031_Folien

2018 年 11 月 23 日

```
In [1]: import numpy as np                          # mathematical methods
        from matplotlib import pyplot as plt        # plotting methods
        %matplotlib inline
```

1 Wahrscheinlichkeitstheorie

Stochastik fasst als Oberbegriff die Gebiete Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik zusammen.
Wikipedia: Stochastik (von altgriechisch   stochastik techn; lateinisch ars conjectandi):

1.1 *Kunst des Vermutens*

1.2 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie - Überblick

1. Zufall

- Zufallsvariable
- Zufallsexperiment
- WahrscheinlichkeitsmaSS
- Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Axiome von Kolmogorov
- Kombinatorik

2. Wahrscheinlichkeiten

- bedingte Wahrscheinlichkeit
- gemeinsame Wahrscheinlichkeit
- totale Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes

3. KenngröSSen

- Erwartungswert
- Varianz

4. Modell-Verteilungen

- Laplace-Experiment
- Bernoulli-Experiment
- Binomialverteilung
- Geometrische Verteilung

- Poissonverteilung
- Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Verteilungsfunktion
- Summe von Verteilungen

5. Zusammenfassung

- Ausblick kontinuierliche Wahrscheinlichkeitstheorie
- Fragen

1.3 Fragestellung

- theoretischer Unterbau zum Zufall
- Modell für relative Häufigkeiten aus beschreibender Statistik
- Interpretation des Modells als Brücke zur Wirklichkeit

1.4 Wahrscheinlichkeit

Physik: Quantenmachanik, Thermodynamik, Geophysik (Erdbeben), Wetter

Biologie: Genetik (Mendel), Ökologie (Populationen) <-> Individuen

Sozialwissenschaften: Populationen

Informatik: Verschlüsselung, Zufallszahlen

2 Grundbegriffe

3 Zufallsvariable

- Merkmal X in der Welt
- möglicher Ausgang eines Zufallsexperiments
  - steht nicht fest
  - ist nicht berechenbar
  - sondern **zufällig**
- Wahrscheinlichkeit
  - inhärent
  - gleichbleibend

Beispiele:

- Werfen einer Münze
- Würfeln
- Roulette
- Elektronik: Spannung und Rauschspannung
- Biologie/Genetik: Erbsen

3.1 erweiterte Zufallsvariable

Erweiterbar auf prinzipiell messbare Werte, wenn jedoch die Rahmenbedingungen zu komplex sind.

Beispiele:

- Roulette
- Anteil der Mädchen an heutigen Geburten
- Sonntagsfrage

3.2 Realisierung

Das konkrete Ergebnis eines Zufallsexperiments nennt man Realisierung einer Zufallsvariable.

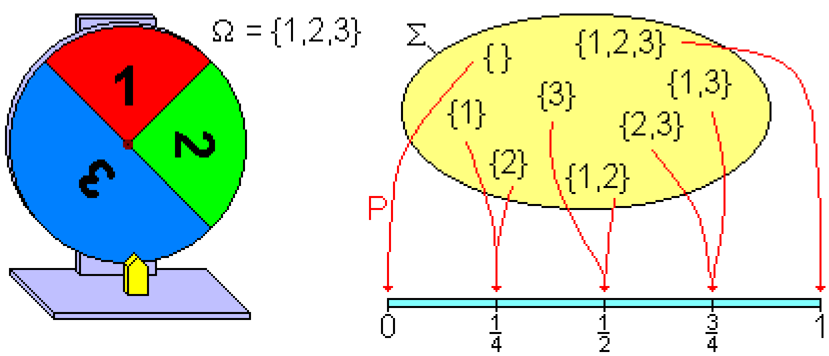
- Messung
- Stichprobenergebnis
- Ziehung
- Erhebung

4 Modellvorstellung "Zufallsexperiment"

(Quelle: Wikipedia. Authorin: Frau Holle Joxemai4, CC BY-SA 3.0)

In [1]:

Out[1]:



4.1 Ockhams Rasiermesser

occam's razor, Sparsamkeitsprinzip, lex parsimoniae

> Von mehreren möglichen Erklärungen für ein und denselben Sachverhalt ist die einfachste Theorie allen anderen vorzuziehen.
>
> Eine Theorie ist einfach, wenn sie möglichst wenige Variablen und Hypothesen enthält, und wenn diese in klaren logischen Beziehungen zueinander stehen, aus denen der zu erklärende Sachverhalt logisch folgt.

- benannt nach Wilhelm von Ockham (1288–1347)
- stammt von dem Philosophen Johannes Clauberg (1622–1665)

(Wikipedia)

4.2 Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P)

- **Ergebnisraum** $\Omega = \{\omega_i\}$:
  - Menge aller elementaren Ergebnisse
- **Ereignisraum** Σ
  - bestehend aus allen möglichen Kombinationen von Ergebnissen aus Ω
- **WahrscheinlichkeitsmaSS** P
  - ordnet jedem Ereignis aus Σ eine Wahrscheinlichkeit P zu

5 Zufallsexperiment

Eines der **Ergebnisse** (Elementarereignisse) *kommt heraus, wird gemessen, wird realisiert*.

- Ergebnis ω
- Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$: Menge aller Elementarereignisse

Ereignis A hat stattgefunden, Z.B.: “*keine eins*”

- Menge aller Ereignisse: alle möglichen Ergebnis-Kombinationen
- σ-Algebra Σ auf Ω
- $A \in \Sigma$
- z.B. Ereignis $A = \{\omega_2 \cup \omega_3\}$

Beispiel: Glücksrad

- $\Omega = \{1, 2, 3\}$
- $\Sigma = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$
- Ereignis A: “zwei” $A = \{2\}$
- Ereignis B: “nicht eins” $B = \{2, 3\}$

6 WahrscheinlichkeitsmaSS P

Das WahrscheinlichkeitsmaSS P ordnet jedem Ereignis aus Σ eine Wahrscheinlichkeit zu - $P\colon \Sigma \to [0, 1]$

Beispiel Dem Ereignis “*nicht eins*” $A = (\omega_2 \cup \omega_3)$ wird die Wahrscheinlichkeit $P(A) = P(\omega_2) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ zugeordnet.

Wahrscheinlichkeitsraum nominal, kategorial, diskret Ω hat endlich viele Elemente A_i

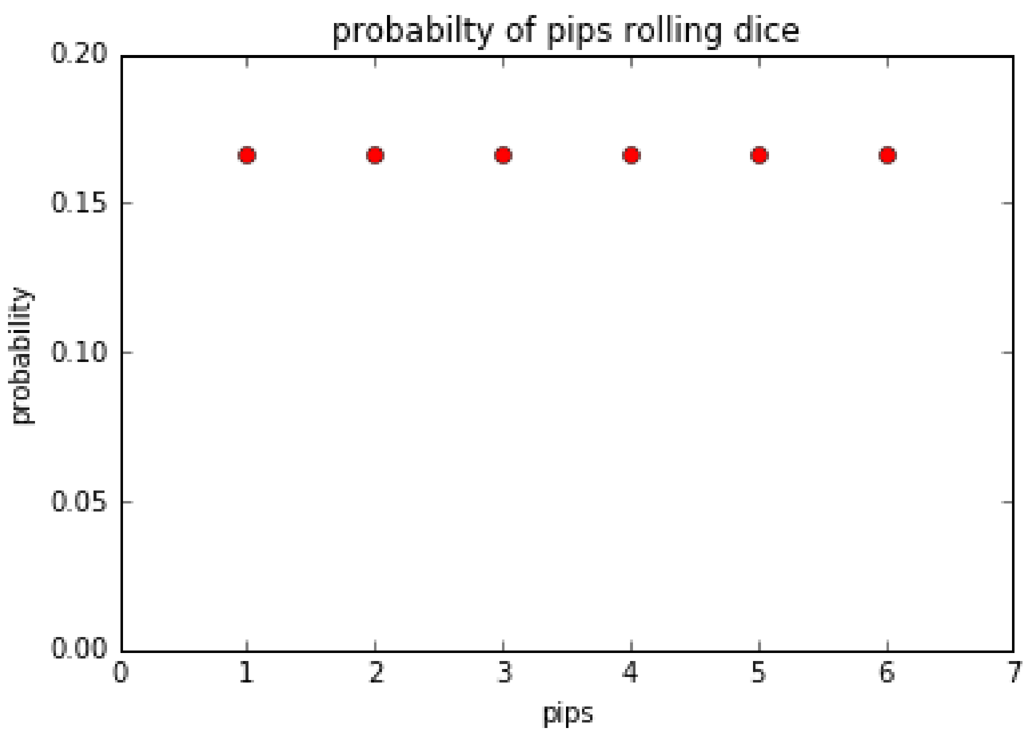
Ist $A = \{\omega_1 \cup \omega_2\}$, dann ist $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2)$

Wahrscheinlichkeitsraum kontinuierlich, stetig Es gibt unendlich viele Elemente, meist $x \in \mathbb{R}$

Die Wahrscheinlichkeit für A (einen Bereich) ist $P(A) = \int_{x \in A} f(x)\ \mathrm{d}x$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f (später mehr)

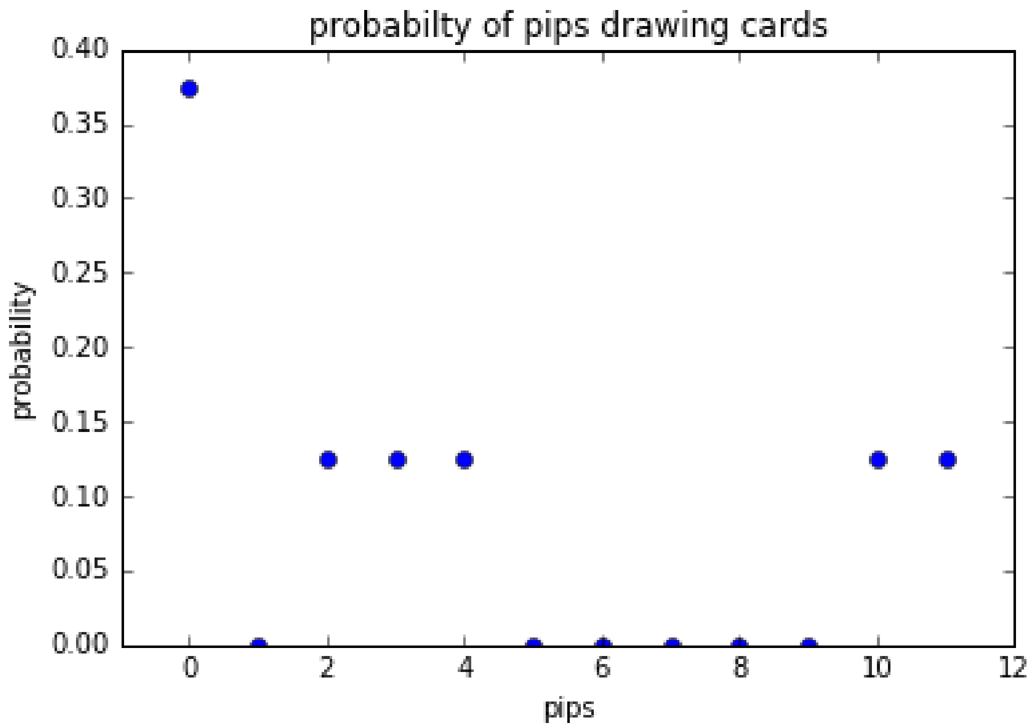
6.1 Wahrscheinlichkeitsverteilung

In [2]:
```
'''---dice---'''
x = np.array([1, 2, 3, 4, 5, 6])
p = np.ones_like(x)/6.
plt.plot(x, p, 'ro')
plt.title('probabilty of pips rolling dice')
plt.xlim(0, 7)
plt.ylim(0, 0.2)
plt.xlabel('pips')
plt.ylabel('probability');
```

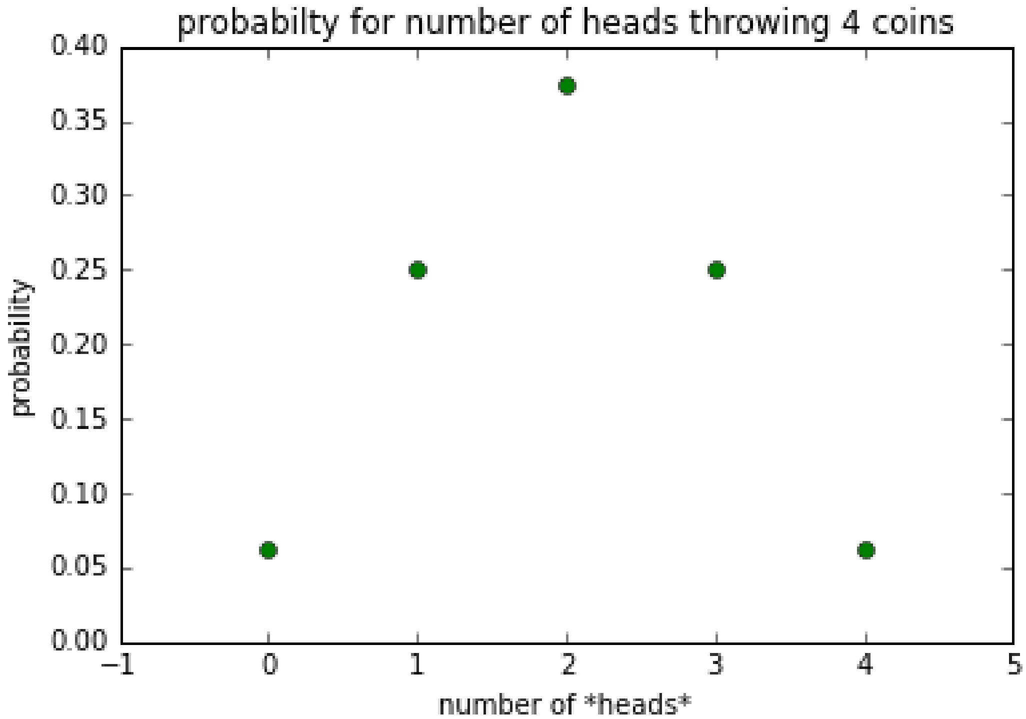


In [3]:
```
'''---cards---'''
x = np.arange(12)           # {0..11} range of possible pips
p = np.zeros_like(x)
p[0] = 3                    # '7', '8', '9'
p[2] = 1                    # J
p[3] = 1                    # Q
p[4] = 1                    # K
p[10] = 1                   # '10'
p[11] = 1                   # Ace
p = p*4.0/32.0              # 4 colours / 32 cards
plt.plot(x, p, 'bo')
plt.xlim(-1, 12)
plt.ylim(0, 0.4)
plt.title('probabilty of pips drawing cards')
```

```
plt.xlabel('pips')
plt.ylabel('probability');
```




```
In [4]: '''---4 coins---'''
        x = np.arange(5)                # {0..4}
        # {0000}{0001,0010,0100,1000}{0011,0101,0110,1001,1010,1100}...
        p = np.array([1, 4, 6, 4, 1])
        p = p/16.0
        plt.plot(x, p, 'go')
        plt.title('probabilty for number of heads throwing 4 coins')
        plt.xlim(-1, 5)
        plt.ylim(0, 0.4)
        plt.xlabel('number of *heads*')
        plt.ylabel('probability');
```



7 Kolmogorov-Axiome

Andrei Kolmogorov (1930er Jahre); In **Übereinstimmung mit alltäglicher Erfahrung und Umgangssprache**: Gesamtheit

$$P(\Omega) = 1$$

Unmögliches Ereignis

$$P(\emptyset) = 0$$

Wahrscheinlichkeiten

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Eintreten oder Nichteintreten eines Ereignisses

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Addition der Wahrscheinlichkeiten bei disjunkten Ereignissen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{falls } A \cap B = \emptyset$$

-Additivität

$$\sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

$$\omega_i \cap \omega_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$P\left(\omega_1 \ \cup \ \omega_2 \ \cup \cdots\right) = \sum P(\omega_i)$$

8 Kombinatorik

Woher kommen die Wahrscheinlichkeiten?

Was ist der Ereignisraum Σ

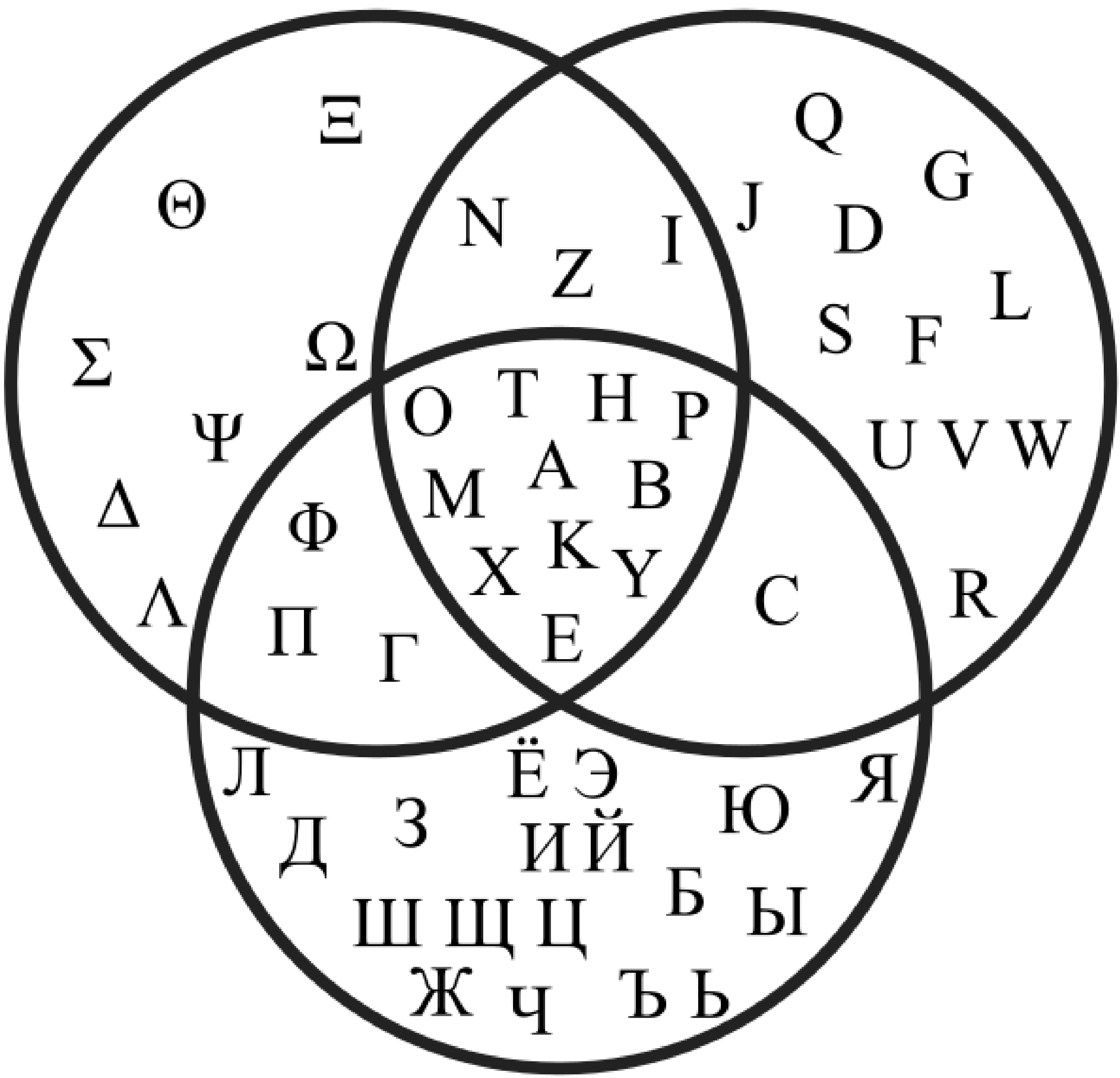
8.0.1 Venn-Diagramm 韦恩图

In der Mengenalgebra lassen sich alle Ereignisse im Venn-Diagramm darstellen.

Beispiel: Verteilung von Buchstaben in lateinischer, griechischer oder kyrillischer Schrift. (Quelle: Wikipedia. Author: Tilman Piesk, Public domain)

In [2]:

Out[2]:



8.0.2 Mögliche Wertebereiche für X

- nominal:

  - keine Reihenfolge
  - zB. Farbe der Kugel “rot”, “schwarz”, “weiSS”
- dichotom
  - “ja”/“nein” oder 0/1 für Bernoulli Experiment
  - zB. Münzwurf
- ordinal
  - Reihenfolge
  - kein Abstand
  - zB. bei einer “Stimme zu”-Umfrage: “nicht”, “etwas”, “ziemlich”, “sehr”
- metrisch - diskret
  - $x_i\ ,\ i \in \{1 \dots N\}\ ,\ N \in \mathbb{N}$
  - Abstand und Nullpunkt
  - zB. Augenzahl beim Würfeln, mm-Einteilung Meterstab
- metrisch - stetig
  - $x \in \mathbb{R}$
  - kontinuierlich
  - zB. Helligkeit im Raum, Abstand

9 Spieletheorie

Ab 18./19. Jhdt einzelne Gesichtspunkte, z.B. Bernoulli
1928 John v. Neumann: Grundbegriffe der Spieltheorie
Seit 1994 8x Alfred-Nobel-Gedächtnispreis für Wirtschaftswissenschaften

10 Laplace Experiment

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

- alle Elementarereignisse sind *gleich* wahrscheinlich

$$P(\omega_i) = p = \frac{1}{M} = \frac{1}{|\Omega|} \quad i \in \{1 \dots M\}$$

- Wahrscheinlichkeit $= \frac{\text{Anzahl für A günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl für A mögliche Ergebnisse}}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{N}{M}$$

In [5]:
```
'''example dice: even number?'''
O = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
A = [2, 4, 6]
print('P(A={}) under Omega={} is {}'.format(A, O, len(A) / len(O)))
```

```
P(A=[2, 4, 6]) under Omega=[1, 2, 3, 4, 5, 6] is 0.5
```

11 Zusammenfassung

- Zufallsvariable
- Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P)
- Zufallsexperiment
- Kolmogorov-Axiome

11.1 Ausblick

- Verbundene Ereignisse
- Wert des Zufallsexperiments
- Wetteinsatz und Wettgewinn

12 Fragen?