PDE 讨论班

希尔伯特的眼泪

目录

1 第一次讨论

这次讨论简要讨论了调和函数的基本性质,这是标准内容,在Evans和Gilbarg-Trüdinger的书上都有.

2 第二次讨论

在上次讨论中,我们讨论了调和函数的平均值性质,强极值原理和弱极值原理,以及调和函数的光滑性,最后给出了调和函数的导数内估计.这次我们从下调和函数的概念出发,将极值原理推广到一般的二阶椭圆算子.

引理 2.1. 假设Ω是有界区域,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$下调和定义为$\Delta u(x) \geqslant 0, \forall x \in \Omega$.则

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

注记 2.2. 下调和的"下"体现在平均值性质.

下面利用Hopf极值原理给出强极值原理的另一证明:

引理 2.3. *Hopf*极值原理 设$u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$下调和.若 $u(x) < u(x_0), \forall x \in B = B_1(0), x_0 \in \partial B$.如果$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$存在(例如我们可假定$u \in C^1(B \cup \{x_0\})$),则

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

此处 ν 为外法向.

由Hopf原理可以推出下调和函数的强极值原理:

定理 2.4. 若下调和函数在内部取得极大值,则u必为常数.

注记 2.5. 由强极值原理可推出弱极值原理.

利用此方法,我们可将极值原理推广到一般的二阶椭圆算子

$$Lu \equiv a_{ij}(x) D_{ij} u + b_i(x) D_i u + c(x) u, \quad x \in \Omega.$$

.为此,先给出相关定义.

定义 2.6. 考虑有界区域Ω,令a_{ij}, b_i, c都是其中的有界连续函数,且$a_{ij} = a_{ji}$,则我们称

$$Lu \equiv a_{ij}(x) D_{ij} u + b_i(x) D_i u + c(x) u, \quad x \in \Omega$$

为二阶椭圆算子. 下面是几个相关概念:

- 若$\exists\lambda>0$使得$\sum_{i,j}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geq\lambda|\xi|^2.\forall x\in\Omega,\forall\xi\in\mathbb{R}^n$,则称其严格椭圆.
- 若$\exists\lambda,\Lambda>0$使得$\lambda|\xi|^2\leq\sum_{i,j}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\Lambda|\xi|^2.\forall x\in\Omega,\forall\xi\in\mathbb{R}^n$,则称其一致椭圆.

下面给出二阶椭圆算子的弱极值原理:

引理 2.7. 设$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$满足$Lu\geq 0,c\leq 0$在$\Omega$中均成立,则

$$\sup_{\Omega}u=\sup_{\partial\Omega}u.$$

3 第三次讨论

利用二阶椭圆算子的弱极值原理可以类似的给出二阶椭圆算子的Hopf引理和强极值原理,叙述如下:

引理 3.1. 设$u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$,满足$Lu\geq 0,c\leq 0$在$\Omega$中均成立,且$x_0\in\partial\Omega$满足$u(x_0)<u(x),u(x_0)\geq 0,\forall x\in\Omega$并有开球$B\subset\Omega,x_0\in\partial B$则

$$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}(x_0)<0$$

,$\boldsymbol{n}$是B的单位外法向量.

定理 3.2. 设Ω为有界开区域,$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$满足$Lu\geq 0,c\leq 0$在$\Omega$中均成立,则$u$的最大值必在边界$\partial\Omega$取到除非$u$为常数.

下面利用强极值原理给出几个有用的推论:

推论 3.3. 设Ω为有界开区域,$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$满足$Lu\geq 0,c\leq 0$在$\Omega$中均成立.并有$u\leq 0,\forall x\in\partial\Omega$,则$u\leq 0\in\Omega$.

推论 3.4. 设Ω为有界开区域,$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$满足$Lu\geq 0,\forall x\in\Omega$.若$u\leq 0$,则$u<0$或$u\equiv 0$.

最后利用上面的定理给出二阶椭圆偏微分方程的Dirichlet问题和Neumann问题的解的先验估计.为了简便,事先规定Ω为一有界区域,$Lu=a_{ij}(x)D_{ij}u+b_i(x)u+c(x)u,u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$其中$a_{ij},b_i,c$在$\Omega$中连续从而有界,且

$$\max_{\Omega}|a_{ij}|+\max_{\Omega}|b_i|\leq\Lambda$$

. 并有

$$a_{ij}(x)y_iy_j \geq \lambda|y|^2, \forall x \in \Omega, y \in \mathbb{R}^n$$

定理 3.5. 设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$满足$\begin{cases} Lu = f, x \in \Omega \\ u = \varphi, x \in \partial\Omega \end{cases}$ $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega), c \leq 0$ 则

$$|u(x)| \leq \max_{\partial\Omega}|\varphi| + C\max_{\Omega}|f|, \forall x \in \Omega$$

其中C仅与$\lambda, \Lambda, diam(\Omega)$有关

定理 3.6. 设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$满足$\begin{cases} Lu = f, x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha(x)u = \varphi, x \in \partial\Omega \end{cases}$ $f \in C(\bar{\Omega}), \varphi \in C(\partial\Omega), c \leq 0, \alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ 则

$$|u(x)| \leq C(\max_{\partial\Omega}|\varphi| + \max_{\Omega}|f|), \forall x \in \Omega$$

其中C仅与$\lambda, \Lambda, \alpha_0, diam(\Omega)$有关.

注记 3.7. 上面的两个先验估计式已经证明了在相应条件下*Dirichlet*问题和*Neumann*问题解的唯一性.

注记 3.8. 当$\alpha(x) \geq 0$时我们不仅无法建立相应的先验估计式,甚至连解的唯一性都无法保证.例如假设$c \equiv 0, \alpha \equiv 0$,这时仅仅能够保证该问题的两个解之间只相差一个常数.

4 第四次讨论

梯度估计的基本想法是对$v = |Du|^2$应用最大值原理，下面将以半线性方程为例给出全局梯度估计与内部梯度估计，以展示这一想法.

下面考虑方程

$$a_{ij}(x)D_{ij}u + b_i(x)D_iu = f(x,u), \qquad x \in \Omega \tag{3.1}$$

其中$u \in C^2(\Omega), f \in C(\Omega \times \mathbb{R})$，$\Omega$为$\mathbb{R}^n$中有界连通区域，$a_{ij}, b_i$在$\overline{\Omega}$上连续有界，且有一致椭圆假设

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \qquad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n$$

命题 4.1. 假设$u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$满足(3.1)，且$a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega})$，$f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$，则有

$$\sup_{\Omega} |Du| \leq \sup_{\partial\Omega} |Du| + C$$

其中$C > 0$仅与$\lambda, \mathrm{diam}(\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\overline{\Omega})}, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}, |f|_{C^1(\overline{\Omega} \times [-M, M])}$有关.

同样地可以得到内部梯度估计.

命题 4.2. 设$u \in C^3(\Omega)$满足(3.1)，其中$a_{ij}, b_i \in C^1(\overline{\Omega}), f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$，则对任意紧集$\Omega' \subset\subset \Omega$

$$\sup_{\Omega'} |Du| \leq C$$

其中$C > 0$只与$\lambda, \mathrm{diam}(\Omega), \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega), |a_{ij}, b_i|_{C^1(\overline{\Omega})}, M = |u|_{L^\infty(\overline{\Omega})}, |f|_{C^1(\overline{\Omega} \times [-M, M])}$有关.

下面假设Ω满足一致外部球条件，即存在$R > 0$，使得对任意$x \in \partial\Omega$，存在球$B(y, R) \subset \Omega^c$且$\overline{B(y, R)} \cap \overline{\Omega} = \{x\}$，可得边界梯度估计.

命题 4.3. 设$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$满足(3.1)，其中$a_{ij}, b_i \in C(\overline{\Omega}), f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$，则有

$$|u(x) - u(x_0)| \leq C|x - x_0|, \qquad x \in \Omega, x_0 \in \partial\Omega$$

其中$C > 0$只与$\lambda, \Omega, M = |u|_{L^\infty(\Omega)}, |f|_{L^\infty(\Omega \times [-M, M])}$，以及$|\varphi|_{C^2(\overline{\Omega})}$，其中$\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$满足$\varphi = u, x \in \partial\Omega$有关.

C 先前在Hopf引理中我们利用非齐次项的L^∞范数给出了解的估计，下面我们将利用其L^n范数给出估计。同时对拟线性方程给出估计。

我们考虑二阶椭圆算子

$$L = a_{ij}(x)D_{ij} + b_i(x)D_i + c(x), \qquad x \in \Omega \tag{4.1}$$

记$D = det(A), D^* = D^{\frac{1}{n}}$。

对$u \in C^2(\Omega)$，记上接触集$\mathit{\Gamma}^+ = \{y \in \Omega : u(x) \leqslant Du(y) \cdot (x - y), \forall x \in \Omega \ \}$。此时矩阵$D^2u$在$\Gamma^+$中半负定。

引理 4.4. 若$g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$非负，则对任意$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$有：

$$\int_{B_{\tilde{M}}(0)} g \leqslant \int_{\Gamma^+} g(Du)|detD^2u|$$

其中$\tilde{M} = (\sup_\Omega u - \sup_{\partial\Omega} u^+)/diam(\Omega)$

注记 4.5. 对于任意正定矩阵$A=(a_{ij})$有

$$det(-D^2u)\leqslant\frac{1}{D}(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{n})^n,\qquad x\in\Gamma^+$$

因此引理*4.1*有另一形式

$$\int_{B_{\tilde{M}}(0)}g\leqslant\int_{\Gamma^+}g(Du)(\frac{-a_{ij}D_{ij}u}{nD^*})^n$$

通过在引理中选择适当的g可以对$\tilde{M}$进行估计。

定理 4.6. 若$u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$满足$Lu\geqslant f$且

$$\frac{|b|}{D^*},\frac{f}{D^*}\in L^n(\Omega);\ c\leqslant 0\quad in\,\Omega$$

则

$$\sup_{\Omega}u\leqslant\sup_{\partial\Omega}u^++C||\frac{f^-}{D^*}||_{L^n(\Gamma^+)}$$

其中，C与$n,diam(\Omega),||\frac{b}{D^*}||_{L^n(\Gamma^+)}$有关

接下来可以通过引理对拟线性方程进行先行估计

命题 4.7. $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$满足

$$Qu=a_{ij}(x,u,Du)D_{ij}u+b(x,u,Du)=0,\qquad in\Omega$$

其中$a_{ij}\in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$满足$\{a_{ij}\}$正定。且$g\in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n),h\in L^n(\Omega)$满足

$$\frac{|b(x,z,p)|}{nD^*}\leqslant\frac{h(x)}{g(p)}\qquad\forall(x,z,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

$$\int_{\Omega}h^n(x)dx<\int_{\mathbb{R}^n}g^n(p)dp=g_\infty$$

则$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+C\,diam(\Omega),C=C(g,h)$。

推论 4.8. $u\in C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$满足

$$det(D^2u)=f(x,u,Du)$$

其中$f\in C(\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$，若存在非负函数$g\in L^n_{loc}(\mathbb{R}^n),h\in L^1(\Omega)$满足

$$|f(x,z,p)|\leqslant\frac{h(x)}{g(p)},\quad\forall(x,z,p)\in\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

$$\int_{\Omega}h(x)dx<\int_{\mathbb{R}^n}g(p)dp=g_\infty$$

则$\sup_{\Omega}|u|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|u|+C\,diam(\Omega),C=C(g,h)$。

最后考虑在一小区域内的极值原理：

考虑

$$Lu = a_{ij}D_{ij}u + b_iD_iu + cu$$

其中$\{a_{ij}\}$正定且

$$|b_i| + |c| \leqslant \Lambda; \qquad det(a_{ij}) \geqslant \lambda$$

定理 4.9. 若$u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$满足$Lu \geqslant 0\, in\, \Omega$且$u \leqslant 0\, on\, \partial\Omega$。设$diam(\Omega) \leqslant d$，则存在$\delta = \delta(n, \lambda, \Lambda, d) > 0$使得当$|\Omega| \leqslant \delta$时$u \leqslant 0\, in\, \Omega$

5 第五次讨论

定理 5.1. 假设 $u \in C(\bar{B}_1) \cap C^2(B_1)$ 是一个正解，满足

$$\begin{aligned} \Delta u + f(u) = 0 \quad &\text{在 } B_1, \\ u = 0 \quad &\text{在 } \partial B_1, \end{aligned}$$

其中 f 在 $\mathbb{R}$ 上局部$Lipschitz$连续。那么 u 在 B_1 中是径向对称的，并且 $\frac{\partial u}{\partial r}(x) < 0$ 对于 $x \neq 0$。

主要的内容以及相关记号请参考44页2.6节，移动平面法的基本思路就是对$w_\lambda(x)$在 $\sum_\lambda$ 内的极值原理，由于其在边界上小于等于0且不恒为0，所以由极值原理可以推出在整个区域内都小于0，从而证明对称性的相关结论。窄域/小体积区域的极值原理能保证平面可以开始（向左）移动，假设移动不到0处，便反证，利用小体积的极值原理证明其还可以再往左移动一些，从而得到结论成立。

此处用到的重要极值原理有二：一是Prop 2.13（窄域内的极值原理）和Theorem 2.32（小体积区域的极值原理），在反证法只可以用小体积区域的极值原理而不可以用窄域内的极值原理，这是因为书中证明的 x_1 轴上的对称性结论是关于一般区域的，采用的是紧集逼近的办法，此时不可保证“窄域”条件成立。对于两个极值原理，在有界区域的情形下，后者显然能推出前者。然而Theorem 2.32是由Alexandroff 最大值原理推出的，证明较繁。但是这对于一般的区域来说都是对的，事实上，书上考虑的是球的情形，从而超平面截取球可以得到紧集，从而可以用“连续性论证”，借助窄域极值原理就可以得到结论。

6 第六次讨论

本次讨论旨在证明一些用于刻画Hölder连续的不等式，以为接下来的讨论打下基础.

以下设Ω为$\mathbb{R}^n$中有界连通开集，$u \in L^1(\Omega)$，对任意球$B_r(x_0) \subset \Omega$，记

$$u_{x_0,r} = \frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} u.$$

定理 6.1. 设$u \in L^2(\Omega)$满足

$$\int_{B_r(x_0)} |u - u_{x,r}|^2 \leq M^2 r^{n+2\alpha}, \qquad \text{对任意} B_r(x) \subset \Omega$$

对$\alpha \in (0,1)$，则$u \in C^\alpha(\Omega)$，且对任意$\Omega' \subset\subset \Omega$，有

$$\sup_{\Omega'} |u| + \sup_{\substack{x,y \in \Omega' \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq c(M + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

其中$c = c(n, \alpha, \Omega, \Omega') > 0$

在用这一结论证明Sobolev空间中的Morrey不等式之前，需要如下的重要引理.

引理 6.2 (Poincare不等式). 设Ω为$\mathbb{R}^n$中有界区域，$u \in W^{1,p}(\Omega)$，$1 < p < \infty$，则

$$\|u - u_{x,r}\|_{L^p(\Omega)} \leq C(\Omega) \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

容易证明

推论 6.3. 设$u \in H^1_{loc}(\Omega)$满足

$$\int_{B_r(x)} |Du|^2 \leq M^2 r^{n-2+2\alpha}, \qquad \text{对任意} B_r(x) \subset \Omega$$

对$\alpha \in (0,1)$.则$u \in C^\alpha(\Omega)$，对任意$\Omega' \subset\subset \Omega$有

$$\sup_{\Omega'} |u| + \sup_{\substack{x,y \in \Omega' \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq c(M + \|u\|_{L^2(\Omega)})$$

其中$c = c(n, \alpha, \Omega, \Omega') > 0$

下面的结果在以后的讨论中会被用到

引理 6.4. 设$u \in H^1(\Omega)$满足

$$\int_{B_r(x_0)} |Du|^2 \le Mr^\mu, \qquad \text{对任意} B_r(x_0) \subset \Omega$$

对$\mu \in [0,n)$，则对任意$\Omega' \subset\subset \Omega$，$B_r(x_0) \subset \Omega$使得$x_0 \in \Omega'$，有

$$\int_{B_r(x_0)} |u|^2 \le c(n,\lambda,\mu,\Omega,\Omega')(M + \int_\Omega u^2) r^\lambda$$

其中若$\mu < n-2$，则$\lambda = \mu + 2$，若$n-2 \le \mu < n$，则λ为$[0,n)$中任一常数.

需要用到如下引理

引理 6.5. 设$\phi(t)$为$[0,R]$上的非负不减函数，假设

$$\phi(\rho) \le A((\frac{\rho}{r})^\alpha + \epsilon)\phi(r) + Br^\beta$$

对任意$0 < \rho \le r \le R$使得A,B,α,β为非负常数且$\beta < \alpha$，则对任意$\gamma \in (\beta,\alpha)$，存在常数$\epsilon_0 = \epsilon_0(A,\alpha,\beta,\gamma)$使得若$\epsilon < \epsilon_0$，任意$0 < \rho \le r \le R$，有

$$\phi(\rho) \le c((\frac{\rho}{r})^\gamma \phi(r) + B\rho^\beta)$$

其中c仅与A,α,β,γ有关.特别地，对任意$0 < r \le R$，有

$$\phi(r) \le c(\frac{\phi(R)}{R^\gamma} r^\gamma + Br^\beta).$$

7 第七次讨论

我们下一阶段的目标是用凝固系数法证明弱解的Hölder连续性,在此之前,我们先做一些铺垫.

引理 7.1. *(Cacciopolli's Inequality)*假设$u \in C^1(B_1)$,满足

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi = 0$$

对任何$\varphi \in C_0^1(B_1)$成立

那么对于任意$\eta \in C_0^1(B_1)$，有$\int_{B_1} \eta^2 |Du|^2 \le C \int_{B_1} |D\eta|^2 u^2$

推论 7.2. u同上,则对于任意的$0 < R \le 1$,有

$$\int_{B_{R/2}} u^2 \le \theta \int_{B_R} u^2 \int_{B_{R/2}} |Du|^2 \le \theta \int_{B_R} |Du|^2$$

引理 7.3. 设(a_{ij})为正定矩阵,满足$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$,$u \in C^1(B_1)$满足 $\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^1(B_1)$. 那么$\forall 0 < \rho \le r$

$$\int_{\boldsymbol{B}_\rho} |u|^2 \le c\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r} |u|^2,$$

$$\int_{\boldsymbol{B}_\rho} |u-u_\rho|^2 \le c\Big(\frac{\rho}{r}\Big)^{n+2} \int_{B_r} |u-u_r|^2$$

将上述估计应用到$D\omega$上，容易得到如下估计:

引理 7.4. 设矩阵(a_{ij})为常正定矩阵,满足$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$,$w \in H^1(B_r(x_0))$满足方程$a_{ij}D_{ij}w = 0$,则$\forall 0 < \rho \le r$,

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Dw|^2 \le c\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \int_{B_r(x_0)} |Dw|^2,$$

$$\int_{B_\rho(x_0)} |Dw-(Dw)_{x_0,\rho}|^2 \le c\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n+2} \int_{B_r(x_0)} |Dw-(Dw)_{x_0,r}|^2$$

8 第八次讨论

这次讨论了利用Caciopolli的能量方法讨论Schauder估计的方式，此处主要用到了凝固系数法。得出最后结论的一个关键引理是S. Campanato发现的Hölder连续性的积分描述。主定理陈述如下：

Theorem 8.1. 设 $u \in H^1(B_1)$ 是

$$\int_{B_1} a_{ij}D_iuD_j\varphi + cu\varphi = \int_{B_1} f\varphi \quad \forall\varphi \in H_0^1(B_1).$$

的解。假设 $a_{ij} \in C^0(\bar{B}_1)$，$c \in L^n(B_1)$，并且 $f \in L^q(B_1)$ 且 $q \in \left(\frac{n}{2}, n\right)$

那么$u \in C^\alpha(B_1)$，其中 $\alpha = 2 - \frac{n}{q} \in (0,1)$。

且存在 $R_0 = R_0(\lambda, \Lambda, \tau, \|c\|_{L^n})$，使得对于任意 $x \in B_{1/2}$ 和 $r \le R_0$，有以下结论成立：

$$\int\limits_{B_r(x)} |Du|^2 \le C r^{n-2+2\alpha} \left\{ \|f\|^2_{L^q(B_1)} + \|u\|^2_{H^1(B_1)} \right\},$$

其中 $C = C(\lambda, \Lambda, \tau, \|c\|_{L^n})$ 是一个正常数(连续模)，并且对于任意 $x, y \in B_1$，满足

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \le \tau(|x-y|)$$

剩下内容参见书本上p55-p60页的内容.

9 第九次讨论

本节，我们讨论使用 Perron 来证明存在性。可以证明当球域上的 Dirichlet 问题解已知存在时，可以在一般区域内求解椭圆算子的 Dirichlet 问题。以拉普拉斯算子为例进行说明。

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，φ 是定义在 $\partial\Omega$ 上的连续函数。考虑以下问题：

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in}\, \Omega, \\ u &= \varphi \quad \text{on}\, \partial\Omega. \end{aligned} \tag{*}$$

如果 Ω 是一个球域，则 (*) 的解可以通过泊松积分公式给出。

首先基于最大值原理定义连续次调和函数和超调和函数。

定义 9.1. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域，v 是 Ω 中的连续函数。如果对于 Ω 中的任意球域 $B \subset \Omega$ 和任意调和函数 $w \in C(\overline{B})$，有以下性质：

$$v \le (\ge)\, w \text{ on } \partial B \quad \textit{implies} \quad v \le (\ge)\, w \text{ in } B,$$

则称 v 是 Ω 中的次调和函数（超调和函数）。

引理 9.2. 设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域，$u, v \in C(\bar{\Omega})$。若 u 是 Ω 中的次调和函数，v 是 Ω 中的超调和函数，且 $u \le v$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，则 $u \le v$ 在 Ω 中也成立。

书上的引理6.3是提升引理,即用球上的次调和函数构造区域上的次调和函数

剩下的部分就是反复用提升引理和调和函数的紧性(参见Gilbarg-Trüdinger调和函数一章)来回倒腾.要注意区域的选取,以及提升引理条件的检验.(还是有一些绕的)