2018 苏州大学 高等数学一（上）期中试卷　　共 6 页

考试形式：闭卷

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一．　选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 下列极限正确的是(　　)

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1$　D. $\lim\limits_{x\to 1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0$

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，则下列命题正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 都存在

B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 都不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 可能存在，而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 必不存在

D. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 必不存在，而 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$ 可能存在

3. 已知 $x\to 0$ 时，$x^3\ln(1+x^3)$ 是 $\sin^n x$ 的高阶无穷小，而 $\sin^n x$ 又是 $1-\cos x^2$ 的高阶无穷小，则正整数 n 等于(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

4. 下列结论错误的是（　　）

A. 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导 .

B. 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不连续，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导 .

C. 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续 .

D. 如果函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处不可导，则 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可能连续 .

5. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}x[f(\frac{x+1}{x})-f(\frac{x-1}{x})]=4$, 则 $f'(1)=$（　　）

A.　-2　　B.　2　　C.　-4　　D.　4

二．　填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1．已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)$ 的定义域是____________.

2．若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)}{x}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(\frac{1}{2x})=$ ____________.

3．函数 $f(x)=\frac{|x|(x^2-5x+6)}{x^3-3x^2+2x}$ 的第一类间断点共有____________个.

4. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$, 则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处的切线方程是____________.

5. 设 $y=f^2[f^2(x)]$, 其中 $f(x)$ 为可导函数，且 $f(1)=1, f'(1)=2$, 则 $\mathrm{d}y|_{x=1}=$__________.

三． 解下列各题：（每小题 8 分，共 40 分）

1．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{1+x^2}+2\sin^2 x}{\arctan x^2}$.　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right)^{\mathrm{e}^x}$.

2.（1）设函数 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.　（2）$\begin{cases}x=a\sin 2\theta\cos\theta\\ y=a\sin 2\theta\sin\theta\end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$.

3．设 a,b 都是常数，若极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3+2x+a}=b\neq 0$, 试确定常数 a,b.

4. 设 $y=x^2\ln x$, 求 $y^{(n)}$.

5．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+a^2}-a}, & x<0\\ 2, & x=0,(a>0)\\ \dfrac{\ln(1+bx)}{\mathrm{e}^x-1}, & x>0\end{cases}$, 问常数 a,b 为何值时，或 a,b 满足何关系时，

（1）$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点　（2）$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点

（3）$x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点

四．解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 确定，设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}, \dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，试判断：

（1）$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？（2）$f'(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导？

3. 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续，$x_i\in(a,b), c_i>0, i=1,2,\cdots,n$, 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(\xi)=\frac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}.$$

参考答案

一、 选择题

1. B　　2. D　　3. C　　4. A　　5. B

二、 填空题

1. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　2. $\frac{1}{2}$　　3. 2　　4. $y-3x=0$　　5. $16dx$

三、 解答题

1. （1）$\frac{5}{2}$　　（2）e^{-2}

2. （1）$2\sqrt{1-x^2}$　　（2）-1

3. $a=-3$，$b=\frac{1}{5}$

4. $y^{(1)}=2x\ln x+x$，$y^{(2)}=2\ln x+3$，$y^{(n)}=2(-1)^{n-1}(n-3)!x^{-n+2}$

5. $f(0^+)=b$，$f(0^-)=a$　（1）$a=b=2$　（2）$a=b\neq 2$　（3）$b\neq a$

四、 解答题

1. $y'=\frac{e^{y-1}}{1-xe^{y-1}}$，$y'(0)=1$，$y''(0)=2$，$\frac{dz}{dx}=f'(\ln y-\sin x)\cdot(\frac{y'}{y}-\cos x)$

$\frac{dz}{dx}(0)=0$，$\frac{d^2z}{dx^2}(0)=f'(0)\cdot(y''y-(y')^2)=2-1=1$

2. (1) 可导　(2) $f'(x)=\begin{cases}3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{3h^2\sin\frac{1}{h}-h\cos\frac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$,

极限不存在，所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。

3. $m\leq\frac{c_1f(x_1)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+\cdots+c_n}\leq M$，零点存在定理或介值定理。