

Premier jet du Rapport de projet de M1: Réseau periodiques et modes localisés

Thomas Lechat & Alice Dinsenmeyer

6 mai 2015

Table des matières

1	Introduction	4
2	Théorie d'un réseau acoustique fini constitué de résonateurs de Helmholtz	5
2.1	Mise sous forme matricielle	5
2.1.1	Le guide d'onde	6
2.1.2	Impédance d'entrée d'un résonateur	6
2.2	Étude du réseau fini	7
2.2.1	Équation de dispersion	7
2.2.2	Réflexion et transmission du réseau	7
2.2.3	Bande de Bragg	7
2.2.4	Bande interdites liés aux résonateurs	8
2.2.5	Cas désordonné	8
3	Ajout d'une singularité dans le réseau	11
3.1	Étude de l'influence de la fréquence de résonance du défaut	11
3.1.1	Cas du défaut hors bandes interdites	11
3.1.2	Cas du défaut dans une bande interdite	12
3.2	Étude de l'influence de la position du défaut	12
4	Visualisation expérimental d'un mode localisé	13
4.1	Protocole expérimental	13
4.2	Résultat et comparaison avec la simulation	13
5	Conclusion	14

Remerciements

Abstract en anglais

même chose que l'intro + résultats principaux

Chapitre 1

Introduction

- domaine de recherche : méta-matériaux, filtrage analogique, tout les phénomènes de propagation.
- Citation des sources => optique puis electromagnetique puis acoustique
- but : comprendre propagation dans réseau et visualisation expérimental de mode localisé
- plan : Approche théorique de la propa dans réseau ac, ajout de singularité pour mode localisé, expérimentation

Chapitre 2

Théorie d'un réseau acoustique fini constitué de résonateurs de Helmholtz

Ce chapitre a pour but de caractériser le champ de pression dans un guide sur lequel des résonateurs de Helmholtz sont placés en dérivation, espacés régulièrement d'une longueur L . On dispose pour cela d'un banc de mesure représenté en figure 2.1. Une simulation de la propagation dans le réseau pourra donc être confrontée à une expérience.

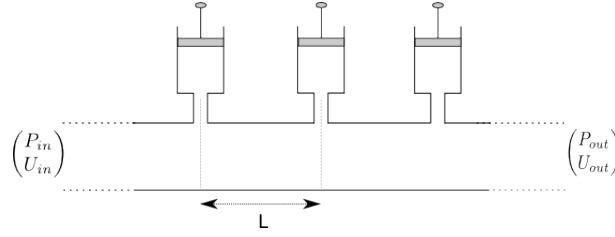


FIGURE 2.1 – Schéma du réseau de résonateurs de Helmholtz.

Notations Le guide principal a pour section S ; le col des résonateurs a pour longueur L_n et pour section S_n ; la cavité des résonateurs a pour longueur L_c et pour section S_c . Par la suite, on note ρ la masse volumique de l'air et c la célérité du son dans l'air.

2.1 Mise sous forme matricielle

On s'intéresse ici à la mise sous forme matricielle du problème de la propagation acoustique dans le réseau périodique vu ci-dessus. Le but est de mettre en relation les pressions et débits en entrée du système (P_{in} et U_{in}) avec ceux en sortie (P_{out} et U_{out}) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} P_{out} \\ U_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Cette matrice dispose en effet de propriétés intéressantes et l'étude du système sera grandement facilitée par ce formalisme. De plus, les simulations sont faciles à mettre en œuvre dès lors que celle-ci est connue.

Pour cela, les 2 éléments du réseau (guide et résonateur) doivent être mis sous forme matricielle puis multipliés.

2.1.1 Le guide d'onde

La solution de la propagation dans un guide d'onde peut être facilement déduite de l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Dire qu'on est en 1D (d'où dx) car guide long et BF

On se place en régime harmonique et on note $\Gamma = jk$ la constante de propagation du système. D'où les solutions (vitesses calculées avec l'équation d'Euler) :

$$\begin{cases} p(x_1) = C_1 e^{-\Gamma x_1} + C_2 e^{\Gamma x_1} \\ v(x_1) = -\frac{1}{j\omega\rho} [-\Gamma C_1 e^{-\Gamma x_1} + \Gamma C_2 e^{\Gamma x_1}] \\ p(x_2) = C_1 e^{-\Gamma x_2} + C_2 e^{\Gamma x_2} \\ v(x_2) = -\frac{1}{j\omega\rho} [-\Gamma C_1 e^{-\Gamma x_2} + \Gamma C_2 e^{\Gamma x_2}] \end{cases}$$

On pose $x_1 - x_2 = L$. Tous calculs faits, on trouve finalement :

$$\begin{pmatrix} p(x_1) \\ v(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(kL) & \frac{j\omega\rho}{k} \sinh(kL) \\ \frac{k}{j\omega\rho} \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x_2) \\ v(x_2) \end{pmatrix}$$

La première fréquence de coupure du guide est donc d'environ $4kHz$ pour les dimensions du réseau que nous considérons. Dans la suite, on supposera donc que seul le mode plan est propagatif. Les simulations et mesures ne seront donc faites que sur une bande de fréquences allant de 0 à $1kHz$.

Ajout des pertes

source biblio à citer

Pour prendre en compte les pertes, on modifie l'expression de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique. Les expressions sont donc :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left(1 + \frac{\beta}{s} (1 + (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

$$Z_c = \frac{\rho c_0}{S} \left(1 + \frac{\beta}{s} (1 - (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

Dans ces expressions, on a :

- $s = R/\delta$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}}$
- $\chi = \sqrt{P_r}$ ou P_r est le nombre de Prandtl
- $\beta = (1 - j)/\sqrt{2}$
- μ la viscosité de l'air

Du fait de la géométrie assez complexe du système, ces pertes ne peuvent pas être négligées comme cela peut être souvent le cas en acoustique.

2.1.2 Impédance d'entrée d'un résonateur

Le résonateur de Helmholtz est considéré dans le réseau comme un changement ponctuel d'impédance. Cette impédance, notée Z_r peut être calculée en utilisant le même formalisme matriciel que précédemment.

On suppose que le résonateur est constitué de 2 guides à parois rigides d'impédance caractéristique $Z_n = \rho c/S_n$ pour le col et $Z_c = \rho c/S_c$ pour la cavité. La matrice de transfert mettant en relation les pression et débit à l'entrée du résonateur P_e et U_e et les pression et débit au niveau de la paroi extrême P_s et $U_s = 0$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} P_e \\ U_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL_n) & jZ_n \sin(kL_n) \\ \frac{1}{Z_n} \sin(kL_n) & \cos(kL_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kL_c) & jZ_c \sin(kL_c) \\ \frac{1}{Z_c} \sin(kL_c) & \cos(kL_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_e \\ U_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Z_r = \frac{P_e}{U_e} = \frac{r_1}{r_3}$$

Correction de longueur La longueur effective du col est sujet à une correction présentée en annexe

correction liée à quoi, détaille-t-on ce passage ?

En ajoutant un résonateur en parallèle au guide, il y a toujours continuité des pressions mais plus des vitesses. La matrice de transfert pression-débit pour un résonateur dans le réseau est alors la suivante :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_r & 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Étude du réseau fini

Une fois les matrices de guide et de résonateur connues, il suffit alors de les multiplier afin d'obtenir la matrice d'une cellule du réseau. C'est sur l'étude de cette matrice que se basent les analyses de cette section.

Dans la suite les paramètres de la simulation sont ceux de l'expérience dont nous disposons. Ces paramètres sont disponible en annexe 2.

2.2.1 Équation de dispersion

La matrice de transfert l'équation de dispersion pour le réseau à N cellules s'écrit alors :

$$\cos(NkL) = \frac{A + D}{2} \quad (2.3)$$

Ainsi, on peut remonter à une expression de kL en fonction de la fréquence. En particulier, les zones où kL devient imaginaire nous intéressent particulièrement car cela induit une décroissance exponentielle de l'onde de propageant dans le guide (onde évanescence). Ces bandes sont visibles sur la figure ?? et sont appelées les bandes de Bragg.

2.2.2 Réflexion et transmission du réseau

Le coefficient de réflexion et de transmission du réseau complet peut être calculé de la manière suivante [

Source biblio

]:

$$T = \frac{2}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.4)$$

$$R = \frac{A + B/Z_c - CZ_c - D}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.5)$$

On trace ces coefficients en fonction de la fréquence (figure 2.2) ainsi que l'admittance des résonateurs utilisés. Il apparaît que la transmission chute pour trois bandes de fréquence : à la résonance du résonateur de Helmholtz, à celle de sa cavité et à la première bande de Bragg.

2.2.3 Bande de Bragg

Ces bandes sont visibles dès que des singularités apparaissent de manière périodique. L'énergie de l'onde est restée contenue entre chaque élément du fait que la longueur d'onde correspond à la moitié de l'espacement entre 2 éléments.

Pour un espacement entre éléments de longueur $L = 0.1 \text{ m}$, la bande de Bragg se situe autour de la fréquence $f_b = \frac{c}{2L} = 1715 \text{ Hz}$. On constate sur la figure 2.2 que ces bandes de Bragg sont bien présentes à la fréquence indiquée ainsi qu'à ses multiples (chute de la transmission et réflexion maximale).

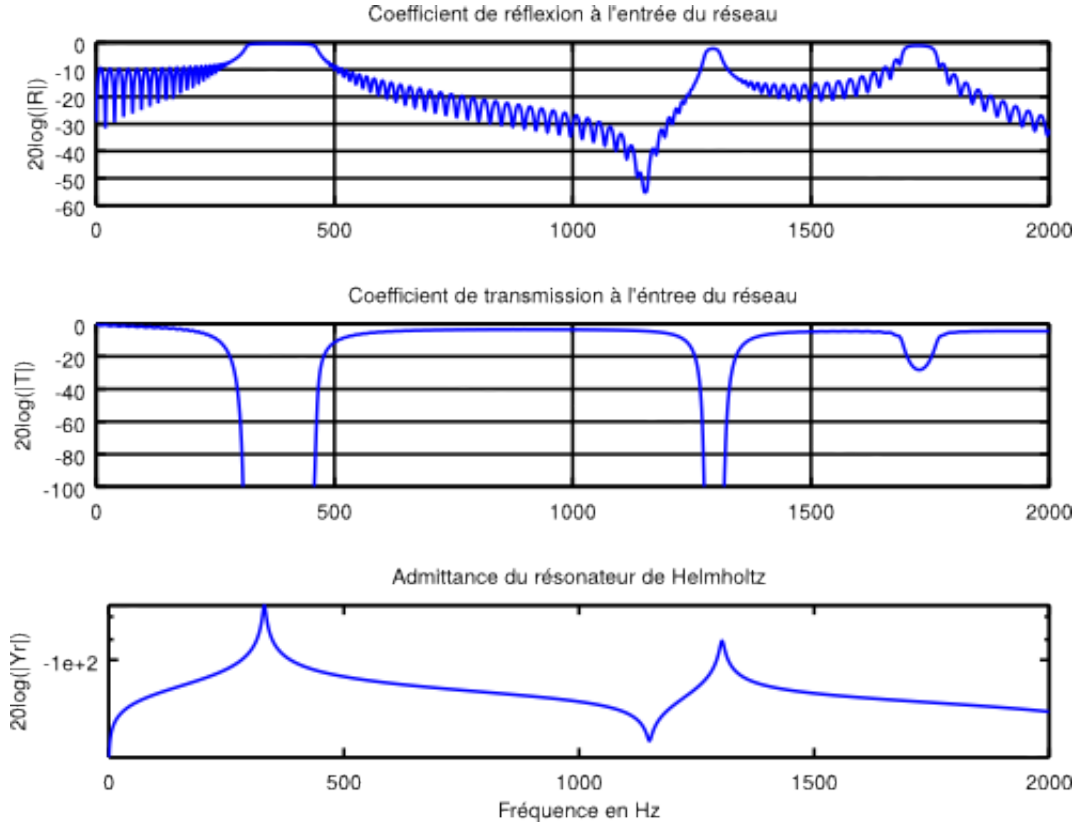


FIGURE 2.2 – Coefficient de réflexion (en haut) et de transmission (au milieu) pour un réseau de 60 résonateurs avec $L_c = 14$ cm. En bas : Impédance d'entrée du résonateur.

2.2.4 Bande interdites liés aux résonateurs

L'équation de dispersion est cependant plus difficile à analyser qu'il n'y paraît en raison des résonateurs qui constituent le réseau. Ceux-ci ont une impédance négligeable dès lors que la fréquence d'analyse se trouve suffisamment éloignée des fréquences de résonances.

De plus le résonateur étant par nature un système résonant, il peut lui aussi induire une absorption de l'énergie de l'onde sur certaines fréquences. Sur la figure 2.2, ces bandes interdites sont aussi présentes : elles se trouvent là où l'admittance du résonateur est maximale. À ces fréquences, on a bien une chute de la transmission.

2.2.5 Cas désordonné

Désordre sur le volume des cavités

Afin d'étudier succinctement l'effet d'un désordre sur le volume des cavités du résonateur, une simulation numérique est réalisée pour des longueurs de cavité suivant une loi normale. Comme précédemment, les résonateurs sont arbitrairement au nombre de 60 et sont séparés d'une distance $L = 0.1$ m. La figure 2.3 présente les coefficients de transmission et de réflexion pour une longueur de cavité moyenne de $\bar{L}_c = 14$ cm et un écart-type de $\sigma = 1$ cm.

Dans le cas d'un écart-type élevé, le désordre a pour principal effet d'élargir la bande interdite liée à la seconde résonance des résonateurs (résonance de la cavité). La bande de Bragg n'est pas impactée puisque le désordre touche le volume des cavités et non l'espacement des résonateurs.

Désordre lié aux conditions expérimentales Dans l'expérience menée plus loin, le volume des résonateurs est fixé manuellement. La question de l'impact de l'erreur commise par la mise en place de l'expérience est donc directement liée à l'étude de désordre dans le réseau. On estime que la longueur des cavités va suivre une loi normale d'écart-type 2 mm et de longueur moyenne $\bar{L}_c = 14.5$ cm. La figure 2.4 montre alors que ce désordre n'a qu'une faible influence sur le coefficient de réflexion.

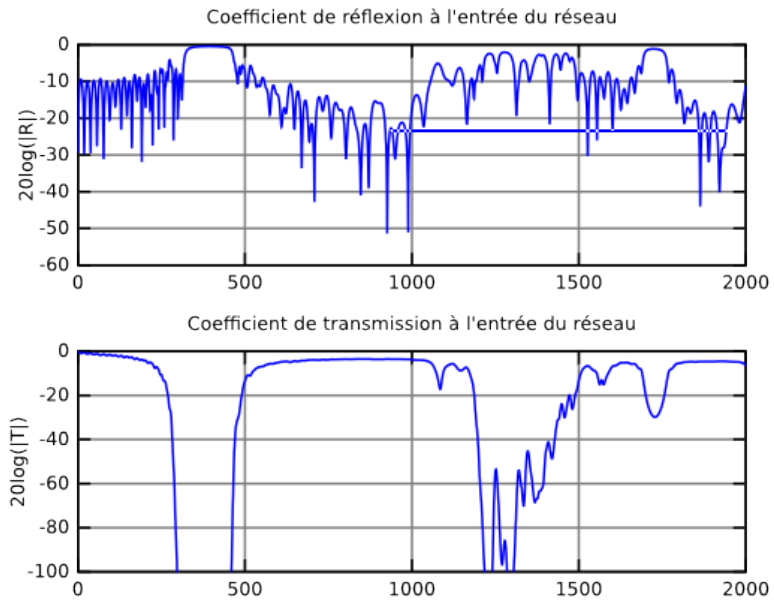


FIGURE 2.3 – Coefficient de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour un réseau de 60 résonateurs avec $\bar{L}_c = 14$ cm et $\sigma = 1$ cm.

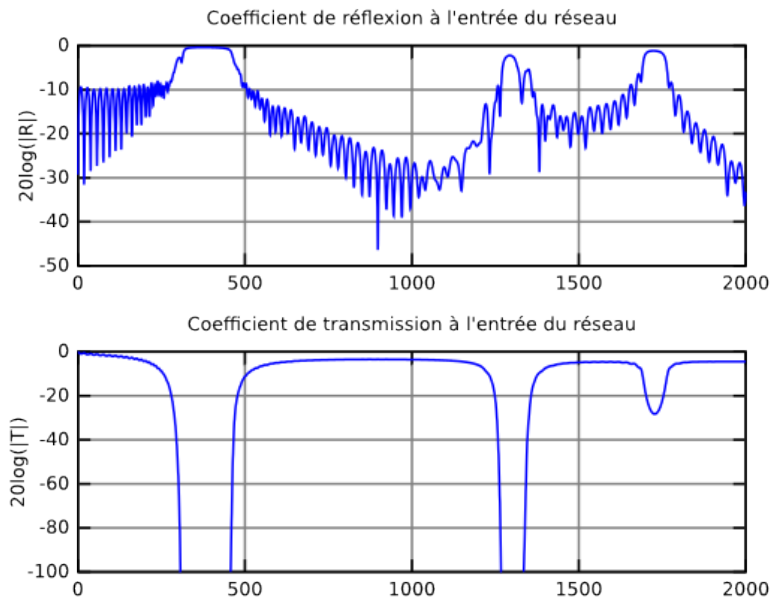


FIGURE 2.4 – Coefficient de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour un réseau de 60 résonateurs avec $\bar{L}_c = 14$ cm et $\sigma = 2$ mm.

Désordre sur la position des résonateurs

La même étude est menée sur le désordre lié à la conception du banc de mesure et aux défauts de position des résonateur. Les figures 2.5(a) et 2.5(b) montrent l'effet d'un désordre plus ou moins grand sur la réflexion et la transmission.

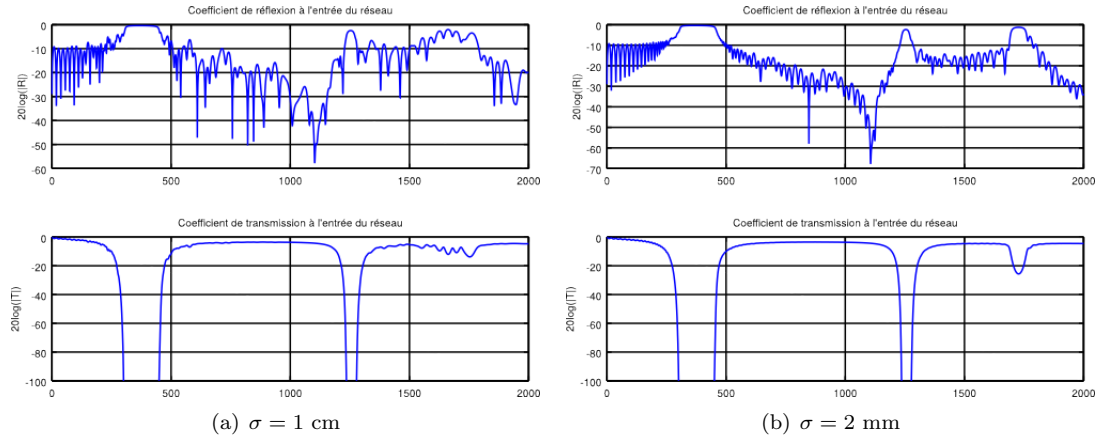


FIGURE 2.5 – Coefficients de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour un réseau de 60 résonateurs avec $\bar{L} = 10$ cm.

Chapitre 3

Ajout d'une singularité dans le réseau

La seconde partie de ce projet est une étude portant sur l'observation d'un mode localisé dans le réseau précédemment étudié. Pour cela, un résonateur est modifié de façon à créer une singularité dans le réseau.

Le banc de manipulation ne nous permet de modifier que la longueur des cavités des résonateurs et non leur position. C'est donc en changeant ce paramètre que sera introduite et étudiée la singularité. La longueur de la cavité singulière est notée L_{cs} .

En fonction du choix de la longueur de la cavité singulière, et donc de la fréquence de résonance du résonateur associé, différents phénomènes peuvent être observés.

3.1 Étude de l'influence de la fréquence de résonance du défaut

Le réseau étudié à un comportement complexe d'un point de vue fréquentiel. Il est donc important de différencier différents cas suivant la fréquence de résonance du défaut. Les 2 cas de figures sont représentés sur le schéma 3.1.



FIGURE 3.1 – Schémas de la configuration avec une singularité dans une bande interdite et hors bande interdite.

3.1.1 Cas du défaut hors bandes interdites

Le cas le plus simple d'une singularité dans le réseau est celui où cette singularité se trouve hors de la bande de Bragg ou des bandes liées aux autres résonateurs (la fréquence de résonance du réseau ne se trouve pas dans la bande). La singularité agit comme un mur dans le réseau à sa fréquence de résonance car alors l'impédance du résonateur est maximale. Dans ce cas, la pression dans le réseau après la singularité est nulle. Ce résultat se retrouve lors des simulations. On trace sur la figure 3.2 la simulation de la pression dans le réseau ainsi que le coefficient de transmission.

On constate bien une coupure de la pression au niveau de la singularité. Le défaut a théoriquement une impédance infinie à la résonance, il y a donc une réflexion totale. Ici, les pertes sont

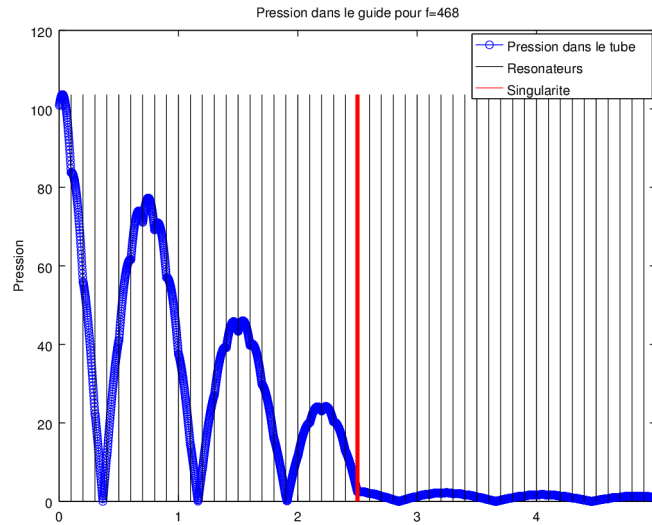


FIGURE 3.2 – Visualisation de la pression dans le réseau avec un défaut dont la fréquence se trouve hors d’une bande interdite. La fréquence d’excitation est celle du défaut. Celui-ci se trouve en 25eme position dans un réseau de 50 résonateurs.

présent en comptes, une fraction de l’onde incidente se propage donc dans le réseau car l’impédance n’est pas infinie, d’où la légère oscillation visible.

3.1.2 Cas du défaut dans une bande interdite

Dans les autres cas (résonance du défaut dans une bande interdites) des phénomènes plus complexes apparaissent. Si la fréquence de résonance du défaut se trouve dans une bande interdite, on a alors une localisation de l’onde au niveau du défaut. En effet la propagation n’est pas possible dans le réseau, on a donc des ondes évanescentes, la fraction de l’onde incidente qui c’est propagé jusqu’au défaut excite sa résonance mais reste piégé du fait que ce défaut se trouve au milieu du réseau. On obtient alors un mode localisé : la pression est élevée à un endroit du tube et reste confinée.

Du fait que cette pression soit localisée, elle n’a pas d’influence sur les coefficients de réflexions et transmissions sauf dans le cas d’un petit réseau ou on peut supposer que l’étalement du mode localisé est suffisamment grand au regarde de la taille du réseau pour atteindre les bords de celui-ci. Ce genre de phénomène est donc difficile à observer ; cependant une simulation peut aider à en comprendre les concepts clés.

On trace sur la figure ?? la pression dans le tube pour un défaut dans une bande interdite. Dans cette simulation on reconstruit la pression en chaque points du réseau par rétro-propagation en partant d’une terminaison anéchoïque à la fin du réseau. Les valeurs qu’on peut voir au début du réseau n’ont donc pas nécessairement de réalité physique, on s’intéresse ici surtout à l’enveloppe du signal plus qu’aux ordres de grandeurs.

Il est a noter que la fréquence de résonance du défaut ne correspond pas nécessairement à la fréquence du mode localisé. En effet, celui-ci résulte du défaut couplé avec le reste du réseau, les fréquences de résonances peuvent donc changer.

tracer le
truc

3.2 Étude de l’influence de la position du défaut

On s’intéresse maintenant à l’influence de la position du défaut dans le réseau.

Toute la troisième partie de ce projet va consister à visualiser expérimentalement un mode localisé.

Chapitre 4

Visualisation expérimental d'un mode localisé

Différents problèmes rendent la mesure d'un mode localisé difficile.

- Tout d'abord il n'est pas trivial de trouver une configuration qui permette la génération d'un mode localisé car c'est un phénomène difficile à visualiser et ce même en simulation.
- Le deuxième problème réside dans le fait que la propagation de l'onde dans le réseau soit difficile : la bande interdite rentre la décroissance de l'onde exponentielle. Par conséquence, exciter le défaut est difficile.
- Enfin le dernier problème se situe au niveau des mesures. Comme le champ de pression du mode est localisé, il n'apparaît pas sur les coefficients de transmission et réflexion du réseau complet (ou alors très peu si le défaut se trouve sur un des bords du réseau).

4.1 Protocole expérimental

4.2 Résultat et comparaison avec la simulation

Chapitre 5

Conclusion

Annexes

Annexe 1 :

Annexe 2 : Paramètres du réseau étudié

La liste des dimensions du réseau utilisé lors des expériences et des simulations est la suivante :

- Le guide a un rayon de $R_t = 2.5 \text{ cm}$ et une épaisseur de $ep = 0.5 \text{ cm}$.
- Les résonateurs sont composées de 2 tubes : le col de $R_n = 1 \text{ cm}$ de rayon et $L_n = 2 \text{ cm}$ de longueur, la cavité de $R_c = 2.15 \text{ cm}$ de rayon et de longueur variable L_c . C'est cette dernière longueur qui permet de faire varier la fréquence de résonance du résonateur.

Les corrections apportées aux cols des résonateurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned}l_1 &= 0.82 \left[1 - 1.35 \frac{R_n}{R_c} + 0.31 \left(\frac{R_n}{R_c} \right)^3 \right] R_n \\l_2 &= 0.82 \left[1 - 0.235 \frac{R_n}{R_t} - 1.32 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^2 + 1.54 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^3 - 0.86 \left(\frac{R_n}{R_t} \right)^4 \right] R_n \\L_{corr} &= l_1 + l_2\end{aligned}$$

Notations

résonateurs : L_n : longueur du col
 R_n : rayon du col
 L_c : longueur de la cavité
 R_c : rayon de la cavité
 S_n : section du col
 S_c : section de la cavité
 Z_c : impédances carac du col. De même pour n

impédance quelconque au point x_0 : $Z(x_0)$

impédance du résonateur : Z_r

Longueur de la cavité singulière : L_{c_s}