032_Folien

2018 年 11 月 23 日

```
In [1]: import numpy as np                          # mathematical methods
        from matplotlib import pyplot as plt        # plotting methods
        %matplotlib inline
```

0.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie - Überblick

1. Zufall

- Zufallsvariable, Zufallsexperiment, WahrscheinlichkeitsmaSS, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Axiome von Kolmogorov
- Laplace-Experiment

2. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

- Verbundwahrscheinlichkeit
- bedingte Wahrscheinlichkeit
- absolute Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes

3. KenngröSSen

- Erwartungswert & Varianz

4. Modellverteilungen

1 Zufallsexperiment

1.1 Zufallsvariable

1.2 Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P)

1.3 Kolmogorov-Axiome

2 Kombinatorik

Woher kommen die Wahrscheinlichkeiten?

Was ist der Ereignisraum Σ

3 Laplace Experiment

Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827)

- alle Elementarereignisse sind *gleich* wahrscheinlich

$$P(\omega_i) = p = \frac{1}{M} = \frac{1}{|\Omega|} \;\; i \in \{1 \ldots M\}$$

- Wahrscheinlichkeit $= \frac{\text{Anzahl für A günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl für A mögliche Ergebnisse}}$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{N}{M}$$

4 Mehrdimensionale Zufallsexperimente

5 Verbundwahrscheinlichkeit

6 gemeinsame Wahrscheinlichkeit

joint probability Zwei Zufallsvariablen bilden einen Verbund.

6.0.1 Beispiel zwei unterscheidbare Würfel

Zwei faire Würfel (ein roter, ein grüner) mit Wahrscheinlichkeiten $p_{g,i} = \frac{1}{6}$ und $p_{r,i} = \frac{1}{6}$

Ergebnisraum Ω besteht aus $6 \times 6 = 36$ **Tupeln**

Entsprechende Wahrscheinlichkeiten in Kontingenztabelle $6 \times 6 = 36$ möglichen Elementarereignisse $p_i = P(\omega_i) = \frac{1}{36}$

grün \ rot	1	2	3	4	5	6
1		c	a			
2	c		a			
3	a	a	a	a	a	a
4			a			
5			a			
6			a			s

- Ereignis S: Sechserpasch
  - 1 Ereignis
  - Ergebnis $(6,6)$
- Ereignis A: mindestens eine Drei
  - 6+5 Möglichkeiten $(3,*)$ und $(*,3)$ (ohne nochmals $(3,3)$)
  - p = 11/36
- Ereignis C: Mäxchen
  - 2 Möglichkeiten
  - p=1/18

7 Bedingte Wahrscheinlichkeit

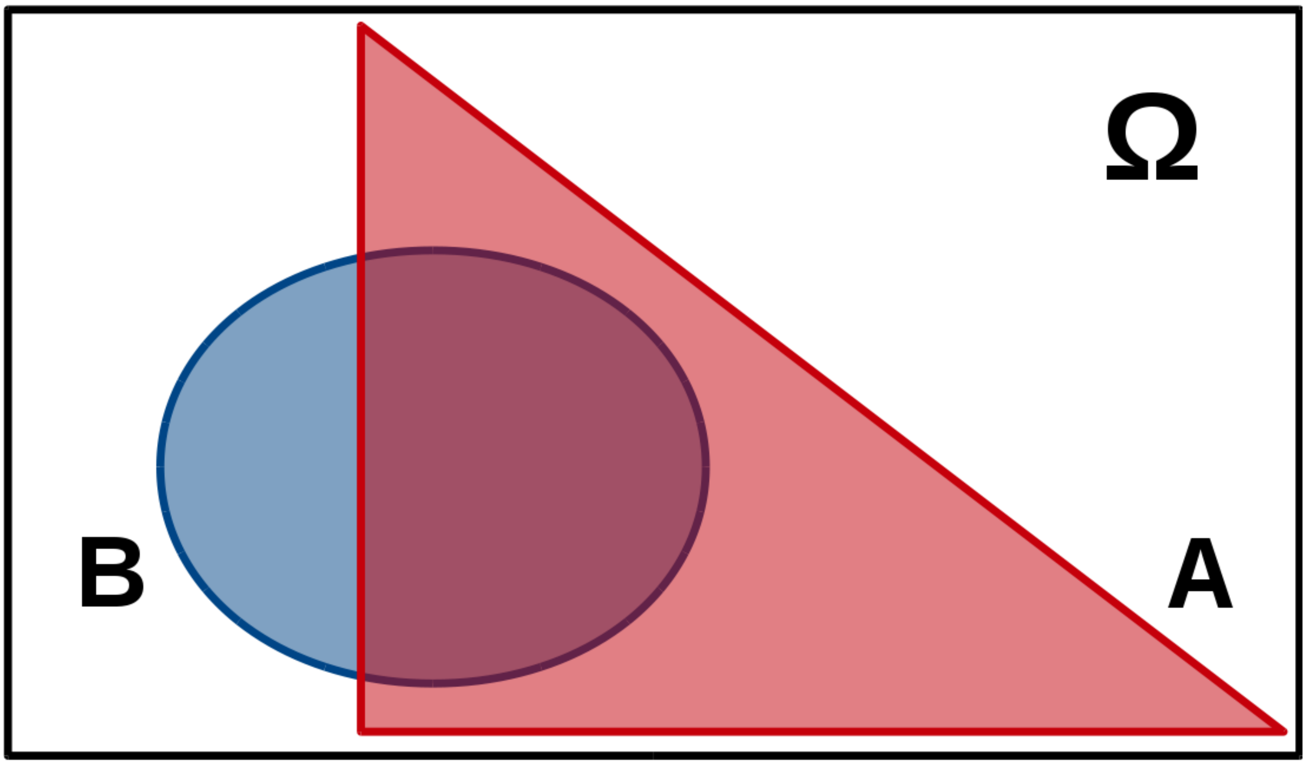
Unter der Voraussetzung, daSS Ereignis B bereits eingetreten ist, wie wahrscheinlich ist dann A?

Beispiele

- Wahrscheinlichkeit für "sechs", wenn fest gestellt wurde, daSS Augenzahl "gerade"
- Wahrscheinlichkeit von Herzinfarkt, wenn über 60

In [6]:

Out[6]:



7.1 Definition *bedingte Wahrscheinlichkeit*

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{wenn } p(B) > 0$$

7.1.1 Laplace-Experiment

$$p(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

z.B. "sechs" wenn "gerade"

- Variante "günstige" / "mögliche": $p(\{6\}|\{2,4,6\}) = \frac{|\{6\} \cap \{2,4,6\}|}{|\{2,4,6\}|} = \frac{|\{6\}|}{|\{2,4,6\}|} = \frac{1}{3}$
- Variante bedingte Wahrscheinlichkeit: $p(\{6\}|\{2,4,6\}) = \frac{p(\{6\} \cap \{2,4,6\})}{p(\{2,4,6\})} = \frac{p(\{6\})}{p(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$

z.B. "gerade" wenn "sechs" - Variante bedingte Wahrscheinlichkeit: $p(\{2,4,6\}|\{6\}) = \frac{p(\{2,4,6\} \cap \{6\})}{p(\{6\})} = \frac{p(\{6\})}{p(\{6\})} = \frac{1/6}{1/6} = 1$

7.2 Produktregel der absoluten Wahrscheinlichkeit

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

- Formel der Definition für bedingte Wahrscheinlichkeit umgestellt
- Anschaulich klar für A UND B
  - zuerst muSS B eintreten
  - dann auch noch A (unter der Voraussetzung B)

Daraus auch

$$p(A \cap B) = p(B|A) \cdot p(A)$$

7.3 Unabhängigkeit zweier Ereignisse

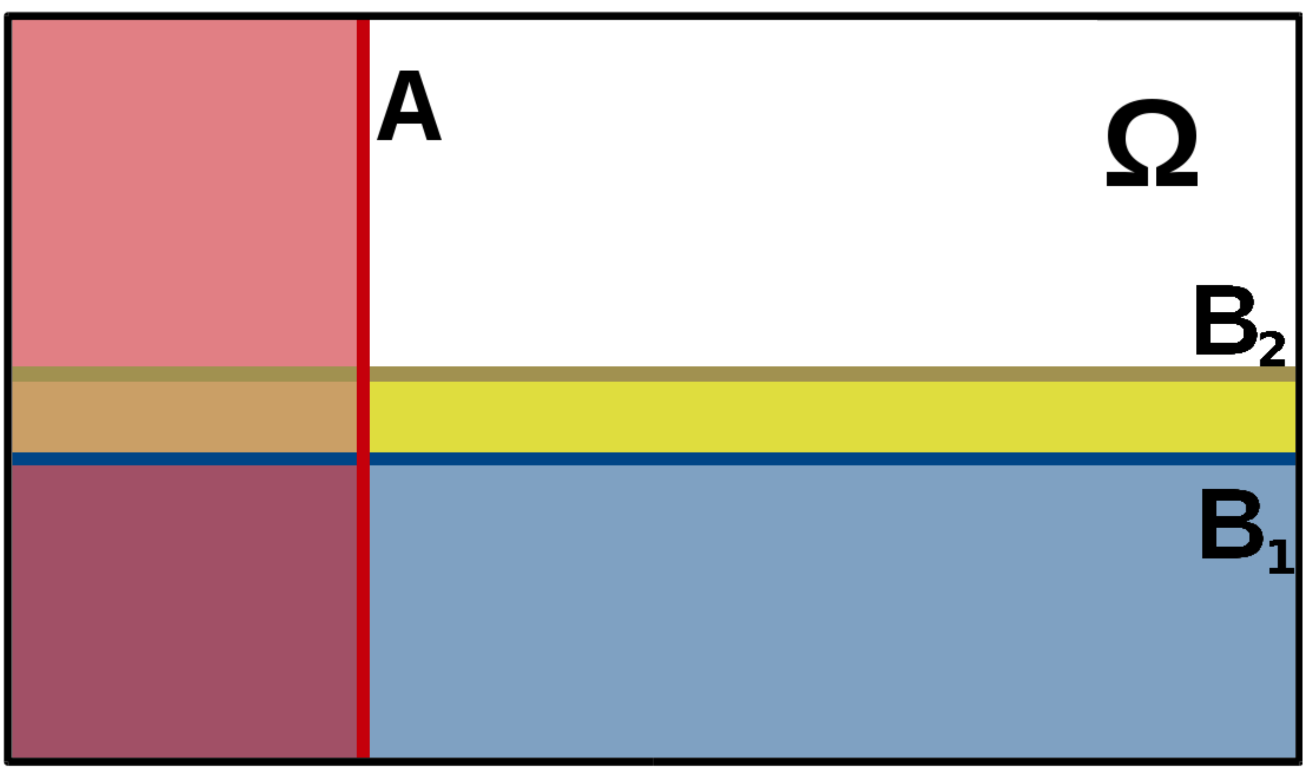
Wenn die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis nicht von einem anderen Ereignis B abhängt, so nennt man die beiden Ereignisse stochastisch unabhängig.

$P(A) = P(A|B_1) = P(A|B_2) = \ldots$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A|B) &= P(A) \qquad \text{wenn } P(B) > 0 \\ P(B|A) &= P(B) \qquad \text{wenn } P(A) > 0 \end{aligned}$$

In [7]:

Out[7]:



Beispiele stochastischer Unabhängigkeit

- zwei Würfel - Augenzahl-1 und Augenzahl-2
- Farbe und Wert einer Spielkarte
- Farbe und Form von Erbsen

Gegenbeispiele

- Einkommen und Geschlecht
- [ÜA] Würfeln I - Bei Augenzahl>4 bekommt man 30ct - bei Augenzahl 6 bekommt man 70ct
  - Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "beide Preise"?
- [ÜA] Würfeln II - Bei Augenzahl 5 bekommt man 30ct - bei Augenzahl 6 bekommt man 1
  - Welche Wahrscheinlichkeit hat das Ereignis "beide Preise"?

7.3.1 Produktregel für unabhängige Ereignisse

Wiederholung der allgemeinen Produktregel

$$p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$$

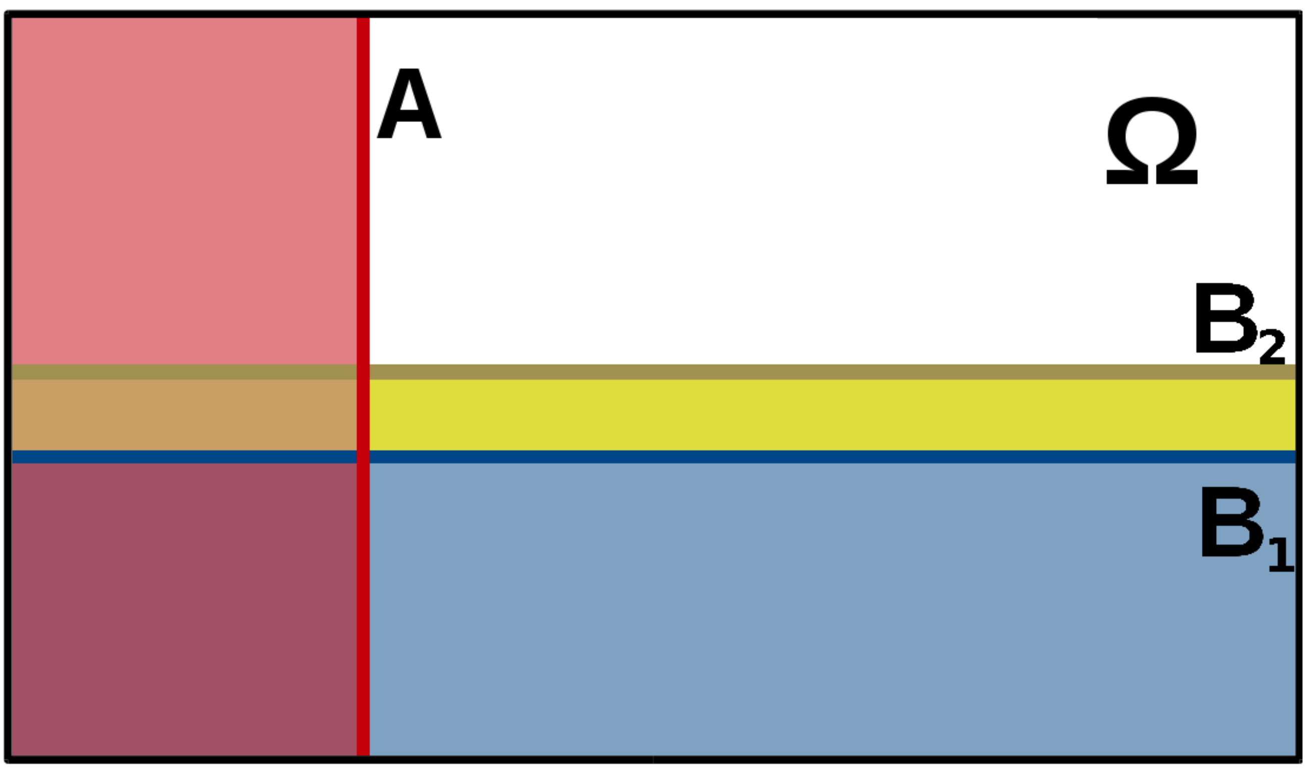
Bei unabhängigen Ereignissen ergibt sich daraus

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Diese Eigenschaft *definiert* die Unabhängigkeit.

In [7]:

Out[7]:



7.4 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

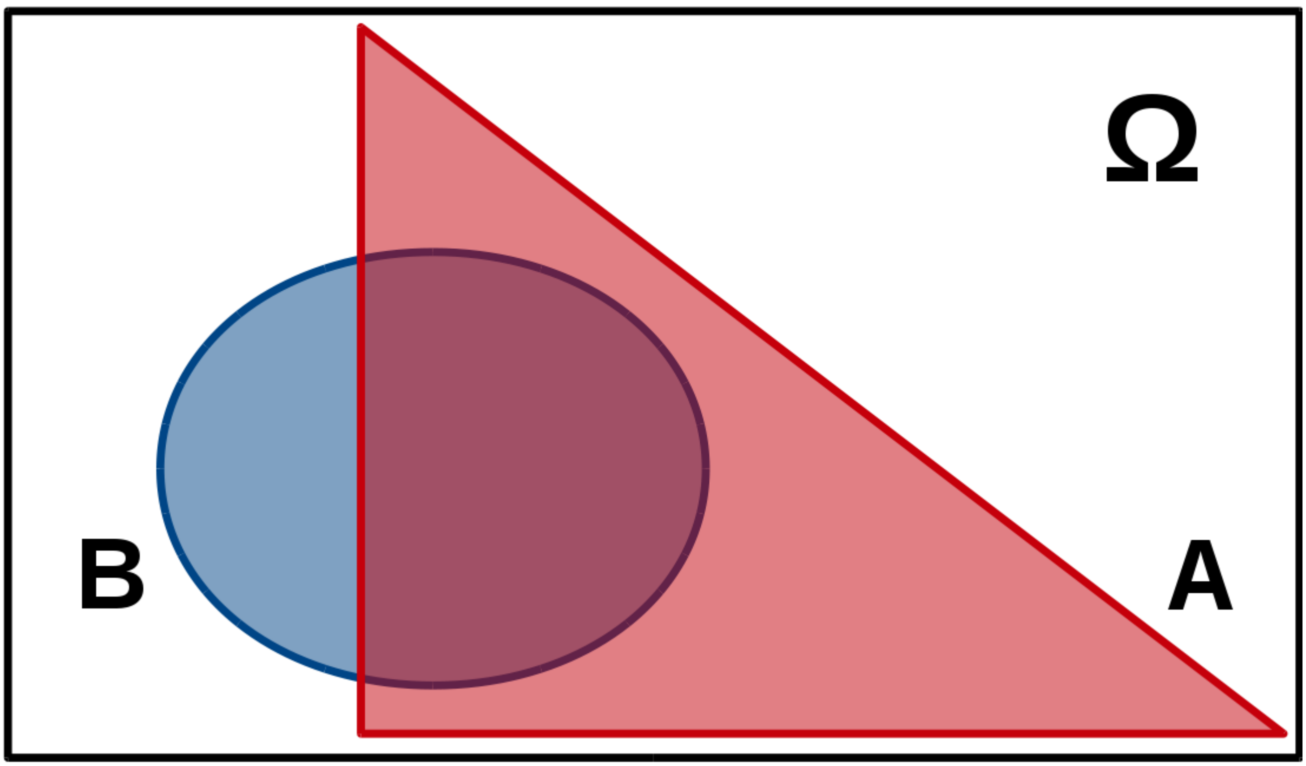
Sei $\{A_k\},\ k \in \{1, \ldots, K\}$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt für $B \subset \Omega$

$$P(B) = \sum_{k=1}^{K} P(B|A_k) \cdot P(A_k)$$

Venn-Diagramm

In [8]:

Out[8]:



8 Beispiel: Medizinischer Test

- Ein medizinischer Test zeigt bei 98% der Kranken ein "*positives*" Ergebnis.
- Die Fehlerrate bei Gesunden beträgt 3%, fälschlicherweise ein "*positives*" Ergebnis zu melden.
- Ereignis A: "Patient ist krank"
- Ereignis B: "Testergebnis positiv"
- Die Krankheit ist selten und nur mit 0,1% in der Bevölkerung vertreten.

Wie groSS ist die Wahrscheinlichkeit bei positivem Test krank zu sein?

- Gesucht ist $P(A|B) = P(\text{krank}|\text{Test}+)$

$$P(B|A) = 0,98$$

Berechnung $P(B|\bar{A}) = 0,03$

$$P(A) = 0,001$$

[Disjunkte Zerlegung] A und $\bar{A}$ mit $P(\bar{A}) = 0,999$

[Definition bedingte W.] $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

[Produktregel] $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

[Satz der totalen W.] $P(B) = \sum_{i=1}^{2} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$

$$\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})} \\
&= \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,98 \cdot 0,001 + 0,03 \cdot 0,999} \\
&= \frac{0,00098}{0,00098 + 0,02997} \\
&= 0,032
\end{aligned}$$

9 der Satz von Bayes

Sei $A_1, \cdots, A_K$ eine disjunkte Zerlegung von Ω. Dann gilt:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_{i=1}^{K} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)}$$

Mindestens für ein $i \in \{1, \ldots, K\}$ muSS $P(A_i) > 0$ und $P(B|A_i) > 0$ gelten.

9.0.1 Historisch

Benannt nach englischem Mathematiker Thomas Bayes
1763 posthum veröffentlicht in: *An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*

```
In [9]: '''Quelle: Wikipedia, Gemeinfrei. Erstellt: 19th century(?), reprinted 1936, 1981, 1988'''
```

```
Out[9]:
```

9.1 SchluSSfolgern

Hat es nachts geregnet wenn der Rasen morgens naSS ist?

- Regenwahrscheinlichkeit lag nach Wettervorhersage bei 40%

$$p(Regen) = 0.40$$

- Totale Wahrscheinlichkeit

$$p(na) = p(na|Regen) \times p(Regen) + p(na|\overline{Regen}) \times p(\overline{Regen})$$

Satz von Bayes

$$\begin{aligned} p(Regen|na) &= \frac{p(na|Regen) \times p(Regen)}{p(na)} \\ &= \frac{p(na|Regen) \times p(Regen)}{\sum_i p(na|Regen_i) \times p(Regen_i)} \\ &= \frac{100\% \times 40\%}{100\% \times 40\% + 0\% \times 60\%} = 100\% \end{aligned}$$

Hat es nachts geregnet wenn der Rasen morgens naSS ist - II?

- Nachbars Rasensprenger hat Zufalls-Zeitschaltuhr, die zu 20% anspringt
- Nachbarsfrau gieSSt jeden zweiten Tag und jedes fünfte Mal fällt die Gieskanne um

$$\begin{aligned} p(Regen|na) &= \frac{p(na|Regen) \times p(Regen)}{p(na)} \\ &= \frac{p(na|Regen) \times p(Regen)}{p(na|Regen) \times p(Regen) + p(na|RS) \times p(RS) + p(na|G) \times p(G)} \\ &= \frac{100\% \times 40\%}{70\%} = 57\% \end{aligned}$$

In [3]:
```
'''make use of Bayes formula'''
p_wet = (1.00*0.40+1.00*0.20+0.20*0.50)
print('p(wet)      ={:.4f}'.format(p_wet))
p_rain = 1.00*0.40/p_wet
print('p(rain|wet)={:.4f}'.format(p_rain))
```

```
p(wet)      =0.7000
p(rain|wet)=0.5714
```

9.2 Ergebnis:

mehrere mögliche Ursachen spielen für die bedingte Wahrscheinlichkeit eine Rolle und können “entlastend” wirken.

explaining away

9.3 Anwendung:

- Gericht
  - Zeugenaussagen
  - Wahrheitsgehalt gewichten
- Medizin
  - Symptome $\Rightarrow$ Prognose
- Bayes-Statistik
  - ausführlich in **Angewandte Statistik II**

10 Zusammenfassung

- Zufallsvariable
- Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P)
- Zufallsexperiment
  - Wahrscheinlichkeit $P(X{=}x_i)$
  - Ergebnisse $\omega_i \in \Omega$
  - Ereignisse $x_i \in \Sigma$
- Verbundene Ereignisse
  - bedingte Wahrscheinlichkeit $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ wenn $p(B) > 0$
  - totale Wahrscheinlichkeit $P(B) = \sum_{k=1}^{K} P(B|A_k) \cdot P(A_k)$
  - Verbundwahrscheinlichkeit $p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B)$
  - Unabhängigkeit
    * $p(A|B) = p(A)$
    * $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$
  - Satz von Bayes $ $ bestimmt $p(A|B)$ mittels $p(B|A)$

10.1 Ausblick

- Wert des Zufallsexperiments
- Wetteinsatz und Wettgewinn

11 Fragen?