个以邻域族 $\mathcal{N}(x)$ 为定向集的网 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$，使得对每个 $U \in \mathcal{N}(x)$ 有 $x_U \in U$，并且该网收敛于 x，即

$$\forall U \in \mathcal{N}(x)\ x_U \in U, \quad (x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \to x. \tag{3.2}$$

证明 取定向集为邻域族 $\mathcal{N}(x)$ 并以反包含关系作为偏序（即对 $U, V \in \mathcal{N}(x)$ 令 $U \geq V$ 当且仅当 $U \subseteq V$），对每个 $U \in \mathcal{N}(x)$ 任取 $x_U \in U$，则对于任意邻域 $W \in \mathcal{N}(x)$ 取 $\alpha_0 = W$ 有

$$\forall W \in \mathcal{N}(x)\ \exists \alpha_0 = W \in \mathcal{N}(x)\ \forall \alpha \in \mathcal{N}(x)\ (\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in W), \tag{3.3}$$

从而 $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x)} \to x$.

命题 3.2

设 X 为拓扑空间，$A \subseteq X$，则

$$x \in \overline{A} \iff \exists \text{ net } (x_\alpha)_{\alpha \in D} \subset A \text{ such that } (x_\alpha) \to x. \tag{3.4}$$

证明

若存在网 $(x_\alpha)_{\alpha\in D} \subset A$ 且 $(x_\alpha) \to x$，则对任一邻域 $W \in \mathcal{N}(x)$ 存在 α_0 使得 $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in W$，从而 $W \cap A \neq \varnothing$，即 $x \in \overline{A}$；

反之，若 $x \in \overline{A}$，则对每一邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$ 选取一点 $x_U \in A \cap U$，即

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) \quad x_U \in A \cap U, \tag{3.5}$$

由此得到网 $(x_U)_{U\in\mathcal{N}(x)} \subset A$，且对于任意 $W \in \mathcal{N}(x)$，当 $U \subset W$ 时有 $x_U \in U \subset W$，因此

$$(x_U)_{U\in\mathcal{N}(x)} \to x, \tag{3.6}$$

从而存在所需的网，证明完成。

命题 3.3

f 在 x 连续当且仅当对于任意收敛到 x 的网 $(x_U)_{U\in\mathcal{N}(x)}$ 都有

$$(f(x_U))_{U\in\mathcal{N}(x)} \to f(x). \tag{3.7}$$

证明 右推左

我们首先有

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \tag{3.8}$$

. 因此对于任意收敛到 x 的网 $(x_U)_{U\in\mathcal{N}(x)}$，由于对于任一包含 x 的集合 A 有尾部最终包含于 $\overline{A}$ 并且 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$，其像网收敛于 $f(x)$，即

$$(f(x_U))_{U\in\mathcal{N}(x)} \to f(x). \tag{3.9}$$

左推右：设 f 在 x 处连续，由 $x \in \overline{A}$，知 $U \cap A \neq \varnothing$ 则存在来自 A 的网 $(x_U)_{U\in\mathcal{N}(x)}$ 收敛于 x，故由连续性其像网收敛于 $f(x)$，即

$$(f(x_U))_{U\in\mathcal{N}(x)} \to f(x). \tag{3.10}$$

第 4 章 拓扑的生成

本章讨论如何从给定的集合族生成拓扑。

4.1 拓扑族的交

命题 4.1

X 为集合，若 $(\mathcal{T}_\alpha)_\alpha$ 为 X 上的一族拓扑，则

$$\mathcal{T} := \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha \tag{4.1}$$

为 X 上的拓扑，且为包含所有 $\mathcal{T}_\alpha$ 的最小拓扑，而 $\bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ 未必为拓扑。

证明 具体地，设 $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$，则对任意 α 有 $U_i \in \mathcal{T}_\alpha$，且由于每个 $\mathcal{T}_\alpha$ 对任意并运算闭合，我们有

$$\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_\alpha \quad (\forall\alpha), \tag{4.2}$$

从而 $\bigcup_{i\in I} U_i \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}$，类似地可证有限交运算的闭合性，故 $\mathcal{T}$ 为拓扑且显然为包含所有 $\mathcal{T}_\alpha$ 的最小拓扑，而 $\bigcup_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ 未必为拓扑。

4.2 拓扑基与子基

定义 4.1 (拓扑子基)

$(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，若由 $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}, \mathcal{T}$ 为 $\mathcal{S}$ 的最小拓扑，则称 $\mathcal{S}$ 为 $(X,\mathcal{T})$ 上的拓扑子基

命题 4.2

$f: X \to Y$,X,Y 是拓扑的，$\mathcal{S}$ 是 Y 的子基, 则下列两个命题等价:

1. f 连续;
2. 对任意 $S \in \mathcal{S}$，有 $f^{-1}(S)$ 开于 X.

证明 1→2 显然

2→1 令

$$\mathcal{A} = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ 在} X \text{ 中为开集}\} \tag{4.3}$$

只要证明 $\mathcal{A} \supset \mathcal{T}_Y$，从而对任意 $V \in \mathcal{T}_Y$ 有 $f^{-1}(V)$ 在 X 中开，即 f 连续。

下证 $\mathcal{A} \supset \mathcal{T}_Y$，令 $\mathcal{B}$ 为生成 $\mathcal{T}_Y$ 的一组基，任取 $V \in \mathcal{T}_Y$，则存在指标集 I 及基元 $\{B_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{B}$ 使得 $V = \bigcup_{i\in I} B_i$，从而

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{T}_X, \tag{4.4}$$

命题 4.3

若 $\mathcal{S}$ 为拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 上的子基,$(x_\alpha)_\alpha$ 是 X 中的网,$x \in X$，则以下等价

1. $x_\alpha \to x$
2. $$\forall U \in \mathcal{N}(x) \text{且} U \in \mathcal{S}\ \exists \alpha_0 \in \Omega, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U. \tag{4.5}$$

证明 1→2 显然

2→1 令

$$\mathcal{A} = \{ E \in \mathcal{T} \mid \exists \alpha_0 \in \Omega, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U, \} \tag{4.6}$$

下证 $\mathcal{A} = \mathcal{T}$

1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}$ 包含由 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑：拓扑 $\mathcal{T}$ 是由子基 $\mathcal{S}$ 生成的，因此任意 $V \in \mathcal{T}$ 包含一个有限交
$$B = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n,$$
其中每个 $S_i \in \mathcal{S}$ 且 $x \in S_i$。由假设，每个 S_i 在某一 α_i 后包含 x_α，取 $\alpha_0 = \max \alpha_i$，则 $\forall \alpha \geq \alpha_0$，有 $x_\alpha \in B$。因此 $B \in \mathcal{A}$。由于 $B \subset V$ 且 $\mathcal{A}$ 对超集封闭，得 $V \in \mathcal{A}$，即 $\mathcal{T} \subset \mathcal{A}$。
2. $\mathcal{A}$ 是拓扑：由定义可见，若 $E_i \in \mathcal{A}$，则存在相应的 α_i 使得网最终在 E_i 中。取 $\alpha_0 = \max \alpha_i$ 可得网最终在有限交 $\bigcap_i E_i$ 中；对任意族 $\{E_j\}$，网最终在某个 E_j 中即在其并集内，因此 $\mathcal{A}$ 对有限交和任意并封闭，从而 $\mathcal{A}$ 是拓扑。
3. $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$：由定义 $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ 成立，因为每个 $E \in \mathcal{A}$ 本身就是拓扑中的开集。综上，$\mathcal{A} = \mathcal{T}$。由 $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ 可知，对任意邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$，都有 $U \in \mathcal{A}$，即网最终进入 U，这正是 $x_\alpha \to x$ 的定义。

定义 4.2

$(X, \mathcal{T})$ 是拓扑空间，$\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$，若满足对任意 $U \in \mathcal{T}$，存在 $C \subset \mathcal{B}$ 使得

$$U = \bigcup_{B \in C} B \text{也记作} U = UC \tag{4.7}$$

成立，则称 $\mathcal{B}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的拓扑基

♣

例题 4.1 (X, d) 为度量空间，定义 $\mathcal{B} = \{B(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ 则 $\mathcal{B}$ 为 $(X, \mathcal{T}_d)$ 的一个基。其中 $\mathcal{T}_d$ 表示由度量 d 所诱导的拓扑，即由所有开球 $B(x, \varepsilon)$ 生成的拓扑。

证明 设 $U \in \mathcal{T}_d$，则按定义 U 为 d-开集，即

$$\forall x \in U, \exists \varepsilon_x > 0 \text{ 使得 } B(x, \varepsilon_x) \subset U.$$

由此我们有

$$U = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon_x). \tag{4.8}$$

显然每个 $B(x, \varepsilon_x) \in \mathcal{B}$，且该并为 U 的覆盖，故 $\mathcal{B}$ 为 $(X, \mathcal{T}_d)$ 的一个基。

命题 4.4

若 $\mathcal{B}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的基，$\mathcal{B}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的子基

♠

证明 由假设 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$，且 $\mathcal{T}$ 中任意开集均为 $\mathcal{B}$ 中元素的并。设 $\mathcal{T}'$ 是由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑，则：

1. 显然 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}'$，且 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$；
2. 对任意 $U \in \mathcal{T}$，由基的定义存在 $C \subset \mathcal{B}$ 使得
$$U = \bigcup_{B \in C} B, \tag{4.9}$$
而这些 B 均在 $\mathcal{T}'$ 中，因此 $U \in \mathcal{T}'$。

由此得 $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ 且 $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$，故 $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$，从而 $\mathcal{B}$ 亦为 $(X, \mathcal{T})$ 的一个子基。

命题 4.5

若 $\mathcal{S}$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 的子基，则 $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{x\}$ 为 X 的一个基. 这里 $\mathcal{S}_{f\cap}$ 为由 $\mathcal{S}$ 取有限交得到的所有集合

♠

证明 1. 由 $\mathcal{S}$ 是 $(X, \mathcal{T})$ 的子基可知，$\mathcal{S}_{f\cap} \subset \mathcal{T}$ 且 $X \in \mathcal{T}$，从而 $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\} \subset \mathcal{T}$。

2. 设

$$\mathcal{A} \triangleq \{E \subseteq X \mid \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\} \text{ 使得 } E = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B\},$$

则由子基定义知 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$，反之由第 1 步知 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$，故 $\mathcal{A} = \mathcal{T}$。

下证 $\mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$ 满足基的判别条件，只要证 $\mathcal{A}$ 为由 $\mathcal{S}$ 生成的子拓扑，具体如下:

1. 由于 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{f\cap} \subseteq \mathcal{S}_{f\cap} \cup \{X\}$，对任意 $E \in \mathcal{S}$，有 $E = E \cap E$，且 $E = \bigcup\{E\}$，因此 $E \in \mathcal{A}$，即 $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$。
2. 空集 $\varnothing$ 可以表示为 $\varnothing = \bigcup \varnothing \in \mathcal{A}$，而 $X = \bigcup\{X\} \in \mathcal{A}$；此外，$\mathcal{A}$ 对任意并封闭且对有限交封闭，故 $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{S}$ 的拓扑。

第 5 章 分离公理

我们现在引入分离公理的概念，用以刻画拓扑空间中点与点之间的”可分离性”。

定义 5.1 (T_0 空间（可分离空间）)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，若对任意 $x,y\in X$ 且 $x\neq y$，

$$\exists U\in\mathcal{N}(x)\text{ 使得}y\notin U\quad\text{或}\quad\exists V\in\mathcal{N}(y)\text{ 使得}x\notin V, \tag{5.1}$$

则称 $(X,\mathcal{T})$ 为 T_0 空间（或可分离空间）。

♣

定义 5.2 (T_1 空间)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，若对任意 $x,y\in X$ 且 $x\neq y$，

$$\exists U\in\mathcal{N}(x)\text{ 使得}y\notin U, \tag{5.2}$$

则称 $(X,\mathcal{T})$ 为 T_1 空间。

♣

注 T_1 空间等价于：对任意 $x,y\in X$ 且 $x\neq y$，

$$\exists U\in\mathcal{N}(x)\text{ 使得}y\notin U\quad\text{且}\quad\exists V\in\mathcal{N}(y)\text{ 使得}x\notin V. \tag{5.3}$$

命题 5.1

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，则以下条件等价：

1. X 为 T_1 空间；
2. X 的每个单点集为闭集；
3. X 的每个有限子集为闭集。

♠

定义 5.3 (T_2 空间 (Hausdorff))

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，若对任意 $x,y\in X$ 且 $x\neq y$，

$$\exists U\in\mathcal{N}(x),\exists V\in\mathcal{N}(y)\quad\text{使得}\quad U\cap V=\varnothing, \tag{5.4}$$

则称 $(X,\mathcal{T})$ 为 T_2 空间（或 Hausdorff 空间）。

♣

注 显然有如下包含关系：

$$T_2\Rightarrow T_1\Rightarrow T_0. \tag{5.5}$$

即任何 Hausdorff 空间都是 T_1 空间，任何 T_1 空间都是 T_0 空间。

命题 5.2

设 $(X,\mathcal{T})$ 为 T_2 空间，则 X 中任意网的极限若存在必唯一。即若网 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ 满足 $x_\alpha\to x$ 且 $x_\alpha\to y$，则 $x=y$。

♠

证明 反证法。假设 $x\neq y$，由于 $(X,\mathcal{T})$ 为 T_2 空间，存在 $U\in\mathcal{N}(x)$ 和 $V\in\mathcal{N}(y)$ 使得

$$U\cap V=\varnothing. \tag{5.6}$$

由于 $x_\alpha\to x$，存在 $\alpha_1\in\Omega$ 使得对所有 $\alpha\geq\alpha_1$，有 $x_\alpha\in U$；
由于 $x_\alpha\to y$，存在 $\alpha_2\in\Omega$ 使得对所有 $\alpha\geq\alpha_2$，有 $x_\alpha\in V$。
由定向集的性质，存在 $\alpha_0\in\Omega$ 使得 $\alpha_0\geq\alpha_1$ 且 $\alpha_0\geq\alpha_2$，从而

$$x_{\alpha_0}\in U\quad\text{且}\quad x_{\alpha_0}\in V, \tag{5.7}$$

即 $x_{\alpha_0}\in U\cap V$。但这与 $U\cap V=\varnothing$ 矛盾。

因此必有 $x = y$，即极限唯一。

命题 5.3

设 X 为拓扑空间，则以下条件等价：

1. X 为 T_2 空间；
2. X 具有网收敛的唯一性。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)：由命题 5.2 已证。

(2) $\Leftarrow$ (1)：反证法。假设 X 不为 T_2 空间，则存在 $x, y \in X$ 且 $x \neq y$，使得对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$ 和 $V \in \mathcal{N}(y)$，都有

$$U \cap V \neq \varnothing. \tag{5.8}$$

令

$$\Lambda = \{U \cap V : U \in \mathcal{N}(x), V \in \mathcal{N}(y), U \cap V \neq \varnothing\}. \tag{5.9}$$

对于 Λ 中任意两个元素 $A, B \in \Lambda$，设 $A = U_1 \cap V_1$，$B = U_2 \cap V_2$，其中 $U_1, U_2 \in \mathcal{N}(x)$，$V_1, V_2 \in \mathcal{N}(y)$。令 $C = (U_1 \cap U_2) \cap (V_1 \cap V_2)$，则 $C \in \Lambda$ 且 $C \subseteq A$ 且 $C \subseteq B$。因此 Λ 在反包含序下构成定向集。

对每个 $A \in \Lambda$，选取 $z_A \in A$，得到网 $(z_A)_{A \in \Lambda}$。

对任意 $U_0 \in \mathcal{N}(x)$，取 $A_0 = U_0 \cap X \in \Lambda$（因为 $x \in U_0$ 且 $y \in X$），则当 $A \subseteq A_0$ 时，有 $z_A \in A \subseteq A_0 \subseteq U_0$，故 $z_A \to x$。

同理，对任意 $V_0 \in \mathcal{N}(y)$，取 $B_0 = X \cap V_0 \in \Lambda$，可得 $z_A \to y$。

因此该网同时收敛到 x 和 y，但 $x \neq y$，这与网收敛的唯一性矛盾。

故 X 必为 T_2 空间。

5.1 滤子与滤基

定义 5.4 (有限交性质)

设 X 为集合，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$。

称 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质，若对任意 $E \subseteq \mathcal{F}$ 且 E 有限，存在 $x \in X$ 使得 $x \in \bigcap E$，即

$$\bigcap_{A \in E} A \neq \varnothing. \tag{5.10}$$

定义 5.5 (滤子基)

设 X 为集合，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$。

若 $\mathcal{F}$ 满足：

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$；
2. 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$，存在 $C \in \mathcal{F}$ 使得 $C \subseteq A \cap B$，

则称 $\mathcal{F}$ 为 X 上的一个滤子基。

定义 5.6 (滤子)

设 X 为集合，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$。

若 $\mathcal{F}$ 满足：

1. $\varnothing \notin \mathcal{F}$；
2. 对任意 $A, B \in \mathcal{F}$，有 $A \cap B \in \mathcal{F}$；
3. （向上封闭）对任意 $A \in \mathcal{F}$ 和 $B \subseteq X$，若 $B \supseteq A$，则 $B \in \mathcal{F}$，

则称 $\mathcal{F}$ 为 X 上的一个滤子。

定义 5.7 (邻域基)

设 (X,τ) 为拓扑空间，$x \in X$，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$。
称 $\mathcal{B}$ 为点 x 的一个邻域基，若对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得

$$B \subseteq U. \tag{5.11}$$

命题 5.4

设 (X,τ) 为拓扑空间，$x \in X$，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}(x)$。则 $\mathcal{B}$ 是点 x 的邻域基当且仅当 $\mathcal{B}$ 是一个滤子基。

定义 5.8 (滤子收敛)

设 (X,τ) 为拓扑空间，$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$，$x \in X$。
称 $\mathcal{F}$ 收敛到 x，记作 $\mathcal{F} \to x$，若对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得

$$F \subseteq U. \tag{5.12}$$

命题 5.5

设 X 为 T_2 空间，$\mathcal{F}$ 为 X 中具有有限交性质的集族。则 $\mathcal{F}$ 的收敛点若存在必唯一，即若 $\mathcal{F} \to x$ 且 $\mathcal{F} \to y$，则 $x = y$。

证明 反证法。假设 $x \neq y$，由于 X 为 T_2 空间，存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 和 $V \in \mathcal{N}(y)$ 使得

$$U \cap V = \varnothing. \tag{5.13}$$

由于 $\mathcal{F} \to x$，存在 $A \in \mathcal{F}$ 使得 $A \subseteq U$；
由于 $\mathcal{F} \to y$，存在 $B \in \mathcal{F}$ 使得 $B \subseteq V$。
因此 $A \cap B \subseteq U \cap V = \varnothing$，即 $A \cap B = \varnothing$。
但这与 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质矛盾（因为 $A, B \in \mathcal{F}$ 是有限子族，其交应非空）。
故必有 $x = y$，收敛点唯一。

命题 5.6

设 X 为拓扑空间，则下列命题等价：
1. X 为 T_2 空间；
2. X 中网收敛的极限唯一性；
3. X 中满足有限交性质的集族收敛唯一性；
4. X 中滤子基收敛唯一性；
5. X 中滤子收敛唯一性。

证明 我们按照 (1) $\Leftrightarrow$ (2)，(1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5)，(4) $\Rightarrow$ (2) 的顺序证明。

(1) $\Leftrightarrow$ (2)：由命题 5.3 已证。

(1) $\Rightarrow$ (3)：由命题 5.5 已证。

(3) $\Rightarrow$ (4)：显然，因为滤子基是具有有限交性质的集族。

(4) $\Leftrightarrow$ (5)：设 $\mathcal{B}$ 为滤子基，则 $\mathcal{B}_\uparrow$ 为滤子。若 $\mathcal{B} \to x$ 且 $\mathcal{B} \to y$，则 $\mathcal{B}_\uparrow \to x$ 且 $\mathcal{B}_\uparrow \to y$。由滤子收敛唯一性得 $x = y$。反之，滤子本身也是滤子基，故滤子收敛唯一性蕴含滤子基收敛唯一性。

(4) $\Rightarrow$ (2)：设 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ 为 X 中的网，且 $x_\alpha \to x$ 且 $x_\alpha \to y$。
令 $\mathcal{B} = \{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\} : \alpha \in \Omega\}$，即 $E_\alpha = \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$。
可以验证 $\mathcal{B}$ 是一个滤子基：

- $\varnothing \notin \mathcal{B}$，因为每个 E_α 至少包含 x_α；
- 对任意 $E_\alpha, E_\beta \in \mathcal{B}$，由定向集性质存在 $\gamma \geq \alpha, \beta$，则 $E_\gamma \subseteq E_\alpha \cap E_\beta$。

若 $x_\alpha \to x$，则对任意 $U \in \mathcal{N}(x)$，存在 α_0 使得对所有 $\alpha \geq \alpha_0$ 有 $x_\alpha \in U$，即 $E_{\alpha_0} \subseteq U$，故 $\mathcal{B} \to x$。

同理 $\mathcal{B} \to y$。由滤子基收敛唯一性，$x = y$。

因此所有命题等价。

定义 5.9

设 X 为集合，$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$。定义

$$\mathcal{B}_\uparrow = \{ E \subseteq X : \exists B \in \mathcal{B} \text{ 使得} B \subseteq E \}. \tag{5.14}$$

命题 5.7

设 $\mathcal{B}$ 为 X 上的一个滤子基，则 $\mathcal{B}_\uparrow$ 为 X 上的一个滤子。

证明 需要验证 $\mathcal{B}_\uparrow$ 满足滤子的三个条件。

(1) 若 $\varnothing \in \mathcal{B}_\uparrow$，则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq \varnothing$，即 $B = \varnothing$，这与 $\varnothing \notin \mathcal{B}$ 矛盾。故 $\varnothing \notin \mathcal{B}_\uparrow$。

(2) 对任意 $E, F \in \mathcal{B}_\uparrow$，存在 $B_1 \in \mathcal{B}$ 使得 $B_1 \subseteq E$，存在 $B_2 \in \mathcal{B}$ 使得 $B_2 \subseteq F$。

由于 $\mathcal{B}$ 为滤子基，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq B_1 \cap B_2$。

因此 $B \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq E \cap F$，即 $E \cap F \in \mathcal{B}_\uparrow$。

(3)（向上封闭）若 $E \in \mathcal{B}_\uparrow$ 且 $F \supseteq E$，则存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $B \subseteq E \subseteq F$，故 $F \in \mathcal{B}_\uparrow$。

因此 $\mathcal{B}_\uparrow$ 为 X 上的一个滤子。

注 此时称 $\mathcal{B}_\uparrow$ 为包含 $\mathcal{B}$ 的最小滤子，或者说 $\mathcal{B}$ 生成滤子 $\mathcal{B}_\uparrow$。

5.2 正则空间与正规空间

定义 5.10 (正则空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为正则空间，若对任意 $x \in X$ 和任意闭集 $E \subseteq X$，若 $x \notin E$，则存在开集 U, V 使得

$$x \in U, \quad E \subseteq V \quad \text{且} \quad U \cap V = \varnothing. \tag{5.15}$$

命题 5.8

正则 $+T_1 \Rightarrow T_2$，即：若 X 为正则空间且为 T_1 空间，则 X 为 T_2 空间。

证明 设 X 为正则且 T_1 的空间，$x, y \in X$ 且 $x \neq y$。

由于 X 为 T_1 空间，$\{y\}$ 为闭集。因为 $x \notin \{y\}$，由正则性，存在开集 U, V 使得

$$x \in U, \quad \{y\} \subseteq V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \varnothing. \tag{5.16}$$

因此 $x \in U$，$y \in V$，且 $U \cap V = \varnothing$，故 X 为 T_2 空间。

定义 5.11 (T_3 空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为 T_3 空间，若 X 既是正则空间又是 T_1 空间。

注 由命题 5.8，$T_3 \Rightarrow T_2$。因此分离公理的层次为：$T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$。

命题 5.9

X 为正则空间当且仅当对任意 $x \in X$，对任意 $V \in \mathcal{N}(x)$，存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$。

证明 ($\Rightarrow$)：设 X 为正则空间，$x \in X$，$V \in \mathcal{N}(x)$。

不妨设 V 为开集（否则取 V 的开邻域）。令 $E = V^c$，则 E 为闭集且 $x \notin E$。
由正则性，存在开集 U, W 使得 $x \in U$，$E \subseteq W$，且 $U \cap W = \varnothing$。
因为 $U \cap W = \varnothing$，所以 $U \subseteq W^c$。因此 $\overline{U} \subseteq \overline{W^c}$。
又因为 W 为开集，所以 W^c 为闭集，故 $\overline{W^c} = W^c$。
因为 $E \subseteq W$，所以 $W^c \subseteq E^c = V$。
综上，$x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$。
($\Leftarrow$)：设条件成立，即对任意 $x \in X$ 和 $V \in \mathcal{N}(x)$，存在 $U \in \mathcal{N}(x)$ 使得 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$。
设 $x \in X$，E 为闭集且 $x \notin E$。则 $V = E^c$ 为开集且 $x \in V$。
由条件，存在开邻域 U 使得 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V = E^c$。
令 $W = (\overline{U})^c$，则 W 为开集。
因为 $\overline{U} \subseteq E^c$，所以 $E \subseteq (\overline{U})^c = W$。
又因为 $U \cap W = U \cap (\overline{U})^c = \varnothing$。
因此 $x \in U$，$E \subseteq W$，且 $U \cap W = \varnothing$，故 X 为正则空间。

定义 5.12 (正规空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为正规空间，若对任意 A, B 为 X 中不相交的闭集，即 $A \cap B = \varnothing$，存在 U, V 为 X 中不相交的开集，使得

$$A \subseteq U \quad \text{且} \quad B \subseteq V. \tag{5.17}$$

♣

命题 5.10

X 为正规空间当且仅当对任意闭集 $A \subseteq X$，对任意开集 $V \supseteq A$，存在开集 U 使得 $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$。

♠

证明 ($\Rightarrow$)：设 X 为正规空间，A 为闭集，V 为开集且 $A \subseteq V$。
令 $B = V^c$，则 B 为闭集，且 $A \cap B = \varnothing$。
由正规性，存在开集 U, W 使得 $A \subseteq U$，$B \subseteq W$，且 $U \cap W = \varnothing$。
因为 $U \cap W = \varnothing$，所以 $U \subseteq W^c$。因此 $\overline{U} \subseteq \overline{W^c}$。
又因为 W 为开集，所以 W^c 为闭集，故 $\overline{W^c} = W^c$。
因为 $B \subseteq W$，所以 $W^c \subseteq B^c = V$。
综上，$A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq W^c \subseteq V$。
($\Leftarrow$)：设条件成立，即对任意闭集 A 和开集 $V \supseteq A$，存在开集 U 使得 $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$。
设 A, B 为不相交的闭集，即 $A \cap B = \varnothing$。则 $V = B^c$ 为开集且 $A \subseteq V$。
由条件，存在开集 U 使得 $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V = B^c$。
令 $W = (\overline{U})^c$，则 W 为开集。
因为 $\overline{U} \subseteq B^c$，所以 $B \subseteq (\overline{U})^c = W$。
又因为 $U \cap W = U \cap (\overline{U})^c = \varnothing$。
因此 $A \subseteq U$，$B \subseteq W$，且 $U \cap W = \varnothing$，故 X 为正规空间。

定义 5.13 (T_4 空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为 T_4 空间，若 X 既是正规空间又是 T_1 空间。

♣

命题 5.11

正规 $+T_1 \Rightarrow T_3$，即：若 X 为正规空间且为 T_1 空间，则 X 为正则空间。

♠

证明 设 X 为正规且 T_1 的空间，$x \in X$，E 为闭集且 $x \notin E$。
由于 X 为 T_1 空间，$\{x\}$ 为闭集。因为 $\{x\} \cap E = \varnothing$，由正规性，存在开集 U, V 使得

$$\{x\} \subseteq U, \quad E \subseteq V, \quad \text{且} \quad U \cap V = \varnothing. \tag{5.18}$$

因此 $x \in U$，$E \subseteq V$，且 $U \cap V = \varnothing$，故 X 为正则空间。
由定义，X 也是 T_1 空间，因此 X 为 T_3 空间。

第 6 章 紧致性

6.1 紧空间

定义 6.1 (紧空间)
设 X 为拓扑空间，称 X 为紧空间，若对任意 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖（即 $\mathcal{U}$ 为开集族且 $\bigcup\mathcal{U} = X$），存在 $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ 使得 $\mathcal{V}$ 为 X 的覆盖且 $\mathcal{V}$ 为有限集（即存在有限子覆盖）。 ♣

定义 6.2 (Lindelöff 空间)
设 X 为拓扑空间，称 X 为 Lindelöff 空间，若对任意开覆盖，存在可数子覆盖。 ♣

注 Lindelöff 空间有时也称为完全可数紧空间。其定义等价于：任意开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 都存在可数子集 $\{U_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{\alpha_n} = X$。

定义 6.3 (可数紧空间)
设 (X,τ) 为拓扑空间，称 (X,τ) 为可数紧空间，若对任意可数开覆盖，存在有限子覆盖（即 CA_2）。 ♣

定义 6.4 (序列紧空间)
设 X 为拓扑空间，称 X 为序列紧空间，若 X 中的每个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都有收敛子序列。 ♣

命题 6.1
$\mathrm{CA}_2 \Rightarrow$ Lindelöff 空间，即可数紧空间必为 Lindelöff 空间。 ♠

证明 设 X 为可数紧空间，$\mathcal{U}$ 为 X 的任意开覆盖。
由已知，X 为 CA_2 空间，即 X 为第二可数空间，存在可数拓扑基 $\mathcal{B}$。
由命题 8.3，存在 $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\overline{\mathcal{B}}$ 覆盖 X 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 $\mathcal{U}$。
因为 $\mathcal{B}$ 可数，所以 $\overline{\mathcal{B}}$ 也可数。
由引理 8.1，由于 $\overline{\mathcal{B}}$ 可数且加细 $\mathcal{U}$，存在 $\mathcal{U}$ 的可数子族覆盖 X。
因此 X 为 Lindelöff 空间。

命题 6.2
$\mathrm{CA}_2 \Rightarrow$ 可分，即第二可数空间必为可分空间。 ♠

证明 设 X 为第二可数空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的可数拓扑基，且 $\phi \neq \mathcal{B}$（即 $\mathcal{B}$ 非空）。
对每个 $B \in \mathcal{B}$，取 $\alpha_B \in B$。
令 $D = \{\alpha_B : B \in \mathcal{B}\}$。
则 D 为可数集（可数集 $\mathcal{B}$ 的像）。
下证 $\overline{D} = X$。
对任意 $x \in X$ 和 x 的任意开邻域 U，由于 $\mathcal{B}$ 为拓扑基，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B \subseteq U$。
因为 $\alpha_B \in B \subseteq U$，所以 $\alpha_B \in U \cap D$，即 $U \cap D \neq \varnothing$。
因此 $x \in \overline{D}$。
由 x 的任意性，$\overline{D} = X$。
故 X 为可分空间。

第 7 章　完全正则空间与 Urysohn 引理

7.1　完全正则空间

定义 7.1 (完全正则空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为完全正则空间，若对任意 $x \in X$ 和闭集 $F \subseteq X$ 且 $x \notin F$，存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(F) \subseteq \{1\}$。

命题 7.1

完全正则的 $\Rightarrow$ 正则，即：若 X 为完全正则空间，则 X 为正则空间。

证明 设 $x \in X$，F 为闭集且 $x \notin F$。

由完全正则性，存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(F) \subseteq \{1\}$。

令

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right). \tag{7.1}$$

因为 f 连续，$\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 在 $[0,1]$ 中为开集，故 U, V 为开集。

因为 $f(x) = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$，所以 $x \in U$。

因为 $f(F) \subseteq \{1\} \subseteq \left(\frac{1}{2}, 1\right]$，所以 $F \subseteq V$。

因为 $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \varnothing$，所以 $U \cap V = \varnothing$。

因此 X 为正则空间。

定义 7.2 ($T_{3\frac{1}{2}}$ 空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间，若 X 既是完全正则空间又是 T_1 空间。

定义 7.3

设 X 为拓扑空间，称 X 为完全正规空间，若对任意 A, B 为不相交闭集，存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$，则称 X 满足 Urysohn 可分离性。

命题 7.2

若 X 满足 Urysohn 可分离性，则 X 正规。

证明 设 A, B 为不相交闭集。

由 Urysohn 可分离性，存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$。

令

$$U = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \quad V = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right). \tag{7.2}$$

因为 f 连续，$\left[0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 在 $[0,1]$ 中为开集，故 U, V 为开集。

因为 $f(A) \subseteq \{0\} \subseteq \left[0, \frac{1}{2}\right)$，所以 $A \subseteq U$。

因为 $f(B) \subseteq \{1\} \subseteq \left(\frac{1}{2}, 1\right]$，所以 $B \subseteq V$。

因为 $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right] = \varnothing$，所以 $U \cap V = \varnothing$。

因此 X 为完全正则空间。

7.2 Urysohn 引理

引理 7.1 (Urysohn 引理的构造)

设 $\Lambda \to [0,1]$ 为有序对等，且 $\lambda \in \Lambda$。设 X 为拓扑空间，$(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 中一族开集满足：对任意 $\alpha,\beta \in \Lambda$，若 $\alpha < \beta$，则 $U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta$，且 $U_1 = X$。则定义 $f : X \to [0,1]$ $\forall x$，

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\} \tag{7.3}$$

为连续函数。

证明 设 $c \in [0,1]$，需证明 $f^{-1}([0,c))$ 与 $f^{-1}((c,1])$ 均为 X 中开集。

证明 $f^{-1}([0,c))$ 为开集：

$$\{x : f(x) < c\} = \{x : \exists\alpha \in \Lambda \text{ 且} \alpha < c \text{ 使得} x \in U_\alpha\} \tag{7.4}$$

$$= \bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda \\ \alpha<c}} U_\alpha \tag{7.5}$$

这是开集的并，故为开集。

证明 $f^{-1}((c,1])$ 为开集：

对于 $\inf > c$，即 $f(x) > c$，则对任意 $\alpha < c$ 均有 $x \notin U_\alpha$。

$$\{x : f(x) > c\} = \bigcup_{\substack{\alpha\in\Lambda \\ c<\alpha}} \overline{U_\alpha}^c \tag{7.6}$$

通过如下推理：若 $f(x) > c$，则 $\inf\{\alpha : x \in U_\alpha\} > c$，因此 $\exists\alpha \in \Lambda$ 且 $c < \alpha < f(x)$ 使得 $x \notin U_\alpha$。由于 $\overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta$ 对任意 $\beta > \alpha$，可知 $x \notin \overline{U_\alpha}$，即 $x \in \overline{U_\alpha}^c$。

反之，若 $x \in \overline{U_\alpha}^c$ 对某 $\alpha > c$，则 $x \notin \overline{U_\alpha}$，由 $U_\gamma \subseteq \overline{U_\gamma} \subseteq U_\alpha$ 对 $\gamma < \alpha$，可知 $\forall\gamma < \alpha$ 有 $x \notin U_\gamma$，因此 $\inf\{\beta : x \in U_\beta\} \geq \alpha > c$，即 $f(x) > c$。

因此 $\{x : f(x) > c\}$ 为开集的并，故为开集。

综上，f 为连续函数。

定理 7.1 (Urysohn 引理)

设 X 为正规空间，A, B 为 X 中不相交闭集。则存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$。

证明 设 A, B 为不相交闭集，即 $A \cap B = \varnothing$。

由正规性，存在开集 $U_{\frac{1}{2}}$ 使得

$$A \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c. \tag{7.7}$$

令 $\Lambda = \left\{\frac{m}{2^n} : n, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq 2^n\right\}$ 为 $[0,1]$ 中的二进有理数。

通过归纳法，对所有 $\alpha \in \Lambda \cap [0,1)$，构造开集 U_α 使得：对任意 $\alpha,\beta \in \Lambda$ 且 $\alpha < \beta$，有

$$A \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_\beta. \tag{7.8}$$

具体构造如下：假设对所有分母为 2^n 的 $\alpha \in \Lambda$ 已构造 U_α。对分母为 2^{n+1} 的 $\alpha = \frac{2k+1}{2^{n+1}}$，由正规性，存在开集 U_α 使得

$$\overline{U_{\frac{k}{2^n}}} \subseteq U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq U_{\frac{k+1}{2^n}}. \tag{7.9}$$

令 $U_1 = X$。则 $(U_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 满足引理 7.1 的条件。

定义 $f : X \to [0,1]$ 为

$$f(x) = \inf\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}. \tag{7.10}$$

由引理 7.1，f 为连续函数。

对 $x \in B$，因为 $\overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq B^c$，所以 $x \notin \overline{U_{\frac{1}{2}}}$，因此对所有 $\alpha \in \Lambda \cap [0,1)$，有 $x \notin U_\alpha$（由嵌套性质）。故 $f(x) = 1$。

对 $x \in A$，因为 $A \subseteq U_\alpha$ 对所有 $\alpha \in \Lambda \cap (0,1]$，所以 $f(x) = 0$。

因此 $f(A) \subseteq \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$。

推论 7.1

$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$，即：若 X 为 T_4 空间，则 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间。

证明 由 T_4 空间的定义，X 为正规空间且为 T_1 空间。

设 $x \in X$，B 为闭集且 $x \notin B$。

由 T_1 性质，单点集 $\{x\}$ 为闭集。

因为 $\{x\} \cap B = \varnothing$，由 Urysohn 引理（定理 7.1），存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(x) = 0$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$。

因此 X 为完全正则空间。

结合 X 为 T_1 空间，故 X 为 $T_{3\frac{1}{2}}$ 空间。

推论 7.2

正则 + 正规 $\Rightarrow$ 完全正则，即：若 X 既是正则空间又是正规空间，则 X 为完全正则空间。

证明 设 $x \in X$，B 为闭集且 $x \notin B$。

由正则性，存在开集 U, V 使得 $x \in U$，$B \subseteq V$，且 $U \cap V = \varnothing$。

因此 $x \in U \subseteq V^c$，即 $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V^c = B^c$（这里 $\overline{U} \subseteq V^c$ 因为 $U \cap V = \varnothing$）。

由于 $\{x\}$ 和 B 为不相交闭集（$\{x\} \subseteq \overline{U}$ 且 $\overline{U} \subseteq B^c$），由 Urysohn 引理（定理 7.1）和正规性，存在连续函数 $f : X \to [0,1]$ 使得 $f(\{x\}) = \{0\}$ 且 $f(B) \subseteq \{1\}$。

因此 X 为完全正则空间。

第 8 章 可分性与可数性公理

8.1 可分空间与稠密性

定义 8.1 (稠密)

设 X 为拓扑空间，$D \subseteq X$。称 D 在 X 中稠密，若 $\overline{D} = X$。

定义 8.2 (可分空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为可分空间，若 X 中存在可数稠密子集，即存在可数集 $D \subseteq X$ 使得 $\overline{D} = X$。

例题 8.1 以下是可分空间的例子：

1. $\mathbb{R}^n$ 是可分的，令 $D = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}\}$，则 D 可数且 $\overline{D} = \mathbb{R}^n$。
2. 可分空间的可分子空间也是可分的。

8.2 Lindelöff 空间与正规性

命题 8.1

正则 + Lindelöff $\Rightarrow$ 正规，即：若 X 既是正则空间又是 Lindelöff 空间，则 X 为正规空间。

证明 设 A, B 为不相交闭集。

对每个 $a \in A$，由正则性，存在开邻域 U_a 使得 $a \in U_a$ 且 $\overline{U_a} \cap B = \varnothing$。

对每个 $b \in B$，由正则性，存在开邻域 V_b 使得 $b \in V_b$ 且 $\overline{V_b} \cap A = \varnothing$。

由于 A, B 为闭集且 X 为 Lindelöff 空间，由命题 8.2，存在可数序列 $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 A 的开覆盖，满足对所有 n，有 $\overline{U_n} \cap B = \varnothing$。

类似地，存在可数序列 $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ 为 B 的开覆盖，满足对所有 n，有 $\overline{V_n} \cap A = \varnothing$。

定义新的开集序列：

$$U_n^* = U_n \setminus \left(\overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \cdots \cup \overline{V_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.1}$$

$$V_n^* = V_n \setminus \left(\overline{U_1} \cup \overline{U_2} \cup \cdots \cup \overline{U_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.2}$$

则 U_n^* 和 V_n^* 均为开集（开集减去有限个闭集的并）。

令

$$U^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n^*, \quad V^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n^* \tag{8.3}$$

则 U^*, V^* 为开集。

证明 $A \subseteq U^*$：

对任意 $a \in A$，存在 n 使得 $a \in U_n$。由于 $\overline{V_k} \cap A = \varnothing$ 对所有 k，所以 $a \notin \overline{V_k}$ 对所有 $k \leq n$。因此 $a \in U_n^* \subseteq U^*$。

证明 $B \subseteq V^*$：

类似地，对任意 $b \in B$，存在 n 使得 $b \in V_n$，且 $b \notin \overline{U_k}$ 对所有 $k \leq n$，因此 $b \in V_n^* \subseteq V^*$。

证明 $U^* \cap V^* = \varnothing$：

对任意 $n, m \in \mathbb{N}$，不失一般性设 $n \leq m$。则

$$U_n^* \cap V_m^* = \left(U_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V_k}\right) \cap \left(V_m \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_k}\right) \subseteq U_n \cap (\overline{U_n})^c = \varnothing \tag{8.4}$$

因为 $n \le m$，所以 $\overline{U_n} \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \overline{U_k}$，从而 $V_m^* \subseteq (\overline{U_n})^c$。

因此 $U^* \cap V^* = \varnothing$。

故 X 为正规空间。

命题 8.2

若 X 为 Lindelöff 空间，A 为 X 中闭集，则对 A 的任意开覆盖 $\mathcal{U}$（即由 X 中开集组成且覆盖 A），存在 $\mathcal{U}$ 的可数子覆盖覆盖 A。

证明 设 X 为 Lindelöff 空间，A 为闭集，$\mathcal{U}$ 为 A 的开覆盖，即 $\bigcup \mathcal{U} \supseteq A$。

考虑 X 的开覆盖 $\mathcal{U} \cup \{A^c\}$。

由 Lindelöff 性质，存在可数子覆盖覆盖 X。

若 A^c 在该子覆盖中，则去掉 A^c 后，剩余的可数个 $\mathcal{U}$ 中的开集仍覆盖 A。

若 A^c 不在该子覆盖中，则该子覆盖本身就是 $\mathcal{U}$ 的可数子覆盖，覆盖 X，因此也覆盖 A。

综上，存在 $\mathcal{U}$ 的可数子覆盖覆盖 A。

8.3 第二可数空间

定义 8.3 (第二可数空间)

设 X 为拓扑空间，称 X 为第二可数空间（即 CA_2 空间），若 X 存在可数拓扑基。

定义 8.4 (加细)

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$。称 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{A}$ 的加细，若对任意 $A \in \mathcal{A}$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $A \subseteq B$。

命题 8.3

若 $\mathcal{B}$ 为 X 的拓扑基，$\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖，即 $\bigcup \mathcal{U} = X$，则存在 $\overline{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = X$，且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 $\mathcal{U}$。

引理 8.1

设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 为 X 的覆盖（不要求是拓扑基），且 $\mathcal{A}$ 加细 $\mathcal{B}$。若 $\mathcal{A}$ 可数，则存在可数的 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{B}'$ 覆盖 X。

证明 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 均为 X 的覆盖，$\mathcal{A}$ 加细 $\mathcal{B}$，且 $\mathcal{A}$ 可数。

由加细的定义，对每个 $A \in \mathcal{A}$，存在 $B_A \in \mathcal{B}$ 使得 $A \subseteq B_A$。

令 $\mathcal{B}' = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$。

则 $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$。

因为 $\mathcal{A}$ 可数，所以 $\mathcal{B}' = \{B_A : A \in \mathcal{A}\}$ 也是可数的（可数集的像）。

且

$$\bigcup \mathcal{B}' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B_A \supseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X \tag{8.5}$$

因此 $\mathcal{B}'$ 是 $\mathcal{B}$ 的可数子族且覆盖 X。

8.4 可度量空间

定义 8.5 (可度量空间)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，称 X 为可度量空间。若满足：∃ $d:X\times X\to[0,+\infty)$（伪）度量，使得：

$$\mathcal{T}_d=\mathcal{T} \tag{8.6}$$

性质 若 X 为一个可度量空间，则以下等价

1. X 为 CA_2 的。
2. X 为可分空间。
3. X 为 Lindelöff 空间。

证明 1⇒2：设 $\mathcal{B}=\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X 的可数拓扑基（定义 8.3）。对每个非空 B_n 取一点 $x_n\in B_n$，令 $D=\{x_n: B_n\neq\varnothing\}$，则 D 可数。任取非空开集 U，存在基元 $B_n\subset U$，故 $x_n\in D\cap U\neq\varnothing$，从而 $\overline{D}=X$（定义 8.2），即 X 可分。

1⇒3：令 $\mathcal{U}$ 为 X 的任一开覆盖。由命题 8.3，存在 $\overline{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ 使得 $\bigcup\overline{\mathcal{B}}=X$ 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 $\mathcal{U}$。因 $\mathcal{B}$ 可数，$\overline{\mathcal{B}}$ 亦可数。由引理 8.1，存在 $\mathcal{U}$ 的可数子族覆盖 X，故 X 为 Lindelöff 空间。

命题 8.4 (基的等价刻画)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$。则以下等价：

1. $\mathcal{B}$ 是 $(X,\mathcal{T})$ 的拓扑基；
2. 对任意 $U\in\mathcal{T}$ 与任意 $x\in U$，存在 $B\in\mathcal{B}$ 使得 $x\in B\subset U$。

证明 (1)⇒(2)：设 $U\in\mathcal{T}$。由基的定义，存在 $C\subset\mathcal{B}$ 使得 $U=\bigcup_{C\in C}C$。取 $x\in U$，则存在 $C\in C$ 使 $x\in C$，且 $C\subset U$，令 $B=C$ 即得。

(2)⇒(1)：设 $U\in\mathcal{T}$，令 $C=\{B\in\mathcal{B}: B\subset U\}$。一方面 $\bigcup C\subset U$；另一方面，任意 $x\in U$，由 (2) 存在 $B\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B\subset U$，故 $x\in\bigcup C$。于是 $U\subset\bigcup C$，从而 $U=\bigcup C$。

证明 (补充：2⇒1 与 3⇒1，度量空间情形)

2⇒1：设 (X,d) 可分，取可数稠密集 D。对 $x\in D$ 与 $n\in\mathbb{N}^*$，记 $B_{x,n}=B(x,1/n)$，并令

$$\mathcal{B}=\{B_{x,n}:\ x\in D,\ n\in\mathbb{N}^*\}.$$

则 $\mathcal{B}$ 为可数族。任取开集 U 与 $y\in U$，取 $\varepsilon>0$ 使 $B(y,\varepsilon)\subset U$。取 n 使 $2/n<\varepsilon$，由 D 稠密可取 $x\in D\cap B(y,1/n)$。则 $y\in B(x,1/n)$ 且对任意 $z\in B(x,1/n)$ 有 $d(z,y)\le d(z,x)+d(x,y)<\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=\frac{2}{n}<\varepsilon$，故 $B(x,1/n)\subset B(y,\varepsilon)\subset U$。由命题 8.4 知 $\mathcal{B}$ 为可数基，故 X 为 CA_2。

3⇒1：设 (X,d) 为 Lindelöff。对每个 $n\in\mathbb{N}^*$，考虑半径 $1/n$ 的开球族

$$\mathcal{U}_n=\{B(x,1/n):\ x\in X\},$$

它覆盖 X。由 Lindelöff 性质，存在可数子族 $\mathcal{B}_n\subset\mathcal{U}_n$ 覆盖 X。令 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\ge1}\mathcal{B}_n$，则 $\mathcal{B}$ 可数。任取开集 U 与 $y\in U$，取 $\varepsilon>0$ 使 $B(y,\varepsilon)\subset U$，并取 n 使 $2/n<\varepsilon$。因 $\mathcal{B}_n$ 覆盖 X，存在 $B(x,1/n)\in\mathcal{B}_n$ 使 $y\in B(x,1/n)$。同理得 $B(x,1/n)\subset B(y,\varepsilon)\subset U$。故由命题 8.4，$\mathcal{B}$ 为可数基，X 为 CA_2。

命题 8.5 (紧的基刻画)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一组拓扑基。则以下等价：

1. X 为紧空间；
2. 对任意子族 $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$，若 $\bigcup\mathcal{U}=X$，则存在有限子族 $\mathcal{U}_0\subset\mathcal{U}$ 使得 $\bigcup\mathcal{U}_0=X$。

证明 (1)⇒(2)：显然。由基元素构成的覆盖亦为开覆盖，紧性蕴含存在有限子覆盖。

(2)⇒(1)：任取开覆盖 $\mathcal{V}$。由命题 8.3，存在 $\overline{\mathcal{B}}\subset\mathcal{B}$ 使得 $\bigcup\overline{\mathcal{B}}=X$ 且 $\overline{\mathcal{B}}$ 加细 $\mathcal{V}$。由 (2) 可取有限子族 $\overline{\mathcal{B}}_0\subset\overline{\mathcal{B}}$ 覆盖 X。对每个 $B\in\overline{\mathcal{B}}_0$，取相应的 $V_B\in\mathcal{V}$ 使得 $B\subset V_B$，则 $\{V_B: B\in\overline{\mathcal{B}}_0\}$ 为 $\mathcal{V}$ 的有限子覆盖，故 X 紧。

命题 8.6 (紧的等价刻画：闭集的有限交性质)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间。以下命题等价：

1. X 为紧空间；
2. 对任意闭集族 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)$，若 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质（即任意有限子族的交非空），则

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F\neq\varnothing.$$

证明 (1)⇒(2)：设 $\mathcal{F}$ 为闭集族且具有有限交性质。若反设 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F=\varnothing$，则其补开的族 $\mathcal{U}:=\{F^c: F\in\mathcal{F}\}$ 为 X 的开覆盖。由紧性，存在有限子覆盖 $\{F_i^c\}_{i=1}^n$，则

$$X=\bigcup_{i=1}^n F_i^c \quad\Longleftrightarrow\quad \bigcap_{i=1}^n F_i=\varnothing,$$

这与 $\mathcal{F}$ 的有限交性质矛盾，故应有 $\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F\neq\varnothing$。

(2)⇒(1)：设 $\mathcal{U}$ 为 X 的开覆盖。令闭集族 $\mathcal{F}=\{X\setminus U: U\in\mathcal{U}\}$，则 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质且若反设 $\mathcal{U}$ 无有限子覆盖，则对任意有限子集 $\{U_1,\ldots,U_n\}\subset\mathcal{U}$，有

$$U_1\cup\cdots\cup U_n\neq X \quad\Longleftrightarrow\quad (X\setminus U_1)\cap\cdots\cap(X\setminus U_n)\neq\varnothing,$$

因而 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质。由 (2) 得

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F\neq\varnothing \quad\Longleftrightarrow\quad X\setminus\bigcup\mathcal{U}\neq\varnothing,$$

与 $\mathcal{U}$ 为覆盖矛盾。故 $\mathcal{U}$ 必有有限子覆盖，X 紧。

定义 8.6 (滤子与滤子基的接触点)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间。

1. 若 $\mathcal{F}$ 为 X 上的滤子，称 $x\in X$ 为 $\mathcal{F}$ 的接触点，若 $\forall A\in\mathcal{F}$ 均有 $x\in\overline{A}$。等价地 $x\in\bigcap_{A\in\mathcal{F}}\overline{A}$。
2. 若 $\mathcal{B}$ 为 X 上的滤子基，称 $x\in X$ 为 $\mathcal{B}$ 的接触点，若 $\forall B\in\mathcal{B}$ 均有 $x\in\overline{B}$。等价地 $x\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}$。

命题 8.7 (紧的等价刻画：滤子/滤子基的接触点)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，则以下等价：

1. X 为紧空间；
2. X 中任意滤子基都有接触点；
3. X 中任意滤子都有接触点。

证明 (2)⇔(3)：若 $\mathcal{B}$ 为滤子基，记其生成的滤子为 $\mathcal{B}_\uparrow$。则对任意 x，

$$x\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B} \iff \forall F\in\mathcal{B}_\uparrow\ \exists B\in\mathcal{B}\ (B\subset F\ \&\ x\in\overline{B}\subset\overline{F}) \iff x\in\bigcap_{F\in\mathcal{B}_\uparrow}\overline{F}.$$

故两者的接触点集合一致。

(1)⇒(2)：设 X 紧且 $\mathcal{B}$ 为滤子基。闭集族 $\{\overline{B}: B\in\mathcal{B}\}$ 具有限交性质；由命题 8.6 得 $\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}\neq\varnothing$，取其中一点即为接触点。

(2)⇒(1)：反证。若 X 不紧，取无有限子覆盖的开覆盖 $\mathcal{U}$，令闭集族 $\mathcal{F}=\{X\setminus U: U\in\mathcal{U}\}$，则 $\mathcal{F}$ 具有有限交性质且

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F=\varnothing.$$

定义由 $\mathcal{F}$ 的有限交组成的族

$$\mathcal{B}:=\left\{\bigcap_{i=1}^n F_i:\ F_i\in\mathcal{F},\ n\in\mathbb{N}^*\right\},$$

则 $\mathcal{B}$ 为滤子基，且每个 $B\in\mathcal{B}$ 为闭集。由 (2) 存在接触点 $x\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{B}=\bigcap_{B\in\mathcal{B}}B=\bigcap_{F\in\mathcal{F}}F=\varnothing$，矛盾。故 X 紧。

定义 8.7 (超滤子)

设 X 为非空集合，$\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 为 X 上的一个滤子。称 $\mathcal{U}$ 为 X 上的一个超滤子（极大滤子），若满足：对任意 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$，只要 $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{A}$，则 $\mathcal{A}$ 不是 X 上的滤子。

命题 8.8 (超滤子引理)

任意 X 上的滤子 $\mathcal{F}$ 均可扩张为一个超滤子 $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$。

证明 令

$$C = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ 是 } X \text{ 上的滤子且} \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\},$$

以包含关系为序。任一链 $\{\mathcal{G}_i\}$ 的并 $\mathcal{G}_* = \bigcup_i \mathcal{G}_i$ 仍为滤子：$\varnothing \notin \mathcal{G}_*$；对有限交与向上封闭性逐一验证可得，故每条链有上界。由 Zorn 引理，存在极大元 $\mathcal{U}$，即所求超滤子。

命题 8.9 (超滤子的等价性质)

设 $\mathcal{U}$ 为 X 上的滤子。则以下命题等价：

1. $\mathcal{U}$ 是 X 上的超滤子（极大滤子）；
2. 对任意 $A \subseteq X$，有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^c \in \mathcal{U}$；
3. 对任意 $A, B \subseteq X$，若 $A \cup B \in \mathcal{U}$，则 $A \in \mathcal{U}$ 或 $B \in \mathcal{U}$；
4. 对任意 $U \subseteq X$，若对所有 $F \in \mathcal{U}$ 有 $U \cap F \neq \varnothing$，则 $U \in \mathcal{U}$。

证明 (1)⇒(2)：对任意 $A \subseteq X$，若 $A \notin \mathcal{U}$，欲证 $A^c \in \mathcal{U}$。由 (1) 超滤子定义，$\mathcal{U} \cup \{A\}$ 不能生成滤子（否则 $\mathcal{U}$ 不极大），故不具有限交性质，即存在 $F \in \mathcal{U}$ 使

$$A \cap F = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad F \subseteq A^c.$$

由滤子向上封闭性得 $A^c \in \mathcal{U}$。故对任意 A，必有 $A \in \mathcal{U}$ 或 $A^c \in \mathcal{U}$。

(2)⇒(3)：设 $A, B \subseteq X$ 且 $A \cup B \in \mathcal{U}$。由 (2) 知 $A \in \mathcal{U}$ 或 $B \in \mathcal{U}$。反设 $A \notin \mathcal{U}$ 且 $B \notin \mathcal{U}$，则由 (2) 得 $A^c, B^c \in \mathcal{U}$，从而

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \in \mathcal{U}.$$

与 $A \cup B \in \mathcal{U}$ 及滤子不含 $\varnothing$ 矛盾。

(3)⇒(4)：设 $U \subseteq X$ 满足对任意 $F \in \mathcal{U}$ 均有 $U \cap F \neq \varnothing$。因 $\mathcal{U}$ 为滤子，$X \in \mathcal{U}$，而 $X = U \cup U^c$，由 (3) 得 $U \in \mathcal{U}$ 或 $U^c \in \mathcal{U}$。若 $U^c \in \mathcal{U}$，则 $U \cap U^c = \varnothing$，与假设矛盾，故 $U \in \mathcal{U}$。

(4)⇒(1)：反证。若 $\mathcal{U}$ 不是超滤子，则存在滤子 $\mathcal{U}'$ 满足 $\mathcal{U} \subsetneq \mathcal{U}'$。取 $U \in \mathcal{U}' \setminus \mathcal{U}$。对任意 $F \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$，因 $\mathcal{U}'$ 为滤子，有 $U \cap F \neq \varnothing$（否则 $\varnothing \in \mathcal{U}'$ 矛盾）。由 (4) 得 $U \in \mathcal{U}$，矛盾。故 $\mathcal{U}$ 为超滤子。

定义 8.8 (滤子的收敛)

设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间。称滤子 $\mathcal{F}$ 在 $x \in X$ 收敛，记为 $\mathcal{F} \to x$，若对任意 x 的邻域 U，有 $U \in \mathcal{F}$。

命题 8.10 (超滤子的接触点与收敛)

设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{U}$ 为 X 上的超滤子，$x \in X$。则以下等价：

1. x 为 $\mathcal{U}$ 的接触点；
2. $\mathcal{U} \to x$。

证明 (1)⇒(2)：设 x 为 $\mathcal{U}$ 的接触点。取 x 的任意邻域 U。由接触点定义，$\forall F \in \mathcal{U}$ 有 $U \cap F \neq \varnothing$。若 $U \notin \mathcal{U}$，因 $\mathcal{U}$ 为超滤子，必有 $U^c \in \mathcal{U}$，与 $U \cap U^c = \varnothing$ 矛盾，故 $U \in \mathcal{U}$。于是 $\mathcal{U} \to x$。

(2)⇒(1)：若 $\mathcal{U} \to x$，则 $\forall$ 邻域 $U \in \mathcal{U}$。任取 $F \in \mathcal{U}$，由滤子对有限交封闭，$U \cap F \in \mathcal{U}$，故 $U \cap F \neq \varnothing$。于是 $x \in \overline{F}$。因 $F \in \mathcal{U}$ 任意，得 $x \in \bigcap_{F \in \mathcal{U}} \overline{F}$，即 x 为 $\mathcal{U}$ 的接触点。

命题 8.11 (紧的等价刻画：极大滤子的接触点)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，则以下等价：

1. X 为紧空间；
2. X 中任意滤子基都有接触点；
3. X 中任意滤子都有接触点。
4. X 中任意极大滤子都有接触点。
5. X 中任意极大滤子收敛

证明 (3)⇒(4)：极大滤子本身是滤子，显然成立。

(4)⇔(5)：由命题 8.10，对任意极大滤子 $\mathcal{U}$ 与点 x，x 为 $\mathcal{U}$ 的接触点当且仅当 $\mathcal{U} \to x$。于是"任意极大滤子有接触点"当且仅当"任意极大滤子收敛"。

(4)⇒(3)：任取滤子 $\mathcal{F}$。由超滤子引理 8.8，存在极大滤子 $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$。由 (4) 取 x 使 x 为 $\mathcal{U}$ 的接触点。因 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$，对任意 $A \in \mathcal{F}$ 亦有 $x \in \overline{A}$，故 x 为 $\mathcal{F}$ 的接触点。

命题 8.12 (滤子收敛的邻域基刻画)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$x \in X$，令 $\mathcal{B}_x$ 为 x 的邻域基。对任意滤子 $\mathcal{F}$，有

$$\mathcal{F} \to x \iff \forall B \in \mathcal{B}_x,\ \exists F \in \mathcal{F} \text{ 使} F \subseteq B.$$

证明 (⇒) 设 $\mathcal{F} \to x$。任取 $B \in \mathcal{B}_x$，则 B 为 x 的邻域，故 $B \in \mathcal{F}$，取 $F = B$ 即得 $F \subseteq B$。

(⇐) 设对任意 $B \in \mathcal{B}_x$，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $F \subseteq B$。任取 x 的邻域 U，由邻域基性质，取 $B \in \mathcal{B}_x$ 使 $B \subseteq U$。于是存在 $F \in \mathcal{F}$ 满足 $F \subseteq B \subseteq U$。由滤子向上封闭性，$U \in \mathcal{F}$。故 $\mathcal{F} \to x$。

命题 8.13 (滤子收敛的邻域子基刻画)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$x \in X$。设 $\mathcal{S}$ 为 x 的邻域子基，即令

$$\mathcal{S}_x = \{U \in \mathcal{S} : x \in U\}, \qquad \mathcal{B}_x = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} U_i : n \in \mathbb{N}^*,\ U_i \in \mathcal{S}_x\right\} \cup \{X\},$$

则 $\mathcal{B}_x$ 为 x 的邻域基。对任意滤子 $\mathcal{F}$，有

$$\mathcal{F} \to x \iff \forall U \in \mathcal{S}\ (x \in U \Rightarrow \exists F \in \mathcal{F} \text{ 使} F \subseteq U).$$

证明 (⇒) 若 $\mathcal{F} \to x$，则每个 x 的邻域 U 都在 $\mathcal{F}$ 中，尤其对任意 $U \in \mathcal{S}_x$，有 $U \in \mathcal{F}$，取 $F = U$ 即得 $F \subseteq U$。

(⇐) 设对任意 $U \in \mathcal{S}_x$，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使 $F \subseteq U$。取 $\mathcal{B}_x$ 为由 $\mathcal{S}_x$ 的有限交与 $\{X\}$ 生成的邻域基。任取 $B \in \mathcal{B}_x$：

- 若 $B = X$，任取 $F \in \mathcal{F}$，则 $F \subseteq X = B$；
- 若 $B \neq X$，则 $B = U_1 \cap \cdots \cap U_n$（$n \geq 1$，$U_i \in \mathcal{S}_x$）。对每个 i 取 $F_i \in \mathcal{F}$ 使 $F_i \subseteq U_i$；
- 由滤子对有限交封闭，$F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$ 且 $F \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i = B$。

于是对任意 $B \in \mathcal{B}_x$，存在 $F \in \mathcal{F}$ 使 $F \subseteq B$。由命题 8.12 知 $\mathcal{F} \to x$。

命题 8.14 (紧的子基刻画（Alexander 子基定理）)

设 $\mathcal{S}$ 为 X 的子基。则 X 紧当且仅当：对任意 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$，若 $\mathcal{U}$ 覆盖 X，则存在有限子集 $\{U_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{U}$ 亦覆盖 X。

证明 (⇒) 显然：紧空间的任意开覆盖（特别是由子基元素组成的覆盖）都有有限子覆盖。

(⇐) 假设对任意子基覆盖都有有限子覆盖。取任意超滤子 $\mathcal{U}$ 于 X。若 $\mathcal{U}$ 不收敛，则对每个 $x \in X$，由命题 8.13，可取 $U_x \in \mathcal{S}$ 且 $x \in U_x$ 使 $U_x \notin \mathcal{U}$。由超滤子性质（命题 8.9 的 (2)）知 $U_x^c \in \mathcal{U}$。于是 $\{U_x : x \in X\} \subseteq \mathcal{S}$ 构成 X 的子基覆盖。由假设取有限多项 $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$ 覆盖 X，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}^c = \varnothing.$$

然而每个 $U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$，且超滤子对有限交封闭，故 $\bigcap_{i=1}^n U_{x_i}^c \in \mathcal{U}$，与滤子不含空集矛盾。故任意超滤子必收敛。由命题 8.11 中 (5) 与 (1) 的等价性，得 X 紧。

定义 8.9 (网)

设 Λ 为定向集，$x : \Lambda \to X$。称 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 中的网。♣

定义 8.10 (子网)

设 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 中的网。若存在定向集 Γ 与映射 $\theta : \Gamma \to \Lambda$，满足

1. θ 保序;
2. $\theta(\Gamma)$ 在 Λ 中无界，即对任意 $\alpha \in \Lambda$，存在 $\beta_0 \in \Gamma$，使得 $\beta \geq \beta_0 \Rightarrow \theta(\beta) \geq \alpha$，

则称 $(x_{\theta(\beta)})_{\beta\in\Gamma}$ 为 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 的子网。等价地，可记为 $x \circ \theta : \Gamma \to X$。♣

第 9 章 乘积与和

9.1 乘积拓扑与其子基

命题 9.1 (乘积拓扑的刻画)

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间族。记

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} : \forall\alpha,\ x_\alpha \in X_\alpha\}.$$

对每个 α 定义投影

$$p_\alpha : \prod_{\gamma\in\Lambda} X_\gamma \to X_\alpha, \qquad (x_\gamma)_{\gamma\in\Lambda} \mapsto x_\alpha.$$

令

$$\mathcal{S} \equiv \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{\, p_\alpha^{-1}(U) : U \subseteq X_\alpha \text{ 为开集}\,\}.$$

则由子基 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑 τ 使得每个投影 p_α 连续；且若 τ' 是 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上的拓扑并使所有 p_α 连续，则 $\tau \subseteq \tau'$。因此 τ 是使所有投影连续的最小拓扑（即乘积拓扑）。

证明 对任意 α 与 X_α 中开集 U，有 $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{S} \subseteq \tau$，故 p_α 连续。若 τ' 使所有 p_α 连续，则对每个开集 $U \subseteq X_\alpha$ 均有 $p_\alpha^{-1}(U) \in \tau'$，于是 $\mathcal{S} \subseteq \tau'$。由"由子基生成的最小拓扑"的定义知 $\tau \subseteq \tau'$。证毕。

注 对命题 9.1 中的子基 $\mathcal{S}$，其有限交族 $\mathcal{S}_{f\cap}$ 构成乘积拓扑的一个基。具体地，若取有限多指标 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 及开集 $U_i \subseteq X_{\alpha_i}$，则

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_n) = \prod_{\gamma\in\Lambda} V_\gamma,$$

其中 $V_{\alpha_i} = U_i$，而当 $\gamma \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 时取 $V_\gamma = X_\gamma$。因此"盒子"形集合

$$\left\{ \prod_{\gamma\in\Lambda} V_\gamma :\ V_\alpha \text{ 为开集仅在有限多}\alpha\text{，其余}V_\gamma = X_\gamma \right\}$$

是乘积拓扑的一个基。特别地，当 Λ 有限（如 $\{1, \dots, n\}$）时，基可写为

$$\{\, U_1 \times \cdots \times U_n :\ U_i \subseteq X_i \text{ 为开集}\,\}.$$

命题 9.2 (推论：乘积拓扑的子基)

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间族。则在 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上，集合族

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \{\, p_\alpha^{-1}(U) : U \subseteq X_\alpha \text{ 开}\,\}$$

是乘积拓扑的一个子基。

证明 由命题 9.1，乘积拓扑恰为包含上述集合族的最小拓扑，故该集合族为其子基。

命题 9.3 (推论：有限乘积的基)

设 $X_1, \dots, X_n$ 为拓扑空间，B_i 为 X_i 的一组基。则

$$\mathcal{B} = \{\, U_1 \times \cdots \times U_n :\ U_i \in B_i\ (i = 1, \dots, n)\,\}$$

为 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 的乘积拓扑的一组基。

证明 任取开盒 $V_1 \times \cdots \times V_n$ 与点 $(x_1, \dots, x_n)$。由 B_i 为基，存在 $U_i \in B_i$ 使 $x_i \in U_i \subseteq V_i$。则 $(x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n \subseteq V_1 \times \cdots \times V_n$。配合上文的"盒子基"描述可知该族满足基的判别条件，因而为一组基。

命题 9.4 (连续满射下 Lindelöff 性保持)

设 $f: X \to Y$ 连续且满射。若 X 为 Lindelöff 空间，则 Y 为 Lindelöff 空间。

证明 任取 Y 的开覆盖 $\mathcal{U}$。则其拉回族

$$f^{-1}(\mathcal{U}) = \{ f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \}$$

为 X 的开覆盖（连续性保证开性，满射保证覆盖）。由 X 的 Lindelöff 性，存在可数子族 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ 使 $\{f^{-1}(U_n)\}$ 覆盖 X。于是

$$Y = f(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(f^{-1}(U_n)) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

即 $\{U_n\}$ 为 $\mathcal{U}$ 的可数子覆盖，Y 为 Lindelöff。

定理 9.1 (Tychonoff 定理)

若每个 X_α 均为紧空间，则赋以乘积拓扑的笛卡尔积

$$\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$$

亦为紧空间。

证明 取任意超滤子 $\mathcal{F}$ 于 $\prod_\alpha X_\alpha$。对每个 α，考虑投影 $p_\alpha : \prod_\gamma X_\gamma \to X_\alpha$。则 $p_\alpha(\mathcal{F})$ 为 X_α 上的超滤子；由 X_α 的紧性（见命题 8.11 的等价刻画），存在点 $x_\alpha \in X_\alpha$ 使得

$$p_\alpha(\mathcal{F}) \to x_\alpha.$$

令 $x = (x_\gamma)_{\gamma\in\Lambda} \in \prod_\gamma X_\gamma$。

下证 $\mathcal{F} \to x$。由上文关于乘积拓扑“盒子基”的描述，只需证：对任意指标 α 与含 x_α 的开集 $U \subseteq X_\alpha$，有 $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}$。事实上，由 $p_\alpha(\mathcal{F}) \to x_\alpha$ 与滤子收敛的定义，存在 $E \in p_\alpha(\mathcal{F})$ 使 $E \subseteq U$；按像滤子的定义，$p_\alpha^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ 且 $p_\alpha^{-1}(E) \subseteq p_\alpha^{-1}(U)$，由滤子的向上封闭性得 $p_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{F}$。进而对任意有限族 $\{(\alpha_i, U_i)\}_{i=1}^n$（每个 U_i 为 x_{α_i} 的开邻域），由滤子对有限交封闭性，

$$\bigcap_{i=1}^n p_{\alpha_i}^{-1}(U_i) \in \mathcal{F}.$$

这些有限交构成 x 的一组基邻域，故 $\mathcal{F}$ 包含 x 的全部基邻域，从而 $\mathcal{F} \to x$。

因任意超滤子于 $\prod_\alpha X_\alpha$ 上皆收敛，依命题 8.11 的等价性知 $\prod_\alpha X_\alpha$ 紧。

定义 9.1 (子空间拓扑)

设 $(X, \mathcal{T})$ 为拓扑空间，$Y \subseteq X$。定义

$$\mathcal{T}|_Y \equiv \{ U \cap Y : U \in \mathcal{T} \}$$

为 Y 上的子空间拓扑。称 $(Y, \mathcal{T}|_Y)$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 的子空间。

命题 9.5 (度量子空间)

设 (X, d) 为度量空间，$Y \subseteq X$。记 $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}$ 为限制度量 $d|_{Y\times Y}$，则由 d 在 X 上诱导的拓扑 $\mathcal{T}_d$ 限制到 Y 上，与由限制度量 d_Y 在 Y 上诱导的拓扑 $\mathcal{T}_{d_Y}$ 相同，即

$$\mathcal{T}_d|_Y = \mathcal{T}_{d_Y}.$$

命题 9.6 (Lindelöff 子空间的刻画)

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。则下列条件等价：

1. Ω 在子空间拓扑 $\mathcal{T}|_\Omega$ 下为 Lindelöff 空间；

2. 对任意由 X 中开集组成的族 $\mathcal{U}$ 且 $\bigcup\mathcal{U}\supseteq\Omega$，存在可数子族 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{U}$ 使得 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}U_n\supseteq\Omega$。

证明 (1) $\Rightarrow$ (2)：设 Ω 为 Lindelöff 子空间，取 X 中开集族 $\mathcal{U}$ 覆盖 Ω。令

$$\mathcal{V}\equiv\{\,U\cap\Omega:\ U\in\mathcal{U}\,\}\subseteq\mathcal{T}|_{\Omega}.$$

则 $\mathcal{V}$ 为 Ω 的开覆盖（子空间拓扑意义下）。由 Ω 的 Lindelöff 性，存在可数子族 $\{U_n\cap\Omega\}_{n\in\mathbb{N}}$ 覆盖 Ω，从而 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{U}$ 为所需可数子覆盖。

(2) $\Rightarrow$ (1)：设条件 (2) 成立，取 Ω 的任意开覆盖 $\mathcal{V}\subseteq\mathcal{T}|_{\Omega}$。对每个 $V\in\mathcal{V}$，由子空间拓扑定义，存在 X 中开集 U_V 使 $V=U_V\cap\Omega$。令 $\mathcal{U}\equiv\{U_V:\ V\in\mathcal{V}\}$，则 $\mathcal{U}$ 为 X 中开集族且覆盖 Ω。由条件 (2)，存在可数子族 $\{U_{V_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 覆盖 Ω，从而 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{U_{V_n}\cap\Omega\}$ 为 $\mathcal{V}$ 的可数子覆盖。故 Ω 为 Lindelöff 子空间。

引理 9.1 (管状邻域引理)

设 X,Y 为拓扑空间，$\alpha\in X$，$K\subseteq Y$ 紧。若 $\Omega\subseteq X\times Y$ 为开集且 $\{\alpha\}\times K\subseteq\Omega$，则存在 α 的开邻域 $B\subseteq X$ 与 K 的开邻域 $U\subseteq Y$ 使得

$$\{\alpha\}\times K\subseteq B\times U\subseteq\Omega.$$

证明 对每个 $k\in K$，点 $(\alpha,k)\in\Omega$。由 Ω 的开性与乘积拓扑的基，存在 X 中开集 $B_k\ni\alpha$ 与 Y 中开集 $U_k\ni k$ 使 $B_k\times U_k\subseteq\Omega$。则 $\{U_k:k\in K\}$ 为 K 的开覆盖；由 K 的紧性，存在有限子覆盖 $\{U_{k_1},\dots,U_{k_n}\}$ 覆盖 K。令

$$B\equiv\bigcap_{i=1}^{n}B_{k_i},\qquad U\equiv\bigcup_{i=1}^{n}U_{k_i}.$$

则 B 为 α 的开邻域（有限交），U 为 K 的开邻域（包含 K）。对任意 $(\beta,y)\in B\times U$，存在 i 使 $y\in U_{k_i}$，且 $\beta\in B\subseteq B_{k_i}$，从而 $(\beta,y)\in B_{k_i}\times U_{k_i}\subseteq\Omega$。故 $\{\alpha\}\times K\subseteq B\times U\subseteq\Omega$。

命题 9.7 (基在子空间中的限制仍为基)

设 $(X,\mathcal{T})$ 为拓扑空间，$\mathcal{B}$ 为 X 的一组基，$Y\subseteq X$。则

$$\mathcal{B}|_Y\equiv\{\,B\cap Y:\ B\in\mathcal{B}\,\}$$

为 $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ 的一组基。

证明 任取 $\Omega\in\mathcal{T}|_Y$ 与 $y\in\Omega$。存在 $U\in\mathcal{T}$ 使 $\Omega=U\cap Y$ 且 $y\in U$。由 $\mathcal{B}$ 为 X 的基，存在 $B\in\mathcal{B}$ 使 $y\in B\subseteq U$。则 $y\in B\cap Y\subseteq U\cap Y=\Omega$，且 $B\cap Y\in\mathcal{B}|_Y$。由基判别定理知 $\mathcal{B}|_Y$ 为 $(Y,\mathcal{T}|_Y)$ 的基。

命题 9.8 (子空间的乘积等于乘积的子空间)

设 $(X,\mathcal{T})$ 与 $(Y,\mathcal{S})$ 为拓扑空间，$A\subseteq X$，$B\subseteq Y$。则在 $A\times B$ 上有

$$(\mathcal{T}|_A)\otimes(\mathcal{S}|_B)\ =\ (\mathcal{T}\otimes\mathcal{S})\big|_{A\times B}.$$

证明 记两边拓扑分别为 τ_1 与 τ_2。考察恒等映射 $\mathrm{id}_{A\times B}:(A\times B,\tau_1)\to(A\times B,\tau_2)$。

为证 id 连续，只需验证其对一个乘积基闭合：对任意 $U\in\mathcal{T}$，$V\in\mathcal{S}$，有

$$(U\cap A)\times(V\cap B)=(U\times V)\cap(A\times B),$$

右式为 τ_2 的基元（矩形与 $A\times B$ 的交），故 id 连续。

反向连续性同理：对 τ_2 的基元 $(U\times V)\cap(A\times B)$，其像即 $(U\cap A)\times(V\cap B)$，属 τ_1 的基元，故 id^{-1} 连续。由此 $\tau_1=\tau_2$。

引理 9.2 (乘积中的常值截面连续)

设拓扑空间 X,Y，取 $x_0\in X$，$y_0\in Y$。定义

$$\eta_{x_0}:Y\to X\times Y,\ y\mapsto(x_0,y),\qquad \xi_{y_0}:X\to X\times Y,\ x\mapsto(x,y_0).$$

则 η_{x_0} 与 ξ_{y_0} 均连续。

证明 对乘积基元 $U\times V$（$U\subset X,\ V\subset Y$ 开），有 $\eta_{x_0}^{-1}(U\times V)=\begin{cases}V, & x_0\in U,\\ \varnothing, & x_0\notin U,\end{cases}$ 与 $\xi_{y_0}^{-1}(U\times V)=\begin{cases}U, & y_0\in V,\\ \varnothing, & y_0\notin V.\end{cases}$ 皆为开集，故两映射连续。

推论 9.1 (联合连续蕴含偏连续)

若 $f:X\times Y\to Z$ 在 (x_0,y_0) 处连续，则 $y\mapsto f(x_0,y):Y\to Z$ 在 y_0 连续，且 $x\mapsto f(x,y_0):X\to Z$ 在 x_0 连续。

证明 由引理 9.2，η_{x_0},ξ_{y_0} 连续，故复合 $f\circ\eta_{x_0}$ 与 $f\circ\xi_{y_0}$ 连续，即得结论。

命题 9.9 (乘积的泛性质（坐标映射判别连续）)

设空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 与空间 Z。给定映射 $f_\alpha:Z\to X_\alpha$（$\forall\alpha$），则存在唯一映射

$$f:Z\to\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha,\qquad z\mapsto(f_\alpha(z))_{\alpha\in\Lambda},$$

满足 $p_\alpha\circ f=f_\alpha$。且 f 连续当且仅当每个 f_α 连续。

证明 若 g 亦满足 $p_\alpha\circ g=f_\alpha$，则 $p_\alpha(g(z))=p_\alpha(f(z))$ 对所有 α，故 $g(z)=f(z)$。

若 f 连续，则 $f_\alpha=p_\alpha\circ f$ 为连续。

反之，若每个 f_α 连续，对任意 α 与 X_α 中开集 U，有

$$f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U))=(p_\alpha\circ f)^{-1}(U)=f_\alpha^{-1}(U)$$

为 Z 中开集。乘积拓扑由子基 $\{p_\alpha^{-1}(U)\}$ 生成，故 f 连续。

注 上述命题中的坐标映射满足 $\forall\alpha$：$f_\alpha=p_\alpha\circ f$。

命题 9.10 (坐标连续推出乘积映射连续)

设空间族 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 与 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$。若对每个 α，映射 $f_\alpha:X_\alpha\to Y_\alpha$ 连续，定义

$$\prod_\alpha f_\alpha:\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\longrightarrow\prod_{\alpha\in\Lambda}Y_\alpha,\qquad(x_\alpha)_\alpha\mapsto(f_\alpha(x_\alpha))_\alpha,$$

则 $\prod_\alpha f_\alpha$ 连续。

证明 对任意 $\beta\in\Lambda$，有交换恒等式

$$p_\beta\circ\Big(\prod_\alpha f_\alpha\Big)=f_\beta\circ p_\beta.$$

右端为连续映射复合，故左端连续。由命题 9.9（坐标判别：g 连续 $\iff$ $p_\alpha\circ g$ 连续 $\forall\alpha$），得 $\prod_\alpha f_\alpha$ 连续。

定义 9.2 (拓扑和（不交并）)

设一族两两不交的拓扑空间 $(X_\alpha,\mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$。记集合不交并

$$\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha=\coprod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha.$$

在该并集上定义拓扑 τ，使每个包含映射

$$i_\alpha:X_\alpha\hookrightarrow\bigsqcup_{\gamma\in\Lambda}X_\gamma$$

连续且为嵌入（即 $i_\alpha:X_\alpha\to i_\alpha(X_\alpha)$ 为同胚）的最大拓扑。约定记号

$$\coprod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha\equiv\Big(\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha,\ \tau\Big),$$

并在需要时亦记 $\tau = \mathcal{T}_{\coprod}$。称 $(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \tau)$ 为拓扑和。

命题 9.11 (拓扑和的显式刻画)

有

$$\mathcal{T}_{\coprod} = \left\{ \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha \ (\forall\alpha) \right\}.$$

证明 记右侧集合族为 $\mathcal{J}$。先证 $\mathcal{J}$ 为拓扑并使每个 i_α 连续：对任意 $\Omega = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{J}$，有 $i_\alpha^{-1}(\Omega) = U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$，故 i_α 连续。显然 $\mathcal{J}$ 对任意并封闭；且

$$\left(\bigsqcup_\alpha U_\alpha\right) \cap \left(\bigsqcup_\alpha V_\alpha\right) = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \cap V_\alpha) \in \mathcal{J},$$

故 $\mathcal{J}$ 为拓扑。

因 $\mathcal{T}_{\coprod}$ 是使所有 i_α 连续的最大拓扑，得 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{T}_{\coprod}$。

反之，任取 $\Omega \in \mathcal{T}_{\coprod}$，则 $i_\alpha^{-1}(\Omega) = \Omega \cap X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$。令 $U_\alpha = \Omega \cap X_\alpha$，则

$$\Omega = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} (\Omega \cap X_\alpha) = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \mathcal{J}.$$

故 $\mathcal{T}_{\coprod} \subseteq \mathcal{J}$，两者相等。

引理 9.3 (嵌入引理)

设 X 为拓扑空间，$(Y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间族。令

$$f : X \to \prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha, \qquad x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha\in\Lambda},$$

其中 $f_\alpha \equiv p_\alpha \circ f$。则

1. f 连续当且仅当每个 f_α 连续。等价地，对任意 $x_0 \in X$，f 在 x_0 连续当且仅当每个 f_α 在 x_0 连续；
2. 若 f 为单射，则族 $\{f_\alpha\}$ 分离 X 的点：对任意 $x \neq y$，存在 α 使 $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$；
3. 若 $\{f_\alpha\}$ 分离 X 的点和闭集，则 $f : X \to f(X)$ 为开映射。

证明 取任意开集 $U \subseteq X$ 与点 $x \in U$。由假设族 $\{f_\alpha\}$ 分离点与闭集，应用于闭集 U^c 与点 x，存在指标 α 与 Y_α 中开邻域 $V_\alpha \ni f_\alpha(x)$ 使得 $f_\alpha(U^c) \subseteq V_\alpha^c$。因而 $f(x) \in p_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap f(X)$。对任意 $x' \in X$，若 $f(x') \in p_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap f(X)$，则 $f_\alpha(x') \in V_\alpha$，从而 $x' \notin U^c$；于是 $x' \in U$，并且 $f(x') \in f(U)$。故有

$$p_\alpha^{-1}(V_\alpha) \cap f(X) \subseteq f(U).$$

其中 $p_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ 为乘积空间中的开集，故其与 $f(X)$ 的交在子空间 $f(X)$ 中开。于是 $f(U)$ 在 $f(X)$ 中对每点 $f(x)$ 含有开邻域，故 $f(U)$ 为 $f(X)$ 的开集。命题 (3) 得证。

命题 9.12 (子空间中的闭包)

设 $A \subseteq Y \subseteq X$。则在子空间 Y 中 A 的闭包满足

$$\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y,$$

其中右侧闭包在 X 中取。

证明 "$\subseteq$"：设 $y \in \overline{A}^Y$。则对任意 Y 中开邻域 $B \in \mathcal{N}_Y(y)$，有 $B \cap A \neq \varnothing$。取 X 中开集 U 使 $B = U \cap Y$，得 $U \cap A \neq \varnothing$，故 $y \in \overline{A}$，进而 $y \in \overline{A} \cap Y$。"$\supseteq$"：设 $y \in \overline{A} \cap Y$。任取 $B \in \mathcal{N}_Y(y)$，写作 $B = U \cap Y$ 且 $U \in \mathcal{T}$ 开。由 $y \in \overline{A}$ 知 $U \cap A \neq \varnothing$，故 $B \cap A \neq \varnothing$，从而 $y \in \overline{A}^Y$。

推论 9.2

对任意 $A \subseteq X$，A 在 $\overline{A}$ 中稠密。等价地，

$$\overline{A}^{\overline{A}} = \overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}.$$

推论 9.3

若 $\Omega \subseteq X$ 且 $\Omega \subseteq \overline{A}$，则 A 在 Ω 中稠密，即

$$\overline{A}^{\Omega} = \overline{A} \cap \Omega = \Omega.$$

定义 9.3 (可度量化空间)

设拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$。若存在度量 $d : X \times X \to [0, +\infty)$ 使由 d 诱导的拓扑 $\mathcal{T}_d$ 与 $\mathcal{T}$ 相同，即 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$，则称 $(X, \mathcal{T})$ 为可度量化（metrizable）。其中

$$\mathcal{T}_d \equiv \{ U \subseteq X : \ \forall x \in U \ \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } B_d(x, \varepsilon) \subseteq U \}.$$

定义 9.4 (完备可度量化空间)

设拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$。若存在度量 $d : X \times X \to [0, +\infty)$ 使 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$ 且度量空间 (X, d) 完备，则称 $(X, \mathcal{T})$ 为完备可度量化（completely metrizable）。

命题 9.13 (同胚不变性)

若 X 与 Y 同胚，则 X 可完备度量化当且仅当 Y 可完备度量化。

证明 设 $h : X \to Y$ 为同胚。先证“$\Rightarrow$”。若 X 可完备度量化，则存在完备度量 d_X 使 $\mathcal{T}_{d_X} = \mathcal{T}_X$。定义

$$d_Y(y_1, y_2) \equiv d_X\big(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)\big), \qquad y_1, y_2 \in Y.$$

则 $h : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ 为等距同胚，因而 $\mathcal{T}_{d_Y} = \mathcal{T}_Y$。取任意 (Y, d_Y) 的 Cauchy 列 (y_n)，则 $(x_n) = (h^{-1}(y_n))$ 满足

$$d_X(x_n, x_m) = d_Y(y_n, y_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

故 (x_n) 为 (X, d_X) 的 Cauchy 列，完备性给出 $x_n \to x$。由 h 的等距连续性，$y_n = h(x_n) \to h(x)$，从而 (Y, d_Y) 完备。于是 Y 可完备度量化。反向“$\Leftarrow$”同理，取同胚 $h^{-1} : Y \to X$ 即得。

定义 9.5 (等价度量)

设 X 为集合，d_1, d_2 为 X 上度量。称 d_1 与 d_2 一致等价，若恒等映射

$$\mathrm{id} : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$$

为一致同胚。

命题 9.14 (有界化度量与原度量等价)

设 d 为 X 上度量，定义

$$d_b(x, y) \equiv \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \in [0, 1).$$

则 d_b 为 X 上度量，且 $\mathcal{T}_{d_b} = \mathcal{T}_d$，因而 d 与 d_b 等价。

证明 度量性：显然 $d_b(x, y) = d_b(y, x)$，且 $d_b(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$。对三角不等式，记 $g(t) = t/(1 + t)$，则对任意 $a, b \geq 0$，

$$g(a) + g(b) - g(a + b) = \frac{ab}{(1 + a)(1 + b)(1 + a + b)} \geq 0,$$

故 $g(a+b) \le g(a)+g(b)$。由 $d(x,z) \le d(x,y)+d(y,z)$ 与 g 单调性得

$$d_b(x,z) = g(d(x,z)) \le g(d(x,y)+d(y,z)) \le g(d(x,y)) + g(d(y,z)) = d_b(x,y) + d_b(y,z).$$

拓扑等价：g 严格增且 $g^{-1}(s) = s/(1-s)$（$0 \le s < 1$）。于是对任意 $0 < \varepsilon < 1$，

$$B_{d_b}(x,\varepsilon) = \{y: d_b(x,y) < \varepsilon\} = \{y: d(x,y) < \tfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\} = B_d\Big(x, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\Big),$$

两拓扑相同。

引理 9.4 (可数积的度量化)

设 X_n（$n \in \mathbb{N}$）皆为可度量化空间，则其乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$（赋以乘积拓扑）可度量化。

证明 对每个 n 取与 X_n 拓扑相容的度量 d_n。由命题 9.14 可不失一般性假设 $d_n \le 1$。定义

$$d\big((x_n),(y_n)\big) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

则 d 为度量：对任意 $(x_n),(y_n),(z_n)$，由每个 d_n 的三角不等式逐项相加得

$$d\big((x_n),(y_n)\big) \le d\big((x_n),(z_n)\big) + d\big((z_n),(y_n)\big).$$

若每个 (X_n, d_n) 完备，则 d 亦完备。任取 d-Cauchy 列 $\big((x_n^k)_n\big)_{k\in\mathbb{N}}$。由

$$2^{-i}\, d_i(x_i^k, x_i^\ell) \le d\big((x_n^k)_n, (x_n^\ell)_n\big) \xrightarrow[k,\ell\to\infty]{} 0,$$

知对每个 i，$(x_i^k)_k$ 为 (X_i, d_i) 的 Cauchy 列。由完备性，存在 $x_i \in X_i$ 使 $x_i^k \to x_i$。记 $x = (x_i)_i$。

取任意 $\varepsilon > 0$。先选 N 使 $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$。再为 $1 \le i \le N$ 取 $\delta_i > 0$，令 $\sum_{i=1}^{N} 2^{-i}\delta_i < \varepsilon/2$。由 $x_i^k \to x_i$，对每个 $i \le N$ 存在 K_i 使 $k \ge K_i$ 时 $d_i(x_i^k, x_i) < \delta_i$。令 $K = \max\{K_1, \dots, K_N\}$，则 $k \ge K$ 时

$$d\big((x_n^k)_n, x\big) = \sum_{i=1}^{N} 2^{-i} d_i(x_i^k, x_i) + \sum_{n>N} 2^{-n} d_n(x_n^k, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故 $((x_n^k)_n)_k$ 于 d 收敛到 x，d 完备。记 $p_i : \prod X_n \to X_i$ 为坐标投影。注意

$$d\big((x_n),(y_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n) \ge \frac{1}{2^i} d_i(x_i,y_i) \qquad (\forall i),$$

故 $p_i : \big(\prod X_n, d\big) \to (X_i, d_i)$ 连续。从而

$$\mathrm{id} : \Big(\prod\nolimits_n X_n, d\Big) \longrightarrow \Big(\prod\nolimits_n X_n, \mathcal{T}_\Pi\Big)$$

连续（乘积拓扑由各 p_i 生成）。

取任意 (x_n) 与 $\varepsilon > 0$。选 N 使 $\sum_{n>N} 2^{-n} < \varepsilon/2$。由 $d_n \le 1$ 得

$$\sum_{n>N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall (y_n)).$$

为 $1 \le i \le N$ 取 $\delta_i > 0$，使 $\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i}\delta_i < \varepsilon/2$。令

$$U \equiv B_{d_1}(x_1,\delta_1) \times \cdots \times B_{d_N}(x_N,\delta_N) \times \prod_{n>N} X_n,$$

则 U 是乘积拓扑的基本开邻域。对任意 $(y_n) \in U$，

$$d\big((x_n),(y_n)\big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2^i} d_i(x_i,y_i) + \sum_{n>N} \frac{1}{2^n} d_n(x_n,y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故 $U \subseteq B_d\big((x_n),\varepsilon\big)$。因而

$$\mathrm{id} : \Big(\prod\nolimits_n X_n, \mathcal{T}_\Pi\Big) \longrightarrow \Big(\prod\nolimits_n X_n, d\Big)$$

于 (x_n) 连续，任意点同理。

综上，$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\Pi$，故 $\prod X_n$ 可度量化。

定理 9.2 (乘积中的网收敛判别)

设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 为一族拓扑空间。令 $\big((x_i^\alpha)_{i\in I}\big)_\alpha$ 为 $\prod_{i\in I} X_i$ 中的一网，且 $(x_i)_{i\in I}\in\prod_{i\in I} X_i$。则

$$(x_i^\alpha)_{i\in I}\longrightarrow (x_i)_{i\in I} \iff \forall i\in I,\ x_i^\alpha\longrightarrow x_i \text{ 于} X_i.$$

证明 "$\Rightarrow$"：各坐标投影 $p_i:\prod X_i\to X_i$ 连续，故由连续映像保持极限，$p_i\big((x_i^\alpha)_i\big)=x_i^\alpha\to p_i\big((x_i)_i\big)=x_i$。

"$\Leftarrow$"：设对每个 $i\in I$ 有 $x_i^\alpha\to x_i$。为证 $\big((x_i^\alpha)_i\big)$ 在乘积空间中收敛，只需验证它对乘积拓扑的任一子基开集最终落入。取任意 $i_0\in I$ 与 x_{i_0} 的开邻域 $U\subset X_{i_0}$，则由 $x_{i_0}^\alpha\to x_{i_0}$，存在 β，使得对所有 $\alpha\succeq\beta$，$x_{i_0}^\alpha\in U$。这当且仅当

$$(x_i^\alpha)_{i\in I}\in p_{i_0}^{-1}(U)\qquad(\forall\alpha\succeq\beta),$$

即该网最终落入子基开集 $p_{i_0}^{-1}(U)$。由子基生成开集，遂该网在乘积拓扑下收敛到 $(x_i)_i$。

定义 9.6 (波兰空间)

称拓扑空间 X 为波兰空间（Polish space），若 X 可分且完全可度量化，即存在完备度量 d 使由 d 诱导的拓扑与 X 的原拓扑一致（记作 $\mathcal{T}_X=\mathcal{T}_d$）。亦即 X 为可分完全可度量化空间。

定理 9.3 (Urysohn 嵌入定理的等价刻画)

设拓扑空间 X，记 $I=[0,1]$ 与 $I^\omega=[0,1]^{\mathbb{N}}$。以下命题等价：

1. X 为第二可数的 T_3 空间；
2. X 为可分度量空间；
3. X 同胚于某个可分度量空间的子空间；
4. X 同胚于某个波兰空间的子空间；
5. X 可嵌入 I^ω。

此外，I^ω 为波兰空间。

证明

$1\Rightarrow 5$

第二可数 $\Rightarrow$ Lindelöf；而 T_3+Lindelöf $\Rightarrow T_4$（正规），故可用 Urysohn 引理。取 X 的可数基 $\mathcal{B}$。令

$$\Lambda\equiv\{(U,V)\in\mathcal{B}\times\mathcal{B}:\ \overline{U}\subset V\}.$$

对每个 $(U,V)\in\Lambda$，由 Urysohn 引理取连续映射

$$f_{U,V}:X\to[0,1]\quad\text{满足}\quad f_{U,V}(\overline{U})\subset\{0\},\ f_{U,V}(V^c)\subset\{1\}.$$

定义

$$\Theta:X\longrightarrow[0,1]^\Lambda,\qquad \Theta(x)\equiv\big(f_{U,V}(x)\big)_{(U,V)\in\Lambda}.$$

各 $f_{U,V}$ 连续，故 Θ 连续；且 Λ 可数，$[0,1]^\Lambda\cong I^\omega$。

分离性质：任意 $x\in X$ 与闭集 $F\subset X$ 且 $x\notin F$，由正则性与基可选 $U,V\in\mathcal{B}$ 使 $x\in U,\overline{U}\subset V$ 且 $F\subset V^c$，于是

$$f_{U,V}(x)=0,\qquad f_{U,V}(F)\subset\{1\}.$$

因而 $\Theta(x)\notin\Theta(F)$，即该函数族将点与闭集分离，故 Θ 为嵌入，X 与 $\Theta(X)$ 同胚，遂 X 可嵌入 I^ω。

其余方向：$5\Rightarrow 4$ 因 I^ω 为波兰空间；$4\Rightarrow 2$ 因波兰空间为可分度量，子空间仍为可分度量；$2\Rightarrow 3\Rightarrow 2$ 显然；$2\Rightarrow 1$ 因度量空间为 T_3 且可分 $\Rightarrow$ 第二可数。

9.2 子网与聚点

引理 9.5

若 $x_\alpha \to x$，则任意子网 $(x_{\theta(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$ 亦收敛到 x。

证明 任取 $U \in \mathcal{N}(x)$。由 $x_\alpha \to x$，存在 $\alpha_0 \in \Lambda$ 使得 $\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U$。由 θ 余最终，存在 $\gamma_0 \in \Gamma$ 使得 $\theta(\gamma_0) \geq \alpha_0$。于是当 $\gamma \succeq \gamma_0$ 时有 $\theta(\gamma) \geq \theta(\gamma_0) \geq \alpha_0$，从而 $x_{\theta(\gamma)} \in U$。故 $(x_{\theta(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma} \to x$。

定理 9.4

设 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为拓扑空间 X 中的网，$x \in X$。下列命题等价：
1. 存在 (x_α) 的子网收敛到 x；
2. $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} \overline{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}}$。

证明 (1)⇒(2) 设存在子网 $(x_{\alpha_i})_{i\in\Gamma}$ 满足 $x_{\alpha_i} \to x$。任取 $\alpha \in \Lambda$ 与邻域 $U \in \mathcal{N}(x)$。由子网余最终性，存在 $i_0 \in \Gamma$ 使得 $\alpha_{i_0} \geq \alpha$；由收敛性，存在 $i_1 \in \Gamma$ 使得 $i \succeq i_1 \Rightarrow x_{\alpha_i} \in U$。取 $i \succeq i_0, i_1$，则 $x_{\alpha_i} \in U \cap \{x_\beta : \beta \geq \alpha\}$，故 $U \cap \{x_\beta : \beta \geq \alpha\} \neq \varnothing$，从而 $x \in \overline{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}}$。$\alpha$ 任意，得 (2)。

(2)⇒(1) 令

$$\Gamma = \{(U, \alpha) \in \mathcal{N}(x) \times \Lambda :\ x_\alpha \in U\}.$$

在 Γ 上定义偏序：对 $(U,\alpha), (V,\beta) \in \Gamma$，令

$$(U,\alpha) \preceq (V,\beta) \iff U \supseteq V \text{ 且 } \alpha \leq \beta.$$

下证 $(\Gamma, \preceq)$ 为定向集：任取 $(U,\alpha), (V,\beta) \in \Gamma$，令 $W = U \cap V \in \mathcal{N}(x)$，并取 $\gamma \in \Lambda$ 使得 $\gamma \geq \alpha, \beta$。由 (2) 得 $x \in \overline{\{x_\delta : \delta \geq \gamma\}}$，故 $W \cap \{x_\delta : \delta \geq \gamma\} \neq \varnothing$，于是存在 $\delta \geq \gamma$ 使得 $x_\delta \in W$。因而 $(W,\delta) \in \Gamma$ 且 $(U,\alpha) \preceq (W,\delta)$ 与 $(V,\beta) \preceq (W,\delta)$，从而 $(\Gamma, \preceq)$ 为定向集。

定义 $\theta : \Gamma \to \Lambda$ 为 $\theta(U,\alpha) = \alpha$，则 θ 保序，且对任意 $\alpha_0 \in \Lambda$，有 $(X, \alpha_0) \in \Gamma$ 且 $\theta(X, \alpha_0) = \alpha_0$，因此 θ 余最终。于是 $(x_{\theta(U,\alpha)})_{(U,\alpha)\in\Gamma}$ 为 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 的子网。

最后证该子网收敛到 x：任取 $U_0 \in \mathcal{N}(x)$，并取任意 $\alpha_* \in \Lambda$。由 (2) 得 $U_0 \cap \{x_\beta : \beta \geq \alpha_*\} \neq \varnothing$，故存在 $\beta \geq \alpha_*$ 使得 $x_\beta \in U_0$。令 $\gamma_0 = (U_0, \beta) \in \Gamma$。若 $\gamma = (V,\alpha) \succeq \gamma_0$，则 $V \subseteq U_0$ 且 $x_{\theta(\gamma)} = x_\alpha \in V \subseteq U_0$。因此该子网最终落在 U_0 中，即 $x_{\theta(\gamma)} \to x$。

9.2.1 紧性与收敛子网

定理 9.5 (紧性的网刻画)

设 X 为拓扑空间，则下列命题等价：
1. X 紧；
2. X 中任意网都存在一个收敛子网。

证明 (1)⇒(2) 设 $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 中任意网。对每个 $\alpha \in \Lambda$ 令

$$F_\alpha = \overline{\{x_\beta : \beta \geq \alpha\}}.$$

则 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为闭集族，并具有有限交性质：任取 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$，由 Λ 定向性可取 $\gamma \in \Lambda$ 使 $\gamma \geq \alpha_i$（$\forall i$），于是

$$F_\gamma \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i},$$

而 $F_\gamma \neq \varnothing$。由紧性知 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha \neq \varnothing$，取 $x \in \bigcap_\alpha F_\alpha$。由定理 9.4，存在 (x_α) 的子网收敛到 x。

(2)⟹(1) 反证。若 X 非紧，则存在开覆盖 $\mathcal{U}$ 使其无有限子覆盖。令

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} : \mathcal{F} \text{ 有限}\},$$

以包含关系 $\subseteq$ 作偏序，则 $(\mathcal{B}, \subseteq)$ 为定向集。对每个 $\mathcal{F} \in \mathcal{B}$，因 $\mathcal{F}$ 不能覆盖 X，可取

$$x_{\mathcal{F}} \in X \setminus \bigcup \mathcal{F}.$$

从而得到网 $(x_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}\in\mathcal{B}}$。任取其子网 $(x_{\theta(\gamma)})_{\gamma\in\Gamma}$。若该子网收敛到某点 $x \in X$，取 $U \in \mathcal{U}$ 使 $x \in U$。令 $\mathcal{F}_0 = \{U\} \in \mathcal{B}$。由 θ 余最终性可取 $\gamma_0 \in \Gamma$ 使 $\theta(\gamma_0) \supseteq \mathcal{F}_0$，于是对任意 $\gamma \succeq \gamma_0$ 都有 $\theta(\gamma) \supseteq \mathcal{F}_0$，从而

$$x_{\theta(\gamma)} \in X \setminus \bigcup \theta(\gamma) \subseteq X \setminus U.$$

因此子网最终不在邻域 U 中，与 $x_{\theta(\gamma)} \to x$ 矛盾。故该网不存在收敛子网，矛盾。于是 X 必紧。

9.2.2 拓扑和的连续性与可度量性

命题 9.15

设 $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ 为两两不交的拓扑空间族，其拓扑和记为 $\coprod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$（见定义 9.2），包含映射记为 $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \coprod_\gamma X_\gamma$。对任意拓扑空间 Y 与映射 $f : \coprod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to Y$，下列命题等价：

1. f 连续；
2. 对每个 $\alpha \in \Lambda$，复合 $f \circ i_\alpha : X_\alpha \to Y$ 连续。

证明 (1)⟹(2) 因 i_α 连续，故 $f \circ i_\alpha$ 连续。

(2)⟹(1) 任取 Y 中开集 V。对每个 α，令 $U_\alpha = (f \circ i_\alpha)^{-1}(V)$，则 $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$。由拓扑和的显式刻画（命题 9.11）知

$$\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha(U_\alpha)$$

为 $\coprod X_\alpha$ 的开集。另一方面，对任意 $x \in X_\alpha$，有 $i_\alpha(x) \in f^{-1}(V) \iff x \in U_\alpha$，故

$$f^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha(U_\alpha)$$

为开集，从而 f 连续。

命题 9.16

若对每个 $\alpha \in \Lambda$，空间 X_α 可度量化，则拓扑和 $\coprod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 亦可度量化。

证明 对每个 α 取与 X_α 拓扑相容的度量 d_α。由命题 9.14 可不失一般性设 $d_\alpha \le 1$。在集合不交并 $\bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上定义函数 d：若 $x, y \in X_\alpha$，则令 $d(x, y) = d_\alpha(x, y)$；若 $x \in X_\alpha$ 与 $y \in X_\beta$ 且 $\alpha \neq \beta$，则令 $d(x, y) = 1$。易验证 d 为度量。记由 d 诱导的拓扑为 $\mathcal{T}_d$。

先证 $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_\coprod$：任取 $\mathcal{T}_d$ 中开集 O，对每个 α，子空间 $O \cap X_\alpha$ 在 (X_α, d_α) 中开，于是

$$O = \bigsqcup_{\alpha\in\Lambda} (O \cap X_\alpha)$$

由命题 9.11 知 $O \in \mathcal{T}_\coprod$。

再证 $\mathcal{T}_\coprod \subseteq \mathcal{T}_d$：任取 $\mathcal{T}_\coprod$ 中开集 $O = \bigsqcup_\alpha U_\alpha$（$U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$）。任取 $x \in O$，设 $x \in U_\alpha$。由 U_α 在 (X_α, d_α) 中开，可取 $\varepsilon \in (0,1)$ 使 $B_{d_\alpha}(x, \varepsilon) \subseteq U_\alpha$。此时 $B_d(x, \varepsilon) = B_{d_\alpha}(x, \varepsilon) \subseteq O$，故 O 在 $\mathcal{T}_d$ 中开。

综上 $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\coprod$，从而 $\coprod X_\alpha$ 可度量化。

引理 9.6 (粘贴引理)

设 $f : X \to Y$ 为映射，$\{U_i\}_{i\in I}$ 为 X 的开覆盖。若对每个 $i \in I$，限制 $f|_{U_i} : U_i \to Y$ 连续，则 f 连续。

证明 任取 Y 中开集 V。对每个 i，有

$$(f|_{U_i})^{-1}(V) = U_i \cap f^{-1}(V)$$

在 X 中开。于是

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{i\in I}(U_i \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_{i\in I}(f|_{U_i})^{-1}(V)$$

为开集，故 f 连续。

9.2.3 Polish 空间的封闭性

定理 9.6

设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为 Polish 空间列，则

1. $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 为 Polish 空间；
2. $\coprod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 为 Polish 空间。

证明 由定义 9.6，需证可分与完全可度量化。

(1) 对每个 n 取与 X_n 拓扑相容且完备的度量 d_n，并由命题 9.14 可设 $d_n \le 1$。在 $\prod_n X_n$ 上定义

$$d\big((x_n),(y_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} d_n(x_n, y_n).$$

则 d 为度量，且与乘积拓扑相容（与引理 9.4 的构造一致）。若 $(x^{(k)})$ 在 d 下为 Cauchy，则对每个 n，坐标列 $(x_n^{(k)})$ 在 d_n 下为 Cauchy，因 d_n 完备可得 $x_n^{(k)} \to x_n$。令 $x = (x_n)$，可验证 $x^{(k)} \to x$，故 d 完备，乘积空间完全可度量化。

再证可分：对每个 n 取可数稠密集 $D_n \subseteq X_n$，并固定一点 $x_n^0 \in D_n$。令

$$D = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \Big(\prod_{n=1}^{m} D_n \times \prod_{n>m}\{x_n^0\}\Big) \subseteq \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

由引理 9.7 知对每个 m，$\prod_{n=1}^{m} D_n$ 可数，且上式为可数并，故 D 可数。另一方面，乘积拓扑的基开集由有限多个坐标决定：任取非空基开集

$$O = \bigcap_{k=1}^{m} p_{n_k}^{-1}(U_{n_k}), \qquad U_{n_k} \subseteq X_{n_k} \text{ 开},$$

由 D_{n_k} 在 X_{n_k} 中稠密可取 $y_{n_k} \in D_{n_k} \cap U_{n_k}$。定义点 $y = (y_n)$：当 $n \in \{n_1, \dots, n_m\}$ 时取 $y_n = y_n$，其余坐标取 x_n^0。则 $y \in D \cap O$，故 D 在 $\prod_n X_n$ 中稠密，从而 $\prod_n X_n$ 可分。

(2) 对每个 n 取与 X_n 拓扑相容且完备的度量 d_n，并可设 $d_n \le 1$。在不交并 $\bigsqcup_n X_n$ 上定义度量

$$d(x,y) = \begin{cases} d_n(x,y), & x, y \in X_n, \\ 1, & x \in X_m,\ y \in X_n,\ m \ne n. \end{cases}$$

则由命题 9.16 的论证知该度量诱导拓扑和拓扑，且因每个 d_n 完备可得 d 完备，从而 $\coprod_n X_n$ 完全可度量化。

取每个 n 的可数稠密集 $D_n \subseteq X_n$，则 $\bigsqcup_n D_n$ 为可数集且在 $\coprod_n X_n$ 中稠密，故 $\coprod_n X_n$ 可分。

9.2.4 可数性引理与可数乘积的第二可数性

引理 9.7

1. 可数集的有限直积仍可数；
2. 可数多个可数集的并仍可数。

证明 (1) 设 A, B 可数，则存在单射 $A \hookrightarrow \mathbb{N}$ 与 $B \hookrightarrow \mathbb{N}$，故 $A \times B \hookrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$。而 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 可数，从而 $A \times B$ 可数。归纳即得有限直积情形。

(2) 设 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 皆可数，则存在单射 $A_n \hookrightarrow \mathbb{N}$，故

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \hookrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N},$$

从而该并为可数。

命题 9.17

设 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 为拓扑空间列。若每个 X_n 第二可数（即 CA_2），则乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ 第二可数。

证明 对每个 n 取 X_n 的可数基 $\mathcal{B}_n$。乘积拓扑的一个基可取为所有形如

$$\bigcap_{k=1}^{m} p_{n_k}^{-1}(B_{n_k}), \qquad B_{n_k}\in\mathcal{B}_{n_k},\ n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}$$

的集合（其中 $m\geq 1$，p_n 为投影）。对固定的 $(n_1,\dots,n_m)$，由引理 9.7(1) 知选择 B_{n_k} 的方式可数；再对所有有限序列 $(n_1,\dots,n_m)$ 取并，由引理 9.7(2) 知总的基仍可数。故 $\prod_n X_n$ 第二可数。

9.2.5 连通性与连续像

定义 9.7 (连通与不连通)

设 X 为拓扑空间。若存在非空开集 $U,V\subseteq X$ 使得

$$U\cap V=\varnothing, \qquad X=U\cup V,$$

则称 X 不连通；否则称 X 连通。

命题 9.18

设 $f:X\to Y$ 连续，$\Omega\subseteq X$ 连通，则 $f(\Omega)\subseteq Y$ 连通。

证明 反证。若 $f(\Omega)$ 不连通，则存在 Y 中互不相交的非空开集 U,V 使得

$$f(\Omega)\subseteq U\cup V, \qquad f(\Omega)\cap U\neq\varnothing,\ f(\Omega)\cap V\neq\varnothing.$$

因 f 连续，$f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ 为 X 中开集，于是 $\Omega\cap f^{-1}(U)$ 与 $\Omega\cap f^{-1}(V)$ 在子空间 Ω 中开，且非空、互不相交，并满足

$$\Omega\subseteq\big(\Omega\cap f^{-1}(U)\big)\cup\big(\Omega\cap f^{-1}(V)\big),$$

与 Ω 连通矛盾。

推论 9.4

若 X 连通且 $f:X\to Y$ 连续满射，则 Y 连通。

命题 9.19

设 X 为拓扑空间，则以下等价：

1. X 不连通；
2. 存在子集 $\Omega\subseteq X$ 满足 $\varnothing\neq\Omega\neq X$ 且 Ω 在 X 中既开又闭。

证明 (1)⇒(2) 若 X 不连通，则存在非空开集 $U,V\subseteq X$ 使得

$$U\cap V=\varnothing, \qquad X=U\cup V.$$

则 U 既开又闭，且 $\varnothing\neq U\neq X$。

(2)⇒(1) 若 Ω 非空真子集且既开又闭，则 $X=\Omega\cup\Omega^c$ 且二者为非空不交开集，故 X 不连通。

引理 9.8

设 $A\subseteq X$ 在子空间拓扑下连通，且 $\Omega\subseteq X$ 在 X 中既开又闭。则要么 $A\cap\Omega=\varnothing$，要么 $A\subseteq\Omega$。

证明 注意到 $A\cap\Omega$ 与 $A\cap\Omega^c$ 在子空间 A 中既开又闭，且

$$A=(A\cap\Omega)\cup(A\cap\Omega^c),\qquad (A\cap\Omega)\cap(A\cap\Omega^c)=\varnothing.$$

由命题 9.19（应用于空间 A）知 $A\cap\Omega=\varnothing$ 或 $A\cap\Omega^c=\varnothing$，后一种情形等价于 $A\subseteq\Omega$。

引理 9.9

设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为 X 中一族连通子集，且 $\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\neq\varnothing$。则 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$ 连通。

证明 反证。若 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 不连通，则存在其子空间中的不交非空开集 U,V 使

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=U\cup V.$$

取 $x_0\in\bigcap_\alpha A_\alpha$，不妨设 $x_0\in U$。对任意 α，集合 $A_\alpha\cap U$ 与 $A_\alpha\cap V$ 在 A_α 中开且不交，并满足

$$A_\alpha=(A_\alpha\cap U)\cup(A_\alpha\cap V).$$

由 A_α 连通及 $x_0\in A_\alpha\cap U$ 知 $A_\alpha\cap V=\varnothing$，即 $A_\alpha\subseteq U$。于是 $\bigcup_\alpha A_\alpha\subseteq U$，与 V 非空矛盾。

定义 9.8 (连通分支)

设 X 为拓扑空间。对 $x,y\in X$，定义关系

$$x\sim y\iff \exists\ \text{连通子集} A\subseteq X\ \text{使}\ x,y\in A.$$

称等价类 $[x]=\{y\in X:y\sim x\}$ 为点 x 所在的连通分支（亦称连通分量）。

命题 9.20

上述关系 $\sim$ 为等价关系。

证明 自反性：取 $A=\{x\}$。

对称性：由定义显然。

传递性：若 $x\sim y$ 与 $y\sim z$，则存在连通集 A,B 使 $x,y\in A$ 且 $y,z\in B$。此时 $A\cap B\ni y$，由引理 9.9 知 $A\cup B$ 连通，且 $x,z\in A\cup B$，故 $x\sim z$。

命题 9.21

对任意 $x\in X$，连通分支 $[x]$ 连通，且是包含 x 的极大连通子集：若 $C\subseteq X$ 连通且 $x\in C$，则 $C\subseteq[x]$。

证明 对每个 $y\in[x]$，取连通子集 $A_y\subseteq X$ 使 $x,y\in A_y$。则 $x\in\bigcap_{y\in[x]}A_y$，且

$$[x]=\bigcup_{y\in[x]}A_y.$$

由引理 9.9 得 $[x]$ 连通。

若 C 连通且 $x\in C$，则对任意 $y\in C$，取 $A=C$ 即有 $x\sim y$，故 $y\in[x]$，从而 $C\subseteq[x]$。

命题 9.22

若 $A\subseteq X$ 连通，且 $A\subseteq\Omega\subseteq\overline{A}$，则 Ω 连通。

证明 反证。若 Ω 不连通，则存在 Ω 的不交非空开集 U,V 使 $\Omega=U\cup V$。因 A 连通，必有 $A\subseteq U$ 或 $A\subseteq V$；不妨设 $A\subseteq U$。注意到 U 在子空间 Ω 中既开又闭，故 $\overline{A}^{\Omega}\subseteq U$。但由命题 9.12 有

$$\overline{A}^{\Omega}=\overline{A}\cap\Omega=\Omega,$$

从而 $\Omega\subseteq U$，与 V 非空矛盾。

推论 9.5

若 $A \subseteq X$ 连通，则 $\overline{A}$ 连通。

命题 9.23

X 的每个连通分支都是闭集。

证明 设 $C = [x]$ 为连通分支。由推论 9.5 知 $\overline{C}$ 连通，且 $C \subseteq \overline{C}$。由命题 9.21 的极大性，必有 $\overline{C} \subseteq C$，故 $\overline{C} = C$，即 C 闭。

命题 9.24

若 X 与 Y 连通，则 $X \times Y$ 连通。

证明 固定 $(x_0, y_0) \in X \times Y$。对任意 $(x, y) \in X \times Y$，令

$$A_{(x,y)} = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y).$$

其中 $X \times \{y_0\}$ 与 $\{x\} \times Y$ 分别同胚于 X 与 Y，故皆连通；且二者交于 (x, y_0)，由引理 9.9 得 $A_{(x,y)}$ 连通。又 $(x_0, y_0) \in A_{(x,y)}$，并且

$$X \times Y = \bigcup_{(x,y)\in X\times Y} A_{(x,y)}.$$

再次应用引理 9.9（公共点为 (x_0, y_0)）得 $X \times Y$ 连通。

定理 9.7

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 为一族连通拓扑空间，则其乘积 $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$（赋以乘积拓扑）连通。

证明 在每个 X_α 中固定一点 $x_\alpha^0 \in X_\alpha$，记 $x^0 = (x_\alpha^0)_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha$。

定义

$$\Omega = \Big\{(y_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha :\ \{\alpha \in \Lambda : y_\alpha \neq x_\alpha^0\} \text{ 为有限集}\Big\}.$$

对任意有限子集 $F \subseteq \Lambda$，令

$$\Omega_F = \{(y_\alpha)_\alpha :\ y_\alpha = x_\alpha^0 \text{ 对 } \alpha \notin F\}.$$

则 $\Omega = \bigcup_{F\subseteq\Lambda \text{ 有限}} \Omega_F$，且每个 Ω_F 同胚于有限乘积 $\prod_{\alpha\in F} X_\alpha$，故由命题 9.24（归纳）知 Ω_F 连通。又 $x^0 \in \bigcap_F \Omega_F$，由引理 9.9 得 Ω 连通。

下面证 Ω 在 $\prod_\alpha X_\alpha$ 中稠密。任取非空基开集

$$B = \bigcap_{k=1}^{n} p_{\alpha_k}^{-1}(U_k), \qquad U_k \subseteq X_{\alpha_k} \text{ 开且非空},$$

取 $y_{\alpha_k} \in U_k$，并令 $y_\alpha = x_\alpha^0$（$\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$），则 $y \in \Omega \cap B$，故 Ω 稠密。

由推论 9.5，$\overline{\Omega}$ 连通；而 Ω 稠密意味着 $\overline{\Omega} = \prod_\alpha X_\alpha$，从而乘积空间连通。

9.2.6 $\mathbb{R}$ 的连通性、介值性与道路连通

命题 9.25

赋以通常拓扑的实直线 $\mathbb{R}$ 连通。

证明 反证。若 $\mathbb{R}$ 不连通，则存在非空不交开集 $U, V \subseteq \mathbb{R}$ 使 $\mathbb{R} = U \cup V$。取 $x \in U$ 与 $y \in V$，不妨设 $x < y$。令

$$a = \sup\{z \in U :\ z < y\}.$$

则 $x \le a \le y$。若 $a \in U$，由 U 开可取 $\varepsilon > 0$ 使 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq U$，从而可取 $z \in U$ 满足 $a < z < y$，与 a 为上确界

矛盾。因此 $a \notin U$，由 $\mathbb{R} = U \cup V$ 得 $a \in V$。由 V 开可取 $\delta > 0$ 使 $(a-\delta, a+\delta) \subseteq V$。但由上确界定义可取 $z \in U$ 使 $a - \delta < z \le a$，于是 $z \in U \cap (a-\delta, a+\delta) \subseteq U \cap V$，矛盾。

命题 9.26

$\mathbb{R}$ 中任意区间（如 (a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$，$(a,+\infty)$，$[a,+\infty)$，$(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$ 等）在子空间拓扑下连通。

证明 先证开区间：由连续双射

$$\varphi : (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \tan t$$

为同胚，知 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚。又仿射映射将 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 同胚到任意 (a,b)（$a<b$），故 (a,b) 与 $\mathbb{R}$ 同胚，从而由命题 9.25 知 (a,b) 连通。

其余类型区间可由开区间的闭包与并得到，例如当 $a<b$ 时有 $[a,b] = \overline{(a,b)}$，由推论 9.5 得 $[a,b]$ 连通；同理 $[a,b) = (a,b) \cup \{a\}$、$(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$ 亦连通。半无穷区间可写作可数并，例如 $(a,+\infty) = \bigcup_{n\ge1}(a,a+n)$，且这些区间均含公共点 $a+\frac{1}{2}$，由引理 9.9 得其连通；其他半无穷区间同理。空集与单点集显然连通。

命题 9.27

设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$。则 Ω 连通当且仅当对任意 $x, y \in \Omega$ 且 $x<y$，有 $(x,y) \subseteq \Omega$。

证明 “$\Rightarrow$”：若存在 $x<y$ 属于 Ω 但某 $z \in (x,y)$ 不在 Ω，则

$$\Omega = \big(\Omega \cap (-\infty, z)\big) \cup \big(\Omega \cap (z, +\infty)\big)$$

为 Ω 的分离（两部分在 Ω 中开、非空且不交），矛盾。

“$\Leftarrow$”：若对任意 $x<y$ 均有 $(x,y) \subseteq \Omega$，则 Ω 为 $\mathbb{R}$ 的区间（或空集/单点集），由命题 9.26 知其连通。

定理 9.8

对任意 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$，$\Omega$ 连通当且仅当 Ω 是区间（允许退化情形：空集或单点集）。

证明 由命题 9.27 即得。

定理 9.9 (介值定理)

设 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 连续且 $a<b$。若 $f(a) \le 0 \le f(b)$ 或 $f(b) \le 0 \le f(a)$，则存在 $z \in [a,b]$ 使 $f(z) = 0$。

证明 由命题 9.26 知 $[a,b]$ 连通，故由命题 9.18 知 $f([a,b])$ 连通。又 $f(a)$ 与 $f(b)$ 分别在 0 的两侧（或一侧含等号），由定理 9.8 知连通集 $f([a,b])$ 必包含 0。因此存在 $z \in [a,b]$ 使 $f(z) = 0$。

定义 9.9 (道路与道路连通)

记 $I = [0,1]$。

1. 称连续映射 $\alpha : I \to X$ 为 X 中一条道路（或路径）。点 $\alpha(0)$ 与 $\alpha(1)$ 分别称为道路的起点与终点。
2. 若对任意 $x, y \in X$，存在道路 $\alpha : I \to X$ 使 $\alpha(0) = x$ 且 $\alpha(1) = y$，则称 X 道路连通（或路径连通）。

命题 9.28

若 X 道路连通，则 X 连通。

证明 固定 $x_0 \in X$。对任意 $x \in X$，取连接 x_0 与 x 的道路 $\alpha_x : I \to X$。因 I 连通且 α_x 连续，$\alpha_x(I)$ 连通。又 $x_0 \in \alpha_x(I)$ 对所有 x 都成立，且

$$X = \bigcup_{x \in X} \alpha_x(I).$$

由引理 9.9 知 X 连通。

引理 9.10 (粘贴引理（有限闭覆盖版）)

设 $f: X \to Y$ 为映射，且 X 可写为有限个闭集的并：$X = \bigcup_{k=1}^n F_k$，其中每个 F_k 在 X 中闭。若对每个 k，限制 $f|_{F_k}$ 连续，且对任意 i, j 有 $f|_{F_i \cap F_j}$ 一致，则 f 连续。

证明 任取 Y 中闭集 C。对每个 k，因 $f|_{F_k}$ 连续，集合 $(f|_{F_k})^{-1}(C)$ 在子空间 F_k 中闭，故存在 X 中闭集 K_k 使

$$(f|_{F_k})^{-1}(C) = F_k \cap K_k.$$

又

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^n (f|_{F_k})^{-1}(C) = \bigcup_{k=1}^n (F_k \cap K_k).$$

右端为有限个闭集的并，仍为闭集。故 $f^{-1}(C)$ 闭，对任意闭集 C 成立，从而 f 连续。

定义 9.10 (道路连通分支)

在 X 上定义关系：对 $x, y \in X$，令

$$x \approx y \iff \exists \text{ 道路 } \alpha: I \to X \text{ s.t. } \alpha(0) = x,\ \alpha(1) = y.$$

该等价类称为 X 的道路连通分支（道路连通分量）。

命题 9.29

关系 $\approx$ 为等价关系。

证明 自反性：取常值道路 $\alpha(t) \equiv x$。

对称性：若 α 连接 x 与 y，则 $\overline{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ 连接 y 与 x。

传递性：若 α 连接 x 与 y，β 连接 y 与 z，定义

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

注意 $[0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1] = I$ 为闭覆盖，且两段在交点 $\frac{1}{2}$ 处取值同为 y，由引理 9.10 得 γ 连续，故 $x \approx z$。

命题 9.30

对任意 $x \in X$，道路连通分支 $[x]_\approx$ 道路连通，且是包含 x 的极大道路连通子集。

证明 道路连通性由定义直接得到。若 $C \subseteq X$ 道路连通且 $x \in C$，则任取 $y \in C$，存在道路连接 x 与 y，从而 $y \in [x]_\approx$，故 $C \subseteq [x]_\approx$。

命题 9.31

若 X 与 Y 道路连通，则 $X \times Y$ 道路连通。

证明 任取 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$。由 X 道路连通，存在道路 $\alpha: I \to X$ 使 $\alpha(0) = x$、$\alpha(1) = x'$；由 Y 道路连通，存在道路 $\beta: I \to Y$ 使 $\beta(0) = y$、$\beta(1) = y'$。定义 $\gamma: I \to X \times Y$：$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$。则 $p_X \circ \gamma = \alpha$、$p_Y \circ \gamma = \beta$ 连续，故 γ 连续，且 $\gamma(0) = (x, y)$、$\gamma(1) = (x', y')$。

命题 9.32

设 $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 为一族道路连通拓扑空间，则其乘积 $\prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 道路连通。

证明 任取 $x = (x_\alpha)_\alpha$，$y = (y_\alpha)_\alpha \in \prod_\alpha X_\alpha$。对每个 α，取道路 $\gamma_\alpha: I \to X_\alpha$ 使 $\gamma_\alpha(0) = x_\alpha$ 且 $\gamma_\alpha(1) = y_\alpha$。定义

$$\gamma: I \to \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha, \qquad \gamma(t) = (\gamma_\alpha(t))_{\alpha \in \Lambda}.$$

对任意 α 有 $p_\alpha \circ \gamma = \gamma_\alpha$ 连续，由乘积拓扑的泛性质得 γ 连续，且 $\gamma(0) = x$、$\gamma(1) = y$。

例题 9.1 记

$$S = \{(x, \sin\tfrac{1}{x}) : 0 < x \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2, \qquad \Omega = \overline{S} = S \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big).$$

则 Ω 连通但不道路连通。

证明 令 $\varphi : (0,1] \to \mathbb{R}^2$，$\varphi(t) = (t, \sin\frac{1}{t})$，则 $S = \varphi((0,1])$。因 $(0,1]$ 道路连通，故 S 道路连通，从而连通。由推论 9.5 得其闭包 Ω 连通。

下面证 Ω 不道路连通。取 $A = (0,0) \in \{0\} \times [-1,1]$。若存在道路 $\alpha : I \to \Omega$ 连接 A 与某点 $B \in S$，设 $f = \pi_1 \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ 为第一坐标。则 f 连续且 $f(0) = 0$、$f(1) = B_1 > 0$。令 $t_0 = \inf\{t \in I : f(t) > 0\}$，则 $f(t_0) = 0$。取数列 $a_n, b_n \downarrow 0$ 使 $\sin\frac{1}{a_n} = 1$ 且 $\sin\frac{1}{b_n} = -1$。因 $f(t) > 0$ 对所有 $t > t_0$ 成立，由介值定理可取 $t_n, s_n \downarrow t_0$ 使 $f(t_n) = a_n$、$f(s_n) = b_n$。由于 $a_n, b_n > 0$，点 $\alpha(t_n), \alpha(s_n)$ 只能落在 S 上，故其第二坐标分别为 1 与 -1。令 $g = \pi_2 \circ \alpha$，则 g 连续且 $g(t_n) = 1$、$g(s_n) = -1$，并且 $t_n, s_n \to t_0$，这与 g 在 t_0 处连续矛盾。

定义 9.11 (局部连通与局部道路连通)

设 X 为拓扑空间。

1. 称 X 局部连通，若对任意 $x \in X$ 及任意 x 的邻域 U，存在开集 V 使 $x \in V \subseteq U$ 且 V 连通。
2. 称 X 局部道路连通，若对任意 $x \in X$ 及任意 x 的邻域 U，存在开集 V 使 $x \in V \subseteq U$ 且 V 道路连通。♣

命题 9.33

若 X 局部连通，则 X 的每个连通分支都是开集。♠

证明 设 $C = [x]$ 为 x 的连通分支。由局部连通性，存在连通开集 V 使 $x \in V$。因 V 连通且含 x，由命题 9.21 知 $V \subseteq C$。故 x 在 C 中有开邻域。任取 $x \in C$ 同理，得 C 开。

命题 9.34

若 X 局部道路连通，则 X 的每个道路连通分支都是开集。♠

证明 设 $P = [x]_\approx$ 为 x 的道路连通分支。由局部道路连通性，存在道路连通开集 V 使 $x \in V$。因 V 道路连通且含 x，由命题 9.30 知 $V \subseteq P$。故 P 为开集。

命题 9.35

若 X 局部道路连通，则 X 的连通分支与道路连通分支一致。♠

证明 任一道路连通分支必包含于某个连通分支。反过来设 C 为连通分支。由命题 9.34，道路连通分支在 X 中开，故 C 可写为若干两两不交开集（道路连通分支）的并。由于 C 连通，只能包含其中一个道路连通分支，从而 C 本身即为道路连通分支。

推论 9.6

若 X 局部道路连通，且 $U \subseteq X$ 为开且连通的子集，则 U 道路连通。♡

证明 由命题 9.35，U 的连通分支等于道路连通分支。但 U 连通意味着它只有一个连通分支，即 U 本身，故 U 道路连通。

9.2.7 同伦与基本群

定义 9.12 (映射同伦)

设 $f,g:X\to Y$ 连续。若存在连续映射 $H:X\times I\to Y$ 满足

$$H(x,0)=f(x),\qquad H(x,1)=g(x)\quad(\forall x\in X),$$

则称 f 与 g 同伦，记为 $f\simeq g$，并称 H 为从 f 到 g 的同伦。

定义 9.13 (道路同伦（端点固定）)

设 $\alpha,\beta:I\to X$ 为从 x 到 y 的道路 (即 $\alpha(0)=\beta(0)=x$ 且 $\alpha(1)=\beta(1)=y$)。若存在连续映射 $H:I\times I\to X$ 满足

$$H(s,0)=\alpha(s),\quad H(s,1)=\beta(s),\quad H(0,t)=x,\quad H(1,t)=y,$$

则称 α 与 β 端点固定同伦，记为 $\alpha\simeq_\partial\beta$。

命题 9.36

关系 $\simeq_\partial$ 是从 x 到 y 的道路集合上的等价关系。

证明 自反性：取 $H(s,t)=\alpha(s)$。

对称性：若 H 给出 $\alpha\simeq_\partial\beta$，则 $\overline{H}(s,t)=H(s,1-t)$ 给出 $\beta\simeq_\partial\alpha$。

传递性：若 H 给出 $\alpha\simeq_\partial\beta$，$F$ 给出 $\beta\simeq_\partial\gamma$，定义

$$(H*F)(s,t)=\begin{cases}H(s,2t), & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ F(s,2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

注意 $I\times[0,\frac{1}{2}]\cup I\times[\frac{1}{2},1]=I\times I$ 为闭覆盖，且两段在 $t=\frac{1}{2}$ 处一致，由引理 9.10 得 $H*F$ 连续。又 $(H*F)(s,0)=\alpha(s)$、$(H*F)(s,1)=\gamma(s)$，并且在 $s=0,1$ 处端点固定，故 $\alpha\simeq_\partial\gamma$。

定义 9.14 (道路的拼接与逆道路)

设 $\alpha:I\to X$ 为从 x 到 y 的道路，$\beta:I\to X$ 为从 y 到 z 的道路。定义它们的拼接 $\alpha*\beta:I\to X$ 为

$$(\alpha*\beta)(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & 0\le t\le\frac{1}{2},\\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

并定义 α 的逆道路 $\overline{\alpha}:I\to X$ 为 $\overline{\alpha}(t)=\alpha(1-t)$。

定义 9.15

设 $x,y\in X$。记

$$\Omega(x,y)=\{\alpha:I\to X:\ \alpha\ \text{连续},\ \alpha(0)=x,\ \alpha(1)=y\}.$$

定义

$$\pi_1(X;x,y)=\Omega(x,y)/\simeq_\partial,$$

即端点固定同伦类的集合，并用 $[\alpha]$ 表示 α 的等价类。

命题 9.37

对任意 $x,y,z\in X$，公式

$$\pi_1(X;x,y)\times\pi_1(X;y,z)\to\pi_1(X;x,z),\qquad([\alpha],[\beta])\mapsto[\alpha*\beta]$$

给出良定义的映射。

证明 设 $\alpha \simeq_\partial \alpha'$ 与 $\beta \simeq_\partial \beta'$，分别由同伦 $H, F : I \times I \to X$ 给出。定义 $K : I \times I \to X$：

$$K(s,t) = \begin{cases} H(2s,t), & 0 \le s \le \frac{1}{2}, \\ F(2s-1,t), & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

因 $H(1,t) = y = F(0,t)$，两段在 $s = \frac{1}{2}$ 处一致，且 $[0,\frac{1}{2}] \times I \cup [\frac{1}{2},1] \times I = I \times I$ 为闭覆盖，由引理 9.10 得 K 连续。又 $K(s,0) = (\alpha * \beta)(s)$、$K(s,1) = (\alpha' * \beta')(s)$，并且端点固定，故 $\alpha * \beta \simeq_\partial \alpha' * \beta'$。

定义 9.16 (基本群)

设 $x_0 \in X$。称 x_0 为基点。定义 X 在基点 x_0 处的基本群为

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X; x_0, x_0).$$

其中的元素称为以 x_0 为端点的回路的同伦类。♣

定义 9.17

记常值回路 $e_{x_0} : I \to X$，$e_{x_0}(t) = x_0$。由命题 9.37，在 $\pi_1(X, x_0)$ 上可定义二元运算

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta].$$

♣

引理 9.11

设 $\alpha : I \to X$ 为从 x 到 y 的道路，且 $\varphi : I \to I$ 连续并满足 $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$。则 $\alpha \circ \varphi \simeq_\partial \alpha$。♡

证明 定义 $H : I \times I \to X$：

$$H(s,t) = \alpha\big((1-t)s + t\varphi(s)\big).$$

因 $(s,t) \mapsto (1-t)s + t\varphi(s)$ 连续且值域在 I，故 H 连续。且 $H(s,0) = \alpha(s)$、$H(s,1) = \alpha(\varphi(s))$，并且 $H(0,t) = x$、$H(1,t) = y$。

命题 9.38

运算 $\cdot$ 满足结合律：对任意 $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$，有

$$([\alpha] \cdot [\beta]) \cdot [\gamma] = [\alpha] \cdot ([\beta] \cdot [\gamma]).$$

♠

证明 设 $\delta : I \to X$ 为三段拼接回路

$$\delta(t) = \begin{cases} \alpha(3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ \beta(3t-1), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ \gamma(3t-2), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

由引理 9.10 知 δ 连续。

设 $\varphi_1, \varphi_2 : I \to I$ 为分段线性函数：

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases} \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}, & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

则可直接验证

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \delta \circ \varphi_1, \qquad \alpha * (\beta * \gamma) = \delta \circ \varphi_2.$$

由引理 9.11 得 $[\delta \circ \varphi_1] = [\delta] = [\delta \circ \varphi_2]$，从而结论成立。

命题 9.39

$[e_{x_0}]$ 为 $\pi_1(X, x_0)$ 中的单位元：对任意 $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$，有

$$[e_{x_0}] \cdot [\alpha] = [\alpha], \qquad [\alpha] \cdot [e_{x_0}] = [\alpha].$$

♠

证明 设 α 为以 x_0 为端点的回路。定义连续函数 $\rho,\sigma: I\to I$:

$$\rho(t)=\begin{cases}2t, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}\le t\le 1,\end{cases}\qquad \sigma(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le \frac{1}{2},\\ 2t-1, & \frac{1}{2}\le t\le 1.\end{cases}$$

则 $\alpha\circ\rho=\alpha*e_{x_0}$，$\alpha\circ\sigma=e_{x_0}*\alpha$。由引理 9.11 得 $[\alpha*e_{x_0}]=[\alpha]=[e_{x_0}*\alpha]$。

命题 9.40

对任意 $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$，其逆元为 $[\overline{\alpha}]$:

$$[\alpha]\cdot[\overline{\alpha}]=[e_{x_0}],\qquad [\overline{\alpha}]\cdot[\alpha]=[e_{x_0}].$$

证明 设 α 为以 x_0 为端点的回路。定义 $H: I\times I\to X$:

$$H(s,t)=\begin{cases}\alpha(2s(1-t)), & 0\le s\le \frac{1}{2},\\ \alpha(2(1-s)(1-t)), & \frac{1}{2}\le s\le 1.\end{cases}$$

因 $s=\frac{1}{2}$ 时两段同为 $\alpha(1-t)$，且 $[0,\frac{1}{2}]\times I\cup[\frac{1}{2},1]\times I=I\times I$ 为闭覆盖，由引理 9.10 得 H 连续。又 $H(s,0)=(\alpha*\overline{\alpha})(s)$，$H(s,1)=x_0=e_{x_0}(s)$，并且 $H(0,t)=H(1,t)=x_0$，故 $\alpha*\overline{\alpha}\simeq_\partial e_{x_0}$。将 α 替换为 $\overline{\alpha}$ 即得 $\overline{\alpha}*\alpha\simeq_\partial e_{x_0}$。

定理 9.10

配备运算 $\cdot$ 后，$\pi_1(X,x_0)$ 构成群，其单位元为 $[e_{x_0}]$，逆元由 $[\alpha]^{-1}=[\overline{\alpha}]$ 给出。

定义 9.18 (带基点空间与带基点映射)

(1) 带基点空间是指一对 (X,x_0)，其中 X 为拓扑空间且 $x_0\in X$。

(2) 设 (X,x_0)、(Y,y_0) 为带基点空间。若连续映射 $f: X\to Y$ 满足 $f(x_0)=y_0$，则称 f 为带基点映射，记作

$$f:(X,x_0)\to(Y,y_0).$$

定义 9.19

以带基点空间为对象、带基点映射为态射所成的范畴记为 Top_*。

命题 9.41

设 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 为带基点映射，则 f 诱导群同态

$$f_*:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0),\qquad [\alpha]\mapsto[f\circ\alpha].$$

证明 由带基点映射的定义，若 α 为以 x_0 为端点的回路，则 $f\circ\alpha$ 为以 y_0 为端点的回路。若 $\alpha\simeq_\partial\beta$，由同伦 $H: I\times I\to X$ 给出，则 $f\circ H$ 给出 $f\circ\alpha\simeq_\partial f\circ\beta$，故 f_* 良定义。又

$$f_*([\alpha]\cdot[\beta])=f_*([\alpha*\beta])=[f\circ(\alpha*\beta)]=[(f\circ\alpha)*(f\circ\beta)]=f_*([\alpha])\cdot f_*([\beta]),$$

因而 f_* 为群同态。

命题 9.42

记 Grp 为群与群同态所成的范畴。则赋值

$$(X,x_0)\longmapsto\pi_1(X,x_0),\qquad (f:(X,x_0)\to(Y,y_0))\longmapsto f_*$$

给出一个函子 $\pi_1:\mathrm{Top}_*\to\mathrm{Grp}$，即

$$(\mathrm{id}_{(X,x_0)})_*=\mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)},\qquad (g\circ f)_*=g_*\circ f_*.$$

证明 两个等式均由定义直接验证。

推论 9.7

若 $(X,x_0)\simeq(Y,y_0)$（即存在带基点同胚），则 $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,y_0)$。

证明 设 $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ 与 $g:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ 互逆。由函子性，$g_*\circ f_*=(g\circ f)_*=(\mathrm{id})_*=\mathrm{id}$，同理 $f_*\circ g_*=\mathrm{id}$，故 f_* 为同构。

定理 9.11

$\pi_1(S^1,1)\cong(\mathbb{Z},+)$。

定理 9.12 (Brouwer 不动点定理，二维情形)

设 $f:D^2\to D^2$ 连续，则存在 $x\in D^2$ 使 $f(x)=x$。

证明 反证。若 $\forall x\in D^2$ 有 $f(x)\neq x$，则可定义连续映射 $\varphi:D^2\to S^1$：对每个 x，过 $f(x)$ 与 x 的射线交 S^1 于唯一点 $\varphi(x)$（位于 x 一侧）。由几何构造可证 φ 连续，且 $\varphi|_{S^1}=\mathrm{id}_{S^1}$。

设 $i:S^1\hookrightarrow D^2$ 为包含映射，则 $\varphi\circ i=\mathrm{id}_{S^1}$。应用函子 π_1 得

$$\varphi_*\circ i_*=\mathrm{id}_{\pi_1(S^1,1)}.$$

然而 $\pi_1(D^2,1)=0$（D^2 可缩），故 i_* 是零映射，矛盾于 $\pi_1(S^1,1)\cong\mathbb{Z}\neq 0$。

9.2.8 局部紧空间

定义 9.20 (局部紧空间)

称拓扑空间 X 为局部紧的，若每点都有一个紧邻域。

命题 9.43

设 X 为 Hausdorff 空间，则以下条件等价：

(1) X 局部紧（即每点有紧邻域）；

(2) 每点有开邻域 U，使得 $\overline{U}$ 紧。

证明 (2)⇒(1) 显然，取 $A=\overline{U}$ 即为紧邻域。

(1)⇒(2) 设 $x\in X$ 有紧邻域 K。因 X 为 Hausdorff，紧子集 K 是闭的，且是 Hausdorff 空间。紧 Hausdorff 空间是正规的（从而正则），故在子空间 K 中，对 x 及开邻域 K°（x 在 X 中的邻域，故 $x\in K^\circ\subseteq K$），存在 X 中的开集 U 使得 $x\in U\subseteq\overline{U}\subseteq K^\circ\subseteq K$。因 $\overline{U}$ 是紧集 K 的闭子集，故 $\overline{U}$ 紧。

命题 9.44

局部紧 Hausdorff 空间是完全正则空间（从而正则）。

证明 设 X 局部紧 Hausdorff。由命题 9.43，对任意 x，存在开邻域 U 使 $\overline{U}$ 紧。$\overline{U}$ 作为紧 Hausdorff 空间是正规的，故完全正则。完全正则性质具有局部性，故 X 完全正则。(注：若仅需证明正则，利用 $\overline{U}$ 的正则性即可：对 x 及闭集 $F\not\ni x$，取 $\overline{U}$ 中分离它们的开集即可，注意需处理边界情况，或直接引用上述等价命题证明中的构造。)

命题 9.45

Hausdorff 紧空间为正规空间。

9.2.9 Baire 空间与纲

定义 9.21 (Baire 空间)

称拓扑空间 X 为 *Baire* 空间，若满足：任取 X 中一列稠密开集 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$，有 $\bigcap_n U_n$ 稠密。♣

定义 9.22 (稀疏集与无处稠密集)

设 X 为拓扑空间，$A \subseteq X$。

(1) 称 A 为稀疏集（或第一纲集），若 A 可写成可数个无处稠密集的并。

(2) 称 A 为无处稠密的，若 $\overline{A}^{\circ} = \varnothing$，即 $\overline{A}$ 的内部为空。

例：$\mathbb{R}$ 中的有理数集、Cantor 集均为稀疏集。♣

命题 9.46

A 无处稠密 $\Leftrightarrow$ 对任意非空开集 U，$A \cap U$ 在 U 中不稠密。♠

证明 ($\Rightarrow$) 设 A 无处稠密，即 $\overline{A}$ 内部为空。对任意非空开集 U，若 $A \cap U$ 在 U 中稠密，则 $U \subseteq \overline{A \cap U} \subseteq \overline{A}$，这蕴含 $\overline{A}$ 有非空内部 U，矛盾。

($\Leftarrow$) 若 A 不无处稠密，则 $\overline{A}$ 有非空内部 V。取 $U = V$，则 A 在 U 中稠密（因 $U \subseteq \overline{A}$），矛盾。

定义 9.23 (第一纲与第二纲)

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。

(I) 若存在一列无处稠密集 $(E_n)_n$ 使 $\Omega = \bigcup_n E_n$，则称 Ω 为第一纲集（或稀疏集，meager set）。

(II) 若 Ω 不是第一纲集，则称 Ω 为第二纲集。

注：第一纲集未必无处稠密（例如 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中）。♣

命题 9.47

X 为 Baire 空间 $\Leftrightarrow$ X 的每个非空开集为第二纲集。♠

证明 由定义直接可得。

命题 9.48

第一纲集对可数并封闭，且向下封闭：若 A 为第一纲集且 $B \subseteq A$，则 B 为第一纲集。♠

命题 9.49

无处稠密集的子集仍为无处稠密集。♠

命题 9.50

无处稠密集必为第一纲集，反之不然。♠

命题 9.51

设 X 为局部紧 Hausdorff 空间，K 紧，U 开且 $K \subseteq U$。则存在开集 V 与紧集 C 使得

$$K \subseteq V \subseteq C \subseteq U.$$

♠

证明 对每个 $x \in K$，取紧邻域 $C_x \ni x$ 使 $C_x \subseteq U$（利用局部紧 Hausdorff 空间的正则性）。则 $\{C_x^{\circ} : x \in K\}$ 覆盖 K，由紧性取有限子覆盖

$$K \subseteq C_{x_1}^{\circ} \cup \cdots \cup C_{x_n}^{\circ}.$$

令 $V = C_{x_1}^{\circ} \cup \cdots \cup C_{x_n}^{\circ}$（开），$C = C_{x_1} \cup \cdots \cup C_{x_n}$（紧），则 $K \subseteq V \subseteq C \subseteq U$。

命题 9.52

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。则

$$\Omega \text{ 无处稠密} \Leftrightarrow \overline{\Omega} \text{ 无处稠密} \Leftrightarrow \overline{\Omega}^{\circ} = \varnothing.$$

证明 由定义即得。

命题 9.53

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。则

$$\Omega \text{ 无处稠密} \Leftrightarrow \forall U \text{ 非空开集}, \exists V \text{ 非空开集使} V \subseteq U \text{ 且} V \cap \Omega = \varnothing.$$

证明 见命题 9.46 证明。

命题 9.54

设 X 为拓扑空间，U 开集，$\Omega \subseteq X$。则

$$\overline{\Omega \cap U}^{U} = \overline{\Omega} \cap U.$$

证明 ($\subseteq$) $\Omega \cap U \subseteq \overline{\Omega} \cap U$，后者在 U 中闭，故 $\overline{\Omega \cap U}^{U} \subseteq \overline{\Omega} \cap U$。

($\supseteq$) 设 $x \in \overline{\Omega} \cap U$。对任意 B 开于 U 且 $x \in B$，因 B 也开于 X，故 $B \cap \Omega \neq \varnothing$。而 $B \subseteq U$，故 $B \cap (\Omega \cap U) \neq \varnothing$，即 $x \in \overline{\Omega \cap U}^{U}$。

引理 9.12

设 X 为拓扑空间，Y 为 X 的开子集，$\Omega \subseteq Y$。则：

(I) Ω 在 Y 中无处稠密 $\Leftrightarrow$ Ω 在 X 中无处稠密；

(II) Ω 在 Y 中第一纲 $\Leftrightarrow$ Ω 在 X 中第一纲。

证明 (I) 利用命题 9.54，$\overline{\Omega}^{Y} = \overline{\Omega} \cap Y$。$\Omega$ 在 Y 中无处稠密 $\Leftrightarrow$ $\overline{\Omega}^{Y}$ 在 Y 中无内点 $\Leftrightarrow$ $(\overline{\Omega} \cap Y)^{\circ} \cap Y = \varnothing \Leftrightarrow \overline{\Omega}^{\circ} \cap Y = \varnothing$。若 Ω 在 X 中无处稠密，则 $\overline{\Omega}^{\circ} = \varnothing$，显然成立。反之，若 $\overline{\Omega}^{\circ} \cap Y = \varnothing$，且 $\Omega \subseteq Y$ 蕴含 $\overline{\Omega} \subseteq \overline{Y}$，则 $\overline{\Omega}^{\circ}$ 只能包含在 $X \setminus Y$ 的内部中？不完全正确。更直接证法：由命题 9.53。Ω 在 Y 中无处稠密 $\Leftrightarrow \forall$ 非空开 $U \subseteq Y$，$\exists$ 非空开 $V \subseteq U$，$V \cap \Omega = \varnothing$。这显然蕴含于 X 中的情形（因为 X 中的开集 U 若与 Y 相交，其交集为 Y 中开集）。

(II) 由 (I) 及第一纲集定义即得。

命题 9.55

设 X 为拓扑空间，则以下条件等价：

(1) X 是 Baire 空间（即可数个稠密开集的交仍稠密）；

(2) 每个非空开集为第二纲集；

(3) 每个第一纲集有空内部。

证明 (1)$\Rightarrow$(2)：设 U 非空开。若 U 第一纲，则 $U = \bigcup E_n$，E_n 无处稠密。则 $U_n = X \setminus \overline{E_n}$ 为稠密开集。由 Baire 性，$\bigcap U_n$ 稠密，故 $(\bigcap U_n) \cap U \neq \varnothing$。但 $(\bigcap U_n) \cap U = U \setminus \bigcup \overline{E_n} \subseteq U \setminus \bigcup E_n = \varnothing$，矛盾。

(2)$\Rightarrow$(3)：若 A 为第一纲集且有非空内部 $U \subseteq A$，则 U 为第一纲集，与 (2) 矛盾。

(3)$\Rightarrow$(1)：设 U_n 稠密开，令 $D = \bigcap U_n$。则 $D^c = \bigcup U_n^c$。因 U_n 稠密开，故 U_n^c 无处稠密。于是 D^c 为第一纲集。由 (3)，$(D^c)^{\circ} = \varnothing$，即 $\overline{D} = X$，故 D 稠密。

命题 9.56

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。则

$$\Omega \text{ 稀疏闭} \Rightarrow \Omega \text{ 无处稠密}.$$

（注意：第一纲闭集的补集未必稠密，但无处稠密闭集的补集稠密开。）

定义 9.24 (剩余集)

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。称 Ω 为剩余集（或余稀疏集，comeager set），若 Ω^c 为第一纲集。

命题 9.57

设 X 为拓扑空间，$\Omega \subseteq X$。则

$$\Omega \text{ 剩余} \Leftrightarrow \exists (U_n)_n \text{ 稠密开集列使} \Omega \supseteq \bigcap_n U_n.$$

证明 由定义即得。

定义 9.25 (遗传性质)

设拓扑空间 X 的性质 P 称为遗传性质，若满足：对任意 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$，子集 $\Omega \subseteq X$ 具有性质 P 当且仅当对所有 $U \in \mathcal{U}$，$\Omega \cap U$ 在 U 中具有性质 P。

例：开集、闭集均具有遗传性质。

例题 9.2 开集、闭集均为遗传性质。

设 $X = \bigcup \mathcal{U}$，$\mathcal{U}$ 为开覆盖，$\Omega \subseteq X$。

Ω 开 $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}$，$\Omega \cap U$ 开于 U（因 $\Omega \cap U$ 开于 X，故开于 U）。

反之，设 $\forall U \in \mathcal{U}$，$\Omega \cap U$ 开于 U。则 $\Omega = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (\Omega \cap U)$，而每个 $\Omega \cap U$ 开于 U（也开于 X），故 Ω 开于 X。

闭集类似（或取补）。

定理 9.13 (Banach 纲定理)

设 X 为拓扑空间。

(I) 稀疏集（第一纲集）具有遗传性质；

(II) 无处稠密集具有遗传性质。

证明 设 $X = \bigcup \mathcal{U}$，$\mathcal{U}$ 为开覆盖，$\Omega \subseteq X$。

(I) ($\Rightarrow$) 由引理 9.12 立得。

($\Leftarrow$) 设 $\forall U \in \mathcal{U}$，$\Omega \cap U$ 在 U 中第一纲。由引理 9.12，$\Omega \cap U$ 在 X 中第一纲。此时我们需要证明 $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} (\Omega \cap U)$ 在 X 中第一纲。若 $\mathcal{U}$ 是任意开覆盖，这需要选择公理（Zorn 引理）。令 $\mathcal{F} = \{V \text{ 开} : \Omega \cap V \text{ 在} X \text{ 中第一纲}\}$。令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{F}$ 中两两不交开集的极大族。设 $W = \bigcup \mathcal{M}$。易证 W 在 X 中稠密（否则其补集内部非空，与极大性矛盾）。在 W 上，$\Omega \cap W$ 局部第一纲，且 W 为不交开集并，故 $\Omega \cap W$ 为第一纲（局部有限性）。更精确的证明：设 $\Omega \cap U$ 第一纲。令 $A = \{x \in X : \Omega \text{ 在} x \text{ 的某邻域内第一纲}\}$。显然 A 是开集且 $\Omega \setminus A$ 无处稠密？不完全。

标准证法（Banach）：令 $U_0 = \bigcup \{V \text{ 开} : \Omega \cap V \text{ 第一纲}\}$。只需证 $\Omega \setminus U_0$ 第一纲（事实上无处稠密）。对任意非空开集 G，若 $G \cap (\Omega \setminus U_0)$ 在 G 中稠密... 这里略去详细步骤，直接引用结论：第一纲集的并仍为第一纲集（局部性质）。

(II) 同理，无处稠密集的局部性质成立。

定理 9.14 (Baire 纲定理)

以下空间均为 Baire 空间：

(1) 完备伪度量空间；

(2) 局部紧 Hausdorff 空间。

证明 (1) 设 (U_n) 为稠密开集列。需证 $\bigcap U_n$ 稠密。对任意非空开集 V_0，由 U_1 稠密，存在 x_1 及闭球 $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq U_1 \cap V_0$（$r_1 < 1/2$）。归纳构造闭球套 $\overline{B(x_n, r_n)} \subseteq U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$（$r_n < 2^{-n}$）。由完备性，$\bigcap \overline{B(x_n, r_n)} \neq \varnothing$，且交点在 $\bigcap U_n \cap V_0$ 中。

(2) 类似，利用局部紧空间的“开集内含紧闭包开集”性质构造紧集套。对非空开集 V_0，取非空开集 V_1 使 $\overline{V_1} \subseteq U_1 \cap V_0$ 且 $\overline{V_1}$ 紧。归纳构造 $\overline{V_n} \subseteq U_n \cap V_{n-1}$ 且 $\overline{V_n}$ 紧。由有限交非空性质（紧集套定理），$\bigcap \overline{V_n} \neq \varnothing$。

引理 9.13

设 $X = \bigcup \mathcal{U}$，$\mathcal{U}$ 为两两不交的开覆盖，$\Omega \subseteq X$。则

$$\Omega \text{ 稠密} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U},\ \Omega \cap U \text{ 在} U \text{ 中稠密}.$$

证明 ($\Rightarrow$) 显然。

($\Leftarrow$) 设 Ω 无处稠密。对任意非空开集 V 开于 X，$\mathcal{U}$ 覆盖 $X \Rightarrow$ 存在 $U \in \mathcal{U}$ 使 $U \cap V \neq \varnothing$。则 $\Omega \cap U$ 在 U 中稠密，故 $(\Omega \cap U) \cap (U \cap V) = \Omega \cap (U \cap V) \neq \varnothing$。于是存在 B 开于 X 使 $B \subseteq U \cap V$ 且 $B \cap \Omega \neq \varnothing \Rightarrow B \cap \Omega \cap U = \varnothing$ 矛盾。

引理 9.14

设 X 为拓扑空间，$\mathcal{U}$ 为开覆盖，$\Omega \subseteq X$。则

$$\Omega \text{ 第一纲} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U},\ \Omega \cap U \text{ 在} U \text{ 中第一纲}.$$

证明 ($\Rightarrow$) 显然。

($\Leftarrow$) 反设 Ω 在 X 中无处稠密，则对任意 $U \in \mathcal{U}$，$\Omega \cap U$ 在 U 中无处稠密。由 Zorn 引理，取 $\mathcal{V} \subseteq \{V \text{ 开} : \Omega \cap V \text{ 在} V \text{ 中第一纲}\}$ 为极大两两不交开族。

下证 $\bigcup \mathcal{V}$ 在 X 中稠密。反设 $\bigcup \mathcal{V}$ 不稠密，则存在 W 非空开使 $W \cap (\bigcup \mathcal{V}) = \varnothing$。存在 $U \in \mathcal{U}$ 使 $U \cap W \neq \varnothing$。而已知 $\Omega \cap U$ 在 U 中第一纲 $\Rightarrow \Omega \cap U \cap W$ 在 $U \cap W$ 中第一纲 $\Rightarrow$ 存在 B 开于 X 使 $B \cap (\Omega \cap U) = \varnothing$ 且 $B \cap \Omega \cap U = \varnothing$ 矛盾于 $\mathcal{V}$ 极大。

故 $\bigcup \mathcal{V}$ 稠密。对每个 $V \in \mathcal{V}$，$\Omega \cap V$ 在 V 中第一纲 $\Rightarrow$ 在 X 中第一纲。故 $\Omega = \Omega \cap (\bigcup \mathcal{V}) = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} (\Omega \cap V)$ 为第一纲（若 $\mathcal{V}$ 可数）。