

# Premier jet du Rapport de projet de M1: Réseau periodiques et modes localisés

Thomas Lechat & Alice Dinsenmeyer

24 avril 2015

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Théorie d'un réseau acoustique de résonateur de Helmholtz fini</b>	<b>5</b>
2.1	Mise sous forme matricielle . . . . .	5
2.1.1	Le guide d'onde . . . . .	5
2.1.2	Le résonateur . . . . .	6
2.2	Étude du réseau fini . . . . .	7
2.2.1	Équation de dispersion . . . . .	7
2.2.2	Réflexion et transmission du réseau . . . . .	7
2.2.3	Bande de Bragg . . . . .	7
2.2.4	Bande interdites liés aux résonateurs . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Ajout d'une singularité dans le réseau</b>	<b>9</b>
3.1	Cas d'une singularité hors bande de Bragg . . . . .	9
3.2	Cas d'une singularité dans la bande de Bragg . . . . .	9
3.3	Calcul numérique de la pression dans le réseau . . . . .	9
3.4	Etude de l'influence de la position du défaut . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Visualisation expérimental d'un mode localisé</b>	<b>10</b>
4.1	Protocole expérimental . . . . .	10
4.2	Résultat et comparaison avec la simulation . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>11</b>

# Remerciements (ou pas)

# Abstract en anglais

même chose que l'intro mais + détaillé ?

# Chapitre 1

## Introduction

- domaine de recherche : méta-matériaux, filtrage analogique, tout les phénomènes de propagation.
- Citation des sources => optique puis electromagnetique puis acoustique
- but : comprendre propagation dans réseau et visualisation expérimental de mode localisé
- plan : Approche théorique de la propa dans réseau ac, ajout de singularité pour mode localisé, expérimentation

## Chapitre 2

# Théorie d'un réseau acoustique de résonateur de Helmholtz fini

Le but du projet est de caractériser un réseau de résonateur de Helmholtz placés sur un guide d'onde. On dispose pour cela d'un banc de mesure représenté figure 2.1. Une simulation de la propagation dans le réseau pourra donc être confrontée à une expérience.

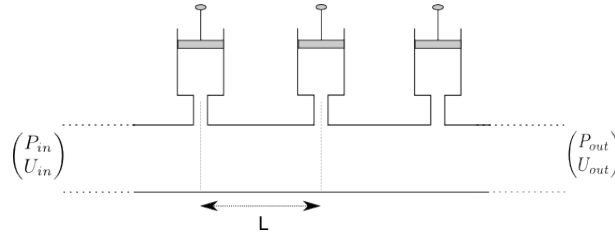


FIGURE 2.1 – Schéma du réseau de résonateurs de Helmholtz.

### 2.1 Mise sous forme matricielle

On s'intéresse ici à la mise sous forme matricielle du problème de la propagation acoustique dans le réseau périodique vu ci-dessus. Le but étant de mettre le système sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} P_{out} \\ U_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^N \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{in} \\ U_{in} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Cette matrice dispose en effet de propriétés intéressantes et l'étude du système sera grandement facilitée par ce formalisme. De plus, les simulations sont faciles à mettre en œuvre dès lors que celle-ci est connue.

Pour cela, les 2 éléments du réseau (guide et résonateur) doivent être mis sous forme matricielle puis multipliés.

#### 2.1.1 Le guide d'onde

La solution de la propagation dans un guide d'onde peut être facilement déduite de l'équation d'onde suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

On se place en régime harmonique et on note  $\Gamma = jk$  la constante de propagation du système. D'où les solutions (vitesses calculées avec l'équation d'Euler) :

$$\begin{cases} p(x_1) = C1e^{-\Gamma x_1} + C2e^{\Gamma x_1} \\ v(x_1) = -\frac{1}{j\omega\rho}[-\Gamma C1e^{-\Gamma x_1} + \Gamma e^{\Gamma x_1}] \\ p(x_2) = C1e^{-\Gamma x_2} + C2e^{\Gamma x_2} \\ v(x_2) = -\frac{1}{j\omega\rho}[-\Gamma C1e^{-\Gamma x_2} + \Gamma e^{\Gamma x_2}] \end{cases}$$

On pose  $x_1 - x_2 = L$ . Tous calculs faits, on trouve finalement :

$$\begin{pmatrix} p(x_1) \\ v(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(kL) & \frac{j\omega\rho}{k} \sinh(kL) \\ \frac{k}{j\omega\rho} \sinh(kL) & \cosh(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(x_2) \\ v(x_2) \end{pmatrix}$$

La première fréquence de coupure du guide est donc d'environ  $4kHz$  pour les dimensions du réseau que nous considérons. Dans la suite, on supposera donc que seul le mode plan est propagatif. Les simulations et mesures ne seront donc faite que sur une bande de fréquences allant de 0 à 1  $kHz$ .

### Ajout des pertes

Pour prendre en compte les pertes, on modifie l'expression de la constante de propagation et de l'impédance caractéristique. Les expressions sont donc :

$$k = \frac{\omega}{c_0} \left( 1 + \frac{\beta}{s} (1 + (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

$$Z_c = \frac{\rho c_0}{S} \left( 1 + \frac{\beta}{s} (1 - (\gamma - 1)/\chi) \right)$$

Dans ces expressions, on a :

- $s = R/\delta$  avec  $\delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho\omega}}$
- $\chi = \sqrt{P_r}$  ou  $P_r$  est le nombre de Prandtl
- $\beta = (1 - j)/\sqrt{2}$
- $\mu$  la viscosité de l'air

Du fait de la géométrie assez complexe du système, ces pertes ne peuvent pas être négligées comme cela peut être souvent le cas en acoustique.

### 2.1.2 Le résonateur

Le résonateur de Helmholtz est considéré dans le réseau comme un changement ponctuel d'impédance. Cette impédance peut être calculée via la formule de l'impédance ramenée ???. De plus, les dimensions utilisées dans la suite sont corrigées afin de prendre en compte les corrections de longueurs liés à la géométrie du problèmes. Ces formules de corrections sont disponibles en annexe 2.

$$Z_{x_1} = \frac{jZ_c \tan(kL) + Z_{x_2}}{1 + j\frac{Z_{x_2}}{Z_c} \tan(kL)}. \quad (2.3)$$

Si on suppose que le résonateur est constitué d'une parois rigide et de 2 tubes, on peut calculer son impédance comme suit :

$$\begin{pmatrix} P_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL) & jZ_{c_1} \sin(kL) \\ \frac{1}{Z_{c_1}} \sin(kL) & \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(kL) & jZ_{c_2} \sin(kL) \\ \frac{1}{Z_{c_2}} \sin(kL) & \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_2 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow Z_{\text{résonateur}} = \frac{A}{C}$$

Si on ajoute un résonateur en parallèle au guide, on a toujours continuité des pressions mais plus des vitesses. On a donc la matrice de transfert pression-vitesse suivante pour un résonateur dans le réseau :

$$M_{\text{résonateur}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/Z_{\text{résonateur}} & 1 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Étude du réseau fini

Une fois les matrices de guide et de résonateur connues, il suffit alors de les multiplier afin d'obtenir la matrice d'une cellule du réseau. C'est sur l'étude de cette matrice que se base les analyses de cette section.

Dans la suite les paramètres de la simulation sont ceux du de l'expérience dont nous disposons. Ces paramètres sont disponible en annexe 2.

### 2.2.1 Équation de dispersion

On peut déduire de la matrice de transfert l'équation de dispersion pour le réseau à  $N$  cellules, on a en effet :

$$\cos(NkL) = \frac{A + D}{2} \quad (2.4)$$

Ainsi, on peut remonter à une expression de  $kL$  en fonction de la fréquence. En particulier, les zones où  $kL$  devient imaginaire nous intéresse particulièrement car cela induit une décroissance exponentielle de l'onde de propageant dans le guide. Ces bandes sont visible sur la figure ?? et sont appelées les bandes de Bragg.

### 2.2.2 Réflexion et transmission du réseau

On peut tracer le coefficient de réflexion et de transmission du réseau complet. En effet, on a :

$$T = \frac{2}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.5)$$

$$R = \frac{A + B/Z_c - CZ_c - D}{A + B/Z_c + CZ_c + D} \quad (2.6)$$

On trace ces coefficients figure 2.2 ainsi que l'admittance des résonateurs utilisés et l'impédance caractéristique du réseau. On constate que des zones se démarquent pour lesquelles la transmission chute.

### 2.2.3 Bande de Bragg

Ces bandes apparaissant dès qu'un élément est présent dans un réseau et ce de manière périodique. L'énergie de l'onde reste "enfermée" entre chaque éléments du fait que la longueur d'onde correspond à la moitié de l'espacement entre 2 éléments.

Pour un espacement entre éléments de longueur  $L = 0.1 \text{ m}$ , on a  $f_{bragg} = \frac{c}{2L} = 1700 \text{ Hz}$ . On constate sur la figure 2.2 que ces bandes de Bragg sont bien présentes à la fréquence indiquée ainsi qu'à ces multiples car à ces endroits on constate une chute de la transmission.

### 2.2.4 Bande interdites liés aux résonateurs

L'équation de dispersion est cependant plus difficile analyser qu'il n'y parait à cause des résonateurs qui servent d'éléments au réseau. Hors ce ci ont une impédance négligeable dès lors que la fréquence d'analyse se trouve suffisamment éloignées des fréquences de résonances.

De plus le résonateur étant par nature un système résonant, il peut lui aussi induire une absorption de l'énergie de l'onde sur certaines fréquences. Sur la figure 2.2, ces bandes interdites sont aussi présentes : elles se trouvent là où l'admittance du résonateur est maximale. A ces fréquences, on a bien une chute de la transmission. Il y a donc 2 phénomènes qui peuvent induire

des bandes interdites, d'une part les bandes de Bragg liés à la géométrie du réseau et d'autre part l'énergie absorbée par les résonateurs.

une figure de l'équation de dispersion avec bande de bragg



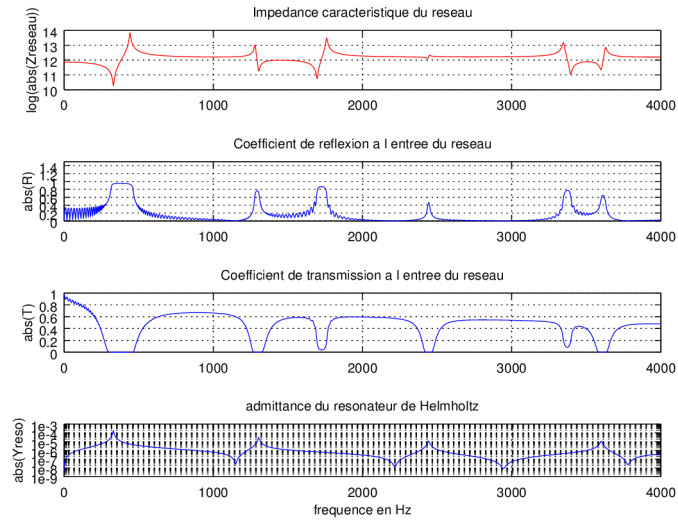


FIGURE 2.2 – Coefficient de réflexion et de transmission pour un réseau de 60 résonateurs avec  $L_c = 14 \text{ cm}$  la longueur des cavités des résonateurs.

## Chapitre 3

# Ajout d'une singularité dans le réseau

- 3.1 Cas d'une singularité hors bande de Bragg
- 3.2 Cas d'une singularité dans la bande de Bragg
- 3.3 Calcul numérique de la pression dans le réseau
- 3.4 Etude de l'influence de la position du défaut

## Chapitre 4

# Visualisation expérimental d'un mode localisé

### 4.1 Protocole expérimental

### 4.2 Résultat et comparaison avec la simulation

**Chapitre 5**

**Conclusion**

# Annexes

## Annexe 1 :

## Annexe 2 : Paramètres du réseau étudié

La liste des dimensions du réseau utilisé lors des expériences et des simulations est la suivante :

- Le guide a un rayon de  $R_t = 2.5 \text{ cm}$  et une épaisseur de  $ep = 0.5 \text{ cm}$ .
- Les résonateurs sont composées de 2 tubes : le col de  $R_n = 1 \text{ cm}$  de rayon et  $L_n = 2 \text{ cm}$  de longueur, la cavité de  $R_c = 2.15 \text{ cm}$  de rayon et de longueur variable  $L_c$ . C'est cette dernière longueur qui permet de faire varier la fréquence de résonance du résonateur.

Les corrections apportées aux cols des résonateurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned}l_1 &= 0.82 \left[ 1 - 1.35 \frac{R_n}{R_c} + 0.31 \left( \frac{R_n}{R_c} \right)^3 \right] R_n \\l_2 &= 0.82 \left[ 1 - 0.235 \frac{R_n}{R_t} - 1.32 \left( \frac{R_n}{R_t} \right)^2 + 1.54 \left( \frac{R_n}{R_t} \right)^3 - 0.86 \left( \frac{R_n}{R_t} \right)^4 \right] R_n \\L_{corr} &= l_1 + l_2\end{aligned}$$