

Université du Maine - Licence SPI 3^{ème} année
28 mai 2014

ÉTUDE DU PHÉNOMÈNE DE DISPERSION

Thomas LECHAT
Alice DINSENMEYER

Encadrés par
Sohbi SAHRAOUI
Professeur à l'université du Maine

INTRODUCTION

INTRODUCTION

DANS UN GUIDE D'ONDE

Mise en équation de la pression

Conditions limites

Vitesse de phase

Vitesse de groupe

frame 1

DANS UN RÉSEAU

DANS UN RÉSEAU

DISPERSION DANS UN GUIDE D'ONDE RECTANGULAIRE

- ▶ Équation de propagation :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad p(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

- ▶ Solution de cette équation :
 - ▶ $X(x) = Ce^{-k_x x}$
 - ▶ $Y(y) = A \cos k_y y + B \sin k_y y$
 - ▶ $T(t) = e^{j\omega t}$

d'où :

$$p(x, y, t) = [A \cos k_y y + B \sin k_y y] C e^{-k_x x} e^{j\omega t}$$

APPLICATION DES CONDITIONS LIMITES À LA PAROI

- Paroi infiniment rigide :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0}^{y=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B = 0 \\ k_{yn} = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

- Finalement :

$$p(x, y, t) = \sum_n A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) e^{-k_{xn}x} e^{j\omega t}$$

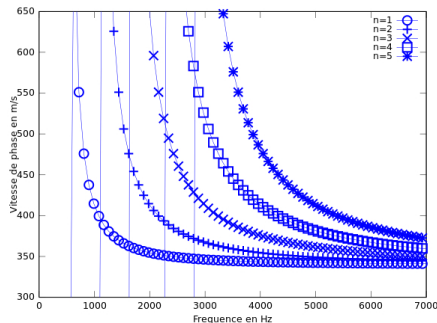
avec :

$$k_{xn} = \sqrt{k^2 - k_{yn}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}$$

VITESSE DE PHASE

Définie par :

$$c_{ph_n} = \frac{\omega}{k_{xn}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kL}\right)^2}}$$

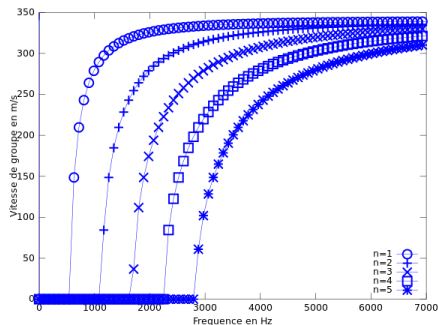


Vitesse de phase en fonction de la fréquence, pour les 5 premiers modes ($L = 30$ cm, $c = 340$ m/s).

VITESSE DE GROUPE

Définie par :

$$c_{gn} = \frac{d\omega}{dk_{xn}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kL} \right)^2}$$



Vitesse de groupe en fonction de la fréquence, pour les 5 premiers modes ($L = 30$ cm, $c = 340$ m/s).

VISUALISATION DE LA VITESSE DE GROUPE

$$\begin{cases} p_1 = A \cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ p_2 = A \cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \cos(\omega_0 t - k_0 x)$$

avec

$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad , \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad , \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

DISPERSION DANS UN RÉSEAU À PAS RÉGULIER

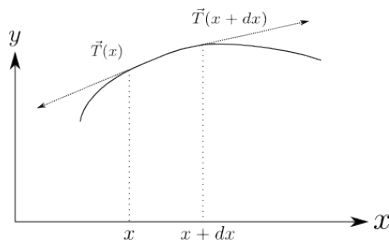


Schéma d'une corde vibrante sans masses ponctuelles

► Géométrie :

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{T_y}{T_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{T_0} \frac{\partial T_y}{\partial t}}$$

► PFD :

$$\mu dx \vec{a}(x) = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + dx)$$

$$\begin{cases} T_x(x) = T_x(x + dx) & \Rightarrow T_x = T_0 \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_y(x) + T_y(x + dx) & \Rightarrow \boxed{\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial t}} \end{cases}$$

DISPERSION DANS UN RÉSEAU À PAS RÉGULIER