离散数学

集合论
4.2 关系的运算

4.2 关系的运算

- 基本运算定义
  - 定义域、值域、域
  - 逆、合成、限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算
  - 定义
  - 求法
  - 性质

关系的集合运算

- 由于关系就是集合，所以集合的∩、∪、—、⊕和~运算对关系也适用。
- 例如，A是学生集合，R是A上的同乡关系，

  S是A上的同姓关系，则

  R∪S：或同乡或同姓关系

  R∩S：既同乡又同姓关系

  R-S：同乡而不同姓关系

  R⊕S：同乡而不同姓，或同姓而不同乡关系

  ~R：不是同乡关系， 这里~R=(A×A)-R

关系的基本运算定义

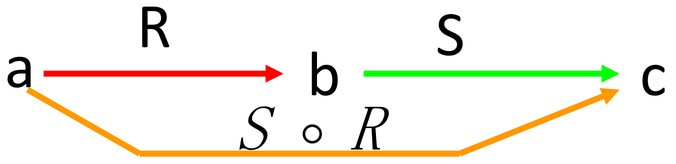
- 定义域、值域 和 域
  - $\mathrm{dom}R = \{ x \mid \exists y\,(<x，y>\in R) \}$
  - $\mathrm{ran}R = \{ y \mid \exists x\,(<x，y>\in R) \}$
  - $\mathrm{fld}R = \mathrm{dom}R \cup \mathrm{ran}R$
- 例1 $R=\{<1，2>，<1，3>，<2，4>，<4，3>\}$， 则
  - $\mathrm{dom}R=\{1，2，4\}$
  - $\mathrm{ran}R=\{2，3，4\}$
  - $\mathrm{fld}R=\{1，2，3，4\}$

关系的合成

- 二元关系除了可进行集合并、交、补等运算外，还可以进行一些新的运算，先介绍由两个关系生成一种新的关系，即关系的**合成**运算。
- 例如，有3个人a，b，c，A={a，b，c}，

  R是A上兄妹关系，

  S是A上母子关系，

  <a，b>∈R∧<b，c>∈S

  即a是b的哥哥， b是a的妹妹;

  b是c的母亲，c是b的儿子。

  则a和c间就是**舅舅和外甥**的关系，记作 S∘R， 称它是R和S的复合关系。

关系的合成

- **定义:**设R是从Y到Z的关系， S是从X到Y的关系，则R和S的合成关系记作R∘S 。定义为：

  $$\boldsymbol{R \circ S} = |<x，z> \mid \exists\, y\, (<x，y> \in S \wedge <y，z> \in R)\, \}$$

- 显然， R∘S 是从x到z的关系。

合成关系的计算方法

- A={1， 2， 3} B={1， 2， 3， 4} C={1， 2， 3， 4， 5} $S\subseteq A\times B$ $R\subseteq B\times C$

(1)枚举法

S={<1， 2>， <2， 3>， <2， 4>， <3， 1>}

R={<1， 2>， <2， 1>， <2， 3>， <3， 4>， <4， 2>， <4， 5>} 则

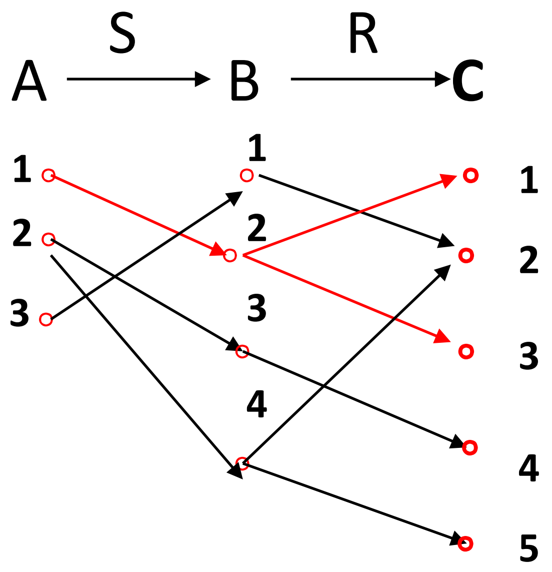
$R\circ S$={<1， 1>， <1， 3>， <2， 4>， <2， 2>， <2， 5>， <3， 2>}

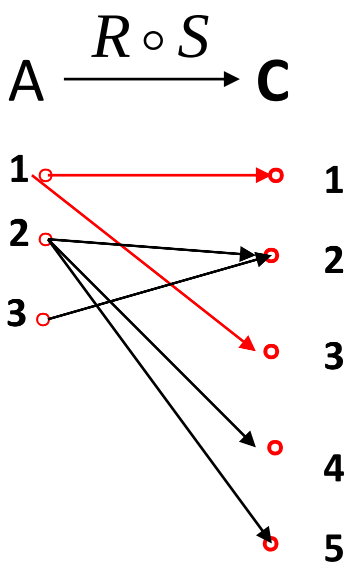
合成关系的计算方法

A={1，2，3} B={1，2，3，4} C={1，2，3，4，5} $S \subseteq A \times B$ $R \subseteq B \times C$

S={<1，2>，<2，3>，<2，4>，<3，1>} R={<1，2>，<2，1>，<2，3>，<3，4>，<4，2>，<4，5>}

(2)有向图法





$R \circ S$={<1，1>，<1，3>，<2，4>，<2，2>，<2，5>，<3，2>}

合成关系的计算方法

(3)关系矩阵法

令$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ $B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$ $S\subseteq A\times B$ $R\subseteq B\times C$

$$M_S=\begin{bmatrix} \langle a_1,b_1\rangle\langle a_1,b_2\rangle\ldots\langle a_l,b_n\rangle \\ \langle a_2,b_1\rangle\langle a_2,b_2\rangle\ldots\langle a_2,b_n\rangle \\ \vdots \quad (a_{ij}) \quad \vdots \\ \langle a_m,b_1\rangle\langle a_m,b_2\rangle\ldots\langle a_m,b_n\rangle \end{bmatrix} \quad M_R=\begin{bmatrix} \langle b_1,c_1\rangle\langle b_1,c_2\rangle\ldots\langle b_l,c_t\rangle \\ \langle b_2,c_1\rangle\langle b_2,c_2\rangle\ldots\langle b_2,c_t\rangle \\ \vdots \quad (b_{ij}) \quad \vdots \\ \langle b_n,c_1\rangle\langle b_n,c_2\rangle\ldots\langle b_n,c_t\rangle \end{bmatrix} \quad M_{R\circ S}=\begin{bmatrix} \langle a_1,c_1\rangle\ldots\langle a_l,c_t\rangle \\ \langle a_2,c_1\rangle\ldots\langle a_2,c_t\rangle \\ \vdots \quad (c_{ij}) \quad \vdots \\ \langle a_m,c_1\rangle\ldots\langle a_m,c_t\rangle \end{bmatrix}$$

$c_{11}=(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21})\vee\ldots\vee(a_{1n}\wedge b_{n1})$

$=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{1k}\wedge b_{k1})$ (其中∧是逻辑乘，∨是逻辑加)

$c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee\ldots\vee(a_{in}\wedge b_{nj})$

$=\bigvee_{k=1}^{n}(a_{ik}\wedge b_{kj})$ $(1\le i\le m,\ 1\le j\le t)$

合成关系的计算方法

A={1，2，3} B={1，2，3，4} C={1，2，3，4，5} $S\subseteq A\times B$ $R\subseteq B\times C$

S={<1，2>，<2，3>，<2，4>，<3，1>} R={<1，2>，<2，1>，<2，3>，<3，4>，<4，2>，<4，5>}

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1 \end{pmatrix}_{4\times 5} \circ \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \\ 1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0 \end{pmatrix}_{3\times 5}$$

R○S={<1，1>，<1，3>，<2，2>，<2，4>，<2，5>，<3，2>}

合成关系的计算方法

(4)谓词公式法

设I是实数集合，R和S都是I上的关系，定义如下：

$S=\{<x，y> \mid y=x^2+3x\}$

$R=\{<x，y> \mid y=2x+3\}$

$$x \xrightarrow{S} x^2+3x \xrightarrow{R} 2(x^2+3x)+3 = 2x^2+6x+3$$

所以 $R \circ S=\{<x，y> \mid y=2x^2+6x+3\}$

关系基本运算的性质（续）

- 关系复合运算不满足交换律，但是满足结合律
- **定理** 设F，G，H是任意的关系，则 $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$

证 任取$<x,y>$,

$$<x,y>\in(F\circ G)\circ H \Leftrightarrow \exists t(<x,t>\in H \wedge <t,y>\in F\circ G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s(<x,t>\in H \wedge (<t,s>\in G \wedge <s,y>\in F))$$

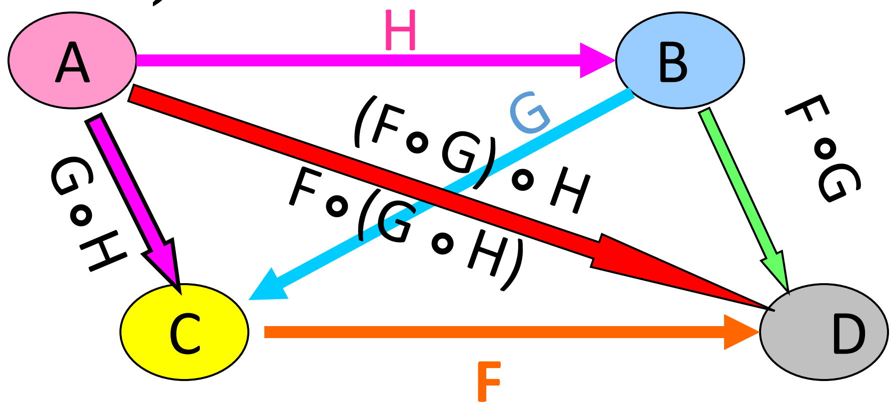
$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,t>\in H \wedge <t,s>\in G \wedge <s,y>\in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(\exists t\,(<x,t>\in H \wedge <t,s>\in G) \wedge <s,y>\in F)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x,s>\in G\circ H \wedge <s,y>\in F)$$

$$\Leftrightarrow <x,y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$



$R \subseteq B \times C$　$S \subseteq A \times B$　$T \subseteq A \times B$

(1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

(2) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$

证明(1) 任取 $\langle a, c\rangle \in R \circ (S \cup T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge \langle b, c\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in S \cup T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge \langle b, c\rangle \in R \wedge (\langle a, b\rangle \in S \vee \langle a, b\rangle \in T))$

$\Leftrightarrow \exists b((b \in B \wedge \langle b, c\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in S) \vee (b \in B \wedge \langle b, c\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in T))$

$\Leftrightarrow \exists b(b \in B \wedge \langle b, c\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in S) \vee \exists b(b \in B \wedge \langle b, c\rangle \in R \wedge \langle a, b\rangle \in T)$

$\Leftrightarrow \langle a, c\rangle \in R \circ S \vee \langle a, c\rangle \in R \circ T$

$\Leftrightarrow \langle a, c\rangle \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$

所以 $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$

证明(2) 任取$<a, c>\in R\circ(S\cap T)$

$\Leftrightarrow \exists b(b\in B\wedge <b, c>\in R\wedge <a, b>\in S\cap T)$

$\Leftrightarrow\exists b(b\in B\wedge <b, c>\in R\wedge(<a, b>\in S\wedge <a, b>\in T))$

$\Leftrightarrow\exists b((b\in B\wedge <b, c>\in R\wedge <a, b>\in S) \wedge(b\in B\wedge <b, c>\in R\wedge <a, b>\in T))$

$\Rightarrow\exists b(b\in B\wedge <b, c>\in R\wedge <a, b>\in S) \wedge \exists b(b\in B\wedge <b, c>\in R\wedge <a, b>\in T)$

$\Leftrightarrow <a, c>\in R\circ S \wedge <a, c>\in R\circ T$

$\Leftrightarrow <a, c>\in (R\circ S)\cap(R\circ T)$

所以 $R\circ (S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

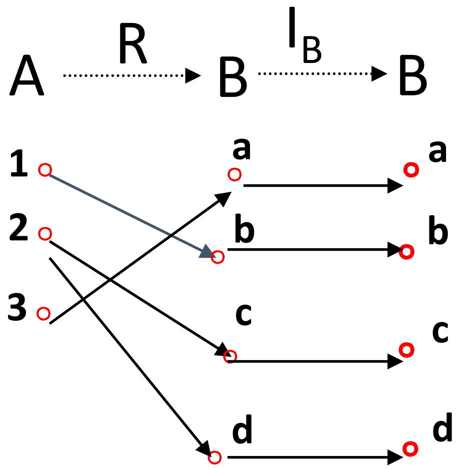
$\exists x(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

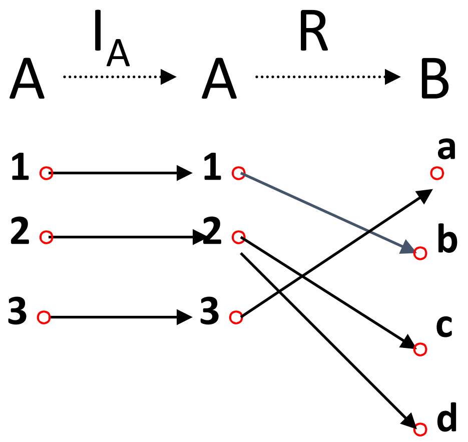
- R是从A到B的关系，则

  $R\circ I_A=I_B\circ R=R$

此式的证明很容易，略。下面列举一例来验证。

令A={1，2，3}， B={a，b，c，d}





从这两个图看出它们的合成都等于R。

逆关系

- 逆关系(反关系)也是我们经常遇到的概念，例如≤与≥就是互为逆关系。
- 定义：R是从A到B的关系，如果将R中的所有序偶的两个元素的位置互换，得到一个从B到A的关系，称之为R的逆关系，记作R^C，或 R^{-1}。

$R^{-1}=\{<y，x>|<x，y>\in R\}$　　　　$<y，x>\in R^{-1}\Leftrightarrow<x，y>\in R$

计算方法

1. R={<1，2>，<2，3>，<3，4>，<4，5>}

   R^{-1} ={<2，1>，<3，2>，<4，3>，<5，4>}

2. R^{-1}的有向图：是将R的有向图的所有边的方向颠倒一下即可。

3. R^{-1}的矩阵 M $=(M_R)^T$ 即为R矩阵的转置。如

$$M_R=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad M_{R^c}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3}$$

性质

令R、S都是从X到Y的关系，则

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
3. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
4. $(R - S)^{-1} = R^{-1} - S^{-1}$
5. $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
6. $(\sim R)^{-1} = \sim R^{-1}$

2. $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$

证明：任取$<y，x>\in(R\cup S)^{-1}$，则

$<y，x>\in(R\cup S)^{-1} \Leftrightarrow <x，y>\in R\cup S$

$\Leftrightarrow <x，y>\in R\vee<x，y>\in S$

$\Leftrightarrow <y，x>\in R^{-1}\vee<y，x>\in S^{-1}$

$\Leftrightarrow<y，x>\in R^{-1}\cup S^{-1}$

所以 $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$，1、3、4类似可证。

5. $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$

证明：

充分性，已知$R^{-1} \subseteq S^{-1}$，

则任取$<x, y> \in R \Leftrightarrow <y, x> \in R^{-1} \Rightarrow <y, x> \in S^{-1} \Leftrightarrow <x, y> \in S$

$\therefore R \subseteq S$

必要性，已知$R \subseteq S$，

则任取$<y, x> \in R^{-1} \Leftrightarrow <x, y> \in R \Rightarrow <x, y> \in S \Leftrightarrow <y, x> \in S^{-1}$

$\therefore R^{-1} \subseteq S^{-1}$

6. $(\sim R)^{-1} = \sim R^{-1}$

证明:任取$<y, x> \in (\sim R)^{-1} \Leftrightarrow <x, y> \in \sim R \Leftrightarrow <x, y> \notin R \Leftrightarrow <y, x> \notin R^{-1}$
$\Leftrightarrow <y, x> \in \sim R^{-1}$

$\therefore (\sim R)^{-1} = \sim R^{-1}$

关系基本运算的性质（续）

7. 设F， G是任意的关系， 则$(F\circ G)^{-1}= G^{-1}\circ F^{-1}$

证明:任取$<x, y>$,

$$<x, y>\in(F\circ G)^{-1}$$
$$\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<y, t>\in G \wedge (t, x)\in F)$$
$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F^{-1} \wedge (t, y)\in G^{-1})$$
$$\Leftrightarrow <x, y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$$

所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

关系基本运算的性质

- 定理 设F是任意的关系， 则

  (1) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$

  (2) $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 任取x，

$x\in \mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in F^{-1})$

$\Leftrightarrow \exists y(<y, x>\in F) \Leftrightarrow x\in \mathrm{ran}F$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}= \mathrm{ran}F$.

同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1} = \mathrm{dom}F$.

限制与像

定义 F 在A上的限制

$$F\upharpoonright A = \{<x, y> \mid xFy \wedge x\in A\}$$

A 在F下的像

$$F[A] = \mathrm{ran}(F\upharpoonright A)$$

实例 $R=\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 4>, <2, 2>\}$

$R\upharpoonright\{1\}=\{<1, 2>, <1, 4>\}$

$R[\{1\}]=\{2, 4\}$

$R\upharpoonright\varnothing=\varnothing$

$R[\{1, 2\}]=\{2, 3, 4\}$

注意：$F\upharpoonright A\subseteq F$， $F[A]\subseteq\mathrm{ran}F$

A上关系的幂运算

设R为A上的关系， n为自然数， 则 R 的 **n次幂**定义为：

(1) $R^0=\{<x, x> \mid x\in A\}=I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n\circ R$

注意：

对于A上的任何关系R_1和R_2都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

对于A上的任何关系 R 都有

$$R^1 = R$$

幂的求法

- 对于集合表示的关系*R*，计算 R^n 就是*n*个*R*左复合 .
- 矩阵表示就是*n*个矩阵相乘， 其中相加采用逻辑加.
- 例3 设*A*={*a*，*b*，*c*，*d*}， *R*={<*a*，*b*>，<*b*，*a*>，<*b*，*c*>，<*c*，*d*>}， 求*R*的各次幂， 分别用矩阵和关系图表示.
- 解 *R*与R^2的关系矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

幂的求法（续）

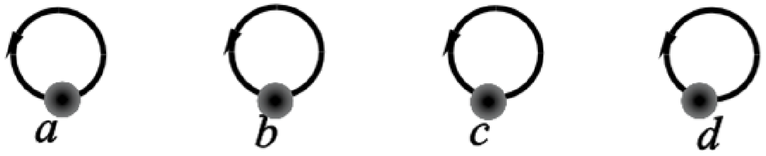
- 同理，$R^0=I_A$， R^3和R^4的矩阵分别是：

$$M^0=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M^4=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- 因此$M^4=M^2$， 即$R^4=R^2$. 因此可以得到
  $R^2=R^4=R^6=\ldots$， $R^3=R^5=R^7=\ldots$

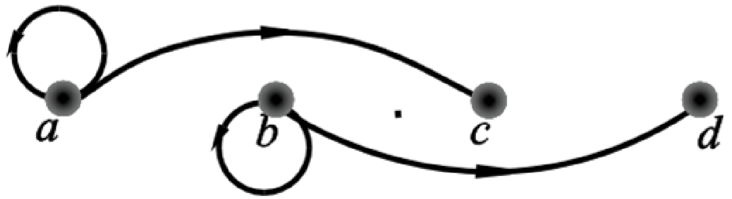
幂的求法（续）

- R^0， R^1， R^2， R^3， …的关系图如下图所示

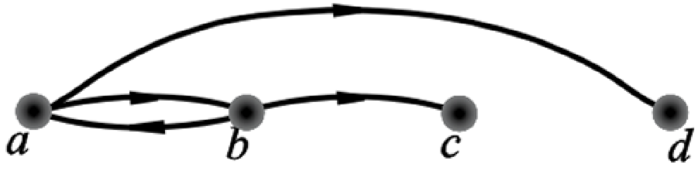


R^0

R^1



$R^2=R^4=\ldots$

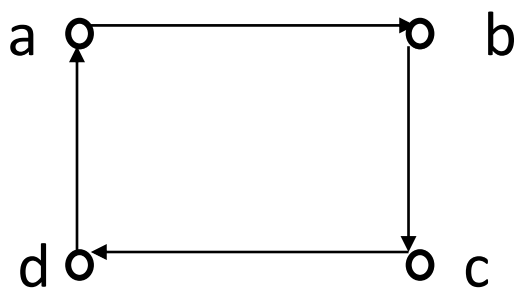


$R^3=R^5=\ldots$

幂运算与路径

- 假如R是A上关系，如图所示，可见$\langle a，c\rangle \in R^2$，表明在R图上有从a到c有两条边的路径: $a \longrightarrow b \longrightarrow c$;$\langle a，d\rangle \in R^3$，表明在R图上有从a到d有三条边的路径:$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow d$。...如果$\langle x，y\rangle \in R^k$，表明在R图上有从x到y有k条边(长为k)的路径。(x，y∈A)

R:



幂运算的性质

- 定理　设A为n元集，R是A上的关系，则存在自然数 s 和 t，使得　$R^s = R^t$.

证　R为A上的关系，由于$|A|=n$，A上的不同关系只有 2^{n^2}个.

当列出 R 的各次幂

$$R^0, \quad R^1, \quad R^2, \quad \ldots, \quad , \quad \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s=R^t$.

幂运算的性质（续）

- 定理 设 R 是 A 上的关系， m， $n\in N$， 则

 (1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$

 (2) $(R^m)^n=R^{mn}$

- 证 用归纳法

(1) 对于任意给定的$m\in N$， 施归纳于n

若$n=0$， 则有

$$R^m\circ R^0=R^m\circ I_A=R^m=R^{m+0}$$

假设$R^m\circ R^n=R^{m+n}$， 则有

$$R^m\circ R^{n+1}=R^m\circ(R^n\circ R)=(R^m\circ R^n)\circ R=R^{m+n+1}\ ,$$

所以对一切m， $n\in N$有$R^m\circ R^n=R^{m+n}$.

幂运算的性质（续）

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathrm{N}$， 施归纳于n.

若n=0， 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m \times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$， 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 m，$n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

作业

- P113/4.3
- P115/4.13

问题？