Oppgave 1

La følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være gitt ved

$$a_1 = 3 \qquad \text{og} \qquad a_{n+1} = \sqrt{3a_n - 2} \tag{1}$$

Vis at følgen konvergerer og finn grenseverdien

$$\lim_{n\to\infty} a_n \tag{2}$$

Jeg begynner med å sjekke om det virker som følgen konvergerer ved å sjekke de tjue første verdiene til a_n.

```
>>> a = [3]
>>> for i in range(1, 20):
...     a.append((3*a[-1] - 2)**(1/2))
...
>>> a
[3, 2.6457513110645907, 2.4366480938358275, 2.304331634445763, 2.2165276680739376, 2.156289174536155, 2.1139696127448153
, 2.08372475107305, 2.0618375913779317, 2.0458525787880695, 2.034098752854494, 2.0254126143982325, 2.018969500313142, 2.
014176879258479, 2.010604545348348, 2.0079376574099714, 2.005944409057717, 2.0044533487145944, 2.003337227264492, 2.0025
013562525933]
>>>
```

Figur 1: Beregning av de tjue første verdiene til a_n

Det ser ut til at følgen er strengt avtagende og konvergerer mot 2.

Vi gjør så en mer matematisk beregning:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{3}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3a_n - 2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3L - 2} = \sqrt{3L - 2} \tag{4}$$

$$L^2 = 3L - 2 \Rightarrow L^2 - 3L + 2 = 0 \Rightarrow (L-2)(L-1) = 0 \Rightarrow L = 2 \vee L = 1 \tag{5}$$

Vi ser at $L = 2$ stemmer overens med gjetningsverdien vår. Altså følgen konvergerer og grenseverdien er:

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}} \tag{6}$$

Oppgave 2

La $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en følge. Vis at

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{7}$$

Begge grenseverdiene konvergerer mot 0. Skriver vi ned definisjonen på konvergens (for enhver $\varepsilon > 0$ finnes det et heltall N slik at alle $n \geq N$ oppfyller ulikheten $|a_n - L| < \varepsilon$, her er $L = 0$), så ser vi at disse to uttrykkene er ekvivalente:

$$||a_n|| < \varepsilon \Longleftrightarrow |a_n| < \varepsilon \tag{8}$$

Denne påstanden holder siden absoluttverdifunksjonen ikke kan påvirke et tall mer enn én gang. Altså $f(x) = |x| \Rightarrow f(f(...f(x))...)) = |x|$

Oppgave 3

Bruk definisjonen av grenseverdi til å vise at

$$\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 - x^2 - 20x + 4}{x^2 - 4} = 9 \tag{9}$$

Vi forsøker å sette inn $x = 2$ og observerer at vi får $\frac{0}{0}$

$$\frac{5x^3 - x^2 - 20x + 4}{x^2 - 4} = \frac{5 \cdot 8 - 4 - 40 + 4}{4 - 4} = \frac{0}{0} \tag{10}$$

Dette betyr at $x = 2$ er nullpunkter for både teller- og nevnerpolynomene. Vi kan bruke dette faktumet og polynomdivisjon til å faktorisere polynomene. Hvis $x = a$ er et nullpunkt på et polynom, er $x - a$ en faktor i polynomet, og dette medfølger at en polynomdivisjon med $x - a$ som divisor gir en kvotient uten rest. Nevneren kan alternativt faktoriseres gjennom den gjenkjennelige konjugatsetningen: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Vi faktoriserer telleren:

$$\begin{aligned} 5x^3 - x^2 - 20x + 4 : x - 2 = \underline{5x^2 + 9x - 2} \\ -(5x^3 - 10x^2) \\ = 9x^2 - 20x \\ -(9x^2 - 18x) \\ = -2x + 4 \\ -(-2x + 4) \\ = 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Ved å bruke abc-formelen ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$) på kvotienten ($a = 5 \land b = 9 \land c = -2$), finner vi at $x = -2 \lor x = \frac{1}{5}$. Siden $a \neq 1$, må vi legge til a som faktor i det faktoriserte uttrykket også.

Altså er:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 2} \frac{5x^3 - x^2 - 20x + 4}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)(x + 2)}\left(x - \frac{1}{5}\right) \cdot 5}{\cancel{(x - 2)(x + 2)}} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{5x - 1}{1} = 10 - 1 = \underline{\underline{9}} \end{aligned} \tag{12}$$

Vi har nå vist at grenseverdien er lik 9 ■

Oppgave 4

Vi kan tenke oss følgende scenarioer hvis vi går fra venstre til høyre:

- $f(x) = k$, altså konstantfunksjon. Da vil $f(a) = f(d) = f(b)$ for alle $d \in (a, b)$. I tillegg vil åpenbart $f''(x) = 0$
- Hvis $f(x)$ stiger, så må $f(x)$ synke på et eller annet tidspunkt for at $f(a) = f(d)$. I punktene etter kan grafen både synke så stige, eller stige så synke. Den derivertes fortegn kan altså være:
  - - + + -
  - - + - +
  - + - - +
  - + - + -

Dersom vi finner minst to fortegnsskifter på den derivertes graf, betyr det at den deriverte har ekstremalpunkt(er) i intervallet $x \in (a, b)$. Vi ser at alle tilfellene tilfredsstiller dette kravet. Siden den deriverte har ekstremalpunkter vet vi at det må finnes en $c \in (a, b)$ slik at $f''(c) = 0$

Et eksempel på en slik graf er $f(x) = (x + 1)(x - 1)x^2$ for $a = -1 \wedge b = 1$. Dette polynomet er konstruert med faktorer slik at $x \in \{-1, 0, 1\}$ gir lik funksjonsverdi. Vi ser at $a < 0 < b \Rightarrow -1 < 0 < 1 \Rightarrow d = 0$ og at $f''(c) = 0 \Rightarrow 12c^2 - 2 = 0 \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$. Av dette kan vi si at c kan ha verdien $\frac{\sqrt{6}}{6}$ for eksempel.