061_Folien

November 30, 2018

```
In [1]: import numpy as np                        # mathematical methods
        from scipy import stats                   # statistical methods
        from matplotlib import pyplot as plt      # plotting methods
        %matplotlib inline
```

1 Wahrscheinlichkeitstheorie

1.0.1 Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsraum

1.0.2 Diskrete Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

1.0.3 Kontinuierliche Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Kontinuierliche Verteilungen

Mehrdimensionale Verteilungen

Zusammengesetzte kontinuierliche Verteilungen

- Summe zweier Zufallsvariablen
- Quadrat einer Zufallsvariablen
- Identisch unabhängig verteilte Zufallsvariable
- Summe vieler i.i.d. Zufallsvariable
- Mittelwert vieler i.i.d. Zufallsvariable

1.0.4 (Wiederholung) Kennzahlen

einer kontinuierlichen Zufallsvariable X mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(X)$

$$\mathcal{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot x \, \mathrm{d}x = \mu$$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot (x-\mu)^2 \, \mathrm{d}x$$

2 Summe von zwei Zufallsvariablen

$$Y = X_1 + X_2$$

Für zwei Zufallsvariable X_1 und X_2 ist $Y = X_1 + X_2$ wieder eine Zufallsvariable

2.0.1 (Wiederholung) Erwartungswert

Allgemein gilt für den Erwartungswert einer Summe von Zufallsvariablen X_i

$$\mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{E}(X_i)$$

Sind diese Zufallsvariablen *unabhängig*, dann gilt

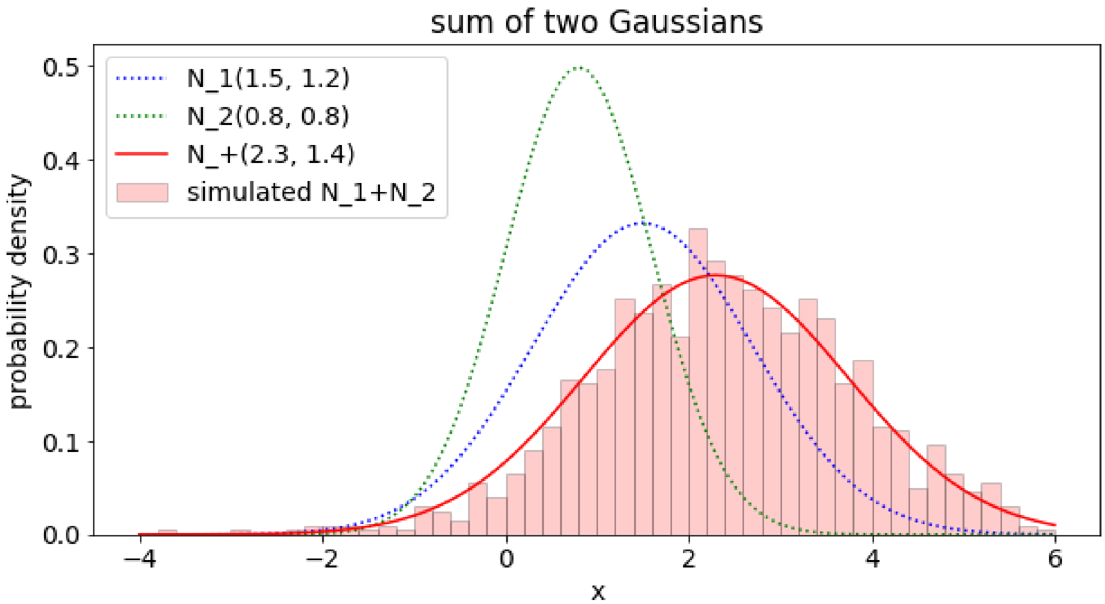
$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var}(X_i)$$

2.0.2 (Wiederholung) Normalverteilung

Sind $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ voneinander *unabhängig*, dann ist $Y = X_1 + X_2$

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

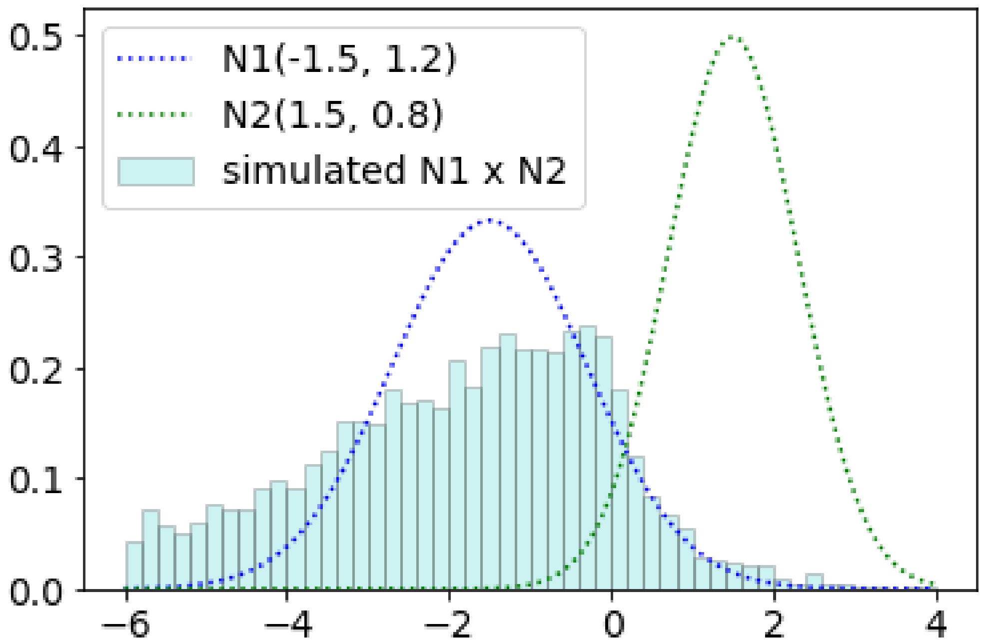
In [3]:
```
'''example: sum of two normal distributed random variables'''
N = 1000                                                  # number of samples to draw from X1 and
a = -4.                                                   # plotting borders
b = 6.
mu1 = 1.5                                                 # shape parameter distribution X1
sigma1 = 1.2
mu2 = .8                                                  # shape parameter distribution X2
sigma2 = 0.8
x = np.linspace(a, b, int((b-a)*10+1))                    # x grid for plotting
x1 = stats.norm(mu1, sigma1).rvs(size=N)                  # outcomes random variable X1
x2 = stats.norm(mu2, sigma2).rvs(size=N)                  # outcomes random Variable X2
y = x1 + x2                                               # outcomes random variable sum Y = X1+X2
f = plt.figure(figsize=(10,5))
plt.hist(y, bins=np.linspace(a, b, 50+1), color='r', edgecolor='black',
         density=True, alpha=.2, label='simulated N_1+N_2')
plt.plot(x, stats.norm(mu1, sigma1).pdf(x), 'b:', label='N_1({:.1f}, {:.1f})'.format(mu1
plt.plot(x, stats.norm(mu2, sigma2).pdf(x), 'g:', label='N_2({:.1f}, {:.1f})'.format(mu2
mu3 = mu1 + mu2
sigma3 = np.sqrt(sigma1**2 + sigma2**2)
plt.plot(x, stats.norm(mu3, sigma3).pdf(x), 'r-', label='N_+({:.1f}, {:.1f})'.format(mu3
plt.title('sum of two Gaussians')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('probability density')
plt.legend(loc='upper left');
```



2.1 Produkt von zwei Zufallsvariablen

$$Y = X_1 \cdot X_2$$

```
In [4]: '''product of two random variables; example two Gaussians'''
        N = 4000
        a = -6.
        b = 4.
        mu1, mu2, sigma1, sigma2 = (-1.5, 1.5, 1.2, 0.8)
        x = np.linspace(a, b, int((b-a)*10+1))
        x1 = stats.norm(mu1, sigma1).rvs(size=N)
        x2 = stats.norm(mu2, sigma2).rvs(size=N)
        y = x1 * x2
        plt.hist(y, bins=np.linspace(a, b, 50+1), color='c', edgecolor='black',
                 density=True, alpha=.2, label='simulated N1 x N2')
        plt.plot(x, stats.norm(mu1, sigma1).pdf(x), 'b:', label='N1({:.1f}, {:.1f})'.format(mu1,
        plt.plot(x, stats.norm(mu2, sigma2).pdf(x), 'g:', label='N2({:.1f}, {:.1f})'.format(mu2,
        plt.legend(loc='upper left');
```



---

3 Quadrat einer (normalverteilten) Zufallsvariable

$$Y = X^2$$

ist wieder eine Zufallsvariable - Unterschied zum Produkt $X_1 \cdot X_2$?

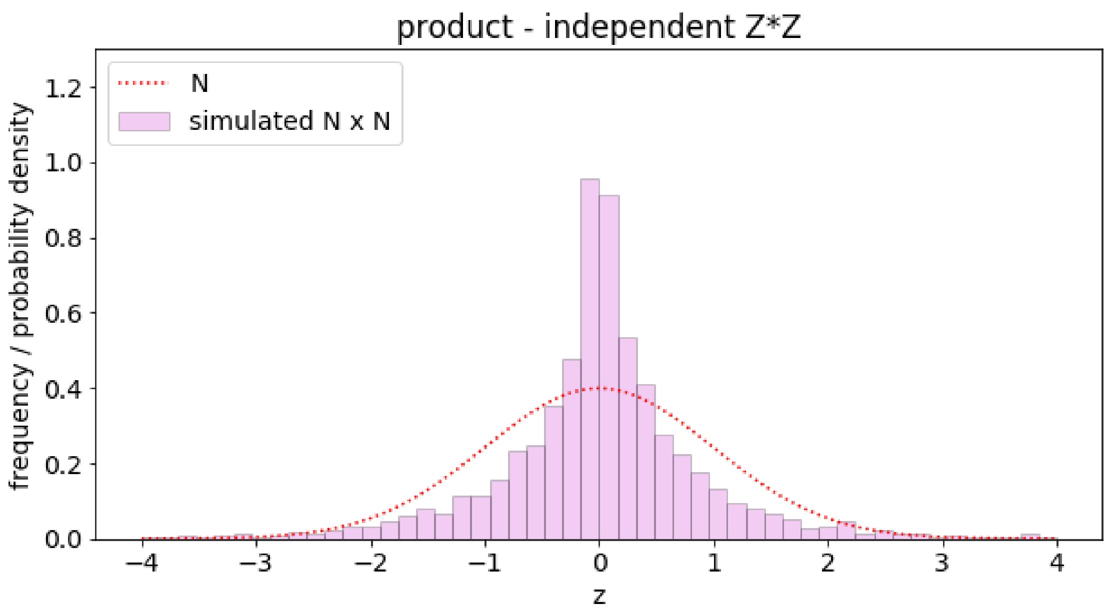
- abhängig!
- daher andere Eigenschaften

Beispiel

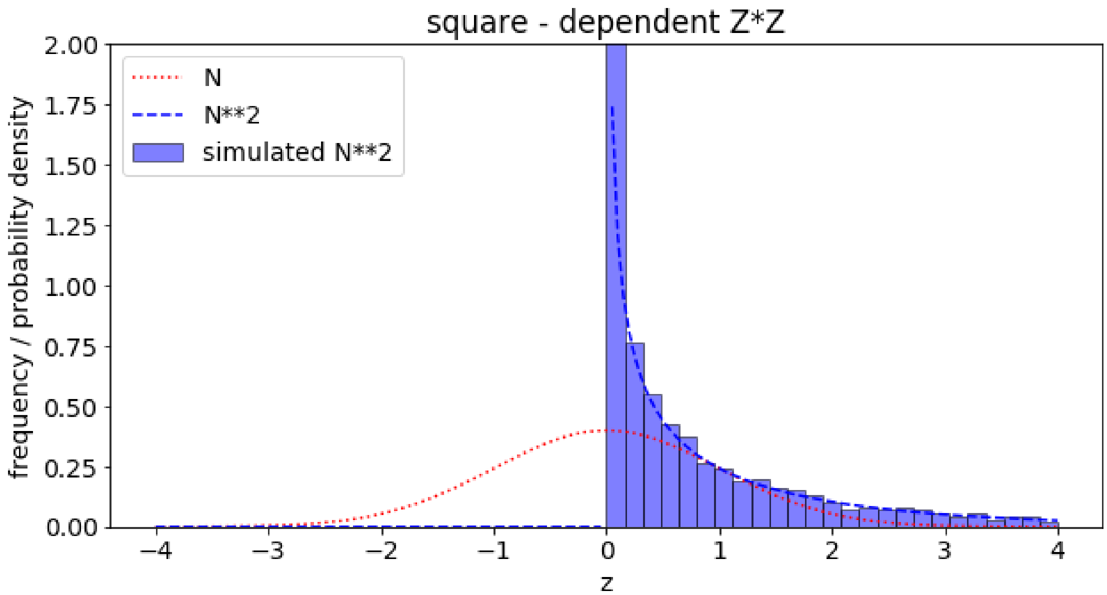
- $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- $Y = Z^2$

In [5]:
```
'''independent Z*Z: product of i.i.d. Standard Normal distribution'''
N = 4000
a = -4.                                         # range of z
b = 4.
zgrid = np.linspace(a, b, int((b-a)*20+1))     #    and z grid for plotting
distrib = stats.norm(0, 1)                      # standard Normal distribution
z1 = distrib.rvs(size=N)                        # outcomes of rv Z_1
z2 = distrib.rvs(size=N)                        # outcomes of rv Z_2, indep.!
y_p = z1 * z2                                   # outcomes of rv y_product
```

```
f = plt.figure(figsize=(10,5))
plt.hist(y_p, bins=np.linspace(a, b, 50+1), color='m', edgecolor='black',
         density=True, alpha=.2, label='simulated N x N')
plt.plot(zgrid, distrib.pdf(zgrid), 'r:', label='N') # compare with single Z
plt.ylim(0, 1.3)
plt.xlabel('z')
plt.ylabel('frequency / probability density')
plt.title('product - independent Z*Z')
plt.legend(loc='upper left');
```




```
In [6]: '''dependent X*X: squared normal distribution'''
        # x1 = distrib.rvs(size=N)                              # same parameters as above
        y_sq = z1**2                                            # outcomes of rv y_squared
        f = plt.figure(figsize=(10,5))
        plt.hist(y_sq, bins=np.linspace(a, b, 50+1), color='b', edgecolor='black',
                 density=True, alpha=.5, label='simulated N**2')
        plt.plot(zgrid, distrib.pdf(zgrid), 'r:', label='N')    # compare with single Z
        plt.ylim(0, 2)
        plt.plot(zgrid, stats.chi2(df=1).pdf(zgrid), 'b--', label='N**2')
        plt.xlabel('z')
        plt.ylabel('frequency / probability density')
        plt.title('square - dependent Z*Z')
        plt.legend(loc='upper left');
```



Ganze Familie von Verteilungen; siehe

3.0.1 χ^2 -Verteilung

Dort dann auch Eigenschaften.

---

4 Summe mehrerer *i.i.d.* Zufallsvariable

Sei X eine Zufallsvariabe mit - Wahrscheinlichkeitsdichte $f(X)$, Verteilungsfunktion $F(X)$ - Erwartungswert μ - und Varianz σ^2.

X_i sei eine von n unabhängigen identischen Wiederholungen ("*i.i.d.*")

4.1 Summen-Zufallsvariable

Die Summe S_n ist eine Zufallsvariable

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

4.1.1 Erwartungswert

Wie zuvor ($N = 2$) gilt für mehrere (n) Zufallsvariablen X_i

$$\mathcal{E}(S_n) = \mathcal{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu = n \cdot \mu$$

4.1.2 Varianz

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n \cdot \sigma^2$$

Beweis: wegen *i.i.d.* und $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X,Y)$

4.2 Mittelwert mehrerer *i.i.d.* Zufallsvariablen

Selbe Voraussetzungen wie unter "*Summe mehrerer i.i.d. Zufallsvariable*".
Zufallsvariable *Arithmetisches Mittel*:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Das Ergebnis des Zufallsexperiments $\overline{X}_n : \overline{x}_n$ besteht aus den Ergebnissen x_i:

$$\overline{x_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Zufallsvariable *Arithmetisches Mittel*:

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

4.2.1 Erwartungswert des Mittelwerts

$$\mathcal{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mu$$

4.2.2 Varianz des Mittelwerts

$$\text{Var}\left(\overline{X_n}\right) = \frac{1}{n} \sigma^2$$

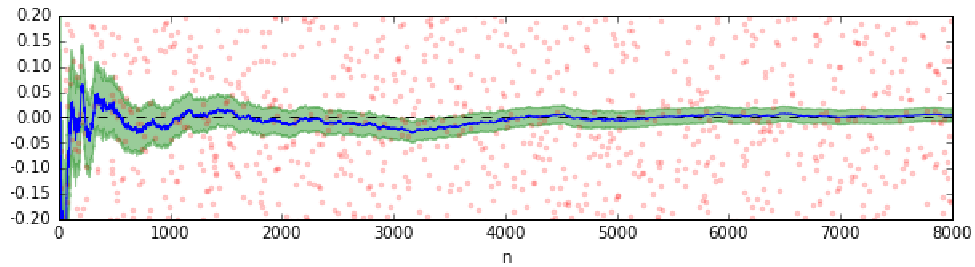
Beweis [ÜA]

```
In [7]: '''progress of mean and variance for growing n
           for example: uniform distribution
        '''
        N = 8000                                        # samples to draw
        A = 2.4                                         # plot x = {-A..A}
        np.random.seed(98765432)                        # fix random
        # distrib = stats.norm(loc=0., scale=1.)        # standard normal distribution N(0, 1)
        distrib = stats.uniform(loc=-2., scale=4.)      # uniform distribution -2..+2
        print('expectation value        is {:8.5f} and variance is {:8.5f}'
                                           .format(distrib.expect(), distrib.var()))
        x = distrib.rvs(N)                              # draw x values according distribution
        n = np.arange(N)                                # n for x-axis; means of x until n
        m = np.asarray([x[:i+1].mean() for i in n])     # mean for 0..n each
        v = np.asarray([x[:i+1].var() for i in n])      # variance for 0..n each
        for ni in (5, 10, 100, 1000, N):
            print('After n={:4d} samples mean is {:8.5f} and variance is {:8.5f}'
                                           .format(ni, m[ni-1], v[ni-1]/ni))
```

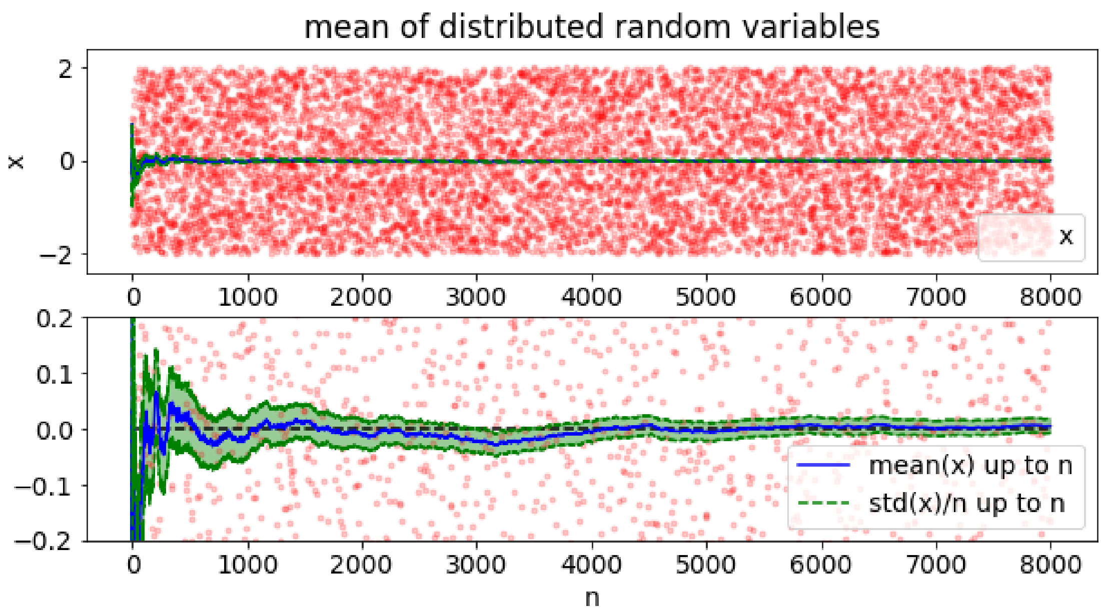
```
expectation value         is  0.00000 and variance is  1.33333
After n=   5 samples mean is -0.20689 and variance is  0.18172
After n=  10 samples mean is -0.28676 and variance is  0.09550
After n= 100 samples mean is -0.04933 and variance is  0.01145
After n=1000 samples mean is -0.01287 and variance is  0.00135
After n=8000 samples mean is  0.00444 and variance is  0.00016
```

```
In [8]: '''progress of mean and variance (std) for growing n; for example: uniform distribution'
        f = plt.figure(figsize=(10,5))
        A = 2.4                                        # plot x = {-A..A}
        f.add_subplot(211)                             # --- upper graph of 2: full size
        plt.ylim(-A, A)
        plt.plot(n, x, 'r.', alpha=.2, label='x')      # values of drawn samples
        plt.plot([0,N], 2*[distrib.mean()], 'k--')     # dashed line for expectation value
        plt.plot(n, m, 'b-')                           # the means up to i
        plt.plot(n, m+np.sqrt(v/(n+1)), 'g--')         # +/- the standard deviations up to i
        plt.plot(n, m-np.sqrt(v/(n+1)), 'g--')
        plt.ylabel('x')
        plt.title('mean of distributed random variables')
        plt.legend(loc='lower right');

        f.add_subplot(212)                             # --- lower graph of 2: detail
        A = 0.2                                        # plot x = {-A..A}
        plt.ylim(-A, A)
        plt.plot(n, x, 'r.', alpha=.2)                 # values of drawn samples as scatter at po
        plt.plot([0,N], 2*[distrib.mean()], 'k--')     # dashed line for expectation value
        plt.plot(n, m, 'b-', label='mean(x) up to n') # the means up to i
        plt.plot(n, m+np.sqrt(v/(n+1)), 'g--')         # +/- the standard deviations up to i
        plt.plot(n, m-np.sqrt(v/(n+1)), 'g--', label='std(x)/n up to n')
        plt.xlabel('n')                                # v-- and the std-dev around the mean
        plt.fill_between(n, m-np.sqrt(v/(n+1)), m+np.sqrt(v/(n+1)), color='g', alpha=0.4)
        plt.legend(loc='lower right');
```



GesetzDerGro3enZahlen_Ausschnitt.png



5 Gesetz der großen Zahlen

Das arithmetische Mittel $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konvergiert *nach Wahrscheinlichkeit* gegen den Erwartungswert $\mathcal{E}\left(\overline{X_n}\right) = \mathcal{E}\left(X\right) = \mu$:

Für eine beliebig kleine Konstante $c > 0$ gilt

$$P(|\overline{X}_n - \mu| \leq c) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

6 Zusammenfassung

Durch Zusammensetzen mehrerer *multivariater* Zufallsvariabler entsteht eine neue Zufallsvariable.

- z.B. Summe: $Y = X_1 + X_2$

6.0.1 *Unabhängiges* Zusammensetzen *derselben* Zufallsvariablen

- Konzept der **identisch unabhängig verteilten Zufallsvariablen** (*i.i.d.*)
- z.B. Summe mehrerer *i.i.d.* Zufallsvariable

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mathcal{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = n \cdot \mu \qquad\qquad \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = n \cdot \sigma^2$$

6.0.2 ⇔ Funktionaler Zusammenhang bei *identischen* Zufallsvariablen

- z.B. Quadrat: $Z = X^2$
- *abhängig*

7 ...

- Mittelwert mehrerer i.i.d. Zufallsvariable

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mathcal{E}\big(\overline{X_n}\big) = \mu$$

$$\mathrm{Var}\big(\overline{X_n}\big) = \frac{1}{n}\sigma^2$$

- Gesetz der großen Zahlen

8 Fragen?