调和多项式及其应用

摘要

本文介绍了复变函数中的一个小结论:可以用调和函数构造解析函数,由此引入调和多项式,进而介绍了$\mathbb{R}^n$中调和多项式的性质,其中重点介绍了n维调和多项式空间基底的刻画.

目录

1 从调和函数构造解析函数

在这一部分,我们介绍与数理方法课程相关的如下结论:

定理 1.1. 给定解析函数$f = u + iv$,则$\exists C \in \mathbb{R}, f(z) = 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) + iC$

1.1 形式推导

Lars V.Ahlfors在他的*Complex Analysis*中给出了如下的形式推导(我加入了一些注记):

考虑两个实变量的复函数$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$,引入复变量$z=x+iy,\bar{z}=x-iy$,则有变量替换$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}),y=-\frac{1}{2}i(z-\bar{z})$,此时可认为$f(x,y)$是$z$和$\bar{z}$的函数,利用链式法则则有

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y})$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y})$$

利用柯西黎曼方程,我们还可以知道f是解析函数就等价于$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$(这一点在我们的课堂上也讲过了)

重点是什么呢?我们可以认为$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$意味着$f$作为$z$和$\bar{z}$的函数与$\bar{z}$无关,从而可以写作$g(z)$,实际上也就是$f(z)$

根据这种思想,我们考虑f的共轭函数$\bar{f}:z\mapsto\overline{f(z)}=u-iv$,这个函数并不是解析的,因为如果解析的话那么$f\bar{f}=|f|^2$这个函数就是解析的了,这是矛盾的(除非$f=0$恒成立).尽管如此,我们还可以对其进行形式求导:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}+i\frac{\partial \bar{f}}{\partial y})=\frac{1}{2}((\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial v}{\partial x})+i(\frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial y}))=0$$

从而$\bar{f}$可以视作$\bar{z}$的函数,这样便可以写出恒等式

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(f+\bar{f})=\frac{1}{2}(f(x+iy)+\bar{f}(x-iy))$$

这里的x,y是实数,但我们可以形式地代入复数$x=\frac{z}{2},y=\frac{z}{2i}$,从而得到

$$u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})=\frac{1}{2}(f(z)+\bar{f}(0))$$

其中$\bar{f}(0)=u(0,0)+iC'$,$C'\in\mathbb{R}$,从而便得到了我们的主定理.

1.2 严格证明

1.2.1 多项式情形

我们先介绍调和多项式的情形,即$u(x,y)$是关于x,y的多项式,且为调和函数,例如$u(x,y)=xy$,史济怀老师的《复变函数》的习题2.2中的18题就是在讨论这个情形,下面陈述此情形.

定理 1.2. 若$u(x,y)$是x,y的调和多项式,则

$$f(z)=2u(\frac{z}{2},\frac{z}{2i})-u(0,0)$$

是$\mathbb{C}$上的全纯(解析)函数,并且$\forall z=x+iy\in\mathbb{C}, Ref(z)=u(x,y)$

在证明之前,我们给出一个错误想法.根据定义容易计算出$\dfrac{\partial z^n}{\partial z}=nz^{n-1},\dfrac{\partial \bar{z}^n}{\partial \bar{z}}=n\bar{z}^{n-1}$从而有如下推导:

设$u(x,y)=x^my^n$,则$f(z)=2(\frac{z}{2})^m(\frac{y}{2i})^n=\dfrac{z^{m+n}}{2^{m+n-1}}\dfrac{1}{i^n}$,,$Ref(z)=\frac{1}{2}(\dfrac{z^{m+n}}{2^{m+n-1}}\dfrac{1}{i^n}+\dfrac{\bar{z}^{m+n}}{2^{m+n-1}}\dfrac{1}{(-i)^n})=\dfrac{z^{m+n}+(-1)^n\bar{z}^{m+n}}{2^{m+n}}\dfrac{1}{i^n}=\dfrac{(x+iy)^{m+n}+(-1)^n(x-iy)^{m+n}}{2^{m+n}}\dfrac{1}{i^n}$,最后能发现结果不等于$u(x,y)$

这是为什么呢?事实上,并非所有形如x^my^n的多项式都是调和多项式,寻找调和多项式是一件比较复杂的事情,但是仍然有一种算法可以求出调和多项式的基底,下面列出六次以下的调和多项式之基底(其余的都是它们的线性组合):

例子 1.3. 六次以下的调和多项式之基底如下:

$$\begin{aligned}
\phi_0(x,y)&:=1\\
\phi_{1,1}(x,y)&:=x\\
\phi_{1,2}(x,y)&:=y\\
\phi_{2,1}(x,y)&:=xy\\
\phi_{2,2}(x,y)&:=x^2-y^2\\
\phi_{3,1}(x,y)&:=y^3-3x^2y\\
\phi_{3,2}(x,y)&:=x^3-3xy^2\\
\phi_{4,1}(x,y)&:=x^3y-xy^3\\
\phi_{4,2}(x,y)&:=-x^4+6x^2y^2-y^4\\
\phi_{5,1}(x,y)&:=5x^4y-10x^2y^3+y^5\\
\phi_{5,2}(x,y)&:=x^5-10x^3y^2+5xy^4\\
\phi_{6,1}(x,y)&:=3x^5y-10x^3y^3+3xy^5\\
\phi_{6,2}(x,y)&:=-x^6+15x^4y^2-15x^2y^4+y^6
\end{aligned}$$

既然具体的调和函数的表达式也比较复杂,不如就直接将一般地形式设出求解.在此之前,我们回忆$\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$,从而调和多项式$u$满足$\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}}=0$

证明 1.4. 设$u(x,y)=\sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{jk}x^jy^k, a_{jk}\in\mathbb{R}, z=x+iy$,将$x=\frac{1}{2}(z+\bar{z}), y=-\frac{1}{2}i(z-\bar{z})$代入可得$\sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{k=0}^{n}a_{jk}(\frac{1}{2}(z+\bar{z}))^j(-\frac{1}{2}i(z-\bar{z}))^k, a_{jk}=a_{00}+g_1(z)+g_2(z,\bar{z})+g_3(\bar{z})$,其

中g_1为上式左端只含变量z的单项式组成的复系数多项式,g_3为上式左端只含变量$\bar{z}$的单项式组成的复系数多项式,g_2为其余各项组成的多项式.

注意到$\dfrac{\partial g_1}{\partial \bar{z}} = \dfrac{\partial g_3}{\partial z} = 0$,故$\dfrac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$,设$g_2 = \displaystyle\sum_{p=1}^{m+n}\sum_{q=1}^{m+n} r_{pq} z^p \bar{z}^q, \dfrac{\partial^2 g_2}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \Longrightarrow \displaystyle\sum_{p=1}^{m+n}\sum_{q=1}^{m+n} r_{pq} p z^{p-1} q \bar{z}^{q-1} \equiv 0$由此只能有$r_{pq} = 0 \Longrightarrow g_2 = 0$.

另一方面,容易看出

$$g_1(z) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{jk}\left(\frac{z}{2}\right)^j\left(\frac{z}{2i}\right)^k - a_{00}, g_3(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{jk}(\frac{\bar{z}}{2})^j(-\frac{\bar{z}}{2i})^k - a_{00}$$

因为除了写出的项之外其他项要么含有交叉项要么复系数等于零.故有

$$u(x,y) = u(0,0) + g_1(z) + g_1(\bar{z})$$

我们知道,在定义域比较良好的情况下(比如一个连通区域),调和函数一定是某个解析函数的实部,从而$u = \dfrac{1}{2}(f + \bar{f})$于是$f(z) = 2u(\dfrac{z}{2}, \dfrac{z}{2i}) - u(0,0) + iC$为解析函数,且其实部为$u$.

1.2.2 一般情形

对于一般的调和函数,我们的想法是用多项式进行逼近,或者说我们希望把函数展开成幂级数的样子.我们有如下泰勒定理:

定理 1.5. 设函数$f(z)$在圆盘$\Delta(z_0, R) = \{z||z - z_0| \le R\}$内解析,则$\Delta(z_0, R)$内

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

.

由此我们可以证明如下命题(不妨设$z_0 = 0$):

定理 1.6. 若$u(x,y)$是圆盘$\Delta(z_0, R) = \{z||z-z_0| \le R\}$内的调和函数,令$f(z) = 2u(\dfrac{z}{2}, \dfrac{z}{2i})$,则$f(z)$解析,且$u(x,y) = Ref(z)$.

证明 1.7. 调和函数u一定是某个解析函数f的实部, 设$f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$,代入$z = x + iy, a_n = \alpha_n + i\beta_n$,则有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n)(x + iy)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_n + i\beta_n)\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k}(iy)^k$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k + i\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} x^j y^k = u(x,y) + iv(x,y)$$

其中$u(x,y) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k$,从而我们可以照搬多项式情形的证明,只需要将求和上限改为∞即可.

2 调和多项式简介

前文的主要思路是对调和多项式证明结论,再用调和多项式逼近调和函数得到结论,由此可见调和多项式作用巨大.进而我们希望刻画调和多项式的性质,如果我们记所有调和多项式构成的空间为$\mathcal{H} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{f|f$为$n$次调和多项式$\}$],下面会给出一种找到该空间的一组基底的方法.为推广起见,我们接下来主要考虑$\mathbb{R}^n$上的调和函数,并记$\mathcal{P}_m\{\mathbb{R}^n$上$m$次多项式的全体$\}$, $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n$.

2.1 前置知识

2.1.1 最大模原理

调和函数的一个很重要的性质就是最大模原理,叙述如下:

定理 2.1. 若函数u在连通区域Ω上为调和函数,且u在Ω内部取得最大值或最小值,那么u是常值函数.

极大模原理有简单推论如下:

推论 2.2. 设Ω是一个有界连通区域,u在$\bar{\Omega}$上连续且在Ω内为调和函数,那么u在$\partial\Omega$上取得最大值和最小值.

2.1.2 Poisson 核

n维单位开球记作B,其边界记作S.则n维单位球上的*Dirichlet*问题叙述如下:给定$f \in C(S)$找一个$u \in C(\bar{B})$使得u在B上为调和函数且$u|_S = f$,其中$u|_S$表示u在边界上的限制.

事实上,此问题存在唯一解$u(x) = P[f](x) = \displaystyle\int_S f(\zeta)\frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}d\sigma(\zeta)$.

其中$P(x,\zeta) = \dfrac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}$称作*Poisson*核,它关于$x$在$\mathbb{R}^n - \{\zeta\}$上是调和函数.

2.2 直和分解

我们不去关心*Dirichlet*问题如何导出,默认这个结果成立,而是关注*Poisson*核的性质及其推论.如果f是一个多项式,而$\dfrac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}$并不是一个多项式,因此我们并没有任何理由说$P[f]$是一个多项式,然而这是成立的,即它是一个调和多项式,有如下定理:

定理 2.3. 若p是$\mathbb{R}^{\ltimes}$中的m次多项式,那么

$$P[p|_S] = (1-|x|^2)q + p$$

其中q是次数不高于$m-2$的多项式.

证明 2.4. 对于任意q,在球面S上都有$(1-|x|^2)q+p=p$,因而为了解决边值条件$p|_S$下的*Dirichlet*问题,我们只需要找到q使得$(1-|x|^2)q+p$为调和函数即可,即证明存在次数不高于$m-2$的多项式q满足

$$\Delta((1-|x|^2)q)=-\Delta p$$

为证明这一点,我们记W_{m-2}为$\mathbb{R}^n$上次数最多为$m-2$的多项式的集合,不难看出这是一个有限维线性空间,并定义一个线性映射$T:W\to W$如下:

$$T(q)=\Delta((1-|x|^2)q)$$

若$T(q)=0$那么$(1-|x|^2)q$是一个调和函数且在边界上等于0,从而由最大模原理推论可知$(1-|x|^2)q=0,\forall x\in B$,从而$q=0$,这说明$T$是单射. 而我们又知道线性代数中有结论"有限维线性空间到自己的线性映射如果是单射,那么一定是满射",从而一定存在这样的q使得结论成立.

借助*Poisson*核,我们可以将$\mathcal{P}_m$作直和分解.分解借助定理2.3的一个关键推论:

推论 2.5. 对$p\in\mathcal{P}$,若$p\neq 0$,则$p|x|^2$不是调和函数.

证明 2.6. 反证法,设$p\in\mathcal{P}_m$,假设$p|x|^2$是调和函数,由于$p|_S=(|x|^2p)|_S$,由*Poisson*积分$P[p|_S]=|x|^2p$,然而等式左边是是不超过m次的多项式,等式右边是一个$m+2$次多项式,矛盾.

定理 2.7. $m\geq 2$,则$P_m(\mathbb{R}^n)=\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)\bigoplus|x|^2P_{m-2}(\mathbb{R}^n)$

证明 2.8. 对$p\in\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$,有分解

$$p=P[p|_S]+|x|^2q-q$$

对等式两边取次数为m的部分,则有

$$p=p_m+|x|^2q_{m-2}$$

其中p_m是$P[p|_S]$的次数为m的部分,q_{m-2}是q的次数为$m-2$的部分,从而存在性得证.

对于唯一性,设有$p_m+|x|^2q_{m-2}=\tilde{p}_m+|x|^2\tilde{q}_{m-2}$,这等价于

$$p_m-\tilde{p}_m=|x|^2(\tilde{q}_{m-2}-q_{m-2})$$

,等式左侧是一个调和函数,而右侧是一个$|x|^2$的多项式倍,从而由**推论**2.5可知$p_m=\tilde{p}_m,q_{m-2}=\tilde{q}_{m-2}$.

不难看出此定理有如下(递归)推论:

推论 2.9. 任意$p \in P_m(\mathbb{R}^n)$可唯一写作如下形式:

$$P = P_m + |x|^2 p_{m-2} + \cdots + |x|^{2k} p_{m-2k}$$

其中$k = [\frac{m}{2}], p_j \in \mathcal{H}_j(\mathbb{R}^n)$

最后,我们可以计算$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}_n)$的维数,从而了解其基底的个数.

定理 2.10. $m \geq 2$,则有

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbf{R}^n) = \binom{n+m-1}{n-1} - \binom{n+m-3}{n-1}$$

证明思路是运用多项式空间的分解,从而可以得到

$$\dim \mathcal{H}_m(\mathbf{R}^n) = \dim \mathcal{P}_m(\mathbf{R}^n) - \dim \mathcal{P}_{m-2}(\mathbf{R}^n)$$

由此可计算出$\mathbb{R}^2$中m次调和多项式空间的维数都是2,这与**例子** *1.3*中呈现的一致.

注记 2.11. 事实上,我们可以归纳出一般的求解二维调和多项式的算法,以7次为例,其基底形如

$$\phi_{7,1}(x,y) = a_7 x^7 + a_5 x^5 y^2 + a_3 x^3 y^4 + a_1 x y^6, \phi_{7,2}(x,y) = a_6 x^6 y + a_4 x^4 y^3 + a_2 x^2 y^5 + a_0 y^7$$

对$\phi_{7,1}$来说,由调和性质可知求导两次之后x^5, x^3y^2, xy^4前系数为0,从而得到线性方程组,其中有4个未知数,3个方程,不妨假设$a_7 = 1$之后可唯一解出$\phi_{7,1}$,对$\phi_{7,2}$同理.

事实上,由第一部分的复变函数定理证明过程中我们不难看到,如果将二维调和多项式看作$z, \bar{z}$的函数的话,那么$\{z^m, \bar{z}^m\}$便是$\mathcal{H}_m\mathbb{R}^2$的一组基.这与上面的算法也吻合.

2.3 Kelvin变换

在调和函数理论中,*Kelvin*变换是一种类似于反演变换的保持调和性质的变换.为此,我们先简要介绍一下反演变换.

和复变函数课程中一样,我们对$\mathbb{R}^n$作一点紧致化$\mathbb{R}^n \bigcup \{\infty\}$,并定义反演变换$x \mapsto x^*$如下:

$$x^* = \begin{cases} x/|x|^2 & if\ x \neq 0, \infty \\ 0 & if\ x = \infty \\ \infty & if\ x = 0 \end{cases}$$

类似地,对$E \subset \mathbb{R}^n$, $E^* = \{x^* | x \in E\}$,对函数u,可定义其反演变换$u^* : x \mapsto u(x^*)$

反演变换有如下性质:

性质 2.12. (1)反演变换在$\mathbb{R}^n - \{0\}$上是共形变换,即保角变换. (2)反演变换将球体映射为球体,将超平面映射为超平面.

例子 2.13. 特别地,对$\mathbb{R}^2$即$\mathbb{C}$情形,反演变换可以表示为$z \mapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$,此时 $u*$也是调和函数.这是因为采取极坐标后$u(r,\theta) \mapsto u^*(r,\theta) = u(\dfrac{1}{r},\theta)$,此时

$$\Delta u^* = 0 \iff \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} = 0$$

亦即

$$u^*_{rr} + \frac{1}{r}u^*_r + \frac{1}{r^2}u^*_{\theta\theta} = 0$$

计算可知

$$u^*_r = -\frac{1}{r^2}u_r, u^*_{rr} = \frac{2}{r^3} + \frac{1}{r^4}u_{rr}, u^*_{\theta\theta} = u_{\theta\theta}$$

然而这个结论对于$n > 2$并不成立,一个经典的例子是$|x|^{2-n}$,计算如下:

例子 2.14. $|x|^{2-n}$本身是调和函数,但是在反演变换之后不是调和函数.

变换前为调和函数容易验证,变换后得到的函数为$|x|^{n-2} = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{n-2}{2}}$,对其求偏导可知

$$\Delta |x|^{n-2} = (n^2 - n - 4)(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{n}{2}-2} \neq 0$$

尽管如此,我们还是可以找到一种保持函数调和性质的变换:*Kelvin*变换.其想法是对*Poisson*核应用如下对称引理:

引理 2.15. 对$0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$,有 $\left|\dfrac{y}{|y|} - |y|x\right| = \left|\dfrac{x}{|x|} - |x|y\right|$

对固定的$\zeta \in \mathbb{R}^n$,其*Poisson*核定义为$P(x,\zeta) = \dfrac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}$,应用对称引理可知$|x - \zeta| = ||x|^{-1}x - |x|\zeta|$,代入*Poisson*核知

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{||x|^{-1}x - |x|\zeta|^n} = -|x|^{2-n}P(x^*,\zeta)$$

由于左侧的*Poisson*核在$\mathbb{R}^n - \{0,\zeta\}$上是调和函数,从而右侧也是调和函数.

这启发我们定义***Kelvin*变换**:

$$K[u](x) = |x|^{2-n}u(x^*)$$

其中u定义在$E \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$上.

当$n = 2$时,*Kelvin*变换就是反演变换.不难验证*Kelvin*变换还有如下性质:

性质 2.16. (1)线性性:$K[bu + cv] = bK[u] + cK[v]$;

(2)幂等性:$K[K[u]] = u$

之前讲了,*Kelvin*变换保持函数调和性质不变,现在来证明它.

引理 2.17. 若$p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$,则有

$$\Delta(|x|^{2-n-2m}p) = |x|^{2-n-2m}\Delta p$$

证明 2.18. 容易得到$\Delta(|x|^t) = t(t+n-2)|x|^{t-2}$ 由*Laplace*算子的乘积法则,有$\Delta(uv) = u\Delta v + 2\nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u$, 从而$\Delta(|x|^t p) = |x|^t\Delta p + 2t|x|^{t-2}x \cdot \nabla p + t\,(t+n-2)\,|x|^{t-2}p$,再由齐次函数性质可知$x \cdot \nabla p = mp$,故

$$\Delta(|x|^t p) = |x|^t\Delta p + t(2m+t+n-2)|x|^{t-2}p$$

代入$t = 2-n-2m$可以得到引理成立.

下面这个命题说明了*Kelvin*变换保持了函数的调和性质:

命题 2.19. 若$u \in C^2(\mathbb{R}^{\nvDash} - \{0\})$,那么有

$$\Delta(K[u]) = K[|x|^4\Delta u]$$

证明 2.20. 对m次齐次多项式p,有

$$\begin{aligned}\Delta(K[p]) &= \Delta(|x|^{2-n-2m}p)\\ &= |x|^{2-n-2m}\Delta p\\ &= K[|x|^4\Delta p]\end{aligned}$$

其中,第一个等号是由于齐次函数的性质,第二个等号是因为刚才的引理, 第三个等号成立是因为齐次函数的性质($|x|^4 p$是一个$m+2$次齐次函数).

再利用多项式空间在C^2函数空间的稠密性可知结论成立,这里不作详细论证.

从而我们得到了如下定理:

定理 2.21. $\Omega \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,那么$u$为$\Omega$中的调和函数当且仅当$K[u]$为$\Omega^*$中的调和函数.

2.4 基底的刻画

在注记2.11中,我们给出了平面上调和多项式基底的算法,这一节给出一般维数中调和多项式基底的刻画.给定多项式$p = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$定义微分算子$p(D) = \sum_\alpha c_\alpha D^\alpha$,多重指标$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$满足$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_t$.

首先,我们给出如下引理:

引理 2.22. $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$,则$K[p(D)|x|^{2-n}] \in \mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$

证明 2.23. 我们首先证明$K[p(D)|x|^{2-n}] \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$,不妨假设$p$是单项式,$m = 0$情形即常数情形显然成立.下面运用归纳法,假设$m$情形成立.设$\alpha$是一个满足$|\alpha| = m$的多重指标,由归纳假设可知存在$u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$,满足

$$K[D^\alpha|x|^{2-n}] = u$$

对上式两边进行$Kelvin$变换可知

$$D^\alpha|x|^{2-n}=|x|^{2-n-2m}u$$

固定指标j,两边同时对x_j求偏导可得

$$\begin{aligned}D_jD^\alpha|x|^{2-n}&=(2-n-2m)x_j|x|^{-n-2m}u+|x|^{2-n-2m}D_ju\\&=|x|^{2-n-2(m+1)}\left[(2-n-2m)x_ju+|x|^2D_ju\right]\\&=|x|^{2-n-2(m+1)}v\end{aligned}$$

其中$v\in\mathcal{P}_{m+1}(\mathbb{R}^n)$,在对上面的式子进行$Kelvin$变换可得

$$K[D_jD^\alpha|x|^{2-n}]=v$$

由j的任意性即得$m+1$情形成立.

下面只需证明$K[p(D)|x|^{2-n}]$是调和函数,事实上,调和函数的任意阶导数都是调和函数,再结合$Kelvin$变换保持函数调和性质不变即知结论成立.

在定理2.7中我们知道一个多项式p可以唯一分解为$p_m+|x|^2q$,其中$p_m\in\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$, $q\in\mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{R}^n)$,由引理2.22可知$K[p(D)|x|^{2-n}]\in\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$,从而$p$可以决定两个调和多项式$p_m$和$K[p(D)|x|^{2-n}]$,一个自然的问题是:它们的关系是什么?事实上,我们有如下引理,这说明它们只差了一个常数c_m倍,其中$c_m=\prod_{k=0}^{m-1}(2-n-2k)$.

引理 2.24. 设$n>2, p\in\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$,则$K[p(D)|x|^{2-n}]=c_m(p-|x|^2q)$

证明 2.25. 这个引理的证明和上面一个引理的证明基本一致,都是对m使用归纳法,在m情形对等式两端进行$Kelvin$变换,求导之后再进行$Kelvin$变换即可.

此命题中m情形即

$$K[D^\alpha|x|^{2-n}]=c_m(x^\alpha-|x|^2q)$$

设$u=c_m(x^\alpha-|x|^2q)$,对两边$Kelvin$变换,对j求偏导可得

$$\begin{aligned}D_jD^\alpha|x|^{2-n}&=|x|^{2-n-2(m+1)}c_m\left[(2-n-2m)x_j(x^\alpha-|x|^2q)+\frac{|x|^2D_ju}{c_m}\right]\\&=|x|^{2-n-2(m+1)}c_{m+1}(x_jx^\alpha-|x|^2v)\end{aligned}$$

其中$v\in\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{R}^n)$,再进行一次$Kelvin$变换可得

$$K[D_jD^\alpha|x|^{2-n}]=c_{m+1}(x_jx^\alpha-|x|^2v)$$

这里是对单项式证明的,由线性性和j的任意性可知对于一般情形成立.

结合投影的性质和上述两个引理,我们不难得到下面这个定理:

定理 2.26. 设$n > 2, p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$,则由$p$到(直和分解定理诱导出的)$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$的典范投影作用得到的结果为$K[p(D)|x|^{2-n}]/c_m$

最后,让我们完成本文的主定理:找到调和多项式空间的一组基.我们有如下定理:

定理 2.27. 设$n > 2$那么集合

$$\{K[D^\alpha |x|^{2-n}] : |\alpha| = m \text{ and } \alpha_1 \le 1\}$$

是$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$的一组基底.

证明 2.28. 事实上,由定理2.26可知,形如$K[D^\alpha|x|^{2-n}]$的元素张成了整个空间$\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$,这些元素显然是线性无关的,下面只需证明第一个指标分量$\alpha_1 > 1$的形如$K[D^\alpha|x|^{2-n}]$的元素也在$\mathcal{B} = \{K[D^\alpha|x|^{2-n}] : |\alpha| = m \text{ and } \alpha_1 \le 1\}$张成的空间中即可.

对α_1采取归纳法,假设结论对多重指标β成立,即

$$K[D^\beta|x|^{2-n}] \in span\mathcal{B}$$

其中β是第一个指标分量小于等于α_1的多重指标.由于$\Delta|x|^{2-n} = 0$(这会起到转移求导指标的作用),我们有

$$\begin{aligned}
K[D^\alpha|x|^{2-n}] &= K[{D_1}^{\alpha_1-2}{D_2}^{\alpha_2}\dots{D_n}^{\alpha_n}({D_1}^2|x|^{2-n})] \\
&= -K[{D_1}^{\alpha_1-2}{D_2}^{\alpha_2}\dots{D_n}^{\alpha_n}(\sum_{j=2}^{n}{D_j}^2|x|^{2-n})] \\
&= -\sum_{j=2}^{n}K[{D_1}^{\alpha_1-2}{D_2}^{\alpha_2}\dots{D_n}^{\alpha_n}({D_j}^2|x|^{2-n})]
\end{aligned}$$

由归纳假设,上面的每一项都在$span\mathcal{B}$中,从而结论成立.

至此,我们在理论上给出了一组可计算的调和多项式空间的一组基,尽管计算可能还是有些复杂,不过我们可以借助计算机,比如下面的例子:

例子 2.29. $\mathcal{H}_4(\mathbb{R}^3)$的一组基底如下:

$$\begin{aligned}
&\{3|x|^4 - 30|x|^2x_2^2 + 35x_2^4, \\
&3|x|^2x_2x_3 - 7x_2^3x_3, \\
&|x|^4 - 5|x|^2{x_2}^2 - 5|x|^2{x_3}^2 + 35{x_2}^2{x_3}^2, \\
&3|x|^2x_2x_3 - 7x_2{x_3}^3, \\
&3|x|^4 - 30|x|^2{x_3}^2 + 35{x_3}^4, \\
&3|x|^2x_1x_2 - 7x_1{x_2}^3, \\
&|x|^2x_1x_3 - 7x_1x_2^2x_3, \\
&|x|^2x_1x_2 - 7x_1x_2x_3^2, \\
&3|x|^2x_1x_3 - 7x_1x_3^3\}.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] 张燕勤,张琳,& 王安. (2009). 由调和函数构造解析函数的一种方法. 首都师范大学学报(自然科学版), 30(1)

[2] Harmonic polynomial. (2023, November 13). In Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_polynomial

[3] Axler,S.,Bourdon,P., & Ramey, W. (2001). Harmonic Function Theory (Second Edition). Springer.