081_Folien

December 12, 2018

```
In [1]: from matplotlib import pyplot as plt
        import numpy as np
        from scipy import stats
        %matplotlib inline
```

0.0.1 Beschreibende Statistik

0.0.2 Wahrscheinlichkeitstheorie

0.0.3 Schließende Statistik

Punktschätzungen

- Punktschätzer
- Max-Likelihood-Prinzip
- Robuste Schätzung

Tests

- Nullhypothese
- Vergleich mit Stichprobe
- Entscheidung: verwerfen?
- Binomialtest
- Gaußtest
- t-Test

Intervallschätzungen

1 Fragen der Schließenden Statistik

- Welche Verteilung hat die Grundgesamtheit?
  - ⇒ Theorie, Ockhams Rasiermesser, Vergleich
- Welcher Parameterwert paßt am besten zu den Beobachtungen?
  - ⇒ Schätzungen
- Sind die Beobachtungen mit einem angenommenen Parameter vereinbar?
  - ⇒ Testen einer Nullhypothese
- Welche Parameterwerte sind mit den Beobachtungen vereinbar?
  - ⇒ Vertrauensintervall
- Wie kamen die Beobachtungen zustande?
  - ⇒ Versuchsplanung

2 Nullhypothen-Signifikanz-Test (*NHST*)

Inhalt: - Schätzer ↔ Test - Zielsetzung - Beispiel - Vorgehen - Probleme und Lösungen - Zusammenfassung - Ausblick

2.0.1 Schätzer

- Stichprobe
- Kennzahl ($\overline{x}$, σ, ...)
- Parameter (μ, σ, λ, ...)

2.0.2 Test

- Hypothese
- Stichprobe
- Schätzer für Kennzahl/Parameter
- vergleichen mit Hypothese
- **a) In Einklang mit Hypothese?**
- **b) Signifikanter Unterschied?**

3 Ziel eines Tests

Hypothese: vorgegebene, vermutete oder interessierende Verteilung

Schätzer aus Stichprobe

Vergleich

3.1 $\Rightarrow$ standardisierte, akzeptierte Entscheidungsregel

3.2 1) Stichprobe $\notin$ Hypothese?

Beispiele

- Würfel unfair: $p_6 \neq \frac{1}{6}$?
- Zustimmung bei Umfrage: Mehrheit?
- Wareneingangskontrolle: Ausschuß?
- Wirksamkeit eines Medikaments
- Messwert und Genauigkeit/Meßfehler in Physik

3.3 2) Effekt - zwei gepaarte Stichproben

3.3.1 Stichproben $\{X_i|A\} \neq \{X_i|B\}$?

Beispiele

- vor und nach Training
- Wirkung Medikament / Plazebo an denselben Patienten
- Absatzänderung nach Werbung

3.4 3) Zwei unabhängige Stichproben

3.4.1 Stichproben $\{X_i|A\} \neq \{X_j|B\}$?

Beispiele

- Wirkung Medikament / Plazebo in Gruppe und Kontrollgruppe
- Wahrnehmungswahrscheinlichkeit bei verschiedenen Helligkeiten
- Umfrage unter Frauen / Männern

4 Beispiel Geburten

4.0.1 Frage: Sind Mädchen- und Jungengeburten gleich wahrscheinlich?

4.0.2 Ansatz: Eine Stichprobe, dichotomes Merkmal

Voraussetzung: Zufallsvariable X und i.i.d. Stichproben X_i **Nullhypothese:** $\pi_0 = \frac{1}{2}$ **Stichprobe:** Ein Tag in der Klinik: $N = 10$ Geburten **Modell:** Binomialverteilung mit Parameter π_0, unter der Nullhypothese

$$\mathcal{B}(N = 10,\ \pi_0 = 0.5)$$

Prüfgröße: Anteil der Mädchen $x_i = 1$

$$\pi = \overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Schätzer:

$$\hat{\pi} = \overline{X} \quad \text{für} \quad \mathcal{E}(X) = \pi$$

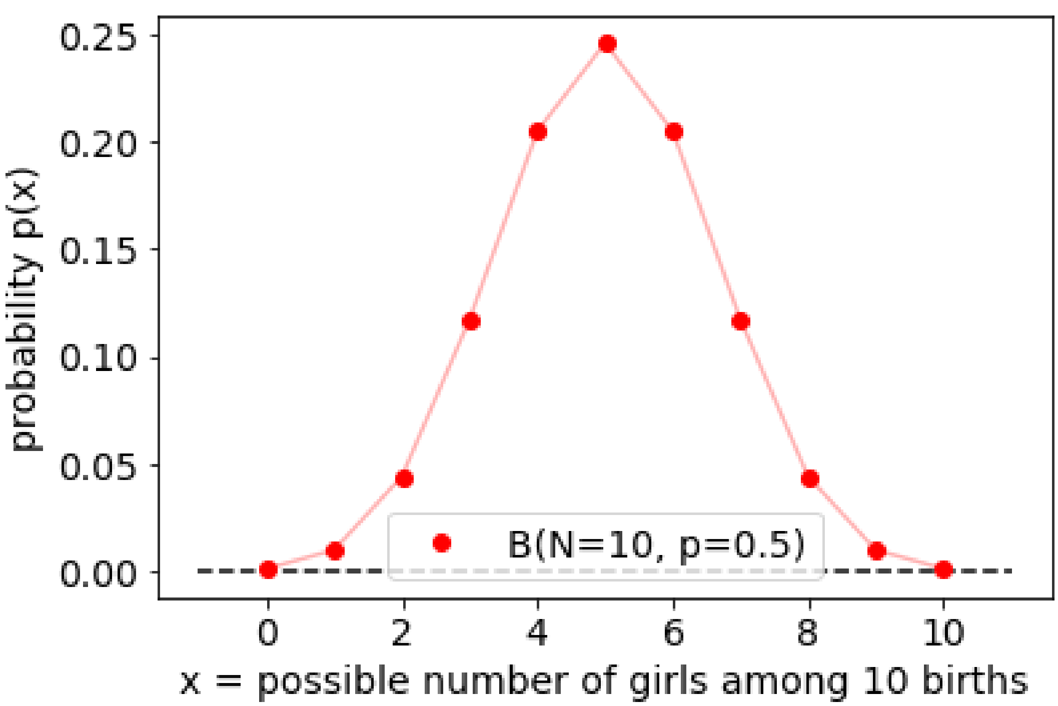
4.0.3 Fragestellung

Welche Beobachtungen sind mit der Nullhypothese im Einklang?

Welche Beobachtungen widersprechen der Nullhypothese - und führen daher zu deren Ablehnung?

- 5:5 ✓
- 4:6 ✓ ?
- 3:7 ?

```
In [3]: '''number of girls births according to binomial (equal) distribution'''
        N = 10                                            # number of total births
        pi = 0.5                                          # probability of female under 0-hypothesis
        ngirls = np.arange(N+1)                           # all possible numbers of females 0..N
        distr = stats.binom(n=N, p=pi)                    # freeze distribution to parameter N, pi
        # calculate binomial distribution for all posible m out of N with probability pi
        P = np.asarray([distr.pmf(m) for m in ngirls]) # probabilities of all possible results
        descr = 'B(N={:d}, p={:.1f})'.format(N, pi)       # descriptional text for graph including numbers
        plt.plot(ngirls, P, 'ro', label=descr)            # 11 possible results: pobability vs. number of girls m
        plt.plot(ngirls, P, 'r-', alpha =.3)              # same with connecting lines
        plt.legend(loc='lower center')
        plt.hlines(0.0, -1, 11, colors='k', linestyles='--')
        plt.xlabel('x = possible number of girls among 10 births')
        plt.ylabel('probability p(x)');
```



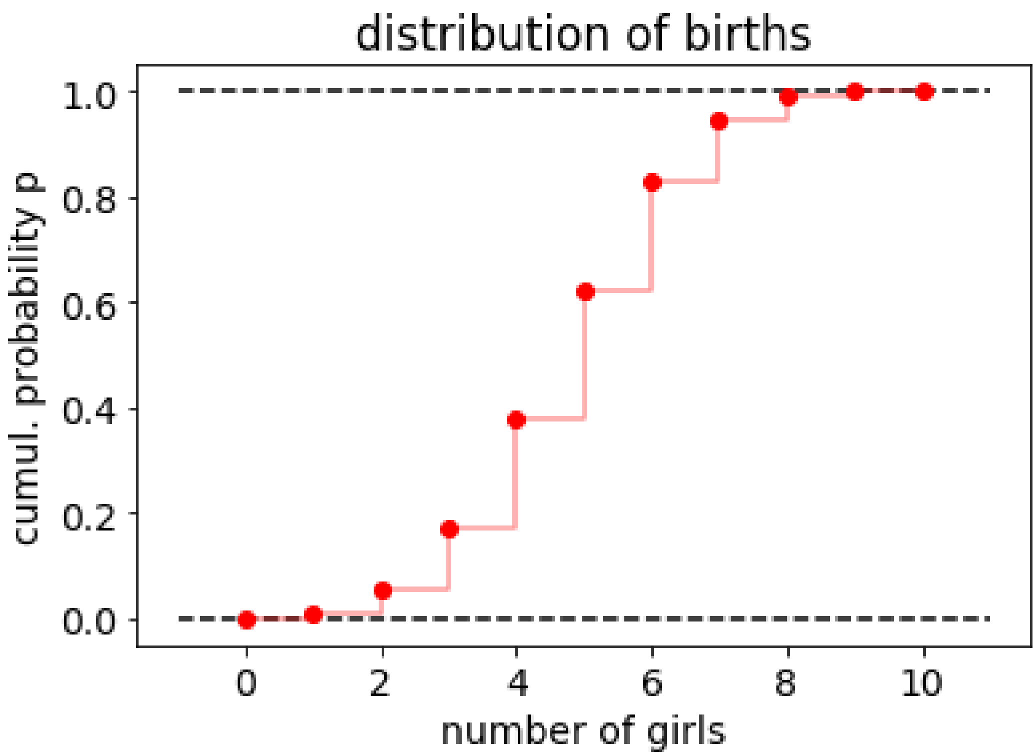
- Aufgetragen in X: Zahl von 0 bis 10 (nicht wie oben in der Formel für π die Wahrscheinlichkeit
  - Umrechnung: mal N
- Keine Zahl ist gänzlich unmöglich.

- Aber eben unwahrscheinlich, wie hier 0 und 1.
- Verwerfungsbereich
  - 0 sicherlich, viel zu unwahrscheinlich, glauben wir nicht
  - 1 sehr unhwahrscheinlich, auch nicht.
  - 2 hat schon fast 5% Wahrscheinlichkeit
  - 3 mit 12% noch mehr.
  - Klingt auch nicht wirklich wahrscheinlich.
  - **ABER** nirgends gibt es 50% oder höher.
  - **ALSO** Bereich von bis, der Wahrscheinlich ist.
  - Bereich zB von 3 bis 7.
- Für den Verwerfungsbereich
  - müssen wir alle Wahrscheinlichkeiten aufaddieren,
  - daß drunter unwahrscheinlich, also 0.001 + 0.01 .....
  - Lassen wir Python rechnen:

In [4]:
```
'''check sum of probabilities up to...'''
psum = 0.
for i, p in enumerate(P):
    psum += p
    print('number of girls <= {:2d} with probability p={:.3f}'.format(i, psum))
```

```
number of girls <=  0 with probability p=0.001
number of girls <=  1 with probability p=0.011
number of girls <=  2 with probability p=0.055
number of girls <=  3 with probability p=0.172
number of girls <=  4 with probability p=0.377
number of girls <=  5 with probability p=0.623
number of girls <=  6 with probability p=0.828
number of girls <=  7 with probability p=0.945
number of girls <=  8 with probability p=0.989
number of girls <=  9 with probability p=0.999
number of girls <= 10 with probability p=1.000
```

In [5]:
```
cdf = distr.cdf(ngirls)            # cumulative distribution function
plt.plot(ngirls, cdf, 'ro');       # plot as dots and connect opaque
plt.step(ngirls, cdf, 'r-', where='post', alpha=0.4)
plt.hlines([0.0, 1.0], -1, 11, colors='k', linestyles='--')
plt.title('distribution of births')
plt.xlabel('number of girls')
plt.ylabel('cumul. probability p');
```



4.0.4 Vorläufige Aussage

Unter der Voraussetzung = **Nullhypothese** H_0: *Gleichverteilung* zwischen Jungen und Mädchen - ist es sehr unwahrscheinlich (1 Promille) 10 Mädchen zu erhalten
aber bereits - über 10% Wahrscheinlichkeit für mindestens 3 Mädchen

4.0.5 Schwelle?

Ab welchem Wert ist es *ziemlich unwahrscheinlich*, daß ein konkretes Ergebnis einer Stichprobe noch mit der Nullhypothese in Einklang steht, ab welchem Wert wollen wir also die Nullhypothese **verwerfen**?

4.0.6 Festlegung

Wir wählen willkürlich als *ziemlich unwahrscheinlich* $\alpha = 0.1$ oder 10%.

4.0.7 Aufgabe

Konstruiere - aus der festgelegten Schwelle *ziemlich unwahrscheinlich* $\alpha = 10\%$ - einen Bereich an Werten, - in dem die kumulierte Wahrscheinlichkeit kleiner als das vorgegebene α ist
den ***Verwerfungsbereich***, ***Ablehnungsbereich***

4.0.8 Ergebnis für Ablehnungsbereich

{0, 1, 2}

4.0.9 Folgerung

Eine realisierte Stichprobe:

- 3 Mädchen
- Verhältnis 3:7
- ✓
- $\Rightarrow$ Die Nullhypothese wird nicht verworfen

4.0.10 Irrtumswahrscheinlichkeit

Eine andere realisierte Stichprobe:

- 2 Mädchen
- Verhältnis 2:8
- $\Rightarrow$ Wir verwerfen daher die Nullhypothese.

  Dabei gehen wir eine **Irrtumswahrscheinlichkeit** von α ein.

4.0.11 Problematik

- Festlegung der *Irrtumswahrscheinlichkeit* α unabdingbar
- Verwerfungsbereich

Aussage $\Leftrightarrow$ Irrtum

4.1 Zweiseitiger Ablehnungsbereich

Symmetrie unter Nullhypothese *gleich verteilt*

$$p(n_M \leq 2) = p(n_J \leq 2) = p(n_M \geq 8)$$

Nullhypothese:

$$H_0: \ \pi = 0.5$$

Alternativhypothese:

$$H_A: \ \pi \neq 0.5$$

Irrtumswahrscheinlichkeit

- Zweiseitiger Ablehnungsbereich
- (würde die Irrtumswahrscheinlichkeit verdoppeln)

... Ablehnungsbereich anpassen

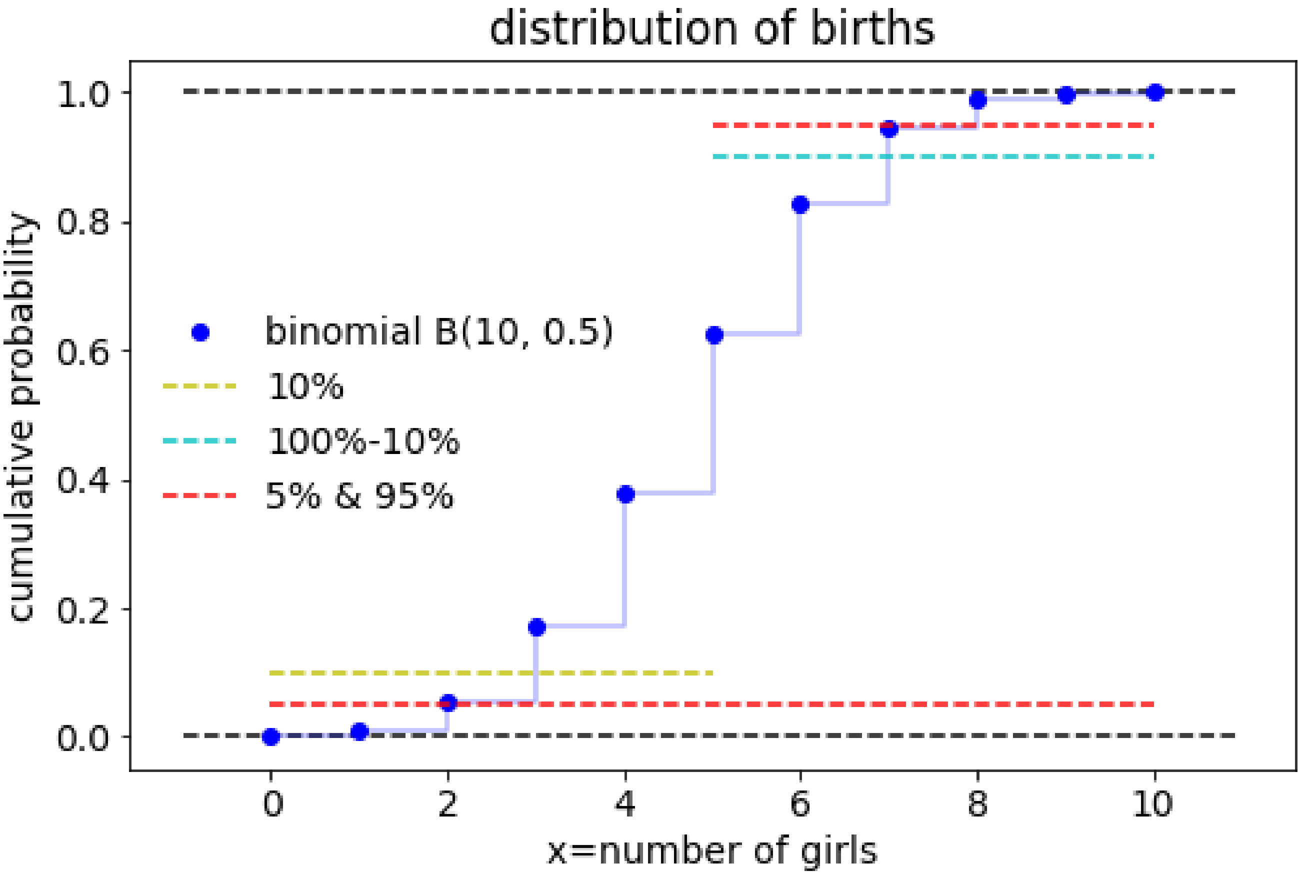
- gleiche Irrtumswahrscheinlichkeit
- (jede der beiden Seiten des einseitigen Ablehnungsbereichs verkleinert sich dadurch)

4.1.1 Beidseitige kumulierte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}
p(n_M \leq 0) + p(n_M \geq 10) = 0,002 \qquad &\Rightarrow H_0 \text{ verwerfen} \\
p(n_M \leq 1) + p(n_M \geq \ 9) = 0,021 \qquad &\Rightarrow H_0 \text{ verwerfen} \\
p(n_M \leq 2) + p(n_M \geq \ 8) = 0,110 \qquad &\Rightarrow H_0 \text{ nicht verwerfen}
\end{aligned}$$

zur Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 10\%$

```
In [6]: # ms and cdf from above
        f = plt.figure(figsize=(8, 5))
        plt.plot(ngirls, cdf, 'bo', label='binomial B(10, 0.5)')
        plt.step(ngirls, cdf, 'b-', where='post', alpha=.3)
        plt.hlines([0.0, 1.0], -1, 11, colors='k', linestyles='--')
        plt.title('distribution of births')
        plt.ylabel('cumulative probability')
        plt.xlabel('x=number of girls')
        plt.plot( [0.,  5.], 2*[0.1],  'y--', label='10%')        # yellow line for 10%
        plt.plot( [5., 10.], 2*[0.9],  'c--', label='100%-10%')   # green line for 90%
        plt.plot( [0., 10.], 2*[0.05], 'r--', label='5% & 95%')   # black line for  5% \
        plt.plot( [5., 10.], 2*[0.95], 'r--')                     # black line for 95% / sums to 10% outside
        plt.legend(loc='center left', frameon=False);
```



4.2 Test für die Binomialverteilung

```
scipy.stats.binom_test?
```

Parameter

```
alternative : {'two-sided', 'greater', 'less'}, optional
    Indicates the alternative hypothesis. The default value is 'two-sided'.
```

Rückgabe: kumulierte Wahrscheinlichkeit **p-Wert**, der von der Stichprobe erreicht wurde.

4.3 p-Wert eines Tests

erlaubt bequeme Bestimmung des p-Wertes ohne "Umweg" über Ablehnungsbereich.
Entscheidung kann sofort (je nach vorher festgelegter Irrtumswahrscheinlichkeit α) gefällt werden.

4.3.1 Vergleich:

$$
\begin{aligned}
p\text{-Wert} \geq \alpha \Rightarrow &\quad \text{vereinbar mit Nullhypothese} \\
p\text{-Wert} < \alpha \Rightarrow &\quad \text{Nullhypothese verwerfen}
\end{aligned}
$$

```
In [7]: '''does the number m of girls deviate from 0-hypothesis 50%?'''
        N = 10                                    # number of births in one day
        pi = 0.5                                  # 0-hypothesis 50%
        for m in range(N+1):                      # try all possible numbers of girls
            p = stats.binom_test(m, N, 0.5)       # p-value if binomial(N, .5) distrib.
            print('m={:2d}  p={:6.3f}'.format(m, p))
```

```
m= 0  p= 0.002
m= 1  p= 0.021
m= 2  p= 0.109
m= 3  p= 0.344
m= 4  p= 0.754
m= 5  p= 1.000
m= 6  p= 0.754
m= 7  p= 0.344
m= 8  p= 0.109
m= 9  p= 0.021
m=10  p= 0.002
```

4.4 p-Wert - Interpretation

Voraussetzung Geburten für Jungen und Mädchen sind i.i.d. Zufallsvariablen mit Binomial-Verteilung. #### Nullhypothese Jungen und Mädchengeburten sind gleich häufig $H_o : \pi = 0.5$ #### Alternativhypothese Jungen und Mädchen unterschiedlich häufig: $H_1 : \pi \neq 0.5$ #### Test Zweiseitiger Test auf α-Niveau

p-Wert Der p-Wert eines Tests ist die Wahrscheinlichkeit unter der Nullhypothese, den beobachteten Prüfgrößenwert oder einen in Richtung der Alternative extremeren Wert zu erhalten.

- Der p-Wert eines Tests erlaubt bequemen Vergleich mit Signifikanzniveau/Irrtumswahrscheinlichkeit ohne 'Umweg' über den Ablehnungsbereich
  - Entscheidung kann sofort (je nach vorher festgelegter Irrtumswahrscheinlichkeit α) gefällt werden
  - $p < \alpha \quad \Rightarrow$ Nullhypothese verwerfen
- Der p-Wert zeigt dasjenige Niveau an, **ab** dem die Nullhypothese mit $\alpha' = p$ verworfen worden wäre;
  - ansonsten ist dieser Wert sinnfrei; auf diesen Wert wäre man vorher, ohne das Ergebnis des Experiments zu kennen, nie gekommen
- Der p-Wert kann jedoch für jedes Niveau verglichen werden:
  - ein kritischer Kollege ist beim Test mit $\alpha = 10\%$ vielleicht nicht überzeugt
  - zeigt man ihm direkt $p < 0.001$, dann überzeugt ihn das mit *seinem* kritischeren Niveau
  - Nachrechnen des Verwerfungsbereichs auf einem anderen Niveau benötigt die Originaldaten

5 Vorgehensweise Test

6 Zusammenfassung und Verallgemeinerung

- **1) Formulieren des Problems**
- **2) Modellannahme**
  - Welcher Art sind die Daten
  - Welche Verteilung wird erwartet
- **3) Aufstellen der Nullhypothese und der Alternativhypothese**
  - Ziel soll es sein, die Nullhypothese ablehnen zu können
  - einseitiger Test
  - zweiseitiger Test
- **4) Festlegen des Signifikanzniveaus**
  - zulässige Irrtumswahrscheinlichkeit α
- **5) Teststatistik / Prüfgröße aussuchen**
  - verdichtet Information aus der Stichprobe
  - Verteilung unter H_A sollte sich deutlich von der unter H_0 unterscheiden

6.1 ...

- **6) Verteilungsfunktion F bestimmen**
  - theoretisch bestimmbar
  - asymptotisch bestimmbar
  - Simulation
- **7) Verwerfungsbereich**
  - Statistik: Verteilung der Prüfgröße
  - Hypothese: Richtung einseitig/zweiseitig
  - Signifikanzniveau: Irrtumswahrscheinlichkeit α
- **a) Verwerfungsbereich bestimmen**
  - Wert für t der Teststatistik T aus Daten bestimmen
  - Tabelle oder berechnen oder
- **b) p-Wert bestimmen**
  - Tabelle oder berechnen
- **8) Entscheidung fällen**
  - t im Verwerfungsbereich: Verwerfen der Nullhypothese
  - p außerhalb α: Verwerfen der Nullhypothese
  - sonst: H_0 nicht verwerfbar

6.2 Erweiterung des Beispiels: aktuelle Daten

Quelle: http://www.statistik.baden-wuerttemberg.de/BevoelkGebiet/GeburtSterben/01065011.tab?R=GS416041

Festlegen der Irrtumswahrscheinlichkeit

$$\alpha = 0.05$$

Bestimmung des Verwerfungsbereichs Hilfreich ist von `scipy.stats` zu jeder Verteilung (zB. `binom`) die `ppf()`-Funktion *Perzentile*

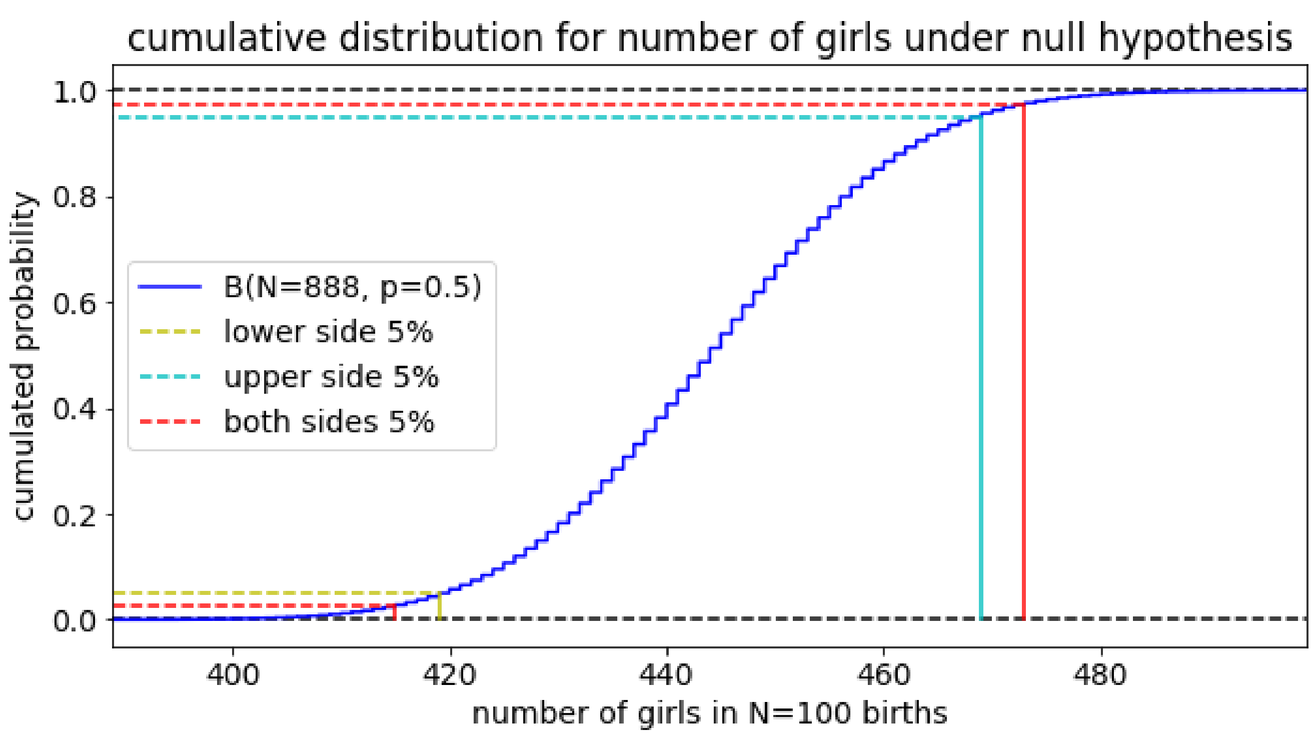
```
stats.binom.ppf?
Percent point function (inverse of `cdf`) at q of the given RV.
```

In [8]:
```python
'''test for observed births in Tübingen 2017'''
N = 888                                    # number of births in Tübingen 2017
pi0 = 0.5                                  # null-hypothesis: probability of female
alpha = 0.05                               # set level of significance to 5%
bino2017 = stats.binom(N, pi0)             # freeze paramters for re-using...
x05 =  bino2017.ppf(alpha).astype(int)     # don't reject above  5% one-sided
x95 =  bino2017.ppf(1-alpha).astype(int)   # don't reject below 95% one-sided
x025 = bino2017.ppf(alpha/2).astype(int)   # don't reject above   2,5% \ two-sided
x975 = bino2017.ppf(1-alpha/2).astype(int) #          and below  97,5% /
med =  bino2017.ppf(0.5).astype(int)       # definition of median and it's (point-) probb.
print( 'median {:.2f} has (point) probability {:.5f}'.format(med, bino2017.pmf(med)))
print( 'one side lower rejection region < {}  has probability {:.5f}'
      .format(x05, bino2017.cdf(x05-1)))   # cumulative lower tail below x10
print( 'one side upper rejection region > {}  has probability {:.5f}'
      .format(x95, 1.-bino2017.cdf(x95)))  # cumulative upper tail above x90
print( 'two sided rejection regions (<{}, >{}) have probability {:.5f}'
      .format(x025, x975, bino2017.cdf(x025-1) + (1.-bino2017.cdf(x975))))
ngirls = 451                               # number of girls observed
print( 'binom_test({3}, {0}, {1}) gives p={2:.5f} for {3} girls'
      .format(N, pi0, stats.binom_test(ngirls, N, pi0), ngirls))
```

```
median 444.00 has (point) probability 0.02677
one side lower rejection region < 419  has probability 0.04347
one side upper rejection region > 469  has probability 0.04347
two sided rejection regions (<415, >473) have probability 0.04765
binom_test(451, 888, 0.5) gives p=0.66268 for 451 girls
```

[ÜA] Index? Erklären Sie warum der "Index" des *lower tail*s decrementiert werden muß, der des *upper tail*s hingegen nicht.

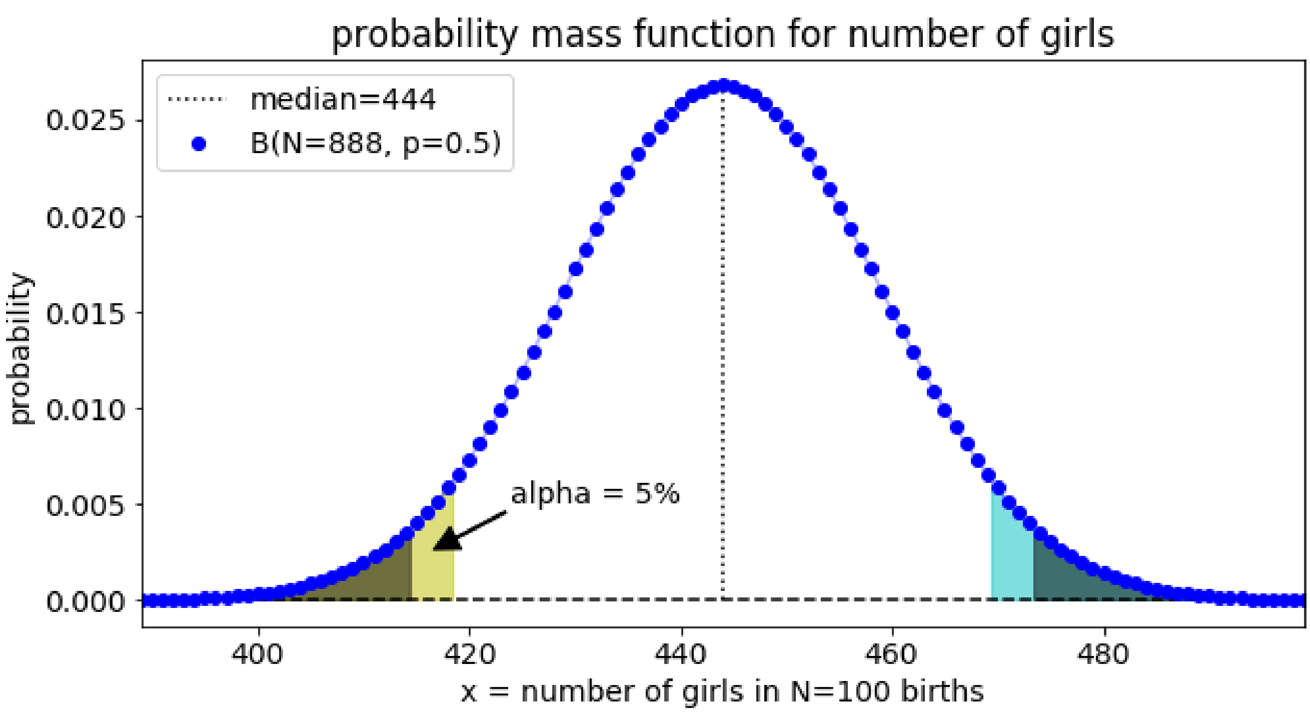
In [10]:
```
'''diagram of same distribution as before'''
ng = np.linspace(0, N, N+1)                          # all possible values for #girls
cg = bino2017.cdf(ng)                                # cdf each thereof
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.title('cumulative distribution for number of girls under null hypothesis')
descr = 'B(N={:d}, p={:.1f})'.format(N, pi0)         # description for graph incl. numbers
plt.step(ng, cg, 'b-', where='post', label=descr)    # show steps to clarify cdf and ppf
xlimit = (bino2017.ppf(0.0001), bino2017.ppf(0.9999))# show only relevant part
plt.xlim(xlimit)                                     # from above (1-promille)
plt.plot( [0, x05],    2*[0.05],  'y--', label='lower side 5%')   # xXX from above
plt.plot( [x95, 100],  2*[0.95],  'c--', label='upper side 5%')
plt.plot( [0, x025],   2*[0.025], 'r--', label='both sides 5%')
plt.plot( [x975, 100], 2*[0.975], 'r--')
plt.plot( 2*[x05],  [0., 0.05], 'y-')               # x to rejection regions
plt.plot( 2*[x95],  [0., 0.95], 'c-')               # aXX from above
plt.plot( 2*[x025], [0., 0.025], 'r-')
plt.plot( 2*[x975], [0., 0.975], 'r-')
plt.xlabel('number of girls in N=100 births')
plt.ylabel('cumulated probability')
plt.hlines([0.0, 1.0], xlimit[0], xlimit[1], colors='k', linestyles='--')
plt.legend(loc='center left');
```



In [11]:
```
'''number of girls - cumulated probability in tails'''
# aXX, bino2017 from above
x = np.arange(0, N+1)                    # all possible values of number of births
pmf = bino2017.pmf(x)                    # probabilty mass function of null hypothesis
```

```
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.title('probability mass function for number of girls')
plt.xlim(xlimit)                              # same frame as before
plt.plot((med, med), (0, bino2017.pmf(med)), 'k:', label='median={}'.format(med))
plt.plot(x, pmf, 'bo', label=descr)           # pmf, label as before
plt.plot(x, pmf, 'b-', alpha=.3)              # same but connected
# fill area of rejection regions
xx = np.zeros(2*len(x))
xx[0::2] = x-.5                  # frontal border of rectangle
xx[1::2] = x+.5                  # postal border of rectangle
px = np.zeros_like(xx)           # pmf
px[0::2] = pmf                   # within rectangle
px[1::2] = pmf                   #
plt.hlines([0.0], xlimit[0], xlimit[1], colors='k', linestyles='--')
# upper bound is included => +1 for first rejected above
# lower bound is included => since slicing is exlusive, it subtracts automatically
plt.fill_between(xx[:2*x05],    0, px[:2*x05],    color='y', alpha=0.5) # alpha<5%
plt.fill_between(xx[2*x95+2:],  0, px[2*x95+2:],  color='c', alpha=0.5) # alpha>95%
plt.fill_between(xx[:2*x025],   0, px[:2*x025],   color='k', alpha=0.5) # alpha<2.5%
plt.fill_between(xx[2*x975+2:], 0, px[2*x975+2:], color='k', alpha=0.5) # and  >97.5%

plt.annotate('alpha = 5%', xy=(x[x05-2]-.5, .5*pmf[x05-2]), xytext=(x[x05]+5, 0.002+pmf[x025-2]),
             arrowprops=dict(facecolor='black', shrink=0.02, width=1) )
plt.xlabel('x = number of girls in N=100 births')
plt.ylabel('probability')
plt.legend(loc='upper left');
```

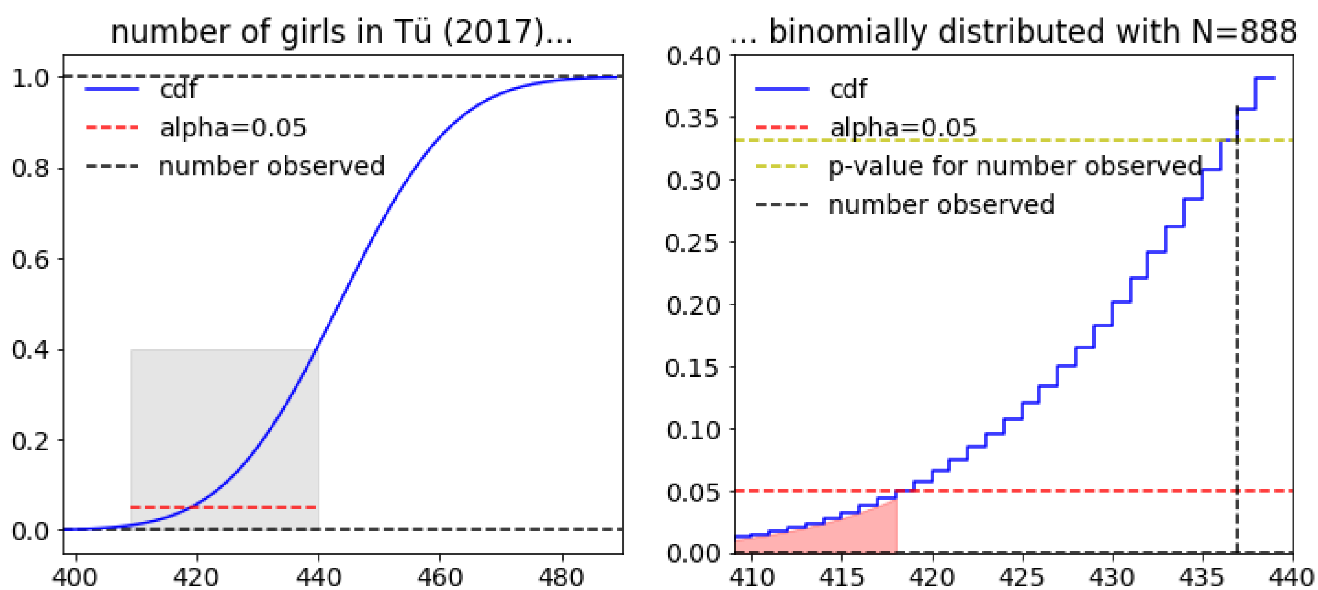


In [12]:
```
# N = 59510                                  # number of births in Germany Dezember 2017
# g = 28886                                  # girls among them
N = 888                                      # number of births in Tübingen 2017
g = N - 451                                  # girls among them
pi0 = 0.5                                    # H0: equal distribution
alpha = 0.05                                 # significance level 5%
binom2017 = stats.binom(N, pi0)              # define the Binomial distribution N, pi0
f = plt.figure(figsize=(12,5))               #
```

```python
f.add_subplot(1, 2, 1)                          # -- left plot --
x1, x2 = binom2017.ppf([0.001, 0.999])          # sart and end of
ms = np.arange(x1, x2, 1)                       # ROI number girls
cdf = binom2017.cdf(ms)                         # cumulative distribution function
plt.plot(ms, cdf,'b-', label='cdf')             # complete cdf graph
plt.title('number of girls in Tü (2017)...')
plt.xlim(x1, x2)
plt.hlines([0.0, 1.0], x1, x2, colors='k', linestyles='--')
ylevel = .4  # 0.09
x3, x4 = binom2017.ppf([.01, ylevel])           # start and end of ROI, shaded here:
plt.fill_between([x3, x4], 0, [ylevel, ylevel], color='k', alpha=0.1)
plt.plot([x3, x4], 2*[alpha], 'r--', label='alpha=0.05')
plt.plot(2*[g], [0, p], 'k--', label='number observed')
plt.legend(loc='upper left', frameon=False)

f.add_subplot(1, 2, 2)                          # -- right plot --
ms = np.arange(x3, x4, 1)                       # ROI number girls
cdf = binom2017.cdf(ms)                         # cumulative distribution function
plt.plot(ms, cdf,'b-', label='cdf', drawstyle='steps-pre')       # ROI of cdf
plt.xlim(x3, x4)
plt.hlines([0.0], x3, x4, colors='k', linestyles='--')
plt.ylim(0.0, ylevel)
plt.title('... binomially distributed with N={}'.format(N))
p = stats.binom_test(g, N, 0.5) / 2.        # 1-sided p-value for observed g girls
print('for {} girls in {} births ({:.2f}%) p(less)={:.5f} under 0-hypothesis "equal"'
      .format(g, N, g*100./N, p))
plt.plot([x3, x4], 2*[alpha], 'r--', label='alpha=0.05')
plt.plot([x3, x4], 2*[p], 'y--', label='p-value for number observed')
plt.plot(2*[g], [0, .9*ylevel], 'k--', label='number observed')
rr = binom2017.ppf(0.05).astype(int)        # border of the the reject region (1-sided)
ri = np.rint(rr - x3).astype(int)           # index within ms on x-axis
plt.fill_between(ms[:ri], 0, cdf[:ri], color='r', alpha=0.3)
plt.legend(loc='upper left', frameon=False);
```

```
for 437 girls in 888 births (49.21%) p(less)=0.33134 under 0-hypothesis "equal"
```



6.3 Zusammenfassung Binomial-Test

Gemessene relative Häufigkeit $\hat{\pi}$ bzw. absolute Anzahl $n_x = n \cdot \hat{\pi}$ mit Binomialverteilung $\mathcal{B}(n, \pi_0)$ vereinbar?

Nullhypothese und Alternativhypothese(n)

$$H_0 : \pi = \pi_0 \;\leftrightarrow\; H_1 : \pi \neq \pi_0$$

$$H_0 : \pi = \pi_0 \;\leftrightarrow\; H_2 : \pi < \pi_0$$

$$H_0 : \pi = \pi_0 \;\leftrightarrow\; H_3 : \pi > \pi_0$$

Irrtumswahrscheinlichkeit festlegen, z.B. $\alpha = 5\%$

Verwerfungsbereich `n_alpha = scipy.stats.binom(n, pi).ppf(alpha)`

Entscheidung Verwerfe die Nullhypothese, wenn für $n_x = n \cdot \hat{\pi}$ gilt

1. $n_x < n_{\alpha/2}$ -oder- $n_x > n_{1-\alpha/2}$
2. $n_x < n_\alpha$
3. $n_x > n_{1-\alpha}$

p-Wert

```
p_val = scipy.stats.binom_test(x, n, pi)                        # two sided test
p_val = scipy.stats.binom_test(x, n, pi, alternative='two-sided')
p_val = 0.5*scipy.stats.binom_test(x, n, pi)                    # one sided symmetrical test
p_val = scipy.stats.binom_test(x, n, pi, alternative='less')    # one sided test below
p_val = scipy.stats.binom(n, pi).cdf(x)                         # one sided test below
p_val = scipy.stats.binom_test(x, n, pi, alternative='greater') # one sided test above
p_val = 1-scipy.stats.binom(n, pi).cdf(x-1)                     # one sided test above
```

Parameter

```
alternative : {'two-sided', 'greater', 'less'}  (optional)
    Indicates the alternative hypothesis. The default value is 'two-sided'.
```

Entscheidung Verwerfe die Nullhypothese, wenn

$$p_{val} < \alpha$$

7 Fragen?

---

8 Versuchsplanung

```
In [13]: '''does the empirical finding p=51.5% boys deviate from 0-hypothesis 50%?
            check for a different number of total births observed'''
         s = np.arange(3, 15)                                        # use s as exponent, start with n=8
         Ns = 2**s                                                   # 2^s
         pi0 = 0.5                                                   # 0-hypothesis
         emp = 1. - 0.515                                            # empirical ratio of girl-births
         for n in Ns:                                                # how many births
             m = int(np.round(emp*n))                                # ratio -> number of girls
             p = stats.binom_test(m, n, 0.5)                         # p-value for m out of n girls
             print('m={:5d} of {:6d}  p={:6.4f}'.format(m, n, p/2.))  # one-sided test
```

```
m=    4 of      8  p=0.5000
m=    8 of     16  p=0.5000
m=   16 of     32  p=0.5000
m=   31 of     64  p=0.4503
m=   62 of    128  p=0.3955
m=  124 of    256  p=0.3309
m=  248 of    512  p=0.2537
m=  497 of   1024  p=0.1824
```

```
m=  993 of   2048  p=0.0888
m= 1987 of   4096  p=0.0293
m= 3973 of   8192  p=0.0034
m= 7946 of  16384  p=0.0001
```

8.0.1 Versuchsplanung

Wenn wir n=4096 Geburten beobachten und dabei m=1987 Mädchen zählen (wie es den empirischen Daten entspricht) dann erhalten wir ein sog. *signifikantes* Ergebnis ($\alpha < 5\%$):

Die Nullhypothese muß verworfen werden.

Um die Nullhypothese verwerfen zu können müssen wir also mindestens 4000 Geburten abwarten.

- Vorversuch oder Theorie zur ungefähren Erwartung des Effekts
- Modellverteilung und
- Teststatistik
- Bestimmung der Stichprobengröße

Falsch

- ... wäre es, so lange Stichproben zu erheben, bis p "signifikant" ist!

9 Approximativer Binomialtest

Für große $n > 30$ nähert sich die Binomialverteilung der Normalverteilung an.

$$\mathcal{B}(n,\ \pi) \approx \mathcal{N}(n\pi,\ n\pi(1{-}\pi))$$

womit sich für die standardisierte Summe ergibt:

$$Z = \frac{X - n\pi}{\sqrt{n\pi(1{-}\pi)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Damit kann für $n \cdot \pi(1{-}\pi) > 9$ mit der Φ-Tabelle genähert werden.

Daraus Ablehnungsbereich (für vorgegebene Irrtumswahrscheinlichkeit α) ablesen, auf X zurückrechnen.

9.0.1 Historisch

Tabellen für Binomialverteilung für verschiedene π nur bis zu $n = 30$. Tabellen der Standardnormalverteilung lagen vor.

```
In [15]: '''approximated one-sided Normal-Test - matches (almost)'''
         # N=888  pi0=0.50  g=437   from above
         g1, g2 = stats.binom(N, pi).ppf((.02, .06)).astype(int) # check 2.5% and 5% thresholds
         for x in range(g1, g2):                              # test Tü-result 2017 and above until alpha
             zx = (x - N*pi0)/(np.sqrt(N*pi0*(1-pi0)))        # standardized girls rvs
             pval = stats.norm.cdf(zx)                        # cumulate probability "less girls"
             print('nx={} : norm.cdf({:.3f}) = {:.5f}'.format(x, zx, pval))
```

```
nx=437 : norm.cdf(-0.470) = 0.31925
nx=438 : norm.cdf(-0.403) = 0.34359
nx=439 : norm.cdf(-0.336) = 0.36859
nx=440 : norm.cdf(-0.268) = 0.39417
nx=441 : norm.cdf(-0.201) = 0.42021
nx=442 : norm.cdf(-0.134) = 0.44661
```

---

10 Normalverteilung

- für stetige Merkmale, die normalverteilt sind
- für stetige Merkmale beliebiger Verteilung mit großem Stichprobenumfang
  - Daumenregel $n > 30$
- wenn Streuung / Varianz bekannt

11 Gauß-Test

Beispiel Zur Herstellung unterschiedlicher Schrauben kann die Länge an der Maschine eingestellt werden.

Frage: Haben die Schrauben die richtige (Soll-)Länge oder muß die Maschine nachgestellt werden?

Modell: Normalverteilung (viele kleine Ursachen für Abweichung) mit bekannter Varianz (Maschinentoleranz, Erfahrung) - Erwartungswert μ_0 - Varianz σ^2

Nullhypothese: Maschine ist richtig eingestellt, die Länge entspricht der Soll-Länge $\mu = \mu_0$.

Prüfgröße: Stichprobenmittel $\overline{x}$

Test mit Ablehnungsbereich

1. zweiseitig: $|\overline{x} - \mu_0| > c_a$
2. nach oben: $\overline{x} - \mu_0 > c_b$
3. nach unten: $\mu_0 - \overline{x} > c_c$

Wie groß sind die Ablehnungsbereiche c_i unter einem vorgegebenen Signifikanzniveau α z.B. $\alpha = 0,01$?

11.0.1 Wenn

Nullhypothese: Schraubenlängen

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$$

11.0.2 dann erwarten wir

für die Teststatistik: mittlere Schraubenlänge

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

eine Varianz von $\frac{\sigma^2}{n}$

11.0.3 damit der standardisierte Mittelwert

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

In [16]:
```
'''example: test a sample screw out of production'''
mu0 = 25.0              # specified mean length of production
sigma = 0.5             # fixed standard deviation of machine
l1 = 23.5               # measurement of a single control screw
z1 = (l1 - mu0)/sigma   # standardized
# one sided lower l1 < mu
print('1. length l={:.1f}mm has p-value of p={:.5f}'
      .format(l1, stats.norm.cdf(z1)))
```

```
1. length l=23.5mm has p-value of p=0.00135
```

In [17]:
```
'''example: test a sample with nine screws out of production'''
mu0 = 25.0              # specified mean length of production
sigma = 0.5             # fixed standard deviation of machine
# 9 controls
l = np.array([24.1, 24.5, 24.8, 25.2, 24.8, 24.7, 24.2, 24.6, 25.3])
zn = (l.mean() - mu0)/sigma*np.sqrt(len(l))      # standardized
# one sided test for lower: ln < mu
print('{} lengths lmean={:.2f}mm have p-value of p={:.5f}'
      .format(len(l), l.mean(), stats.norm.cdf(zn)))
print('[as a control std(measured)={:.3f}]'.format(l.std(ddof=1)))
```

```
9 lengths lmean=24.69mm have p-value of p=0.03097
[as a control std(measured)=0.401]
```

11.1 Zusammenfassung Gauss-Test

Normalverteilte Zufallsvariable X mit bekannter Streuung σ

$$X \sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$$

Stichprobe mit n Werten hat Mittelwert

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$

Nullhypothese und Alternativhypothese

$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \leftrightarrow \ H_1 : \mu \neq \mu_0$$
$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \leftrightarrow \ H_2 : \mu < \mu_0$$
$$H_0 : \mu = \mu_0 \ \leftrightarrow \ H_3 : \mu > \mu_0$$

Testgröße Der standardisierte Mittelwert

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$$

Verwerfungsbereich Verwerfe die Nullhypothese, wenn für den standardisierte Mittelwert

1. $|z| > z_{1-\alpha/2}$
2. $z < z_\alpha$
3. $z > z_{1-\alpha}$

12 Zusammenfassung Test

- Modell
- Nullhypothese
- Alternativhypothese
- Ablehungsbereich
- kumulierte Wahrscheinlichkeit: p-Wert
- Entscheidung

12.1 Tests

Binomialtest

- Binomial veteilte Daten
- `scipy.stats.binom_test()`

Gauß-Test

- normalverteilte Daten bekannter Varianz
- standardisierter Mittelwert `x`
- `scipy.stats.norm.cdf(x)`

Ausblick

- Ausblick: *t-Test*

---

13 Anmerkungen zu Tests

14 Alternativ-Hypothese

Eine *Reihe* von Modellen (Parametern) wird zu den Messergebnissen *besser* passen.
Beste: **Schätzer**!

15 [Vorsicht] *Beibehalten der Null-Hypothese*

Das *Nicht-Verwerfen* der Nullhypothese bedeutet **nicht**, daß die Nullhypothese die beste Hypothese ist!

"*Beibehalten* der Nullhypothese" ist falsch! (Natürlich wäre bei 8 Jungen die Alternativhypothese $\pi = 0.2$ besser)

Hypothese und Alternativhypothese stellt man *vor* der Messung auf.

15.0.1 Beispiel: Absolute Mehrheit

1) testen auf *keine absolute Mehrheit*

- Erfolg wäre: H_0 zu **verwerfen**
- Ergebnis: **hat** absolute Mehrheit

2) testen auf *absolute Mehrheit*

- Misserfolg: nicht verwerfen
- Ergebnis?
  - Nichts!
  - Es könnte trotzdem *nicht* absolut reichen, das haben sie nicht getestet!

Unterschied:

- obere oder untere Schranke!

```
In [19]: '''Survey before election day: party A vs. B
            Does A reach majority?'''
         N = 1234
         A = 651
         alpha = .05
         distrib = stats.binom(N, 0.5)
         # one sided upper rejection region: A has NO majority
         n_upper = distrib.ppf(1-alpha)
         print('A={} does exceed          upper rejection ({}%) region {:.0f}; p={:.3f}'.
               format(A, 100*alpha, n_upper, 1 - distrib.cdf(A)))
         # one sided lower rejection region: A has majority
         n_lower = distrib.ppf(alpha)
         print('A={} does not fall below lower rejection ({}%) region {:.0f}; p={:.3f}'.
               format(A, 100*alpha, n_lower, distrib.cdf(A)))
```

```
A=651 does exceed          upper rejection (5.0%) region 646; p=0.025
A=651 does not fall below lower rejection (5.0%) region 588; p=0.975
```

16 Verwerfen der Nullhypothese

Der Test hat ergeben, daß mit Irrtumswahrscheinlichkeit α die Nullhypothese verworfen wird.

16.1 Signifikanz-Klassen

```
P >  0,05   nicht signifikant   n.s.
P >  0,01   signifikant         *
P >  0,001  stark signifikant   **
P <= 0,001  höchstsignifikant   ***
```

17 Vorsicht mit der *Irrtums* wahrscheinlichkeit

Bei einem 5% Signifikanzniveau muß man nur 20x messen, um ....

```
In [20]: '''create 365 samples from same H0-distribution and compare them'''
         np.random.seed(9876543)
         N = 365                                   # number of experiments
         pi = 0.36                                 # some arbitrary probability
         mi = stats.binom(N, pi).rvs(size=N)       # draw the samples from Binomial(N, pi)
         j = 0
         for m in mi:                              # test every sample
             p = stats.binom_test(m, N, pi)        #    against H0, the original true distribution
             if p < 0.05:                          # and report, if test fails (H0 screwed)
                 j += 1
                 print('{:2d}. Binomial({}, {}) p={:.5f}'.format(j, m, N, p))
```

```
 1. Binomial(109, 365) p=0.01414
 2. Binomial(150, 365) p=0.04374
 3. Binomial(107, 365) p=0.00751
 4. Binomial(154, 365) p=0.01631
 5. Binomial(153, 365) p=0.02187
 6. Binomial(155, 365) p=0.01202
 7. Binomial(107, 365) p=0.00751
 8. Binomial(152, 365) p=0.02544
 9. Binomial(150, 365) p=0.04374
10. Binomial(151, 365) p=0.03354
11. Binomial(153, 365) p=0.02187
12. Binomial(106, 365) p=0.00538
13. Binomial(152, 365) p=0.02544
14. Binomial(111, 365) p=0.02903
15. Binomial(156, 365) p=0.00877
16. Binomial(151, 365) p=0.03354
17. Binomial(113, 365) p=0.04949
18. Binomial(107, 365) p=0.00751
```

18 Fehler

Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit kommen auch Irrtümer vor.

18.0.1 Effekt

Test ergibt "*verwerfen der Nullhypothese*".

18.1 1) Tatsächlich

Ein Effekt wurde beobachtet.
Folglich muß eine alternative Hypothese stimmen.
-oder-

18.2 2) Nullhypothese zufällig verletzt

18.2.1 Fehler 1. Art, α-Fehler

Mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α wird die Nullhypothese verletzt obwohl sie eigentlich stimmt.
$\Rightarrow$ Eintreten dieses Falles ist unvermeidbar.

18.3 3) Nullhypothese *nicht verwerfen*, obwohl Alternativhypothese richtig wäre

18.3.1 Fehler 2. Art, β-Fehler

Die Nullhypothese wurde aufgrund des Tests nicht verworfen.

α und β beeinflussen sich gegenseitig: - verkleinert man die Irrtumswahrscheinlichkeit für H_0, vergrößert man unausweichlich den Fehler 2. Art.

Deshalb sucht man immer einen Kompromiß.

Gut wäre ein Test, der große *Trennschärfe* hat, der also zwischen H_0 und H_A möglichst gut unterscheiden kann. - Dies nennt man Güte des Tests. - (englisch:) *power*

18.4 4) Störende Alternative

Mögliche Ursachen: - systematischer Fehler in den Meßdaten - Messungen nicht unabhängig - Voraussetzungen für Test nicht erfüllt: - Meßdaten nicht normalverteilt (beim Gauß-Test) - Meßdaten nicht symmetrisch verteilt (beim Vorzeichen-Rangsummen-Test) - Meßdaten nicht gleichverteilt (beim Vorzeichen-Test)

Ein Eintreten dieser Fälle ist *nicht zufällig*. Es läßt sich vermeiden. Darauf muß explizit geachtet werden.

19 Kumulierter α-Fehler

Mehrere Tests Beispiel: ist ein Roulette-Spiel fair? - $N = (36+2)\times$ Binomial-Tests auf $\pi_0 = \frac{1}{38}$

Problem: Irrtumswahrscheinlichkeit hat N-fach höhere Chance

Lösung:

- Bonferroni Korrektur

$$\alpha_i = \frac{1}{N}\alpha$$

- Anderer Test (später ...)

Anwendung:

- Bildauswertung, zB. fMRT

20 Störparameter

Beispiel: Bei zwei Zufallsvariablen mit Verteilungen $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu+\delta, \sigma^2)$ interessiert lediglich der Abstand, der Parameter δ.

Schätzer für δ

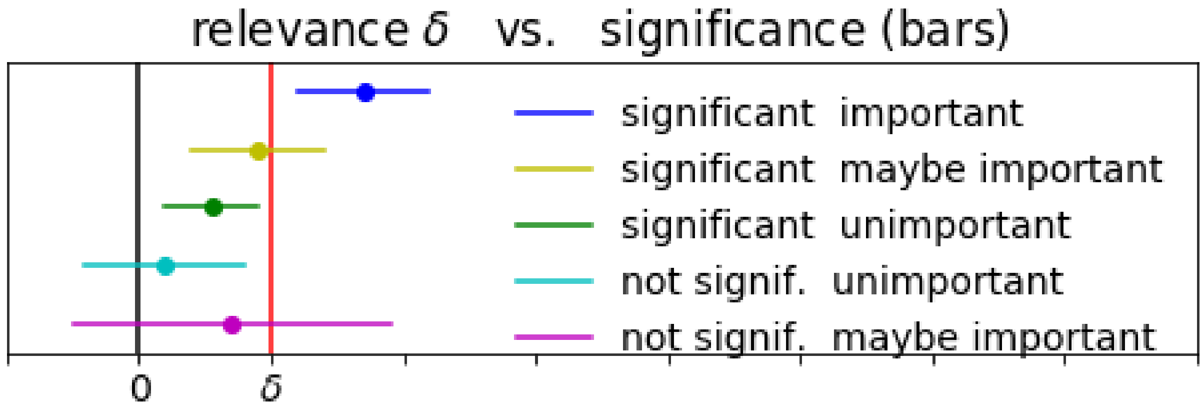
- gepaarte Stichproben, daraus $\hat{\delta} = \overline{X_1 - X_2}$
- μ und σ sind "*Störparameter*".
  - Spielen für die Fragestellung direkt keine Rolle
  - bestimmen jedoch das Modell
  - und damit den Test

Der Test läßt sich für δ wie zuvor ausführen...

21 Sinn und Unsinn von Tests

- Signifikanzniveau dient als **Filter gegen Spekulation**
- Signifikanz beantwortet **nicht** die Frage nach der **Relevanz**
  - Was ist die **wichtige** Fragestellung?
  - Wie groß sollte der Effekt sein: δ
  - Mit zu kleinem n ist Signifikanz schwer festzustellen
  - Mit zu großem n ist alles irgendwann signifikant
  - n vor dem Versuch abschätzen und einhalten

```
In [21]: '''show relevance (delta) vs. significance (bars)'''
```



22 Hinweise zur Qualität

Je weniger Voraussetzungen nötig sind, desto eher läßt sich ein Test anwenden. - Rangsummentest statt t-Test - Vorzeichentest statt Rangsummentest

Aber. Je einfacher der Test, desto weniger trennscharf sind die Ergebnisse.

22.1 Fehler 2. Art:

Wie wahrscheinlich ist ein beibehalten der Nullhypothese, obwohl die Alternative zutrifft?

Diese Wahrscheinlichkeit nimmt mit abnehmender Trennschärfe des Tests zu!

1. Wenn Verteilung symmetrisch, dann Rangsummentest.
2. Sonst Vorzeichentest

23 Ausblick

Varianz unbekannt Bei unbekannter Streuung muß die Varianz zusätzlich (zum Gauß-Test) geschätzt werden. t-Test #### Verteilung Von Interesse ist nicht nur ein Kennwert, sondern die *Verteilung*: χ^2-Test

23.1 Alternativen

***nicht-parametrische* Tests** Gauß- und t-Test setzen eine Normalverteilung voraus. - Oft in der Realität erfüllt

Bei unbekannter Verteilung bleiben *Charakteristika* wie **Median** und **Quantile**. Dazu nicht-parametrische Tests wie z.B. - Vorzeichen-Test - Wilcoxon-Vorzeichen-Rangsummen-Test

Literatur: *Fahrmeier et.al.*

24 Zusammenfassende Übersicht

24.1 Test

- greift Grenze des Verwerfungsbereichs zum Signifikanzniveau α an
- kann eine Nullhypothese falsifizieren - **Das ist das Ziel!**
- bietet eine standardisierte, akzeptierte Entscheidungsregel
- geht Irrtumswahrscheinlichkeit α ein

24.2 Test kann *nicht*

- die Nullhypothese verifizieren

24.3 Problematik

- Irrtumswahrscheinlichkeit
- Missbrauch p-Wert
- Versuch *vorher* planen

24.4 Fragen?