

Premier jet du Rapport de projet de M1: Réseau periodiques et modes localisés

Thomas Lechat & Alice Dinsenmeyer

26 avril 2015

Table des matières

1	Introduction	4
2	Théorie d'un réseau acoustique fini constitué de résonateurs de Helmholtz	5
2.1	Mise sous forme matricielle	5
2.1.1	Le guide d'onde	6
2.1.2	Impédance d'entrée d'un résonateur	6
2.2	Étude du réseau fini	7
2.2.1	Équation de dispersion	7
2.2.2	Réflexion et transmission du réseau	7
2.2.3	Bande de Bragg	7
2.2.4	Bande interdites liés aux résonateurs	7
2.2.5	Cas désordonné	8
3	Ajout d'une singularité dans le réseau	11
3.1	Cas d'une singularité hors bande de Bragg	11
3.2	Cas d'une singularité dans la bande de Bragg	11
3.3	Calcul numérique de la pression dans le réseau	11
3.4	Etude de l'influence de la position du défaut	11
4	Visualisation expérimental d'un mode localisé	12
4.1	Protocole expérimental	12
4.2	Résultat et comparaison avec la simulation	12
5	Conclusion	13

Remerciements (ou pas)

Abstract en anglais

même chose que l'intro + résultats principaux

Chapitre 1

Introduction

- domaine de recherche : méta-matériaux, filtrage analogique, tout les phénomènes de propagation.
- Citation des sources => optique puis electromagnetique puis acoustique
- but : comprendre propagation dans réseau et visualisation expérimental de mode localisé
- plan : Approche théorique de la propa dans réseau ac, ajout de singularité pour mode localisé, expérimentation

Chapitre 2

Théorie d'un réseau acoustique fini constitué de résonateurs de Helmholtz

Ce chapitre a pour but de caractériser le champ de pression dans un guide sur lequel des résonateurs de Helmholtz sont placés en dérivation, espacés régulièrement d'une longueur L . On dispose pour cela d'un banc de mesure représenté en figure 2.1. Une simulation de la propagation dans le réseau pourra donc être confrontée à une expérience.

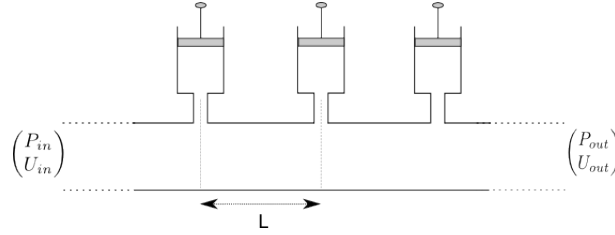


FIGURE 2.1 – Schéma du réseau de résonateurs de Helmholtz.

Notations Le guide principal a pour section S ; le col des résonateurs a pour longueur L_n et pour section S_n ; la cavité des résonateurs a pour longueur L_c et pour section S_c . Par la suite, on note ρ la masse volumique de l'air et c

2.1 Mise sous forme matricielle

On s'intéresse ici à la mise sous forme matricielle du problème de la propagation acoustique dans le réseau périodique vu ci-dessus. Le but est de mettre en relation les pressions et débits en entrée du système (P_{in} et U_{in}) avec ceux en sortie (P_{out} et U_{out}) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} P_{out} \\ U_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Cette matrice dispose en effet de propriétés intéressantes et l'étude du système sera grandement facilitée par ce formalisme. De plus, les simulations sont faciles à mettre en œuvre dès lors que celle-ci est connue.

Pour cela, les 2 éléments du réseau (guide et résonateur) doivent être mis sous forme matricielle puis multipliés.

2.1.1 Le guide d'onde

La solution de la propagation dans un guide d'onde peut être facilement déduite de l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Dire qu'on est en 1D (d'où dx) car guide long et BF

On se place en régime harmonique et on note $\Gamma = jk$ la constante de propagation du système. D'où les solutions (vitesses calculées avec l'équation d'Euler) :

$$\begin{cases} p(x_1) = C_1 e^{-\Gamma x_1} + C_2 e^{\Gamma x_1} \\ v(x_1) = -\frac{1}{j\omega\rho} [-\Gamma C_1 e^{-\Gamma x_1} + \Gamma C_2 e^{\Gamma x_1}] \\ p(x_2) = C_1 e^{-\Gamma x_2} + C_2 e^{\Gamma x_2} \\ v(x_2) = -\frac{1}{j\omega\rho} [-\Gamma C_1 e^{-\Gamma x_2} + \Gamma C_2 e^{\Gamma x_2}] \end{cases}$$

On pose $x_1 - x_2 = L$. Tous calculs faits, on trouve finalement :

$$\begin{pmatrix} p(x_1) \\ v(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(kL) & \frac{j\omega\rho}{k} \sinh(kL) \\ \frac{k}{j\omega\rho} \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x_2) \\ v(x_2) \end{pmatrix}$$

La première fréquence de coupure du guide est donc d'environ $4kHz$ pour les dimensions du réseau que nous considérons. Dans la suite, on supposera donc que seul le mode plan est propagatif. Les simulations et mesures ne seront donc faites que sur une bande de fréquences allant de 0 à $1kHz$.

Ajout des pertes

source biblio à citer

Pour prendre en compte les pertes, on modifie l'expression de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique. Les expressions sont donc :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left(1 + \frac{\beta}{s} (1 + (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

$$Z_c = \frac{\rho c_0}{S} \left(1 + \frac{\beta}{s} (1 - (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

Dans ces expressions, on a :

- $s = R/\delta$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}}$
- $\chi = \sqrt{P_r}$ ou P_r est le nombre de Prandtl
- $\beta = (1 - j)/\sqrt{2}$
- μ la viscosité de l'air

Du fait de la géométrie assez complexe du système, ces pertes ne peuvent pas être négligées comme cela peut être souvent le cas en acoustique.

2.1.2 Impédance d'entrée d'un résonateur

Le résonateur de Helmholtz est considéré dans le réseau comme un changement ponctuel d'impédance. Cette impédance, notée Z_r peut être calculée en utilisant le même formalisme matriciel que précédemment.

On suppose que le résonateur est constitué de 2 guides à parois rigides d'impédance caractéristique $Z_n = \rho c/S_n$ pour le col et $Z_c = \rho c/S_c$ pour la cavité. La matrice de transfert mettant en relation les pression et débit à l'entrée du résonateur P_e et U_e et les pression et débit au niveau de la paroi extrême P_s et $U_s = 0$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} P_e \\ U_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL_n) & jZ_n \sin(kL) \\ \frac{1}{Z_n} \sin(kL_n) & \cos(kL_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kL_c) & jZ_c \sin(kL_c) \\ \frac{1}{Z_c} \sin(kL_c) & \cos(kL_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_e \\ U_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Z_r = \frac{P_e}{U_e} = \frac{r_1}{r_3}$$

Correction de longueur La longueur effective du col est sujet à une correction présentée en annexe

correction liée à quoi, détaille-t-on ce passage ?

Si on ajoute un résonateur en parallèle au guide, il y a toujours continuité des pressions mais plus des vitesses. La matrice de transfert pression-débit pour un résonateur dans le réseau est alors la suivante :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_r & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Étude du réseau fini

Une fois les matrices de guide et de résonateur connues, il suffit alors de les multiplier afin d'obtenir la matrice d'une cellule du réseau. C'est sur l'étude de cette matrice que se basent les analyses de cette section.

Dans la suite les paramètres de la simulation sont ceux de l'expérience dont nous disposons. Ces paramètres sont disponible en annexe 2.

2.2.1 Équation de dispersion

On peut déduire de la matrice de transfert l'équation de dispersion pour le réseau à N cellules, on a en effet :

$$\cos(NkL) = \frac{A + D}{2} \quad (2.3)$$

Ainsi, on peut remonter à une expression de kL en fonction de la fréquence. En particulier, les zones où kL devient imaginaire nous intéresse particulièrement car cela induit une décroissance exponentielle de l'onde de propageant dans le guide. Ces bandes sont visible sur la figure ?? et sont appelées les bandes de Bragg.

2.2.2 Réflexion et transmission du réseau

On peut tracer le coefficient de réflexion et de transmission du réseau complet. En effet, on a :

$$T = \frac{2}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.4)$$

$$R = \frac{A + B/Z_c - CZ_c - D}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.5)$$

On trace ces coefficients figure 2.4 ainsi que l'admittance des résonateurs utilisés et l'impédance caractéristique du réseau. On constate que des zones se démarquent pour lesquelles la transmission chute.

2.2.3 Bande de Bragg

Ces bandes apparaissant dès qu'un élément est présent dans un réseau et ce de manière périodique. L'énergie de l'onde reste "enfermée" entre chaque éléments du fait que la longueur d'onde correspond à la moitié de l'espacement entre 2 éléments.

Pour un espacement entre éléments de longueur $L = 0.1 \text{ m}$, on a $f_{bragg} = \frac{c}{2L} = 1700 \text{ Hz}$. On constate sur la figure 2.4 que ces bandes de Bragg sont bien présentes à la fréquence indiquée ainsi qu'à ces multiples car à ces endroits on constate une chute de la transmission.

2.2.4 Bande interdites liés aux résonateurs

L'équation de dispersion est cependant plus difficile à analyser qu'il n'y paraît à cause des résonateurs qui servent d'éléments au réseau. Ceux-ci ont une impédance négligeable dès lors que la fréquence d'analyse se trouve suffisamment éloignées des fréquences de résonances.

une figure de l'équation de dispersion avec bande de bragg

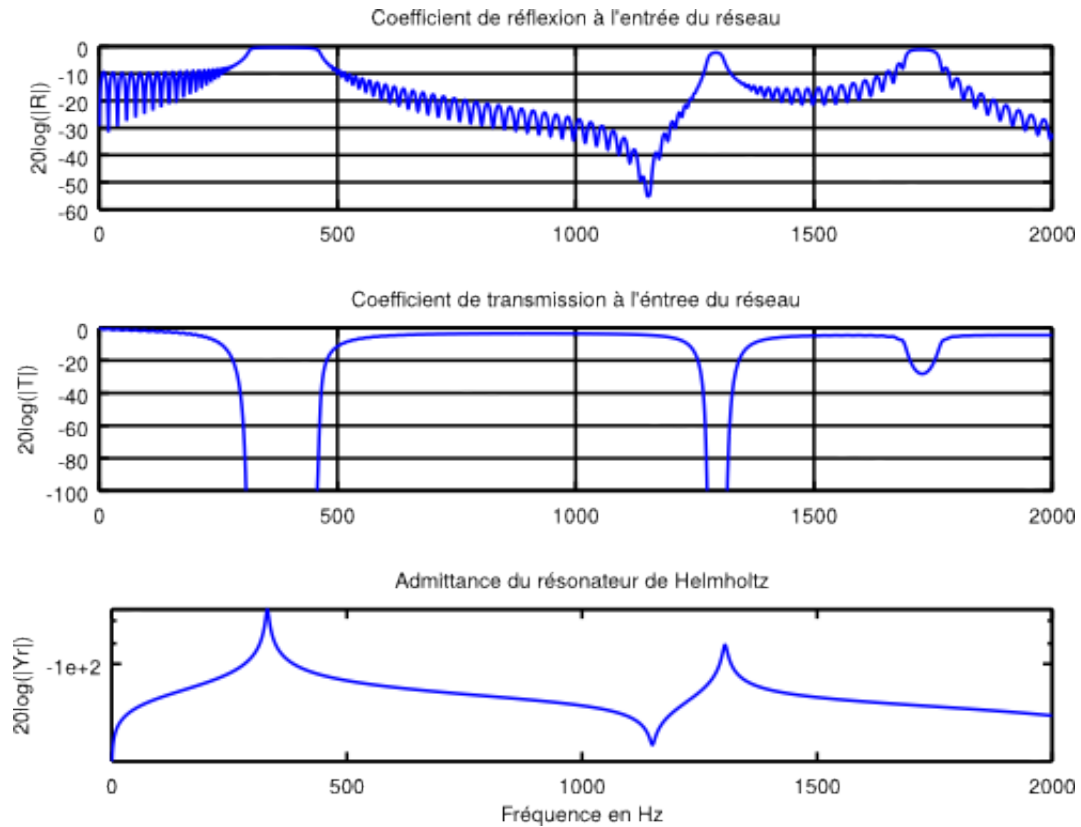


FIGURE 2.2 – Coefficient de réflexion et de transmission pour un réseau de 60 résonateurs avec $L_c = 14 \text{ cm}$. En bas : Impédance d'entrée du résonateur.

De plus le résonateur étant par nature un système résonant, il peut lui aussi induire une absorption de l'énergie de l'onde sur certaines fréquences. Sur la figure 2.4, ces bandes interdites sont aussi présentes : elles se trouvent là où l'admittance du résonateur est maximale. A ces fréquences, on a bien une chute de la transmission. Il y a donc 2 phénomènes qui peuvent induire

des bandes interdites, d'une part les bandes de Braggs liés à la géométrie du réseau et d'autre part l'énergie absorbée par les résonateurs.

2.2.5 Cas désordonné

Ecart-type ???

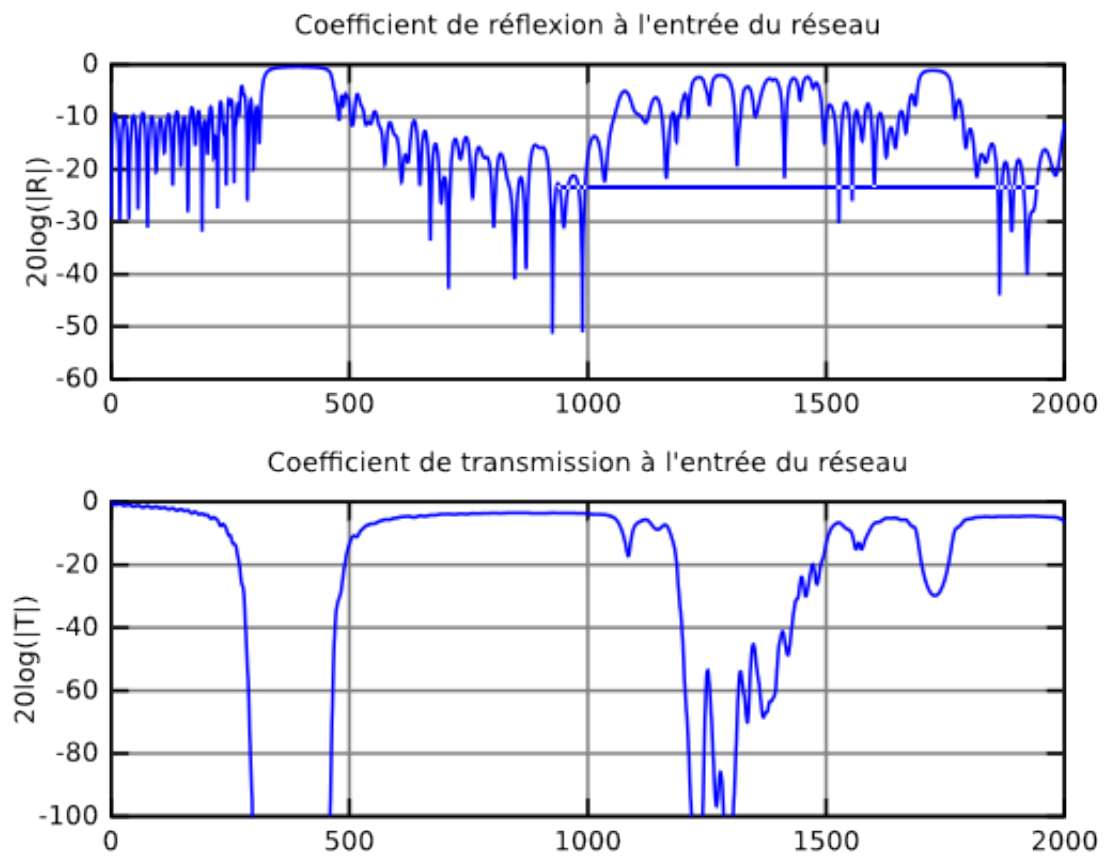


FIGURE 2.3 – Coefficient de réflexion et de transmission pour un réseau de 60 résonateurs avec $L_c = 14 \text{ cm}$.

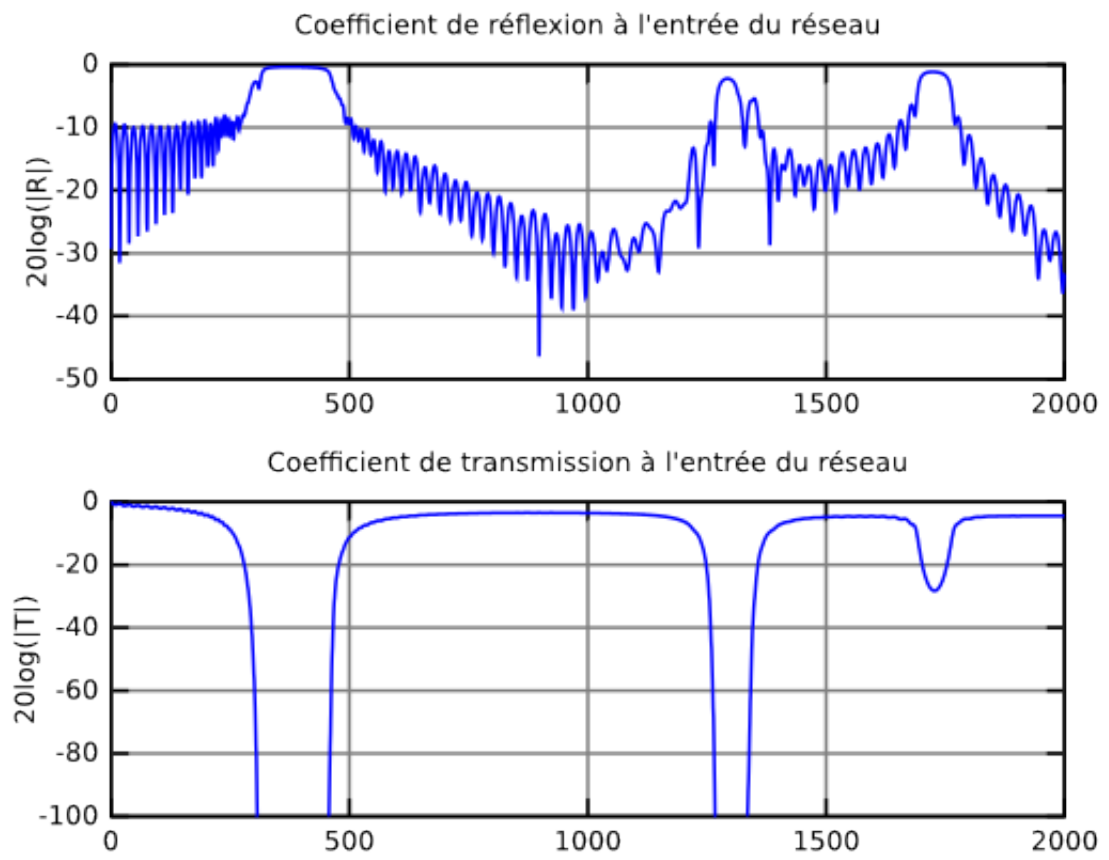


FIGURE 2.4 – Coefficient de réflexion et de transmission pour un réseau de 60 résonateurs avec $L_c = 14 \text{ cm}$.

Chapitre 3

Ajout d'une singularité dans le réseau

- 3.1 Cas d'une singularité hors bande de Bragg
- 3.2 Cas d'une singularité dans la bande de Bragg
- 3.3 Calcul numérique de la pression dans le réseau
- 3.4 Etude de l'influence de la position du défaut

Chapitre 4

Visualisation expérimental d'un mode localisé

4.1 Protocole expérimental

4.2 Résultat et comparaison avec la simulation

Chapitre 5

Conclusion

Annexes

Annexe 1 :

Annexe 2 : Paramètres du réseau étudié

La liste des dimensions du réseau utilisé lors des expériences et des simulations est la suivante :

- Le guide a un rayon de $R_t = 2.5 \text{ cm}$ et une épaisseur de $ep = 0.5 \text{ cm}$.
- Les résonateurs sont composées de 2 tubes : le col de $R_n = 1 \text{ cm}$ de rayon et $L_n = 2 \text{ cm}$ de longueur, la cavité de $R_c = 2.15 \text{ cm}$ de rayon et de longueur variable L_c . C'est cette dernière longueur qui permet de faire varier la fréquence de résonance du résonateur.

Les corrections apportées aux cols des résonateurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned}l_1 &= 0.82 \left[1 - 1.35 \frac{R_n}{R_c} + 0.31 \left(\frac{R_n}{R_c} \right)^3 \right] R_n \\l_2 &= 0.82 \left[1 - 0.235 \frac{R_n}{R_t} - 1.32 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^2 + 1.54 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^3 - 0.86 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^4 \right] R_n \\L_{corr} &= l_1 + l_2\end{aligned}$$

Notations

résonateurs : L_n : longueur du col R_n : rayon du col L_c : longueur de la cavité R_c : rayon de la cavité S_n : section du col S_c : section de la cavité Z_c : impédances carac du col. De même pour n
impédance quelconque au point x_0 : $Z(x_0)$
impédance du résonateur : Z_r