Université du Maine - Licence SPI 3ème année
28 mai 2014

ÉTUDE DU PHÉNOMÈNE DE DISPERSION

Thomas LECHAT
Alice DINSENMEYER

Encadrés par
Sohbi SAHRAOUI
Professeur à l'université du Maine

Dans les milieux continus

Dispersion dans un guide d'onde

Mise en équation de la pression

- Équation de propagation :

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec} \qquad p(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$$

- Solution de cette équation :
  - $Y(y) = A\cos k_y y + B\sin k_y y$
  - $X(x) = Ce^{-jk_x x}$
  - $T(t) = e^{\,j\omega t}$

d'où :

$$p(x,y,t) = [A\cos k_y y + B\sin k_y y]Ce^{-jk_x x}e^{\,jwt} \tag{1}$$

APPLICATION DES CONDITIONS LIMITES À LA PAROI

- Paroi infiniment rigide :

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=L}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} B = 0 \\ k_{yn} = \frac{n\pi}{L} \end{cases}$$

- Finalement :

$$p(x,y,t) = \sum_n A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}y\right) e^{-jk_{xn}x} e^{j\omega t} \tag{2}$$

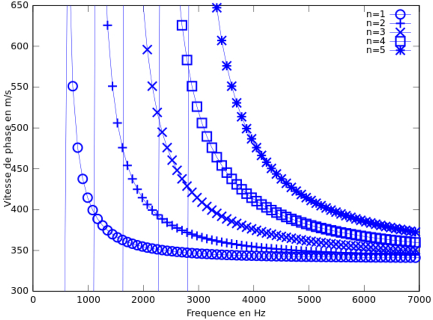
avec :

$$k_{xn} = \sqrt{k^2 - k_{yn}^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \tag{3}$$

VITESSE DE PHASE

Définie par :

$$c_{ph_n} = \frac{\omega}{k_{xn}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kL}\right)^2}} \qquad (4)$$

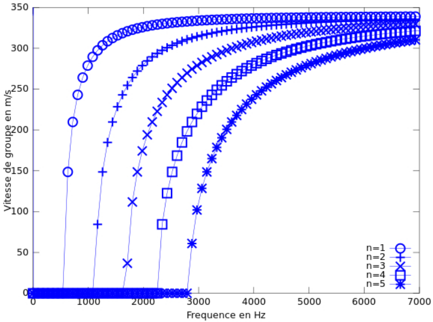


Vitesse de phase en fonction de la fréquence, pour les 5 premiers modes (L = 30 cm, c = 340 m/s).

VITESSE DE GROUPE

Définie par :

$$c_{gn} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_{xn}} = c\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{kL}\right)^2} \tag{5}$$



Vitesse de groupe en fonction de la fréquence, pour les 5 premiers modes (L = 30 cm, c = 340 m/s).

VISUALISATION DE LA VITESSE DE GROUPE

$$\begin{cases} p_1 = A\cos(\omega_1 t - k_1 x) \\ p_2 = A\cos(\omega_2 t - k_2 x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p_1 + p_2 = 2A\cos\left(\Delta\omega t - \Delta k x\right)\cos\left(\omega_0 t - k_0 x\right) \tag{6}$$

avec

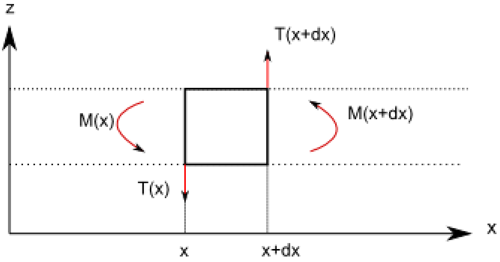
$$\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad , \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} \quad , \quad \omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

Video

DANS LES MILIEUX CONTINUS

Vibration d'une poutre encastrée-libre en flexion

SCHÉMA DE LA POUTRE



Forces s'exerçant sur un élément de longueur dx d'une poutre en flexion

On utilise les approximations suivantes :

- $M(x+dx) = M(x) + \frac{\partial M(x)}{\partial x} dx$
- $T(x+dx) = T(x) + \frac{\partial T(x)}{\partial x} dx$

On applique le PFD à un élément de poutre de longueur dx :

$$\sum F_{ext} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dm \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial T(x)}{\partial x} = \rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}} \tag{7}$$

Le théorème des moments donne :

$$\boxed{-\frac{\partial^2 M(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial T(x)}{\partial x}} \tag{8}$$

Enfin on peut calculer les moments dans la poutre :

$$\begin{cases} dM(x) = zdF \Rightarrow M(x) = \int_S zdF \\ dF = -Ez\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} dS \end{cases} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M(x) = -EI\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}} \tag{10}$$

ÉQUATION DE PROPAGATION DANS LA POUTRE

On obtient finalement :

$$\rho S \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} \tag{11}$$

On pose : $W(x,t) = f(x)g(t)$ pour résoudre cette équation. On obtient les solutions suivantes :

$$\begin{aligned} g(t) &= A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ f(x) &= C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x) + F\cosh(\beta x) + G\sinh(\beta x) \end{aligned}$$

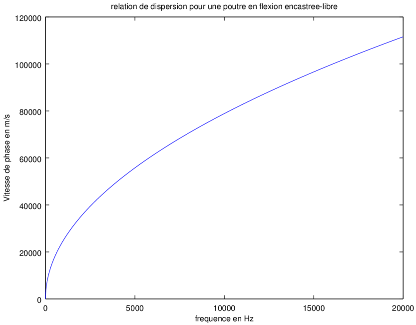
Avec :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}} \tag{12}$$

DIAGRAMME DE DISPERSION

On a :

$$c_{phase} = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{EI}{\rho S}} \qquad (13)$$



Relation de dispersion d'une poutre en acier de 3 m de longueur, 2 cm d'épaisseur et 10 cm de largeur.

APPLICATION DES CONDITIONS LIMITES

Poutre encastrée-libre :

- Encastrement :

$$\begin{cases} W(0,t) = 0 \\ \frac{\partial W(0,t)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

- Libre :

$$\begin{cases} EI\frac{\partial^2 W(L,t)}{\partial^2 x} = 0 \\ EI\frac{\partial^3 W(L,t)}{\partial x^3} = 0 \end{cases}$$

Ce qui permet d'aboutir à :

$$\cos(\beta L)\cosh(\beta L) = -1 \tag{14}$$

On doit donc discrétiser pour résoudre le problème.

Pulsations propres

En posant $\beta_n L = R_n$, on a les solutions :

$$\omega_n = \frac{R_n^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \tag{15}$$

Avec :

Numéro n du mode	Valeur de R_n	Valeur de R_n^2
0	1.8751	3.5160
1	4.6941	22.035
2	7.8547	61.696
≥ 3	$\frac{\pi}{2}(2n-1)$	$\frac{\pi^2}{4}(2n-1)^2$

Valeurs approchées de R_n permettant de calculer les fréquences propres pour une poutre encastrée-libre.

VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE

Schéma du dispositif de mesure :

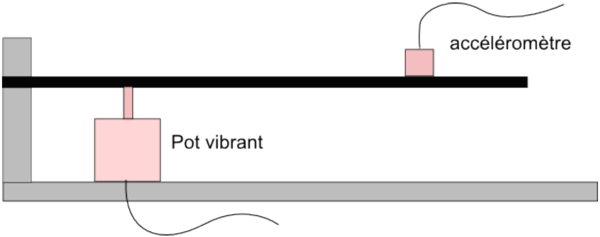


Schéma du dispositif de mesure

Caractéristiques de la poutre en aluminium :

- masse volumique : $\rho = 2700\ kg/m^3$
- longueur : $L = 63.5\ cm$
- module d'Young $E = 70\ GPa$
- largeur $\times$ épaisseur : $30 \times 5\ mm$

RÉSULTATS

Mode	Fréquence mesurée	R_n du mode	Valeur théorique
0	9.7 Hz	1.875	10.20 Hz
1	60.5 Hz	4.694	63.92 Hz
2	170 Hz	7.855	179.00 Hz
3	320 Hz	10.996	350.00 Hz
4	707 Hz	14.137	579.7 Hz

Fréquences propres théoriques et relevées expérimentalement pour une poutre encastrée-libres.

Cela fonctionne bien en basses fréquences mais une erreur se répercute en hautes fréquences.

Dispersion dans un réseau de discontinuités

ÉQUATIONS DES TÉLÉGRAPHISTES

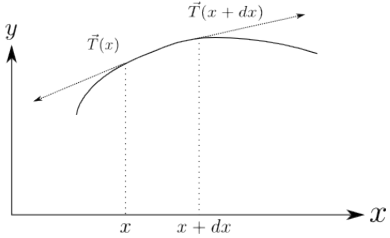


Schéma d'une corde vibrante sans masses ponctuelles

- Géométrie :

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad v_y = \frac{T_y}{T_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{T_0}\frac{\partial T_y}{\partial t}}$$

- PFD :

$$\mu dx \vec{a}(x) = \vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx)$$

$$\begin{cases} T_x(x) &= T_x(x+dx) & \Rightarrow T_x = T_0 \\ \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -T_y(x) + T_y(x+dx) & \Rightarrow \boxed{\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}} \end{cases}$$

MISE SOUS FORME MATRICIELLE

Par séparation des variables, on a les solutions spatiales suivantes :

$$\begin{cases} T(x_1) = Ae^{-\Gamma x_1} + Be^{\Gamma x_1} \\ v(x_1) = -\frac{1}{j\omega\mu}[-\Gamma Ae^{-\Gamma x_1} + \Gamma Be^{\Gamma x_1}] \end{cases} \tag{16}$$

D'où la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} T(x_1) \\ v(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(kL) & j\sqrt{\mu T_0}\sin(kL) \\ \frac{j}{\sqrt{\mu T_0}}\sin(kL) & \cos(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x_2) \\ v(x_2) \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(x_2) \\ v(x_2) \end{pmatrix} \tag{18}$$

Avec $\Gamma = jk = j\omega\sqrt{\frac{\mu}{T_0}}$.

AJOUT DE LA MASSE

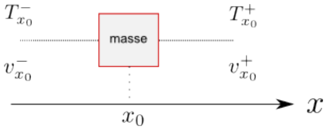


Schéma d'un élément du réseau composé d'une masse et de 2 morceaux de corde

Conditions limites :

$$T_{x_0^-} = T_{x_0^+} + \alpha$$
$$v_{x_0^-} = v_{x_0^+} = v$$

On applique le PFD à la masse :

$$M\frac{\partial v}{\partial t} = T_{x_0^-} - T_{x_0^+}$$
$$\Rightarrow T_{x_0^-} = j\omega M v + T_{x_0^+}$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} T_{x_0^-} \\ v_{x_0^-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & j\omega M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{x_0^+} \\ v_{x_0^+} \end{pmatrix} \tag{19}$$

On obtient finalement la matrice suivante pour une cellule composée d'une masse et de 2 morceaux de corde :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} T^-_{x_0} \\ v^-_{x_0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j\omega M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^+_{x_0} \\ v^+_{x_0} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^+_{x_0} \\ v^+_{x_0} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

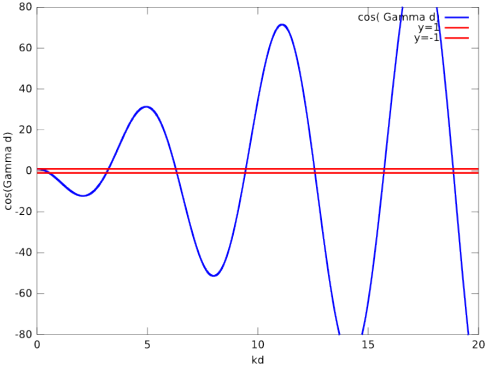
On a notamment :

$$T_{11} = T_{22} = \cos(kd) - \frac{\omega M}{2Zc} \sin(kd) \tag{20}$$

ÉQUATION DE DISPERSION

Pour un réseau infini :

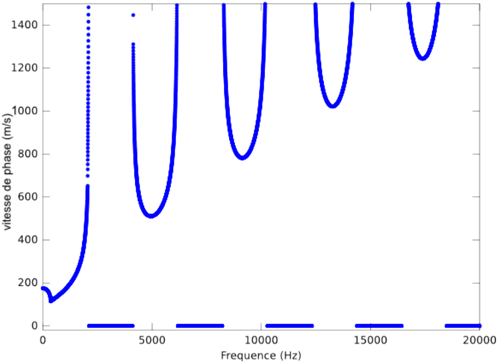
$$\cos(\Gamma_{eq} d) = T_{22} = \cos(kd) - \frac{\omega M}{2Zc} \sin(kd) \quad (21)$$



Représentation de l'équation de dispersion pour une corde lestée

COURBE DE DISPERSION

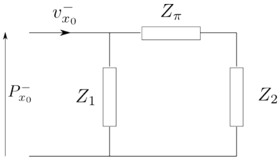
$$c_{phase} = \frac{2\pi f}{\Gamma_{eq}} \tag{22}$$

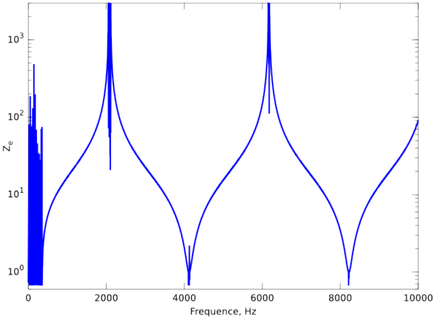


Courbe de dispersion pour une corde lestée par des poids disposés régulièrement.

Impédance d'entrée

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}^N \Rightarrow$$





Impédance d'entrée de la corde lestée pour une impédance de sortie infinie (N = 33).

PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL

Schéma du banc de mesure :

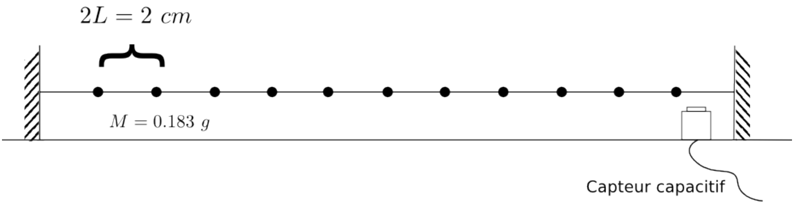
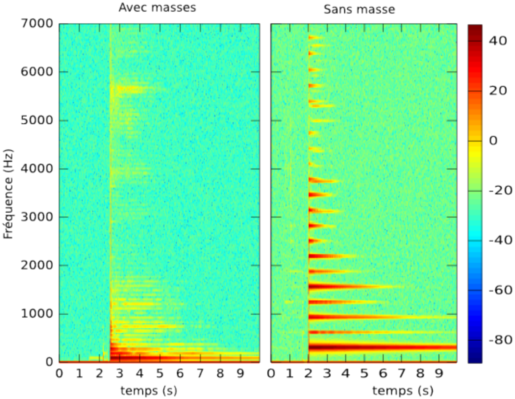


Schéma du montage expérimental.

Caractéristiques de la corde :

- Masse linéique de la corde (mesurée) : $\mu = 0.63\ g/m$
- Longueur de la corde : $l = 68\ cm$

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX



Spectrogramme de l'énergie dans la corde avec et sans masses.

CONCLUSION

Divers manières d'obtenir une onde dispersive ont donc été vues :

- Dans un guide d'onde, la dispersion est liée à la prise en compte de l'impédance des parois.
- Dans une poutre, le moment de torsion fait apparaître une dérivée 4$^{\text{ème}}$ dans l'équation de propagation de l'onde.
- Enfin, pour la corde lestée, la périodicité du réseau engendre la non-propagation pour des bandes de fréquences et influe sur la célérité des ondes dont la fréquence avoisine ces bandes.

BIBLIOGRAPHIES

GUYADER, Jean-Louis. Vibrations des milieux continus. Hermes Science Publications, 2002

DALMONT, Jean-Pierre. Guide des Guides d'ondes acoustiques (version 1.4). 2010

RICHOUX, Olivier. Étude de la propagation des ondes mécaniques dans un réseau unidimensionnel comportant du désordre et/ou des non-linéarités localisées. Th. doct. : Acoustique. Le Mans : université du Maine, 1999

CASTAGNEDE, Bernard. Cours de théorie des vibrations [en ligne]. Consulté le 20/05/14. Disponible à l'adresse : `perso.univ-lemans.fr/~bcasta/DocEnseignement/CoursM1Vibrations(II).pdf`