011_Folien

2018 年 11 月 23 日

1 Beschreibende Statistik

auch *deskriptive* oder *empirische* Statistik

1.1 Übersicht

- Warum Statistik

LagemaSS

Streuung

Graphiken

Abhängigkeit

2 Beschreibende Statistik

2.0.1 Daten oft komplex

```
In [1]: from matplotlib import pyplot as plt
        import numpy as np
        %matplotlib inline
```

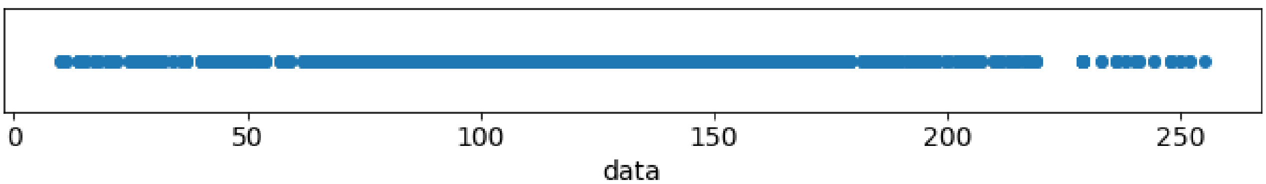
```
In [5]: # we have some data x (from below...)
        print('data x is a {} and has {} values of {}'
                                  .format(type(x), x.shape, x.dtype))
        c = int(len(x)/2)
        print('x = {} ...'.format(x[:16]))
        print('... {} ...'.format(x[c-8:c+8]))
        print('... {}    '.format(x[-16:]))
```

```
data x is a <class 'numpy.ndarray'> and has (3136,) values of int64
x = [128 128 128 128 127 126 126 126 126 128 129 130 131 131 129 127] ...
```

```
... [134 146 150 147 139 131 124 120 120 122 127 135 143 148 147 139] ...
... [125 128 131 132 132 130 128 127 126 125 126 126 127 128 128 128]
```

2.0.2 Graphik

```
In [6]: '''occurence of data values'''
        fig = plt.figure(figsize=(12,1))           # create long graph
        plt.scatter(x, np.zeros_like(x))           # draw dots along x-axis (y=0)
        fig.gca().get_yaxis().set_visible(False)   # switch off y-axis numbers
        plt.xlabel('data');                        # label: suppress object
```



2.0.3 Datenreduktion

... auf einige KenngröSSen:

- LagemaSS
- Streuung
- Verteilung

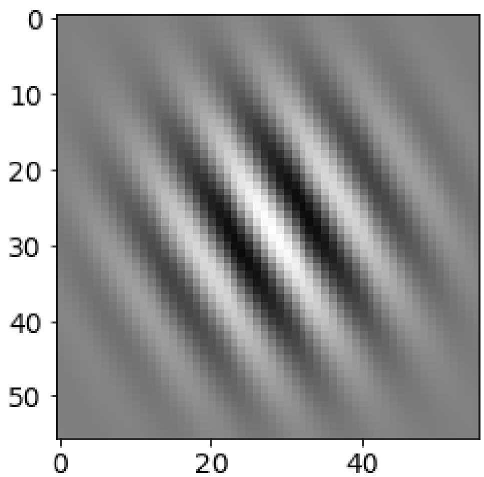
Finde wichtige Information

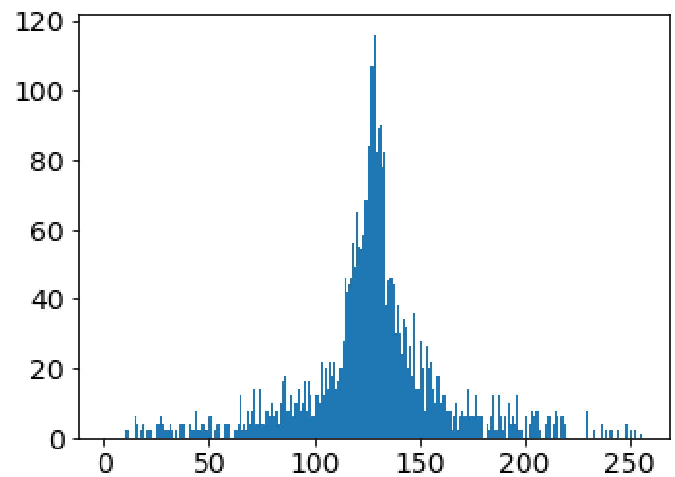
Ohne relevante Information zu verlieren

```
In [4]: '''load data of an example image "Gabor-patch"
           show histogram
           This is the source of the data from above... '''
        from matplotlib import image as mpi     # image related routines

        img = mpi.imread('data/gabor.png')      # read image data from file
        fig = plt.figure(figsize=(12, 4))       # rect canvas 12x4 inches
        fig.add_subplot(1, 2, 1)                # 1 row, 2 columns: 1st graph = image
        plt.imshow(img, cmap=plt.cm.gray, interpolation='nearest')  # the pixel image

        fig.add_subplot(1, 2, 2)            # 1 row, 2 columns: 2nd sub-graph = hist
        imgvector3D = np.array(img)         # convert colors to values in matrix
```

```
lenx, leny = imgvector3D.shape[:2] # width x height [x colors]
print('image shape = {}x{}'.format(lenx, leny))
# take first color (R), round to 8Bit integer, flatten x and y
x = np.rint(255*np.reshape(imgvector3D[:,:,0],lenx*leny)).astype(int)
plt.hist(x, bins=np.linspace(0, 256, 256+1)) # histogram with 1Bit-bins
# a (middle) line scan
print('{} linescan'.format(x[int(lenx/2)*leny:int(lenx/2+1)*leny]))
```

```
image shape = 56x56
[120 122 127 135 143 148 147 139 124 105  89  81  88 110 142 177 202 207
 187 145  91  43  15  20  58 119 185 236 255 236 185 119  58  20  15  43
  91 145 187 207 202 177 142 110  88  81  89 105 124 139 147 148 143 135
 127 122] linescan
```






```
In [7]: np.histogram?
```

3 LagemaSS

3.1 Modus

Der Wert, der am häufigsten vorkommt - Es kann mehrere Modi geben - Modus kann atypisch sein

```
In [8]: nmax = 0
        for i in range(256):
            n = x[x==i].shape[0]
            if n > nmax:
                nmax = n
                imax = i
        print('the modus of data x is {} and has {} values'.format(imax, nmax))
```

```
the modus of data x is 128 and has 116 values
```

Nachteil:

- Modus kann Randwerte annehmen
- Es kann zwei oder mehr Modi geben ("*multimodale Verteilung*")

3.2 Median

- Mindestens eine Hälfte der Werte ist kleiner gleich
- mindestens eine Hälfte der Werte gröSSer gleich

In der sortierten Liste aller Daten $x_{(i)}$ mit $i \in \{1 \dots n\}$ und $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(N)}$ ist der Median

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{N+1}{2})} & N \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{N}{2})} + x_{(\frac{N}{2}+1)}) & N \text{ gerade} \end{cases}$$

3.2.1 Minimale Betrags-Abweichung

Sei $f(t) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - t|$
dann gilt

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - t| \geq \sum_{i=1}^{N} |x_i - \tilde{x}| = f(\tilde{x}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

x schlange: Median
Beweis (für ungerade $N = 2k + 1$):

- $x_(i)$ d.h. x ist sortiert.
- x_i d.h. x ist nicht sortiert.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |x_i - \tilde{x}| &= \sum_{i=1}^{N} |x_{(i)} - \tilde{x}| \\
&= \tilde{x} - x_{(1)} + \dots + \tilde{x} - x_{(k-1)} \ + \ x_{(k+1)} - \tilde{x} + \dots + x_{(N)} - \tilde{x} \\
&= -x_{(1)} - \dots - x_{(k-1)} \ + \ x_{(k+1)} + \dots + x_{(N)} \\
&= t - x_{(1)} + \dots + t - x_{(k-1)} \ + \ x_{(k+1)} - t + \dots + x_{(N)} - t \\
&\leq |t - x_{(1)}| + \dots + |t - x_{(k-1)}| \ + \ |t - x_{(k)}| \ + \ |x_{(k+1)} - t| + \dots + |x_{(N)} - t| \\
&= |x_{(1)} - t| + \dots + |x_{(k-1)} - t| \ + \ |x_{(k)} - t| \ + \ |x_{(k+1)} - t| + \dots + |x_{(N)} - t| \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x_{(i)} - t| \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x_i - t|
\end{aligned}$$

3.2.2 Median unter linearer Transformation

$$y = ax + b \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{y} = a\tilde{x} + b$$

3.2.3 Wie den Median berechnen?

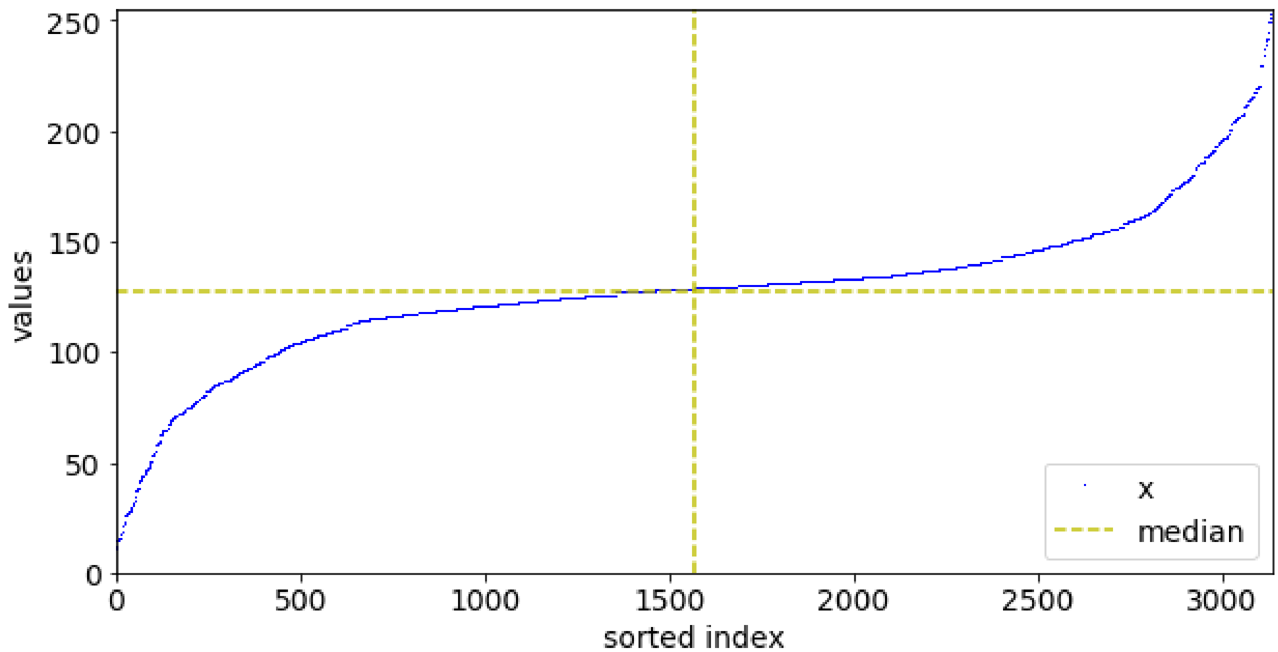
numpy stellt die Funktion median() bereit.

```
In [9]: xmedian = np.median(x)                    # <== numpy calculates the median
        print('Median = {:.3f}'.format(xmedian))  # (three meaningful digits)
```

```
Median = 127.000
```

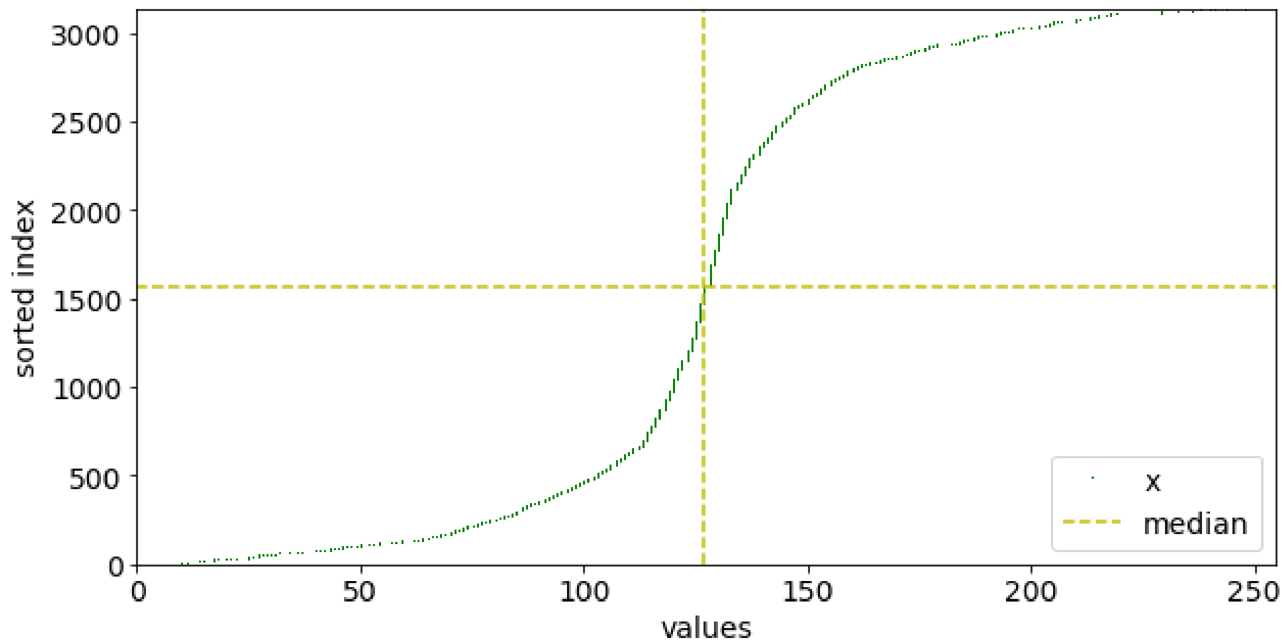
```
In [11]: '''sorted data - values vs index'''
         xsorted=np.sort(x[:])                    # sort by numpy; ':' makes copy
         medx = np.median(xsorted)                # the median of sorted data
         n = len(xsorted)                         # how many values?
         n1 = int(np.round(n/2.-1))               # highest index under
         n2 = int(np.round(n/2.))                 # lowest index above median
         print('median={:.4f} between x({})={:.4f} and x({})={:.4f}'.
               format(medx, n1, xsorted[n1], n2, xsorted[n2]))
         indices = np.arange(n)                   # array of index numbers

         fig = plt.figure(figsize=(10,5))          # wide canvas
         plt.plot( indices, xsorted, 'b,', label='x')# at each value-point step upward 1
         plt.xlabel('sorted index')
         plt.ylabel('values')
         plt.plot((0, n), 2*[medx], 'y--', label='median') # include the median in x-
         plt.plot(2*[.5*n], (0., xsorted[-1]), 'y--')#              and y-direction
         plt.axis((0, n, 0, x.max()))              # restrict area to full data range
         plt.legend(loc='lower right');
```

```
median=127.0000 between x(1567)=127.0000 and x(1568)=127.0000
```




```
In [12]: '''sorted data - index vs value'''
         # same data as above
         print('median={:.4f} between x({})={:.4f} and x({})={:.4f}'.
               format(medx, n1, xsorted[n1], n2, xsorted[n2]))

         fig = plt.figure(figsize=(10,5))            # wide canvas
         # x-axis now really x-values; y-axis has indices
         plt.plot( xsorted, indices, 'g,', label='x')
         plt.ylabel('sorted index')
         plt.xlabel('values')
         plt.plot(2*[medx], (0, n), 'y--', label='median')# include the median in y-
         plt.plot((0., xsorted[-1]), 2*[.5*n], 'y--')#                  and x-direction
         plt.axis((0, x.max(), 0, n))                # restrict area to full data range
         plt.legend(loc='lower right');
```

```
median=127.0000 between x(1567)=127.0000 and x(1568)=127.0000
```



4 Mittelwerte

4.1 Arithmetisches Mittel

Gegeben seien $i = \{1 \dots N\}$ Werte x_i, dann ist deren arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Beispiel Gewicht der Personen im Fahrstuhl - Wären alle gleich schwer, wie groSS ist dieser Durchschnitt?

4.1.1 Minimale quadratische Abweichung

Sei $f(t) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - t)^2$
dann gilt $f(t) \geq f(\bar{x}) \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}$
最小方差

Beweis:

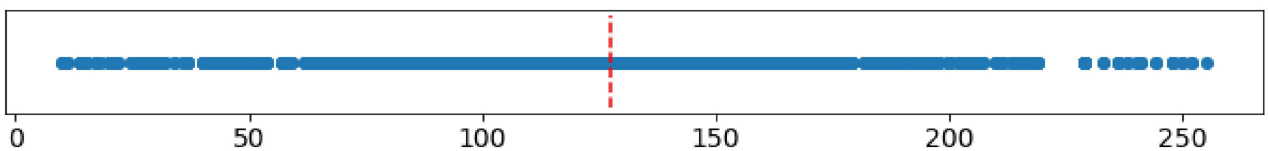
$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^{N} [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - t)]^2) \\ &= \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - t)(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{N} (\bar{x} - t)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - t) \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - t)^2 \sum_{i=1}^{N} 1 \\ &= f(\bar{x}) + 0 + n(\bar{x} - t)^2 \\ &\geq f(\bar{x}) \end{aligned}$$

4.1.2 Wie den Mittelwert berechnen?

- *numpy-ndarray* hat die Methode `.mean()`
- *numpy* hat die Funktion `np.mean()`

```
In [13]: fig = plt.figure(figsize=(12,1))
         plt.scatter(x, np.zeros_like(x), label='x')
         xmean = x.mean()
         print('mean   of x = {:.5f}'.format(xmean))
         print('median of x = {:.5f}'.format(xmedian))
         plt.plot(2*[xmean], [-.5, .5], 'r--', label='mean')
         fig.gca().get_yaxis().set_visible(False);    # switch off y-axis numbers
```

```
mean   of x = 127.36575
median of x = 127.00000
```



4.1.3 Lineare Transformation

Das arithmetische Mittel transformiert sich ebenso wie die Daten unter einer linearen Transformation:

$$y_i = a x_i + b \qquad \Rightarrow \qquad \bar{y} = a\bar{x} + b$$

Beweis: [ÜA]

4.1.4 Summe von Mittelwerten

Gegeben seien N Werte x_i mit Mittelwert $\bar{x}$ und M Werte y_j mit Mittelwert $\bar{y}$. Dann ist das gemeinsame arithmetische Mittel

$$\bar{z} = \frac{1}{N+M}(N \cdot \bar{x} + M \cdot \bar{y})$$

im allgemeinen $\neq \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{y})$ #### Beweis [ÜA]

4.1.5 Merkwürdiges Beispiel

Wenn beide Teilmittelwerte kleiner werden, wird das gemeinsame Mittel auch kleiner?

Die Einkommen aller N Einwohner in Stadt A $a_i\ i \in \{1..N\}$ seien niedriger als diejenigen der M Einwohner in Stadt B mit $b_j\ j \in \{1..M\}$: $a_i < b_j \quad \forall i, j$

Der Reichste aus A zieht nach B

- Das Durchschnittseinkommen in A wird kleiner
- Das Durchschnittseinkommen in B wird kleiner

Aber - Das Durchschnittseinkommen alle Einwohner in beiden Städten zusammen bleibt gleich!

4.1.6 Anwendung

- *herkömmlicher* Mittelwert
  - $N * \bar{x} = \sum x_i$
- Sanfte Berücksichtigung der "Fehler" um den Mittelwert
- Starke Berücksichtigung der weit auSSen liegenden "Fehler"

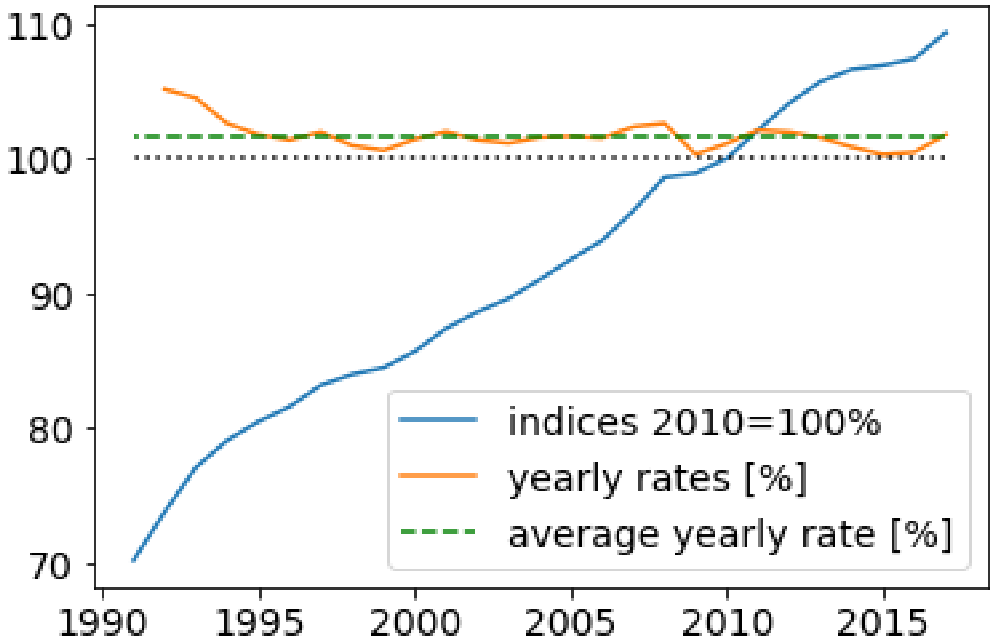
4.2 Andere Mittelwerte

Beispiel Preissteigerung Die Inflation beschreibt die jährliche Preissteigerung bei etwa gleichbleibendem Warenkorb. Als Referenz wird ein Jahr festgelegt und darauf auf 100% normiert. Quelle: destatis.de

- Index[Jahr]
- Rate[Jahr] = Index[Jahr] / Index[Jahr-1]
- Steigerung = (Rate - 1) x 100 %

In [14]:
```
import pandas as pd                 # Pandas handles data conveniently
inflation = pd.read_table('data/inflation_de.dat', sep=' +',
        header=None, engine='python')      # separator allows reg-expressions: 1+
years = np.asarray(inflation[0])           # first column: years
indices = np.asarray(inflation[1])         # second column: total inflation rates
plt.plot(years, indices, label='indices 2010=100%') # relativ to 2010 = 100%
print('#years= {} , difference= {} years, total ratio = +{:.3f}%'.format(
        len(years), years[0]-years[-1], 100*(indices[0]/indices[-1]-1.)) )
# calculate single rates every year
rates = np.asarray([indices[j]/indices[j+1] for j, ind in enumerate(indices[:-1])])
plt.plot(years[:-1], 100*rates, label='yearly rates [%]')
ratemean = rates.mean()-1.                 # mean of yearly growing rates
print('mean yearly growth rate = {:.3f}%'.format(100*ratemean))
plt.plot([years[0], years[-1]], 2*[100*(1+ratemean)], 'g--',
                                            label='average yearly rate [%]')
# base line: no change=100% of previous year
plt.plot([years[0], years[-1]], 2*[100], 'k:')
plt.legend(loc='lower right');
```

```
#years= 27 , difference= 26 years, total ratio = +55.698%
mean yearly growth rate = 1.723%
```



Test $\text{Index}[2017] = \text{Index}[1990] \cdot \text{mittlereRate}^{26}$

```
In [15]: print('from index[1990] = {} with {} times a rate of {}'
                .format(indices[-1], years[0]-years[-1], rates.mean()))
         print('leads to index[{}] of {}'
                .format(years[0], indices[-1]*rates.mean()**(years[0]-years[-1])))
         print('but in [{}] should be {}'.format(years[0], indices[0]))
```

```
from index[1990] = 70.2 with 26 times a rate of 1.0172322892824832
leads to index[2017] of 109.46131973108793
but in [2017] should be 109.3
```

4.2.1 mittlere Steigerung?

Sei der Ausgangswert p_0 und die **Rate** im i-ten Intervall zum vorherigen $x_i = \frac{p_i}{p_{i-1}}$, dann gilt bis zum Intervall n $p_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = p_0 \cdot \frac{p_1}{p_0} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_n}{p_{n-1}} = p_n$

Gesucht ist die mittlere Wachstumsrate w, so daSS gilt $p_0 \cdot w^n = p_n$ beziehungsweise $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = w^n$

Dann ist w, die mittlere Wachstumsrate, das *geometrische Mittel* der einzelnen Wachstumsraten.

4.3 Geometrisches Mittel

$$\bar{x}_{geom} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N} = \left(\prod_{i=1}^{N} x_i \right)^{\frac{1}{N}}$$

```
In [16]: m0 = rates.mean()
         print('arithmetic mean = {:.5f}%'.format(100*(m0-1)))

         import scipy.stats        # contains geometric mean and lots of statistics...
         m2 = scipy.stats.gmean(rates)
         print('geometric mean  = {:.5f}% by scipy.stats.gmean()'.format(100*(m2-1)))
```

```
arithmetic mean = 1.72323%
geometric mean  = 1.71746% by scipy.stats.gmean()
```

```
In [17]: print('The real data in {} is                                     {}'
               .format(years[0], indices[0]))
         print('Starting with {} in {} the arithmetic mean {:.6f} gives {:.2f} in {}'
               .format(indices[-1], years[-1], m0,
                       indices[-1]*(m0)**(years[0]-years[-1]), years[0]))
         print('Starting with {} in {} the geometric  mean {:.6f} gives {:.2f} in {}'
               .format(indices[-1], years[-1], m2,
                       indices[-1]*(m2)**(years[0]-years[-1]), years[0]))
```

```
The real data in 2017 is                                     109.3
Starting with 70.2 in 1991 the arithmetic mean 1.017232 gives 109.46 in 2017
Starting with 70.2 in 1991 the geometric  mean 1.017175 gives 109.30 in 2017
```

4.3.1 Ein weiteres *Gegen*-Beispiel

Jeden Tag tanken für 20 bei sich ändernden Preisen. Welches ist der durchschnittliche Preis? Man erhält - bei einem Preis von e /l - für 20 - $l = \frac{20}{e}$ Liter.

```
In [18]: d = 10                        # number of days
         fixedeuros = 20.              # amount in Eur
         ppl = np.array([1.64,1.62,1.30,1.49,1.50,1.58,1.45,1.38,1.30,1.34])# prices
         liters = fixedeuros/ppl
         totaleuros = d*fixedeuros
         totalliters = liters.sum()
         print('total liters bought: {:.4f} and total money {:.2f}EUR spent'
               .format(totalliters, totaleuros))
         print('makes an average price of {:.4f} /l'.format(totaleuros/totalliters))
         print('arithmetic mean: {:.4f} /l'.format(ppl.mean()))
         print('geometric mean: {:.4f} /l'.format(scipy.stats.gmean(ppl)))
```

```
total liters bought: 137.9356 and total money 200.00EUR spent
makes an average price of 1.4500 /l
```

```
arithmetic mean: 1.4600 /l
geometric mean: 1.4550 /l
```

4.4 harmonisches Mittel

$$\bar{x}_{harm} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$$

- Sinnvoll bei Verhältniszahlen
- kann durchaus extremere Unterschiede zeigen wie im Beispiel $x = \{1, 4, 4\}$ mit *arithmetischem* Mittel 3 und *harmonischem* Mittel 2

```
In [19]: print('harmonic mean: {:.4f} /l'.format(scipy.stats.hmean(ppl)))
```

```
harmonic mean: 1.4500 /l
```

4.4.1 Anwendung Elektronik: Parallelschaltung von Widerständen

Ohmsches Gesetz: $R = \frac{U}{I}$, bei gleicher Spannung U addieren sich die Stromstärken I

$$R_{parallel} = \frac{U}{I_1 + I_2 + \cdots + I_n} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \cdots + \frac{U}{R_n}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_n}}$$

4.5 Mittelwerte im Vergleich

$$x_{min} \leq \bar{x}_{harm} \leq \bar{x}_{geom} \leq \bar{x}_{arithm} \leq x_{max}$$

4.6 Zusammenfassung

Der Mittelwert liefert **eine** wichtige Kennzahl für die Daten - Modus

$$x_i \ : \quad h_i \geq h_j \quad \forall j$$

- Median

$$\tilde{x} = x_{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \qquad (N \text{ ungerade})$$

- arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- geometrisches Mittel

$$\bar{x}_{geom} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

- harmonisches Mittel

$$\bar{x}_{harm} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{x_i}}$$

5 Fragen?