一． 选择题：

1. 下列极限存在的是（　　）B

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}}$　　　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^4+5x^3+2}(2\cos x-1)$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$　　　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

2. 当 $x\to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　　）

D

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　　　B. $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

3. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$（　　）A

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　　　B. $(-1)^n(n-1)!$

C. $(-1)^{n-1}n!$　　　　D. $(-1)^n n!$

4. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & |x|\neq 1\\ -1, & |x|\neq 1\end{cases}$, 则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的(　　) A

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 连续点

5. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）D

A. 0　　B. $f'(0)$　　C. $-2f'(0)$　　D. $-f'(0)$

二． 填空题：

1． 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-|x|}$ 的连续区间是____________. $x<0$

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{a\cdot\arctan x}, & x>0,\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $ab=$ ____________.

$ab=-\dfrac{1}{2}$

3. 设 $y=f(x^2-y^3)$, 其中 f 可微，则 $\mathrm{d}y=$____. $\dfrac{2xf'}{1+3y^2f'}\mathrm{d}x$

4. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是____________. $y=x+1$

5. 设 $f(t)$ 具有二阶导数， $f(\dfrac{1}{2}x)=x^2$, 则 $(f(f(x)))''=$____________. $768x^2$

三． 解下列各题：

1．求下列函数的极限：

（1） $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$;

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)-\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{x}\right)^x-\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\ln e^4-\ln e^{-1}=5$$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{x+4}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left[\left(1+\dfrac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{\frac{5x}{x-1}}$ ……. （2 分）

$=\ln e^5=5.$ ……………………….. （2 分）

（2） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解：原式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos x}(e^{1-\cos x}-1)}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}e^{\cos x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{x^2}{3}}$ ……. （2 分）

$=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{3}}=\dfrac{3e}{2}.$ ………… （2 分）

2. 设当 $x\to0$ 时， $(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\left(e^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小，求正整数 n.

解： $\because \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2}{x^{n+1}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^{n-3}}=0$， $\therefore n<3,$

…………（4 分）

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{n+1}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}x^{n-1}=0$，$\therefore n>1$,

综上 $n=2$. …………（4 分）

3．设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ (t 为参数),求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t,$ ………….（3 分）

$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\cos t},$ …………….（3 分）

$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$ ………….（2 分）

4. 已知 $y=\frac{x}{x^2-3x+2}$, 求 $y^{(n)}(x)$

解：$y=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-1}$ ………….（2 分）

$y^{(n)}=\left(\frac{2}{x-2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}$ ……….（2 分）

$=(-1)^n n![\frac{2}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}].$ ………….（4 分）

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x^2\mathrm{e}^{t(x-2)}+ax-1}{\mathrm{e}^{t(x-2)}+1}$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，求常数 a.

解：$f(x)=\begin{cases}x^2, x>2\\ \frac{3+2a}{2}, x=2\\ ax-1, x<2\end{cases}$ ………….（5 分）

$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1,$ ………….（1 分）

$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}x^2=4,$ ………….（1 分）

由 $f(x)$ 在 $x=2$ 连续知 $x=\frac{5}{2}$. ………….（1 分）

四．解下列各题：

1. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3x+2}{x-2}=2$, 证明 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，并求 $f'(2)$.

解：由 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处连续和已知极限知

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)-3x+2\right)=f(2)-4=0\Rightarrow f(2)=4,$$ …………（4 分）

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3x+2+3(x-2)}{x-2}$$

…………（4 分）

$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3x+2}{x-2}+3=2+3=5,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=2$ 处可导， $f'(2)=5$. …………（2 分）

2. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,

（1）利用极限存在准则证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在；

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证（1）： $\because 0<x_1<3, \therefore x_1, 3-x_1$ 均为正数，

$$\therefore 0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\frac{1}{2}[x_1+(3-x_1)]=\frac{3}{2},$$

设 $0<x_k\le\dfrac{3}{2}(k>1)$,

则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\le\dfrac{1}{2}[x_k+(3-x_k)]=\dfrac{3}{2}$,

由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$, 均有 $0<x_n\le\dfrac{3}{2}$,

因而数列 $\{x_n\}$ 有界； …………（3 分）

当 $n>1$, $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$

$$=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geq 0,$$

因而数列$\{x_n\}$单调增加.

由单调有界准则数列$\{x_n\}$极限存在. …………（3 分）

（2）设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\therefore a=\sqrt{a(3-a)}\ \therefore a=\frac{3}{2}(a=0$ 舍去$)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$ …………（4 分）

3. 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)=f(b),$证明一定存在长度为$\frac{b-a}{2}$的区间$[\alpha,\beta]\subset[a,b],$ 使 $f(\alpha)=f(\beta),$ 即在区间$[a,\frac{a+b}{2}]$上一定存在α，使得$f(\alpha)=f(\alpha+\frac{b-a}{2}).$

证明：（1）令$F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2}),$则$F(x)$在$[a,\frac{a+b}{2}]$上连续，……（2 分）

$F(a)=f(a)-f(a+\frac{b-a}{2})=f(a)-f(\frac{a+b}{2}),$ ……（2 分）

$F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(b),$ ……（2 分）

又$f(a)=f(b),$

故$F(a)\cdot F(\frac{a+b}{2})=-[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]^2\leq 0,$ ……（2 分）

由介值定理，必存在$\alpha\in[a,\frac{a+b}{2}],$使$F(\alpha)=0,$即

$f(\alpha)=f(\alpha+\frac{b-a}{2}).$ ……（2 分）