二阶椭圆pde讨论班

南京大学数学学院部分同学

2025春季学期

目录

1 第一次讨论

1.1 Hilbert 19问题的表述及求解思路

Hilbert 19问题的内容是求使得泛函$\mathcal{E}(w) := \displaystyle\int_\Omega L(\nabla w)dx$取得最小值的$u$的正则性,确切地说,我们关心如下问题:

Question 1. 当L光滑且一致凸时,是否能得到u也是光滑的?

这里面有许多可以讨论的细节.

Question 2. 这个泛函极值问题和椭圆方程有什么关系?一致凸条件对应了什么?这是必要的吗?如果不凸的话有没有反例?

事实上,一致凸条件保证了解的存在唯一性.如何说明光滑性呢?这便是De giorgi证明的结果:

Theorem 1.1. 令$v \in H^1(\Omega)$为方程

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla v) = 0$$

的弱解,其中$0 < \lambda \mathrm{Id} \leq A(x) \leq \Lambda \mathrm{Id}$,则存在$\alpha > 0$使得$v \in C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})$对任意$\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$成立,且满足不等式

$$\|v\|_{C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega})} \leq C \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

其中$C = C(n, \lambda, \Lambda, \Omega, \tilde{\Omega})$,$\alpha = \alpha(n, \lambda, \Lambda)$

事实上,此命题只说明了$\mathcal{E}(w) = \int_\Omega L(\nabla w) dx$的泛函极值元$u \in C^{1,\alpha}$.事实上它是无穷阶光滑的,大致思路如下:

$$\begin{aligned} u \in H^1(\Omega) &\Rightarrow v \in L^2(\Omega) \\ &\Rightarrow v \in C^{0,\alpha}(\tilde{\Omega}) \quad \text{(De Giorgi)} \\ &\Rightarrow \mathrm{u} \in C^{1,\alpha} \\ &\Rightarrow \ \mathrm{u} \in C^\infty \quad \text{(Schauder).} \end{aligned}$$

1.2 局部有界性

韩青书上的思路和其他参考书籍(例如Caffarelli的笔记)中的思路有所不同. 韩青书上首先证明了local boundness，即

Theorem 1.2. 假设 $a_{ij} \in L^\infty(B_1)$ 且 $c \in L^q(B_1)$，其中 $q > \frac{n}{2}$，满足以下条件：

1. 对于任意 $x \in B_1$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^n$，有

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

其中 λ 为正常数。

2.

$$|a_{ij}|_{L^\infty} + \|c\|_{L^q} \leq \Lambda$$

其中 Λ 为正常数。

假设 $u \in H^1(B_1)$ 是以下意义的下解(subsolution)：

$$\int_{B_1} a_{ij} D_i u D_j \varphi + cu\varphi \leq \int_{B_1} f\varphi$$

对于任意 $\varphi \in H_0^1(B_1)$ 且 $\varphi \geq 0$ 在 B_1 中。

如果 $f \in L^q(B_1)$，则 $u^+ \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(B_1)$。此外，对于任意 $\theta \in (0,1)$，有

$$\sup_{B_\theta} u^+ \leq C \left\{ \frac{1}{(1-\theta)^{n/p}} \|u^+\|_{L^p(B_1)} + \|f\|_{L^q(B_1)} \right\}$$

其中 $C = C(n, \lambda, \Lambda, p, q)$ 是正常数。

Question 3. 推导此命题和其他书中De giorgi证明的哪些步骤相对应?

2 第二次讨论

我们这次讨论继续证明上次的局部有界性命题.

我们要做的基本上就是两件事:一是能量不等式和Sobolev不等式,Holder不等式来回倒腾(interplay between energy inequality, Sobolev inequality and Holder inequality);二是序列迭代证明有界性.

第一步的最终目标是得到如下不等式:

$$\int (v\zeta)^2 \leq C\left\{\int v^2|D\zeta|^2|\{v\zeta\neq 0\}|^{\varepsilon}+(k+F)^2|\{v\zeta\neq 0\}|^{1+\varepsilon}\right\}$$

其中每一项的含义很重要,v是指$(u-k)^+$,ζ最终取的是一个截断函数(cutoff),在B_r上的取值为1,且满足其梯度被$(R-r)^{-1}$控制.

Question 4. 为什么其梯度可以被$(R-r)^{-1}$控制?这里可以做到更好的结果吗?

有了第一步的最终不等式,经过代入并计算,我们便可以得到

$$\|(u-h)^+\|_{L^2(B_r)} \leq C\left\{\frac{1}{R-r}+\frac{h+F}{h-k}\right\}\frac{1}{(h-k)^{\varepsilon}}\|(u-k)^+\|_{L^2(B_R)}^{1+\varepsilon}$$

为了证明有界性,我们只需证明存在k,使得

$$\int_{A(k,1/2)}(u-k)^2=0$$

,而这也是第二步中迭代的最终结果.

若记$\varphi(k,r)=\|(u-k)^+\|_{L^2(B_r)}$,选取

$$\begin{aligned} k_\ell &= k_0+k\left(1-\frac{1}{2^\ell}\right) \quad (\leq k_0+k)\\ r_\ell &= \tau+\frac{1}{2^\ell}(1-\tau). \end{aligned}$$

通过归纳法可以得到估计

$$\varphi(k_\ell,r_\ell)\leq\frac{\varphi(k_0,r_0)}{\gamma^\ell}\quad\text{for some }\gamma>1$$

令$l\to+\infty$则可得到待证结论.

Remark 2.1. 迭代引理可以归结为如下结论:设$\varphi(t)$是定义于$[k_0,+\infty)$的非负递增函数,在$h>k\geq k_0$时满足

$$\varphi(h)\leq\frac{C}{(h-k)^\alpha}\left[\varphi(k)\right]^\beta$$

其中$\alpha,\beta>1$,则有

$$\varphi(k_0+d)=0$$

其中

$$d=C^{\frac{1}{\alpha}}\left[\varphi(k_0)\right]^{\frac{\beta-1}{\alpha}}2^{\frac{\beta}{\beta-1}}$$

3 第三次讨论

本次讨论我们介绍 Theorem 1.2 的另一种证明方法：Morser 迭代.

迭代过程的核心技术是证明如下反 Holder 型的不等式

$$||u||_{L_{p_2}(r_2)} \leq C||u||_{L_{p_1}(r_1)}, \tag{1}$$

这里$r_2 < r_1, p_2 > p_1$. 然后我们取一列递减且趋于1/2的数列r_i以及一列递增且趋于无穷的数列p_i 代入不等式1并相乘就能得到

$$||u||_{L_{p_n}(r_n)} \leq \prod C_i ||u||_{L_{p_1}(r_1)}.$$

令$n \to \infty$, 如果系数$\prod C_i$ 收敛, 我们就得到了期望的不等式.

为了得到不等式1, 我们将证明过程分为以下几个目标:

Target 1 对于$k > 0, m > 0$, 设$\overline{u} + u^+ + k$, 以及$\overline{u}_m = \begin{cases} \overline{u} \text{ if } u < m, \\ k + m \text{ if } u \geq m. \end{cases}$ 并对于截断函数$\eta \in C_0^1(B_1)$, 取检验函数$\phi = \eta^2(\overline{u}_m^\beta \overline{u} - k^{\beta+1})$.

利用椭圆条件以及方程系数的有界性得到不等式

$$\int \eta^2 \overline{u}_m^\beta (\beta |D\overline{u}_m|^2 + |D\overline{u}|^2) \leq C(\int |D\eta|^2 \overline{u}_m^\beta \overline{u}^2 + \int (|c| + \frac{|f|}{k}) \eta^2 \overline{u}_m^\beta \overline{u}^2).$$

Target 2 取$k = ||f||_q$, 以及$w = \overline{u}_m^{\beta/2} \overline{u}$, 将上面的不等式化简为

$$\int |\eta Dw|^2 \leq C(1+\beta)(\int |D\eta|^2 w^2 + ||\eta w||^2_{\frac{2q}{q-1}}).$$

Target 3 利用插值不等式和Sobolev不等式将上面的不等式进一步化简为:

$$(\int |\eta w|^{2\chi})^{1/\chi} \leq C(1+\beta)^\alpha \int (|D\eta|^2 + \eta^2) w^2.$$

这里χ, α都是无关的常数.

最后, 我们选取适当的截断函数η 即可得到不等式1. 它的具体形式为

$$||\overline{u}||_{L^{\gamma\chi}(B_r)} \leq (C\frac{(\gamma-1)^\alpha}{(R-r)^2})^{1/\gamma} ||\overline{u}||_{L^\gamma(B_R)}.$$

根据这个不等式的形式, 很容易取出迭代的数列$\gamma_i = 2\chi^i, r_i = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x^{i+1}}$.

4 第四次讨论

本次讨论的主题是无低次项的齐次方程的解的Holder连续性。

下面我们假设$L = -D_i(a_{ij}D_j u)$，这里的$a_{ij} \in L^\infty$，且存在正常数$\lambda < \Lambda$，使得$\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$。后面若无特殊说明都是在单位球体$B_1$内考虑方程的解。

首先我们定义下（上）解：$u \in H^1_{loc}(B_1)$称为方程$Lu = 0$的下（上）解，如果$\forall \phi \in H^1_0(B_1)$且$\phi \geq 0$，都有:$\int a_{ij} D_i u D_j \phi \leq (\geq) 0$.

下面的引理说明一个上（下）解复合上一些特定的函数之后同样得到下解。

Lemma 4.1. 设 $\Phi \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$为凸，则:

(i)如果u为下解，$\Phi' \geq 0$，则$\Phi(u) \in H^1_{loc}(B_1)$时也是下解；

(ii)如果u为上解，$\Phi' \leq 0$，则$\Phi(u) \in H^1_{loc}(B_1)$时也是下解。

下面的引理说明函数等于0的部分大小可以决定其L^2-范数被其梯度的L^2-范数的多少倍控制。

Lemma 4.2. (Poincare-Sobolev不等式)

存在$C = C(n, \epsilon)$，使得当$u \in H^1(B_1)$等于0部分的测度$\leq \epsilon m(B_1)$时，有$\int |u|^2 \geq C \int |Du|^2$.

Theorem 4.3. （密度定理）

假设u是B_2中的一个正上解，且其不小于1的部分的测度$\geq \epsilon m(B_1)$时，存在$C = C(n, \epsilon, \Lambda/\lambda)$，使得$\inf_{B_{1/2}} u \geq C$.

证明思路是先假设$u \geq \delta > 0$，然后构造一个以δ^{-1}为上界的函数$v = (\log u)^-$，利用4.1和前一个引理的估计立马得到：

$$\sup_{B_{1/2}} v \leq C(\int |Dv|^2)^{1/2};$$

取一个待定函数$\zeta \in C^1_0(B_2)$，定义检验函数$\phi = \dfrac{\zeta^2}{u}$，利用上解的定义和一致椭圆条件，可得不等式：

$$\int \zeta^2 |D \log u|^2 \leq C \int |D\zeta|^2;$$

现在固定这个ζ，使得它在单位球内取值恒为1,则有：

$$\int_{B_1} |D \log u|^2 \leq C;$$

所以v的上界被一个正常数控制，反过来就是u有的下界被一个正常数控制.

由此可以比较容易地推出下面的振荡定理。

Theorem 4.4. (振荡定理) 假设有B_2中的有界解u满足$Lu = 0$，则存在$\gamma = \gamma(n, \Lambda/\lambda) \in (0, 1)$，满足：

$$\mathrm{osc}_{B_{1/2}} u \leq \mathrm{osc}_{B_1} u.$$

由此进一步有De Giorgi定理：

Theorem 4.5 (De Giorgi)**.** Suppose $Lu = 0$ weakly in B_1. Then there holds

$$\sup_{B_{1/2}} |u(x)| + \sup_{x,y \in B_{1/2}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq c\left(n, \frac{\Lambda}{\lambda}\right) \|u\|_{L^2(B_1)}$$

with $\alpha = \alpha(n, \dfrac{\Lambda}{\lambda}) \in (0, 1)$.

5　第五次讨论

这次我们讨论如何利用Moser的方法来得到Hölder连续性.其主要思路是弱Harnack不等式⇒Harnack不等式⇒Hölder连续性.

首先是弱Harnack不等式:

Theorem 5.1. 定理 4.15（弱Harnack不等式）设 $u \in H^1(\Omega)$ 为 Ω 上的非负超解,即：

对于任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ 且 $\varphi \geq 0$ 在 Ω 上,有

$$\int_\Omega a_{ij} D_i u D_j \varphi \geq \int_\Omega f\varphi$$

假设存在 $q > \frac{n}{2}$, $f \in L^q(\Omega)$.对于 Ω 中任意 B_R,对于任意$0 < p < \frac{n}{n-2}$ 和任意 $0 < \theta < \tau < 1$,有：

$$\inf_{B_{\theta R}} u + R^{2-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_R)} \geq C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_{\tau R}} u^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中，C 仅依赖于 n、p、q、λ、Λ、θ 和 τ.

我们采取BMO函数(结合John-Nirenberg Lemma,见Theorem3.5)的方式来证明这个命题.

从而我们可以导出强Harnack不等式:

Theorem 5.2. (Moser's Harnack Inequality) 设 $u \in H^1(\Omega)$ 为 Ω 上的非负解.

$$\int_\Omega a_{ij} D_i u D_j \varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \text{对于任意}\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

假设 $f \in L^q(\Omega)$,其中 $q > \frac{n}{2}$.则对于任何 $B_R \subset \Omega$,有

$$\max_{B_R} u \leq C\left\{\min_{B_{R/2}} u + R^{2-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_R)}\right\}$$

其中，$C = C(n, \lambda, \Lambda, q)$ 是一个正常数.

证明方法是将弱Harnack不等式与之前的$L_p - L^\infty$估计相结合.

Holder连续性也是其推论:

Corollary 5.3. (Hölder连续性) 设 $u \in H^1(\Omega)$ 是 Ω 上的一个解.

对于任意的 $\varphi \in H_0^1(\Omega)$,有

$$\int_\Omega a_{ij} D_i u D_j \varphi = \int_\Omega f\varphi$$

假设函数 $f \in L^q(\Omega)$,其中 $q > \frac{n}{2}$.那么解 $u \in C^\alpha(\Omega)$,其中 $\alpha \in (0,1)$ 仅依赖于 n、q、λ 和 Λ.对于任何包含在 Ω 中的球 B_R,都有以下估计式成立：

$$|u(x) - u(y)| \leq C\left(\frac{|x-y|}{R}\right)^\alpha \left\{\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_R} u^2\right)^{1/2} + R^{2-\frac{n}{q}} \|f\|_{L^q(B_R)}\right\}$$

其中，$x, y \in B_{R/2}$，$C = C(n, \lambda, \Lambda, q)$ 是正常数.

6 第六次讨论

本次我们来证明上次讨论用到的John-Nirenberg Lemma.思路是多次利用Calderon-Zygmund分解.由于J-N Lemma的证明只需要用到C-Z分解的部分内容，所以我们只叙述需要用到的部分：

$\mathbb{R}^n$中二进方体是形如$[2^k m_1, 2^k(m_1+1)) \times [2^k m_2, 2^k(m_2+1)) \times \cdots [2^k m_n, 2^k(m_n+1))$ 的集合，其中$k, m_1, m_2, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}$.

（不过此处并用不到二进方体的顶点为“格点”、边长为“整数”的性质，所以在下面的定理中可以忽略“二进”，仅视为一般的方体.）

Theorem 6.1. Calderon-Zygmund分解(阉割版)

若$f \in L^1(\mathbb{R}^n), \alpha > 0$.则f的定义域$\mathbb{R}^n$有分解：$\mathbb{R}^n = \cup_{j=1}^{\infty} Q_j \cup F$,其中$Q_j$为不交的二进方体，$F = \mathbb{R}^n - \cup_{j=1}^{\infty} Q_j$.，使得下述成立：

$$\sum_j |Q_j| \le \alpha^{-1} \|f\|_{L^1}, \qquad |f| \le 2^n \alpha \quad a.e.\ F$$

证明方法是先将$\mathbb{R}^n$分成一些边长足够大的二进方体之并，使得在每个二进方体上的积分平均都小于给定的α.由$f \in L^1$这是可以做到的.

再在每一个这样的二进方体里面做分解，每次2等分边长得到2^n个子方体.

对每一个子方体判断是否满足其上积分平均大于α,若满足则将其归为第一类，否则将其归为第二类.

再对第二类中的方体继续做如上分解，将满足积分平均大于α的收集到第一类中，其余的继续分解.

如是下去，可数次后第一类中收集到可数个二进方体.再把最开始可数个大二进方体做分解后得到的第一类的二进方体收集到一起，得到可数个二进方体，记为$\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$.

剩下的区域剩下的区域记为F,可以知道这样得到的分解满足题目要求.

Theorem 6.2. John-Nirenberg Lemma

若$f \in BMO(\mathbb{R}^{\ltimes})$,则对于$\forall Q$, Q为方体，有

$$|\{x \in Q : |f - f_Q| > \alpha\}| \le e|Q| exp(-\frac{\alpha}{2^n e ||f||_{BMO}})$$

先容易发现这个Lemma主要是控制α比较大时的情况.当$\alpha = 0$时左边为$|Q|$右边为$e|Q|$;当$\alpha \to \infty$时右边指数衰减到0.

证明思路是对Q迭代地做C-Z分解. 不妨设$||f||_{BMO} = 1$,选取e作为C-Z分解中的高度.对L_1函数$f - f_Q$的定义域Q进行C-Z分解，得到可数个方体Q_{i_1}和F_1,再对L_1函数$f - f_{Q_{i_1}}$的定义域Q_{i_1}进行C-Z分解，继续得到可数个方体Q_{i_1,i_2}和可数个F_{i_1},将这些F_{i_1}并起来记为F_2.如是下去.

计算可得若$Q_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$为第k代方体，则$|f_Q - f_{Q_{i_1,i_2,\ldots,i_k}}| \le 2^n ke$,由此得到$|f(x) - f_Q| \le (2^n k + 1)e$, $a.e. x \in F_k$,于是$|\{|f - f_Q| > (2^n k + 1)e\}| \le \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k) \in \mathbb{N}^k} |Q_{i_1,i_2,\ldots,i_k}|$,

而由C-Z分解，

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in\mathbb{N}^k}|Q_{i_1,i_2,\dots,i_k}| &= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{k-1})\in\mathbb{N}^{k-1}} \sum_{i_k\in\mathbb{N}}|Q_{i_1,i_2,\dots,i_k}| \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{k-1})\in\mathbb{N}^{k-1}} \frac{1}{e}\int_{Q_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}} |f-f_{Q_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}}| \\
&\le \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{k-1})\in\mathbb{N}^{k-1}} \frac{|Q_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}|}{e}||f||_{BMO} \\
&= \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_{k-1})\in\mathbb{N}^{k-1}} \frac{|Q_{i_1,i_2,\dots,i_{k-1}}|}{e}
\end{aligned}
$$

于是

$$
|\{|f-f_Q|>2^n(k+1)e\}| \le \sum_{(i_1,i_2,\dots,i_k)\in)\mathbb{N}^k} |Q_{i_1,i_2,\dots,i_k}| \le \frac{|Q|}{e^k}
$$

由此可以得到题目中的不等式.

进一步可以得到：

Corollary 6.3. 若$f\in BMO(\mathbb{R}^{\ltimes})$,则

$$
\sup_Q \int_Q exp(\frac{\lambda}{||f||_{BMO}}|f(x)-f_Q|)dx < \infty
$$

这是我们上次讨论使用到的不等式.

7 第七次讨论

我们从这一次开始讨论有关粘性解的概念,这是完全非线性偏微分方程中的重要概念,不过这本书还是按照线性方程来讲解.

首先考虑如下情景:$Lu\equiv a_{ij}(x)D_{ij}u$,$u\in C^2(\Omega)$. 假设 $u\in C^2(\Omega)$ 是 Ω 中的上解，即 $Lu\le 0$。那么对于任意满足 $L\varphi>0$ 的 $\varphi\in C^2(\Omega)$，有

$$
L(u-\varphi)<0 \quad \text{在 } \Omega \text{ 中成立。}
$$

根据极值原理，这意味着 $u-\varphi$ 在 Ω 中不能有内点处的局部极小值。换言之，若 $u-\varphi$ 在 $x_0\in\Omega$ 处取得局部极小值，则必有

$$
L\varphi(x_0)\le 0.
$$

我们从反方向来定义粘性解:

Definition 7.1. 称 $u\in C(\Omega)$ 为方程

$$
Lu=f \quad \text{在}\,\Omega\text{中}
$$

的**黏性上解**（相应地，**黏性下解**），如果对于任意 $x_0\in\Omega$ 和任意满足 $u-\varphi$ 在 x_0 处取得局部极小值(相应地，极大值)的函数 $\varphi\in C^2(\Omega)$，均有

$$
L\varphi(x_0)\le f(x_0) \quad \text{（相应地，}L\varphi(x_0)\ge f(x_0)\text{)}.
$$

若 u 既是黏性下解又是黏性上解，则称其为**黏性解**。

Example 7.2. $-|x|$在粘性解意义下是上调和的

接下来固定λ,Λ,让a_{ij}变动，定义一类方程的解(这包含了完全非线性方程的解)，其中包含了Pucci方程的解.

首先有(注意此处α_k是指用Q把$D_{ij}\varphi$对角化之后,Q^TAQ的对角元)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0)D_{ij}\varphi(x_0) \le 0\\
\Longleftrightarrow &\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \le 0 \quad \text{with } \lambda \le \alpha_k \le \Lambda, e_k = e_k(D^2\varphi(x_0))\\
\Longleftrightarrow &\sum_{e_i>0} \alpha_i e_i + \sum_{e_i<0} \alpha_i e_i \le 0\\
\Longleftrightarrow &\sum_{e_i>0} \alpha_i e_i \le \sum_{e_i<0} \alpha_i(-e_i),
\end{aligned}$$

从而可引入如下定义:

Definition 7.3. 设 f 是 Ω 上的连续函数，λ 和 Λ 是两个正常数。我们称 $u \in C(\Omega)$ 属于 $\mathcal{S}^+(\lambda,\Lambda,f)$（相应地，$\mathcal{S}^-(\lambda,\Lambda,f)$），如果对于任意 $x_0 \in \Omega$ 和任意满足 $u-\varphi$ 在 x_0 处取得局部极小值（相应地，极大值）的函数 $\varphi \in C^2(\Omega)$，都有

$$\lambda \sum_{e_i>0} e_i(x_0) + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i(x_0) \le f(x_0)$$

（相应地，

$$\Lambda \sum_{e_i>0} e_i(x_0) + \lambda \sum_{e_i<0} e_i(x_0) \ge f(x_0)$$

）其中 $e_1(x_0),\dots,e_n(x_0)$ 是 Hessian 矩阵 $D^2\varphi(x_0)$ 的特征值。

我们记 $\mathcal{S}(\lambda,\Lambda,f) = \mathcal{S}^+(\lambda,\Lambda,f) \cap \mathcal{S}^-(\lambda,\Lambda,f)$。

剩余的关于Pucci Operator的定义和性质可参见书本,其中比较重要的性质是用特征值进行等价刻画：

$$\mathcal{M}^-(\lambda,\Lambda,M) = \lambda \sum_{e_i>0} e_i + \Lambda \sum_{e_i<0} e_i,$$
$$\mathcal{M}^+(\lambda,\Lambda,M) = \Lambda \sum_{e_i>0} e_i + \lambda \sum_{e_i<0} e_i,$$

这个性质的证明需要中学所学过的排序不等式:反序和$\le$乱序和$\le$顺序和.

这就和刚刚的定义相契合了:$u \in \mathcal{S}^+$当且仅当在粘性解的意义下有$\mathcal{M}^-(\lambda,\Lambda,D^2u) \le f$.

8　第八次讨论

这一次我们将第二章的Alexandroff极大值原理推广到粘性解情形,并对第五章剩下的内容进行一个简要介绍.

8.1 Alexandroff极大值原理

本节我们要利用如下引理:

Lemma 8.1. 设 u 是 B_1 中的 $C^{1,1}$ 函数且在 ∂B_1 上满足 $u \geq 0$。则成立

$$\sup_{B_1} u^- \leq c(n) \left(\int_{B_1 \cap \{u = \Gamma_u\}} \det D^2 u \right)^{\frac{1}{n}}$$

其中 Γ_u 是 $-u^- = \min\{u, 0\}$ 的凸包络。

去证明如下定理:

Theorem 8.2. 设 $u \in S^+(\lambda, \Lambda, f)$ 在 B_1 中成立，且 $u \geq 0$ 于 ∂B_1 上，其中 $f \in C(\Omega)$。则成立

$$\sup_{B_1} u^- \leq c(n, \lambda, \Lambda) \left(\int_{B_1 \cap \{u = \Gamma_u\}} (f^+)^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

其中 Γ_u 是 $-u^- = \min\{u, 0\}$ 的凸包络。

证明的思路是证明两点:

1:Γ_u 是 B_1 中的 $C^{1,1}$ 函数，且在接触点 x_0 处成立

$$f(x_0) \geq 0$$

2: $L(x) \leq \Gamma_u(x) \leq L(x) + C\{f(x_0) + \varepsilon(x)\}|x - x_0|^2$ 以及 $\det D^2 \Gamma_u(x) \leq C(n, \lambda, \Lambda) \left(f(x)\right)^n$

8.2 第五章剩余内容简介

5.3节给出了ABP lemma的一个重要应用：设 $u \in S(\lambda, \Lambda, f)$ 在 B_1 中成立，且 $u \geq 0$ 于 B_1 内，其中 $f \in C(B_1)$。则成立

$$\sup_{B_{1/2}} u \leq C \left\{ \inf_{B_{1/2}} u + \|f\|_{L^n(B_1)} \right\}$$

其中 C 是仅依赖于 n、λ 和 Λ 的正常数。

利用推论4.18的方法可以证明内部Hölder连续性.

5.4节则给出了粘性解的Schauder估计,此处是指对振荡的一种幂次控制.形如$|u-P|_{\bar{L}^\infty(B_r(0))} \leq C_* r^{2+\alpha}$

5.5节则给出了粘性解的$W^{2,p}$估计，定理陈述如下:

设 $u \in C(B_1)$ 是方程

$$a_{ij} D_{ij} u = f \quad \text{在 } B_1 \text{ 中}$$

的粘性解。则对于任意 $p \in (n, \infty)$，存在仅依赖于 n、λ、Λ 和 p 的常数 $\varepsilon > 0$，使得若

$$\left(\frac{1}{|B_r(x_0)|} \int_{B_r(x_0)} |a_{ij} - a_{ij}(x_0)|^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq \varepsilon \quad \text{对任意 } B_r(x_0) \subset B_1 \text{ 成立,}$$

则 $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(B_1)$。此外，有以下估计

$$\|u\|_{W^{2,p}(B_{1/2})} \leq C \left\{ \|u\|_{L^\infty(B_1)} + \|f\|_{L^p(B_1)} \right\}$$

其中 C 是仅依赖于 n、λ、Λ 和 p 的正常数。

5.6节则是叙述了Schauder估计和$W^{2,p}$估计的全局版本,此处是对经典解的Dirichlet问题叙述的.