022_Folien

2018 年 11 月 23 日

```
In [2]: from matplotlib import pyplot as plt
        import numpy as np
        %matplotlib inline
```

1 Beschreibende Statistik

1.1 Übersicht

LagemaSS

Streuung

Graphiken

Mehrdimensionale Daten

Abhängigkeit

- Korrelation 相关
- Regression 回归

1.2 Mehrdimensionale Daten - Zusammenhang?

Beispiele:

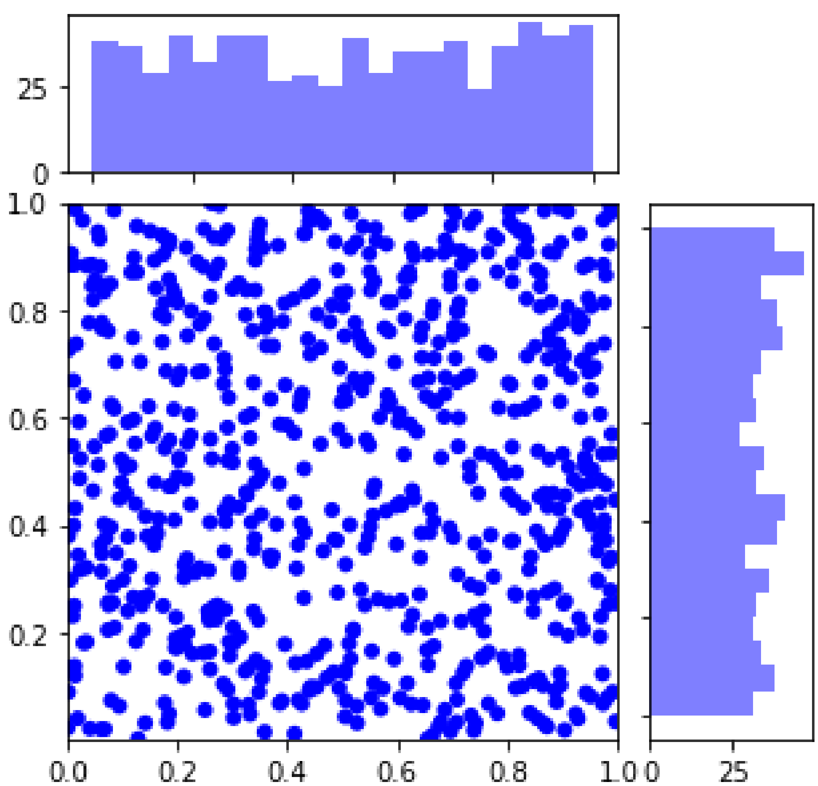
- zwei Würfel: sollten unabhängig sein
- Strom und Spannung: festes Verhältnis gemäSS Ohmschen Gesetzes
- Luftdruck und Höhe über Meer: Barometrische Höhenformel

Frage: Hängt x und y zusammen?

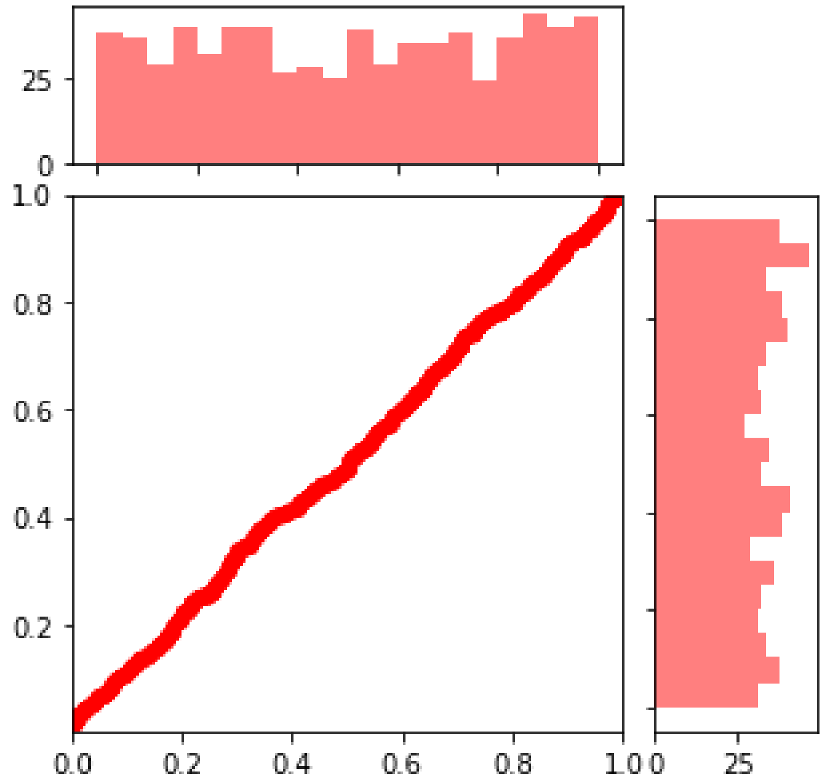
```
In [3]: '''reshape some of the data by sorting'''
        np.random.seed(987654)                    # initialize random generator to same
        rain = np.random.random((2, 700))         # draw 2x700 equally distrib random numbers
        xa = np.sort(rain[0])                     # sort x with numpy
        xb = xa[:]                                # make a copy of the object
        ya = np.sort(rain[1])                     # sort y with numpy
        n = int(rain.shape[1]/2)                  # half index
        yb = np.append( ya[n:], ya[:n])           # reorder 1st and 2nd half by split&join
```

```
In [4]: '''scatterplot for two dimensional data
           together with their marginal distributions'''
        def xywithmarginals(x, y, col):
            fig = plt.figure(figsize=(5, 5))                # square canvas
            bins = np.linspace(0.0, 1.0, 21)                # 20 bins from 0 to 1
            # define a 4x4 grid and distribute the virtual squares:
            # upper marginal 3x1, until 3rd col.
            axmx = plt.subplot2grid((4, 4), (0, 0), colspan=3)
            # right marginal 1x3, start 2nd/last
            axmy = plt.subplot2grid((4, 4), (1, 3), rowspan=3)
            # main window, size 3x3, skip 1st row
            axxy = plt.subplot2grid((4, 4), (1, 0), colspan=3, rowspan=3)
            axmx.hist(x, color=col, bins=bins, label='x', alpha=.5)# x-marginal histogram
            axmx.xaxis.set_ticklabels([])                          # no tickmarks
            axmy.hist(y, color=col, bins=bins, label='y', alpha=.5,
                    orientation='horizontal')                 # y-marginal, rotated
            axmy.yaxis.set_ticklabels([])
            axxy.scatter(x, y, color=col, edgecolor='')      # let it rain in big xy-panel
            axxy.axis([x.min(), x.max(), y.min(), y.max()]);# restrict area to full data range
```

```
In [5]: xywithmarginals(rain[0], rain[1], 'b')
```




```
In [6]: xywithmarginals(xa, ya, 'r')
```



2 Zusammenhang - Korrelation

2.1 Frage:

Je gröSSer x desto gröSSer y?

2.2 Gesucht

MaSS, welches Gemeinsamkeit berücksichtigt

2.3 Antwort

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot y_i$$

Daten zentrieren

2.4 Kovarianz

Definition Kovarianz:

$$\mathrm{Cov}_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

ist die Summe der quart. ein Point hat kein Kovarianz. Es ist undefiniert.

2.4.1 Eigenschaften

Symmetrie $\text{Cov}_{XY} = \text{Cov}_{YX}$

Varianz: $\text{Var}(X) = \text{Cov}_{XX}$

```
In [7]: '''covariance matrix'''
        covariance = np.cov(rain[0], rain[1])                    # part of numpy
        print('covariance matrix:\n{}\n'.format(covariance))     # four possible combinations
        print('covariance_XY = {:.8f}'.format(covariance[0][1]))# pick x-y off diagonal
```

```
covariance matrix:
[[0.0893181  0.00214176]
 [0.00214176 0.08634365]]

covariance_XY = 0.00214176
```

```
In [8]: '''variance?'''
        print('variance of x is {:.8f} and of y is {:.8f}'
              .format(rain[0].var(), rain[1].var()))
```

```
variance of x is 0.08919050 and of y is 0.08622030
```

```
In [10]: '''variance with: delta degree of freedom = 1'''
         print('variance of x is {:.8f} and of y is {:.8f}'
               .format(rain[0].var(ddof=1), rain[1].var(ddof=1)))
```

```
variance of x is 0.08931810 and of y is 0.08634365
```

```
In [11]: np.cov?
         np.var?
```

2.5 Produkt-Moment-Korrelation nach Pearson:

2.5.1 Vorgehen: Standardisieren

1. Zentrieren

$$x_i'' = x_i - \bar{x} \qquad y_i'' = y_i - \bar{y}$$

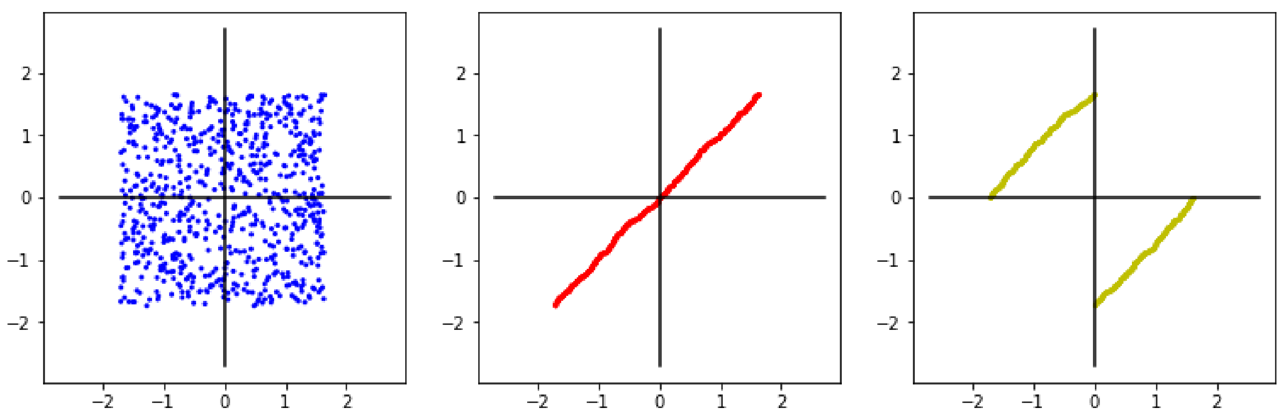
2. Stauchen auf Standardabweichung

$$x_i' = \frac{x_i''}{\sigma_x} \qquad y_i' = \frac{y_i''}{\sigma_y}$$

2.5.2 $\Rightarrow$ Neue Verteilungen x' und y'

- Mittelwerte $\overline{x'} = 0$ bzw. $\overline{y'} = 0$
- Standardabweichung $\sigma_x' = 1$ bzw. $\sigma_y' = 1$.

```
In [12]: '''same data, different co-relation x_i to y_j'''
         f = plt.figure(figsize=(13,4))
         f.add_subplot(1,3,1)
         x2 = rain[0]-rain[0].mean()
         y2 = rain[1]-rain[1].mean()
         x1 = x2/x2.std(ddof=1)                # standardized x/y
         y1 = y2/y2.std(ddof=1)
         plt.scatter(x1, y1, c='b', marker='.', edgecolor='')
         plt.plot((0., 0.), (-2.7, 2.7), 'k-')
         plt.plot((-2.7, 2.7), (0., 0.), 'k-');
         f.add_subplot(1,3,2)
         x2 = xa-xa.mean()
         y2 = ya-ya.mean()
         x1 = x2/x2.std(ddof=1)
         y1 = y2/y2.std(ddof=1)
         plt.scatter(x1, y1, c='r', marker='.', edgecolor='')
         plt.plot((0., 0.), (-2.7, 2.7), 'k-')
         plt.plot((-2.7, 2.7), (0., 0.), 'k-');
         f.add_subplot(1,3,3)
         x2 = xb-xb.mean()
         y2 = yb-yb.mean()
         x1 = x2/x2.std(ddof=1)
         y1 = y2/y2.std(ddof=1)
         plt.scatter(x1, y1, c='y', marker='.', edgecolor='')
         plt.plot((0., 0.), (-2.7, 2.7), 'k-')
         plt.plot((-2.7, 2.7), (0., 0.), 'k-');
```




```
In [18]: x1 = rain[0]-rain[0].mean()/rain[0].std(ddof=1)          # standardized x
         y1 = rain[1]-rain[1].mean()/rain[1].std(ddof=1)          # standardized y
         print('covariance matrix is \n{}'.format(np.cov(x1, y1)))# internal already ddof=1
```

```
covariance matrix is
[[0.0893181  0.00214176]
 [0.00214176 0.08634365]]
```

2.5.3 Zusammenhang

- Quadranten I und III
- Quadranten II und IV.

... haben unterschiedliche Vorzeichen. Sinnvoll daher:

2.5.4 Definition Korrelationskoeffizient nach Pearson

$$r_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} x_i' \cdot y_i'$$

In [19]:
```
'''calculate Pearson correlation coefficient of data [x[N], y[N]]'''
def pearsonrxy(xy):
    return ((xy[0]-xy[0].mean())*(xy[1]-xy[1].mean())).sum()/(
        xy.shape[1]-1) / (xy[0].std(ddof=1) * xy[1].std(ddof=1))

print('Pearson correlation coefficient of rain is {:.6f}'
      .format(pearsonrxy(rain)))
```

```
Pearson correlation coefficient of rain is 0.024389
```

2.5.5 Eigenschaften

- $-1 \leq r_{XY} \leq +1$
- $y = x \quad \Rightarrow \quad r_{XY} = +1$
- $y = -x \quad \Rightarrow \quad r_{XY} = -1$

2.5.6 Korrelation

In ursprünglichen Koordinaten
Korrelationskoeffizient

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

mit der ***Kovarianz***

$$\mathrm{Cov}_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

In [20]:
```
'''Correlation coefficient Pearson r
   input: two data arrays to be correlated: a and b of type ndarray
   output: r_ab with ddof=1                                          '''
def ccpearson( a, b ):
    cc = np.corrcoef(a, b)[0][1]      # side element of correlation matrix
    return cc

print('Covariance rain:')
print('(original)          = {: .6f}'.format(ccpearson(rain[0], rain[1])))
print('(sorted lin)        = {: .6f}'.format(ccpearson(xa, ya)))
print('(sorted with offset)= {: .6f}'.format(ccpearson(xb, yb)))
```

```
Covariance rain:
(original)          =  0.024389
(sorted lin)        =  0.999489
(sorted with offset)= -0.521914
```

2.6 Ergebnis Korrelation nach Pearson

$$r_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

mit der ***Kovarianz***

$$\mathrm{Cov}_{XY} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

- Bei exakter Übereinstimmung: $y = x$ ist $r = 1$.
- Bei umgekehrtem Vorzeichen aber übereinstimmendem Betrag $y = -x$ wird $r = -1$.
- Bei grober Entsprechung liegt r zwischen 0 und 1.
- Sind x und y unkorreliert, geht r gegen 0.

2.6.1 Bedeutung der Korrelation nach Pearson

- $r = +1$ für Gleichheit $y = a \cdot x$
- $r > 0$ für mittleren linearen Zusammenhang $y \sim x$
- $r < 0$ für mittleren linearen Zusammenhang $y \sim -x$
- $r = -1$ für Antikorrelation $y = -a \cdot x$
- $r = 0$ wenn *kein* (linearer) Zusammenhang

Stärke (willkürlich) nach Betrag

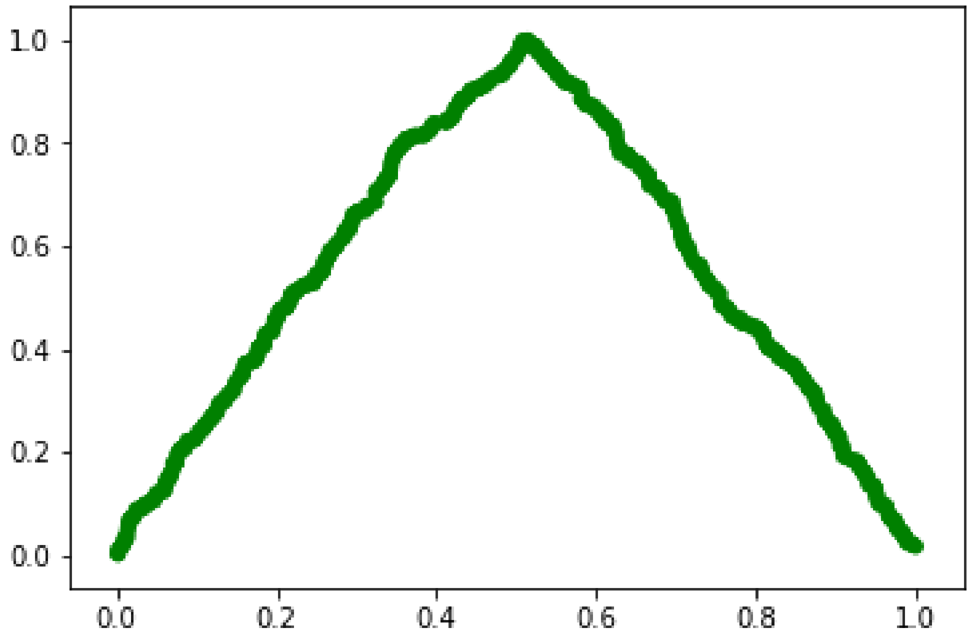
- bis 0,2 => sehr geringe Korrelation
- bis 0,5 => geringe Korrelation
- bis 0,7 => mittlere Korrelation
- bis 0,9 => hohe Korrelation
- über 0,9 => sehr hohe Korrelation

Obacht Korrelationskoeffizient trifft nur Aussage über **linearen** Zusammenhang. 相关性只针对线性相关来说

2.7 Zusammenhang nicht-linear?

```
In [21]: '''example for dependency - but no correlation'''
         yc = np.append( np.sort(rain[1][:n]), np.sort(rain[1][n:])[::-1] )   # re-sort
         plt.scatter(xa, yc, c='g', marker='o', edgecolor='')
         print('Covariance (/\)= {:.6f}'.format(ccpearson(xa, yc))) # fct defined above
```

```
Covariance (/\)= -0.040828
```



2.7.1 Stückweise Korrelation

- Abschnitte
  - jede Abhängigkeit kann stückweise als linear angesehen werden
- Linearisieren
  - Aus Theorie eine Modellfunktion bilden
  - Abbilden der Daten

2.7.2 Ausblick Regression

2.7.3 Verhalten unter linearer Transformation

Unter der linearen Transformation

$$\begin{aligned} x' &= a \cdot x &+ b \\ y' &= c \cdot y &+ d \end{aligned}$$

bleibt betragsmäSSig

$$r_{x'y'} = r_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\mathrm{Cov}(x',y')}{\sigma_{x'} \sigma_{y'}}$$

das Vorzeichen ändert sich bei unterschiedlichen Vorzeichen von a und c.

2.8 Korrelation und Kausalität

Keine Aussage über die Ursache

- $y(x)$?
- $x(y)$?
- $x(z)$ und $y(z)$?
- Zufall?

Beispiele

- Schein-Korrelation durch Versteckte Variable
  - Schulkinder: Geschicklichkeit korreliert mit KörpergröSSe
    - Grund: versteckte Variable "Alter"
- Inhomogenitäts-Korrelation
  - SchuhgröSSe vs. Einkommen: Männer, Frauen
- Schein-Korrelation durch Ausreisser / Standardisierung
  - zufällige Variation innerhalb Streuung
- oft bei Zeitreihen

3 Fragen?