033_Folien

November 23, 2018

```
In [1]: import numpy as np                    # mathematical methods
```

1 Wahrscheinlichkeitstheorie

1.1 Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie - Überblick

1. Zufall

- Zufallsvariable
- Zufallsexperiment
- WahrscheinlichkeitsmaSS
- Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Axiome von Kolmogorov

2. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten

- bedingte Wahrscheinlichkeit
- gemeinsame Wahrscheinlichkeit
- totale Wahrscheinlichkeit
- Satz von Bayes

3. KenngröSSen

- Erwartungswert
- Varianz

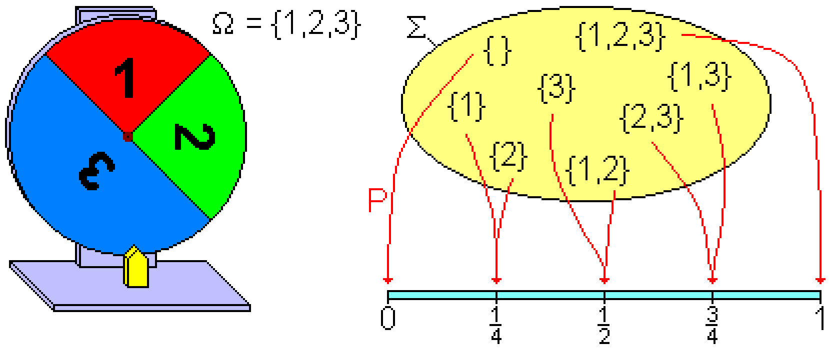
4. Modellverteilungen

1.2 Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P)

- Ergebnisraum $\Omega = \{\omega_i\}$: Menge aller elementaren Ergebnisse
- Ereignisraum Σ, bestehend aus allen möglichen Teilmengen von Ω
- WahrscheinlichkeitsmaSS P
  - ordnet jedem Ereignis aus Σ eine Wahrscheinlichkeit P zu
- Zufallsexperiment
- Kolmogorov-Axiome
  - -Additivität

```
In [1]:
```

```
Out[1]:
```



2 Erfolg?

2.1 Beispiel Glücksrad

In [3]:
```
'''wheel of fortune
   win 1    if number 3
   lose 1   if number 1
   no effect if number 2 '''
N = 100                               # number of games to play
# wheel randomization: 3's probability is twice the one of 1 and 2
x = np.random.choice([1, 2, 3], size=N, p=[1/4, 1/4, 1/2])
print(x[:20],'...')         # show 1st 20 numbers drawn from wheel
wallet = 0                  # start with empty pockets, assume credit for bet
for i in x:                 # all N bets sum up to
    wallet += i-2           # win = number - bet
print('my win: {}'.format(wallet))
```

```
[3 3 3 1 3 3 3 3 1 2 3 3 3 2 3 2 2 2 3 1] ...
my win: 23
```

In [4]:
```
'''---cards reloaded---'''
# cards      789  10  J  Q  K  A
x = np.array([0, 10, 2, 3, 4, 11])    # value of card
p = np.ones_like(x)/8.                # probability of card 4/32
p[0]*=3.                              # except for x=0  3 cards: 7,8,9
y = p*x                               # probability times value
original = np.get_printoptions()      # allow formatted printing
np.set_printoptions(formatter={'float': '{: 8.4f}'.format})
print('x={}'.format(1.0*x))
print('p={}'.format(p))
print('y={}'.format(y))
ym = y.sum()                          # average value
print('drawing one card gives in average a value of {}'.format(ym))
print('  total pips in deck = {}'.format(32.*ym))
np.set_printoptions(**original)       # restore print formatting
print('  btw. mean of x is {}'.format(x.mean()))
```

```
x=[  0.0000  10.0000   2.0000   3.0000   4.0000  11.0000]
p=[  0.3750   0.1250   0.1250   0.1250   0.1250   0.1250]
y=[  0.0000   1.2500   0.2500   0.3750   0.5000   1.3750]
drawing one card gives in average a value of 3.75
  total pips in deck = 120.0
  btw. mean of x is 5.0
```

3 Erwartungswert

Beschreibende Statistik Mittelwert aus mehreren Beobachtungen

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Beim Histogramm (Klasseneinteilung)

$$\approx \overline{x'} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N_k} h_k}\sum_{k=1}^{N_k} h_k(x_k)\cdot x_k$$

Häufigkeitsinterpretation Der Wert der bei sehr vielen $n \to \infty$ Versuchen im Mittel erreicht wird.
$\Leftrightarrow$ wahrscheinlichster Wert

Wert, den wir fairerweise erwarten

- Wettquote, langfristige Gewinnchance
- Abgeleitet aus theoretischen Überlegungen

3.0.1 die Werte *und* deren Verteilung

Der Erwartungswert hängt von den Werten *und* von der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Werte ab - seltene tragen weniger dazu bei als häufigere - ist ein *fester* Wert

3.1 Definition Erwartungswert

Sei X eine diskrete **Zufallsvariable**

- mit **Ergebnissen** (Elementarereignissen) $x_i \;\; i \in \{1, 2, \ldots, N\}$
- und deren **Wahrscheinlichkeitsverteilung** $P(X = x)$, Abkürzung $p_i = p(X = x_i)$

dann ist der **Erwartungswert** von X:

$$\mu_X = \mathcal{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i$$

$$\mathcal{E}(X) = \mu = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i$$

3.1.1 Beispiel Glücksrad von vorhin

```
Einsatz:    2
Gewinn:  Zahl

x=-1  p=1/4
x= 0  p=1/4
x=+1  p=1/2
```

$\mathcal{E}(X) = \frac{1}{4}$

```
In [5]: '''example: wheel of fortune'''
        xbsp = np.array([-1, 0, 1])       # outcomes -1 if number=1; +1 if number=3; 0 else
        pbsp = np.array([.25, .25, .50]) # probability according to angle on wheel
        print('normalized probability distribution? sum={:.3f}'.format(pbsp.sum()))
        expectation = np.asarray([x*p for x, p in zip(xbsp, pbsp)]).sum()
        print('expectation value of x = {:.3f}'.format(expectation))
```

```
normalized probability distribution? sum=1.000
expectation value of x = 0.250
```

3.2 Transformationsregel für Erwartungswerte

Sei $g(x)$ eine reelle Funktion, dann gilt für $Y = g(X)$

$$\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) p_i$$

3.2.1 Lineare Transformation für Erwartungswerte

Sei $Y = aX + b$, dann ist

$$\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(aX + b) = a\mathcal{E}(X) + b$$

Beweis $\mathcal{E}(aX + b) = \sum_{i=1}^{N}(ax_i + b)p_i = a\sum_{i=1}^{N} x_i p_i + b\sum_{i=1}^{N} p_i = a\mathcal{E}(X) + b \cdot 1$

3.3 Zusammenfassung Erwartungswert

Definition:

$$\mathcal{E}(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i$$

- entspricht dem arithmetischen Mittelwert, wenn Laplace'sche *Gleichverteilung* angenommen wird
  - $p = 1/N$
- entspricht dem arithmetischen Mittelwert, wenn relative Häufigkeiten (Klasseneinteilung) angenommen werden
  - $p_i = \frac{n_i}{N}$
- Erstes Moment von x über seiner Wahrscheinlichkeitsverteilung $p_i = p(x_i)$
- durch Wahrscheinlichkeitsverteilung *fest*gelegt.
  - charakteristischer Wert
  - *jedes einzelne* Zufallsergebnis kann und wird durchaus vom Erwartungswert abweichen
  - das durchschnittliche Ergebnis von *vielen gleichen* Zufallsexperimenten

4 Streuung

4.1 Definition Varianz

Sei X eine Zufallsvariable mit Ausprägungen $x_i \quad i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, Erwartungswert μ und Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X = x)$, Abkürzung $p_i = p(X = x_i)$, dann ist die Varianz von X

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - \mu)^2$$

```
In [6]: '''variance for example wheel of fortune - a)'''
        # erw = np.asarray([x*p  for x, p in zip(xbsp, pbsp)]).sum()  # from above
        # variance defined
        var_a = np.asarray([p*(x-expectation)**2 for x, p in zip(xbsp, pbsp)]).sum()
        print('variance as defined = {:.4f}'.format(var_a))
```

```
variance as defined = 0.6875
```

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - \mu)^2$$

4.1.1 Varianz als quadratische Abweichung

Führt man eine neue Zufallsvariable $(X - \mu)^2$ ein, so ist

$$\mathrm{Var}(X) = \mathcal{E}((X - \mu)^2)$$

Interpretation Erwartete quadratische Abweichung von X vom Mittelwert μ.
Empirische Statistik: *durchschnittliche* quadratische Abweichung

$$\tilde{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

```
In [7]: '''variance for example wheel of fortune - b)'''
        var_b = np.asarray([x*p for x, p in zip((xbsp-expectation)**2, pbsp)]).sum()
        print('variance as expected squared difference = {:.4f}'.format(var_b))
```

```
variance as expected squared difference = 0.6875
```

4.1.2 Verschiebungssatz für Varianzen

$$\mathrm{Var}(X) = \mathcal{E}(X^2 - \mathcal{E}(X)^2) = \mathcal{E}(X^2) - \mu^2$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathcal{E}((X-\mu)^2) \\
&= \mathcal{E}((X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\
&= \mathcal{E}(X^2) + \mathcal{E}(-2\mu X) + \mathcal{E}(\mu^2) \\
&= \mathcal{E}(X^2) - 2\mu\mathcal{E}(X) + \mu^2 \\
&= \mathcal{E}(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2
\end{aligned}$$

```
In [8]: '''variance for example wheel of fortune - c)'''
        var_c = np.asarray([x*p for x, p in zip(xbsp**2, pbsp)]).sum()
        var_c -= expectation**2
        print('variance centralized = {:.4f}'.format(var_b))
```

```
variance centralized = 0.6875
```

4.1.3 Varianz unter linearer Transformation

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$$

Beweis: $\mathrm{Var}(aX+b) = \mathcal{E}([aX + b - \mathcal{E}(aX+b)]^2)$
$= \mathcal{E}([aX + b - a\mathcal{E}(X) - b]^2)$
$= a^2\mathcal{E}([X - \mathcal{E}(X)]^2) = a^2\mathrm{Var}(X)$

```
In [9]: '''displacement rule for example wheel of fortune'''
        expT = np.asarray([x*p for x, p in zip(2*xbsp-3, pbsp)]).sum()
        varT = np.asarray([x*p for x, p in zip(((2*xbsp-3)-expT)**2, pbsp)]).sum()
        print('variance under linear transformation 2x-3 = {:.4f}'.format(varT))
```

```
variance under linear transformation 2x-3 = 2.7500
```

5 Zusammenfassung:

5.0.1 Wichtige Kennzahlen einer Zufallsvariablen X sind

Erwartungswert

$$\mathcal{E}(X) = \mu_X = \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i$$

Varianz

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \sigma_X^2 &= \sum_{i=1}^{N} p_i (x_i - \mu)^2 \\
&= \mathcal{E}\left((X - \mu_X)^2\right)
\end{aligned}$$

Beides sind *feste* GröSSen der Zufallsvariablen X

- Ergebnisse, Werte(bereich) x_i
- Wahrscheinlichkeitsverteilung p_i

5.0.2 Vergleiche mit

Arithmetischem Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Empirischer Varianz

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2$$

In [10]:
```
'''random variable X in Python'''
omega = np.array([1, 2, 3]) # possible results of random experiment, e.g. wheel of fortune
probabilities = np.array([.25, .25, .50])  # ... and their corresponding probabilities
```

In [11]:
```
'''draw:
    out of random variable X with elementary results X1..X3
    with probabilities p1..p3 (same number as X, sum up to 1 (normalization))
    N=100 random experiments'''
xi = np.random.choice(omega, size=100, p=probabilities)
print('the result of {} draws gave {:.4f} points in average'.format(len(xi), xi.mean()))
```

```
the result of 100 draws gave 2.3300 points in average
```

In [12]:
```
'''calculate Expectation Value'''
expectation = (probabilities*omega).sum()      # numpy '*' multiplies element wise
'''calculate Variance'''
Var = (probabilities*(omega-expectation)**2).sum()
print('Wheel of fortune has expectation value of {} with standard deviation {:.5f}'
      .format(expectation, np.sqrt(Var)))
```

```
Wheel of fortune has expectation value of 2.25 with standard deviation 0.82916
```

6 Fragen?