

# Premier jet du Rapport de projet de M1: Réseau periodiques et modes localisés

Thomas Lechat & Alice Dinsenmeyer

4 mai 2015

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Théorie d'un réseau acoustique fini constitué de résonateurs de Helmholtz</b>	<b>5</b>
2.1	Mise sous forme matricielle . . . . .	5
2.1.1	Le guide d'onde . . . . .	6
2.1.2	Impédance d'entrée d'un résonateur . . . . .	6
2.2	Étude du réseau fini . . . . .	7
2.2.1	Équation de dispersion . . . . .	7
2.2.2	Réflexion et transmission du réseau . . . . .	7
2.2.3	Bande de Bragg . . . . .	7
2.2.4	Bande interdites liés aux résonateurs . . . . .	8
2.2.5	Cas désordonné . . . . .	8
2.3	Conclusion* . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Ajout d'une singularité dans le réseau</b>	<b>11</b>
3.1	Cas d'une singularité hors bande de Bragg . . . . .	11
3.2	Cas d'une singularité dans la bande de Bragg . . . . .	11
3.3	Calcul numérique de la pression dans le réseau . . . . .	11
3.4	Étude de l'influence de la position du défaut . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Visualisation expérimental d'un mode localisé</b>	<b>12</b>
4.1	Protocole expérimental . . . . .	12
4.2	Résultat et comparaison avec la simulation . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>13</b>

# Remerciements

# Abstract en anglais

même chose que l'intro + résultats principaux

# Chapitre 1

## Introduction

- domaine de recherche : méta-matériaux, filtrage analogique, tout les phénomènes de propagation.
- Citation des sources => optique puis electromagnetique puis acoustique
- but : comprendre propagation dans réseau et visualisation expérimental de mode localisé
- plan : Approche théorique de la propa dans réseau ac, ajout de singularité pour mode localisé, expérimentation

## Chapitre 2

# Théorie d'un réseau acoustique fini constitué de résonateurs de Helmholtz

Ce chapitre a pour but de caractériser le champ de pression dans un guide sur lequel des résonateurs de Helmholtz sont placés en dérivation, espacés régulièrement d'une longueur  $L$ . On dispose pour cela d'un banc de mesure représenté en figure 2.1. Une simulation de la propagation dans le réseau pourra donc être confrontée à une expérience.

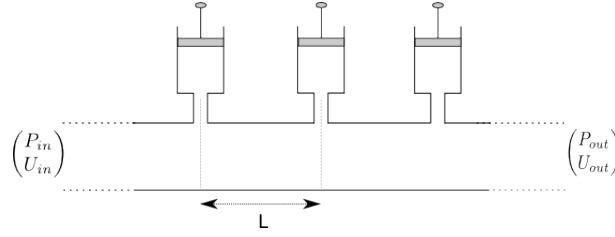


FIGURE 2.1 – Schéma du réseau de résonateurs de Helmholtz.

**Notations** Le guide principal a pour section  $S$  ; le col des résonateurs a pour longueur  $L_n$  et pour section  $S_n$  ; la cavité des résonateurs a pour longueur  $L_c$  et pour section  $S_c$ . Par la suite, on note  $\rho$  la masse volumique de l'air et  $c$  la célérité du son dans l'air.

### 2.1 Mise sous forme matricielle

On s'intéresse ici à la mise sous forme matricielle du problème de la propagation acoustique dans le réseau périodique vu ci-dessus. Le but est de mettre en relation les pressions et débits en entrée du système ( $P_{in}$  et  $U_{in}$ ) avec ceux en sortie ( $P_{out}$  et  $U_{out}$ ) sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} P_{out} \\ U_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Cette matrice dispose en effet de propriétés intéressantes et l'étude du système sera grandement facilitée par ce formalisme. De plus, les simulations sont faciles à mettre en œuvre dès lors que celle-ci est connue.

Pour cela, les 2 éléments du réseau (guide et résonateur) doivent être mis sous forme matricielle puis multipliés.

### 2.1.1 Le guide d'onde

La solution de la propagation dans un guide d'onde peut être facilement déduite de l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Dire qu'on est en 1D (d'où dx) car guide long et BF

On se place en régime harmonique et on note  $\Gamma = jk$  la constante de propagation du système. D'où les solutions (vitesses calculées avec l'équation d'Euler) :

$$\begin{cases} p(x_1) = C_1 e^{-\Gamma x_1} + C_2 e^{\Gamma x_1} \\ v(x_1) = -\frac{1}{j\omega\rho} [-\Gamma C_1 e^{-\Gamma x_1} + \Gamma C_2 e^{\Gamma x_1}] \\ p(x_2) = C_1 e^{-\Gamma x_2} + C_2 e^{\Gamma x_2} \\ v(x_2) = -\frac{1}{j\omega\rho} [-\Gamma C_1 e^{-\Gamma x_2} + \Gamma C_2 e^{\Gamma x_2}] \end{cases}$$

On pose  $x_1 - x_2 = L$ . Tous calculs faits, on trouve finalement :

$$\begin{pmatrix} p(x_1) \\ v(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(kL) & \frac{j\omega\rho}{k} \sinh(kL) \\ \frac{k}{j\omega\rho} \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x_2) \\ v(x_2) \end{pmatrix}$$

La première fréquence de coupure du guide est donc d'environ  $4kHz$  pour les dimensions du réseau que nous considérons. Dans la suite, on supposera donc que seul le mode plan est propagatif. Les simulations et mesures ne seront donc faites que sur une bande de fréquences allant de 0 à  $1kHz$ .

### Ajout des pertes

source biblio à citer

Pour prendre en compte les pertes, on modifie l'expression de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique. Les expressions sont donc :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left( 1 + \frac{\beta}{s} (1 + (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

$$Z_c = \frac{\rho c_0}{S} \left( 1 + \frac{\beta}{s} (1 - (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

Dans ces expressions, on a :

- $s = R/\delta$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}}$
- $\chi = \sqrt{P_r}$  ou  $P_r$  est le nombre de Prandtl
- $\beta = (1 - j)/\sqrt{2}$
- $\mu$  la viscosité de l'air

Du fait de la géométrie assez complexe du système, ces pertes ne peuvent pas être négligées comme cela peut être souvent le cas en acoustique.

### 2.1.2 Impédance d'entrée d'un résonateur

Le résonateur de Helmholtz est considéré dans le réseau comme un changement ponctuel d'impédance. Cette impédance, notée  $Z_r$  peut être calculée en utilisant le même formalisme matriciel que précédemment.

On suppose que le résonateur est constitué de 2 guides à parois rigides d'impédance caractéristique  $Z_n = \rho c/S_n$  pour le col et  $Z_c = \rho c/S_c$  pour la cavité. La matrice de transfert mettant en relation les pression et débit à l'entrée du résonateur  $P_e$  et  $U_e$  et les pression et débit au niveau de la paroi extrême  $P_s$  et  $U_s = 0$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} P_e \\ U_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL_n) & jZ_n \sin(kL) \\ \frac{1}{Z_n} \sin(kL_n) & \cos(kL_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kL_c) & jZ_c \sin(kL_c) \\ \frac{1}{Z_c} \sin(kL_c) & \cos(kL_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_e \\ U_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Z_r = \frac{P_e}{U_e} = \frac{r_1}{r_3}$$

**Correction de longueur** La longueur effective du col est sujet à une correction présentée en annexe

correction liée à quoi, détaille-t-on ce passage ?

En ajoutant un résonateur en parallèle au guide, il y a toujours continuité des pressions mais plus des vitesses. La matrice de transfert pression-débit pour un résonateur dans le réseau est alors la suivante :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_r & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Étude du réseau fini

Une fois les matrices de guide et de résonateur connues, il suffit alors de les multiplier afin d'obtenir la matrice d'une cellule du réseau. C'est sur l'étude de cette matrice que se basent les analyses de cette section.

Dans la suite les paramètres de la simulation sont ceux de l'expérience dont nous disposons. Ces paramètres sont disponible en annexe 2.

### 2.2.1 Équation de dispersion

La matrice de transfert l'équation de dispersion pour le réseau à N cellules s'écrit alors :

$$\cos(NkL) = \frac{A + D}{2} \quad (2.3)$$

Ainsi, on peut remonter à une expression de  $kL$  en fonction de la fréquence. En particulier, les zones où  $kL$  devient imaginaire nous intéressent particulièrement car cela induit une décroissance exponentielle de l'onde de propageant dans le guide (onde évanescence). Ces bandes sont visibles sur la figure ?? et sont appelées les bandes de Bragg.

### 2.2.2 Réflexion et transmission du réseau

Le coefficient de réflexion et de transmission du réseau complet peut être calculé de la manière suivante [

Source biblio

]:

$$T = \frac{2}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.4)$$

$$R = \frac{A + B/Z_c - CZ_c - D}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.5)$$

On trace ces coefficients en fonction de la fréquence (figure 2.2) ainsi que l'admittance des résonateurs utilisés. Il apparaît que la transmission chute pour trois bandes de fréquence : à la résonance du résonateur de Helmholtz, à celle de sa cavité et à la première bande de Bragg.

### 2.2.3 Bande de Bragg

Ces bandes sont visibles dès que des singularités apparaissent de manière périodique. L'énergie de l'onde est restée contenue entre chaque élément du fait que la longueur d'onde correspond à la moitié de l'espacement entre 2 éléments.

Pour un espacement entre éléments de longueur  $L = 0.1 \text{ m}$ , la bande de Bragg se situe autour de la fréquence  $f_b = \frac{c}{2L} = 1715 \text{ Hz}$ . On constate sur la figure 2.2 que ces bandes de Bragg sont bien présentes à la fréquence indiquée ainsi qu'à ses multiples (chute de la transmission et réflexion maximale).

une figure de l'équation de dispersion avec bande de bragg



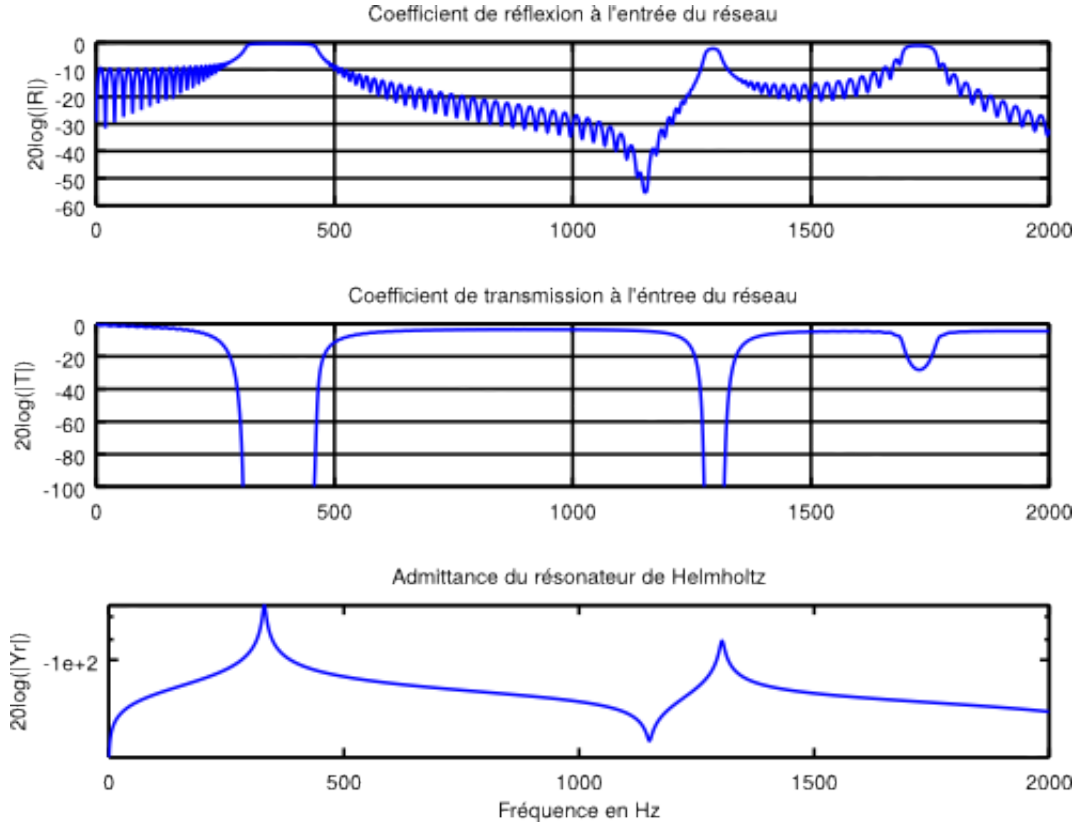


FIGURE 2.2 – Coefficient de réflexion (en haut) et de transmission (au milieu) pour un réseau de 60 résonateurs avec  $L_c = 14$  cm. En bas : Impédance d'entrée du résonateur.

## 2.2.4 Bande interdites liés aux résonateurs

L'équation de dispersion est cependant plus difficile à analyser qu'il n'y paraît en raison des résonateurs qui constituent le réseau. Ceux-ci ont une impédance négligeable dès lors que la fréquence d'analyse se trouve suffisamment éloignée des fréquences de résonances.

De plus le résonateur étant par nature un système résonant, il peut lui aussi induire une absorption de l'énergie de l'onde sur certaines fréquences. Sur la figure 2.2, ces bandes interdites sont aussi présentes : elles se trouvent là où l'admittance du résonateur est maximale. À ces fréquences, on a bien une chute de la transmission.

## 2.2.5 Cas désordonné

### Désordre sur le volume des cavités

Afin d'étudier succinctement l'effet d'un désordre sur le volume des cavités du résonateur, une simulation numérique est réalisée pour des longueurs de cavité suivant une loi normale. La figure 2.3 présente les coefficients de transmission et de réflexion pour une longueur de cavité moyenne de  $\bar{L}_c = 14$  cm et un écart-type de  $\sigma = 1$  cm.

Dans le cas d'un écart-type élevé, le désordre a pour principal effet d'élargir la bande liée à la seconde résonance des résonateurs, liée à la résonance de la cavité. La bande de Bragg n'est pas impactée puisque le désordre touche le volume des cavités et non l'espacement des résonateurs.

**Désordre lié aux conditions expérimentales** Dans l'expérience menée plus loin, le volume du résonateur est fixé manuellement. La question de l'impact de l'erreur commise par la mise en place de l'expérience est donc directement liée à l'étude de désordre dans le réseau. On estime que la longueur des cavités va suivre une loi normale d'écart-type 2 mm et de longueur moyenne  $\bar{L}_c = 14.5$  cm. La figure 2.4 montre alors que ce désordre n'a qu'une faible influence sur le coefficient de réflexion.

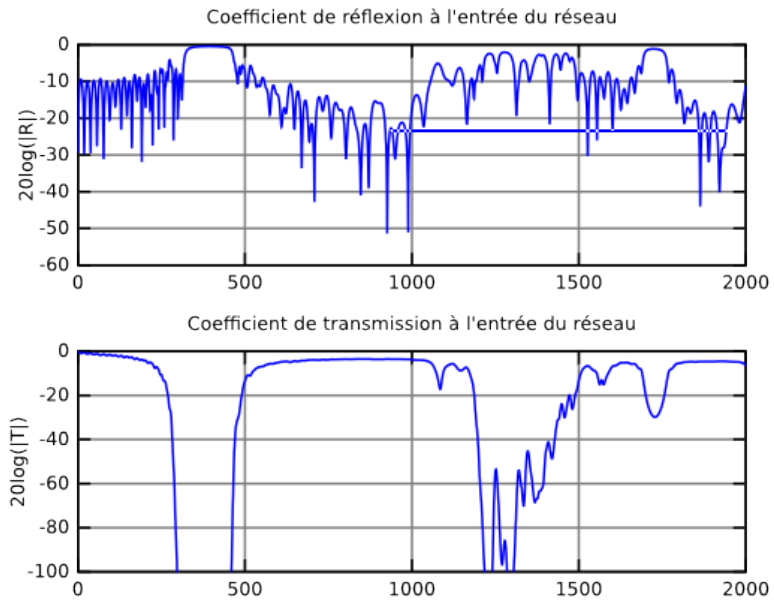


FIGURE 2.3 – Coefficient de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour un réseau de 60 résonateurs avec  $\bar{L}_c = 14$  cm et  $\sigma = 1$  cm.

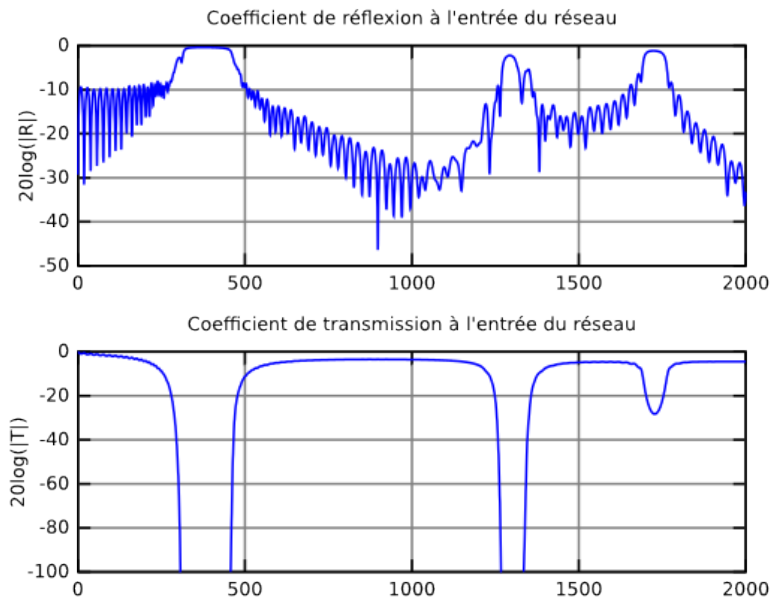


FIGURE 2.4 – Coefficient de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour un réseau de 60 résonateurs avec  $\bar{L}_c = 14$  cm et  $\sigma = 2$  mm.

### Désordre sur la position des résonateurs

La même étude est menée sur le désordre lié à la conception du banc de mesure et aux défauts de position des résonateur. Les figures 2.5(a) et 2.5(b) montrent l'effet d'un désordre plus ou moins grand sur la réflexion et la transmission.

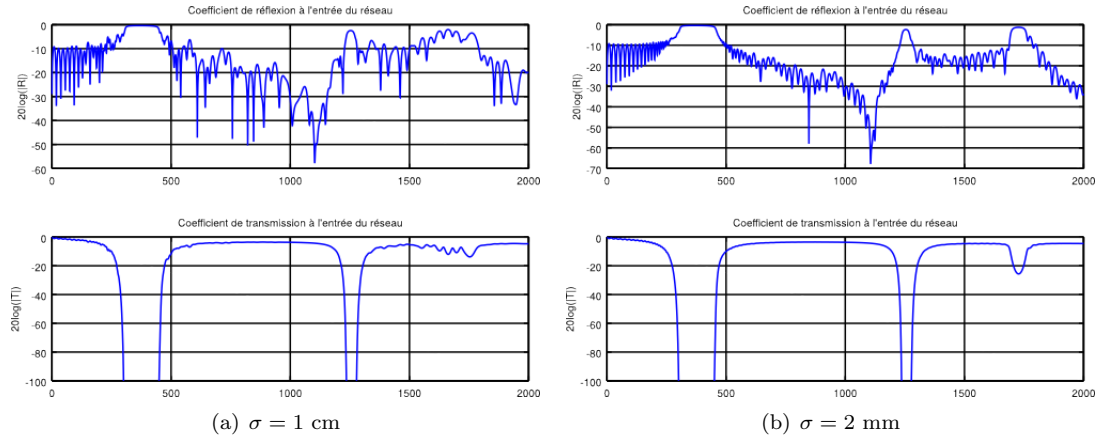


FIGURE 2.5 – Coefficients de réflexion (en haut) et de transmission (en bas) pour un réseau de 60 résonateurs avec  $\bar{L} = 10$  cm.

## 2.3 Conclusion\*

Conclusion partielle ?

# Annexes

## Annexe 1 :

## Annexe 2 : Paramètres du réseau étudié

La liste des dimensions du réseau utilisé lors des expériences et des simulations est la suivante :

- Le guide a un rayon de  $R_t = 2.5 \text{ cm}$  et une épaisseur de  $ep = 0.5 \text{ cm}$ .
- Les résonateurs sont composées de 2 tubes : le col de  $R_n = 1 \text{ cm}$  de rayon et  $L_n = 2 \text{ cm}$  de longueur, la cavité de  $R_c = 2.15 \text{ cm}$  de rayon et de longueur variable  $L_c$ . C'est cette dernière longueur qui permet de faire varier la fréquence de résonance du résonateur.

Les corrections apportées aux cols des résonateurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned} l_1 &= 0.82 \left[ 1 - 1.35 \frac{R_n}{R_c} + 0.31 \left( \frac{R_n}{R_c} \right)^3 \right] R_n \\ l_2 &= 0.82 \left[ 1 - 0.235 \frac{R_n}{R_t} - 1.32 \left( \frac{R_n}{R_t} \right)^2 + 1.54 \left( \frac{R_n}{R_t} \right)^3 - 0.86 \left( \frac{R_n}{R_t} \right)^4 \right] R_n \\ L_{corr} &= l_1 + l_2 \end{aligned}$$

**Notations**

résonateurs :  $L_n$  : longueur du col

$R_n$  : rayon du col

$L_c$  : longueur de la cavité

$R_c$  : rayon de la cavité

$S_n$  : section du col

$S_c$  : section de la cavité

$Z_c$  : impédances carac du col. De même pour n

impédance quelconque au point  $x_0$  :  $Z(x_0)$

impédance du résonateur :  $Z_r$

Longueur de la cavité singulière :  $L_{c_s}$