

离散数学

代数结构

第9章 代数系统简介



埃瓦里斯特·伽罗瓦（法）
1811年10月25日－1832年5月31日



尼尔斯·亨利克·阿贝尔（挪威）
1802年8月5日－1829年4月6日

第9章 代数系统简介

- 9.1 二元运算及其性质
- 9.2 代数系统
- 9.3 几个典型的代数系统

9.1 二元运算及其性质

- 二元运算及一元运算的定义
- 二元运算的性质
 - 交换律、结合律、幂等律、消去律
 - 分配律、吸收律
- 二元运算的特异元素
 - 单位元
 - 零元
 - 可逆元素及其逆元

二元运算的定义及其实例

- **定义** 设 S 为集合, 函数 $f: S \times S \rightarrow S$ 称为 S 上的二元运算, 简称为**二元运算**. 也称 S 对 f **封闭**.

例1

- (1) \mathbf{N} 上的二元运算: 加法、乘法.
- (2) \mathbf{Z} 上的二元运算: 加法、减法、乘法.
- (3) 非零实数集 \mathbf{R}^* 上的二元运算: 乘法、除法.
- (4) 设 $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_i \circ a_j = a_i$, \circ 为 S 上二元运算.

二元运算的实例（续）

(5) 设 $M_n(\mathbf{R})$ 表示所有 n 阶 ($n \geq 2$) 实矩阵的集合, 即

$$M_n(\mathbf{R}) = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \mid a_{ij} \in \mathbf{R}, i, j = 1, 2, \dots, n \right\}$$

矩阵加法和乘法都是 $M_n(\mathbf{R})$ 上的二元运算.

(6) 幂集 $P(S)$ 上的二元运算: $\cup, \cap, -, \oplus$.

(7) S^S 为 S 上的所有函数的集合: 合成运算 \circ .

n 元运算

- **定义** 设 S 为集合, n 为正整数, 函数 f 称为 S 上的 n 元运算, 简称为 **n 元运算**.

$$f : \underbrace{S \times S \times \dots \times S}_{n\text{个}} \rightarrow S$$

例2 (1) \mathbb{Z} , \mathbb{Q} 和 \mathbb{R} 上的一元运算: 求相反数

(2) 非零有理数集 \mathbb{Q}^* 和实数集 \mathbb{R}^* 的一元运算: 倒数

(3) 复数集合 \mathbb{C} 上的一元运算: 求共轭复数

(4) 幂集 $P(S)$ 上, 全集为 S : 求绝对补运算 \sim

(5) A 为 S 上所有双射函数的集合, $A \subseteq S^S$: 求反函数

(6) 在 $M_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) 上, 求转置矩阵

运算的表示

- **算符**: $\circ, *, \cdot, \oplus, \otimes$ 等符号

- 表示 n 元运算

$$\circ(a_1, a_2, \dots, a_n) = b.$$

- 对二元运算 \circ , 如果 x 与 y 运算得到 z , 记做

$$x \circ y = z;$$

- 对一元运算 \circ , x 的运算结果记作 $\circ x$

- 注意: 在同一问题中不同的运算使用不同的算符

二元与一元运算的表示

- 公式表示

例3 设 \mathbf{R} 为实数集合，如下定义 \mathbf{R} 上的二元运算 $*$:

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, x * y = x.$$

那么 $3 * 4 = 3$

$$0.5 * (-3) = 0.5$$

运算表的形式

- **运算表**（表示有穷集上的一元和二元运算）

\circ	a_1	a_2	...	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$...	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$...	$a_2 \circ a_n$
\cdot		...		
\cdot		...		
\cdot		...		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$...	$a_n \circ a_n$

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
\cdot	\cdot
\cdot	\cdot
\cdot	\cdot
a_n	$\circ a_n$

运算表的实例

例4 $A = P(\{a, b\})$, \oplus , \sim 分别为对称差和绝对补运算

($\{a, b\}$ 为全集)

\oplus 的运算表

\oplus	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
\emptyset	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	\emptyset	$\{a, b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}$	\emptyset	$\{a\}$
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	\emptyset

\sim 的运算表

X	$\sim X$
\emptyset	$\{a, b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	\emptyset

运算表的实例（续）

例5 $Z_5 = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$, \oplus, \otimes 分别为 加法与乘法

\oplus 的运算表

\oplus	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

\otimes 的运算表

\otimes	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

二元运算的性质

定义 设 \circ 为 S 上的二元运算,

(1) 如果对于任意的 $x, y \in S$ 有

$$x \circ y = y \circ x,$$

则称运算在 S 上满足**交换律**.

(2) 如果对于任意的 $x, y, z \in S$ 有

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z),$$

则称运算在 S 上满足**结合律**.

(3) 如果对于任意的 $x \in S$ 有

$$x \circ x = x,$$

则称运算在 S 上满足**幂等律**.

实例分析

- $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 分别为整数、有理数、实数集； $M_n(\mathbf{R})$ 为 n 阶实矩阵集合， $n \geq 2$ ； $P(B)$ 为幂集； A^A 为 A 上 A ， $|A| \geq 2$.

集合	运算	交换律	结合律	幂等律
$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	普通加法+			
	普通乘法×			
$M_n(\mathbf{R})$	矩阵加法+			
	矩阵乘法×			
$P(B)$	并 \cup			
	交 \cap			
	相对补-			
	对称差 \oplus			
A^A	函数复合 \circ			

二元运算的性质（续）

定义 设 \circ 和 $*$ 为 S 上两个不同的二元运算,

(1) 如果 $\forall x, y, z \in S$ 有

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z)$$

$$z \circ (x * y) = (z \circ x) * (z \circ y)$$

则称 \circ 运算对 $*$ 运算满足**分配律**.

(2) 如果 \circ 和 $*$ 都可交换, 并且 $\forall x, y \in S$ 有

$$x \circ (x * y) = x$$

$$x * (x \circ y) = x$$

则称 \circ 和 $*$ 运算满足**吸收律**.

实例分析

- $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 分别为整数、有理数、实数集； $M_n(\mathbf{R})$ 为 n 阶实矩阵集合， $n \geq 2$ ； $P(B)$ 为幂集.

集合	运算	分配律	吸收律
$\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$	普通加法 $+$ 与乘法 \times	\times 对 $+$ 可分配	无
		$+$ 对 \times 不分配	
$M_n(\mathbf{R})$	矩阵加法 $+$ 与乘法 \times	\times 对 $+$ 可分配	无
		$+$ 对 \times 不分配	
$P(B)$	并 \cup 与交 \cap	\cup 对 \cap 可分配	有
		\cap 对 \cup 可分配	
	交 \cap 与对称差 \oplus	\cap 对 \oplus 可分配	无
		\oplus 对 \cap 不分配	

二元运算的特异元素

- 单位元

- **定义** 设 \circ 为 S 上的二元运算, 如果存在 e_l (或 e_r) $\in S$, 使得对任意 $x \in S$ 都有 $e_l \circ x = x$ (或 $x \circ e_r = x$), 则称 e_l (或 e_r)是 S 中关于 \circ 运算的 **左 (或右) 单位元**.
- 若 $e \in S$ 关于 \circ 运算既是左单位元又是右单位元, 则称 e 为 S 上关于 \circ 运算的 **单位元**.
- 单位元也叫做 **幺元**.

二元运算的特异元素（续）

- 零元

- 设 \circ 为 S 上的二元运算, 如果存在 θ_l (或 θ_r) $\in S$, 使得对任意 $x \in S$ 都有 $\theta_l \circ x = \theta_l$ (或 $x \circ \theta_r = \theta_r$), 则称 θ_l (或 θ_r) 是 S 中关于 \circ 运算的 左 (或右) 零元.
- 若 $\theta \in S$ 关于 \circ 运算既是左零元又是右零元, 则称 θ 为 S 上关于运算 \circ 的 零元.

二元运算的特异元素（续）

- 可逆元素及其逆元

- 令 e 为 S 中关于运算 \circ 的单位元. 对于 $x \in S$, 如果存在 y_l (或 y_r) $\in S$ 使得 $y_l \circ x = e$ (或 $x \circ y_r = e$), 则称 y_l (或 y_r) 是 x 的 **左逆元** (或 **右逆元**).
- 关于 \circ 运算, 若 $y \in S$ 既是 x 的左逆元又是 x 的右逆元, 则称 y 为 x 的 **逆元**.
- 如果 x 的逆元存在, 就称 x 是 **可逆的**.

实例分析

集合	运算	单位元	零元	逆元
$\mathbf{Z},$ $\mathbf{Q},$ \mathbf{R}	普通加法+			
	普通乘法×			
$M_n(\mathbf{R})$	矩阵加法+			
	矩阵乘法×			
$P(B)$	并 \cup			
	交 \cap			
	对称差 \oplus			

惟一性定理

- **定理** 设 \circ 为 S 上的二元运算, e_l 和 e_r 分别为 S 中关于运算的左和右单位元, 则 $e_l = e_r = e$ 为 S 上关于 \circ 运算的惟一的单位元.
- 证
$$e_l = e_l \circ e_r, \quad e_l \circ e_r = e_r$$

所以 $e_l = e_r$, 将这个单位元记作 e . 假设 e' 也是 S 中的单位元, 则有 $e' = e \circ e' = e$.

惟一性得证.
- 类似地可以证明关于零元的惟一性定理.

惟一性定理（续）

- **定理** 设 \circ 为 S 上可结合的二元运算, e 为该运算的单位元, 对于 $x \in S$ 如果存在左逆元 y_l 和右逆元 y_r , 则有 $y_l = y_r = y$, 且 y 是 x 的惟一的逆元.
- 证 由 $y_l \circ x = e$ 和 $x \circ y_r = e$ 得
$$y_l = y_l \circ e = y_l \circ (x \circ y_r) = (y_l \circ x) \circ y_r = e \circ y_r = y_r$$
令 $y_l = y_r = y$, 则 y 是 x 的逆元.
假若 $y' \in S$ 也是 x 的逆元, 则
$$y' = y' \circ e = y' \circ (x \circ y) = (y' \circ x) \circ y = e \circ y = y$$
所以 y 是 x 惟一的逆元.
- 说明: 对于可结合的二元运算, 可逆元素 x 只有惟一的逆元, 记作 x^{-1} .

消去律

定义 设 \circ 为 V 上二元运算, 如果 $\forall x, y, z \in V$,

若 $x \circ y = x \circ z$, 且 x 不是零元, 则 $y = z$

若 $y \circ x = z \circ x$, 且 x 不是零元, 则 $y = z$

那么称 \circ 运算满足 **消去律**.

- 实例: $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ 关于普通加法和乘法满足消去律, $M_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵加法满足消去律, 但是关于矩阵乘法不满足消去律.
- \mathbf{Z}_n 关于模 n 加法满足消去律, 当 n 为素数时关于模 n 乘法满足消去律. 当 n 为合数时关于模 n 乘法不满足消去律.

例题分析

例6 设 \circ 运算为 \mathbf{Q} 上的二元运算,

$$\forall x, y \in \mathbf{Q}, \quad x \circ y = x + y + 2xy,$$

(1) \circ 运算是否满足交换和结合律? 说明理由.

(2) 求 \circ 运算的单位元、零元和所有可逆元.

解 (1) \circ 运算可交换, 可结合. 任取 $x, y \in \mathbf{Q}$,

$$x \circ y = x + y + 2xy = y + x + 2yx = y \circ x,$$

任取 $x, y, z \in \mathbf{Q}$,

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x + y + 2xy) + z + 2(x + y + 2xy)z \\ &= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= x + (y + z + 2yz) + 2x(y + z + 2yz) \\ &= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz \end{aligned}$$

例题分析（续）

(2) 设 \circ 运算的单位元和零元分别为 e 和 θ ,
则对于任意 x 有 $x \circ e = x$ 成立, 即 $x + e + 2xe = x \Rightarrow e = 0$
由于 \circ 运算可交换, 所以 0 是单位元.

对于任意 x 有 $x \circ \theta = \theta$ 成立, 即

$$x + \theta + 2x\theta = \theta \Rightarrow x + 2x\theta = 0 \Rightarrow \theta = -1/2$$

给定 x , 设 x 的逆元为 y , 则有 $x \circ y = 0$ 成立, 即

$$x + y + 2xy = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+2x} \quad (x \neq -1/2)$$

因此当 $x \neq -1/2$ 时, $y = -\frac{x}{1+2x}$ 是 x 的逆元.

例题分析（续）

例7 (1) 说明那些运算是交换的、可结合的、幂等的.

(2) 求出运算的单位元、零元、所有可逆元素的逆元.

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

\circ	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

\bullet	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	c
c	c	c	c

解 (1) $*$ 满足交换、结合律; \circ 满足结合、幂等律;

\bullet 满足交换、结合律.

(2) $*$ 的单位元为 b , 没零元, $a^{-1} = c, b^{-1} = b, c^{-1} = a$

\circ 的单位元和零元都不存在, 没有可逆元素.

\bullet 的单位元为 a , 零元为 c , $a^{-1}=a$. b, c 不可逆.

例题分析（续）

- 例8 设 $A = \{ a, b, c \}$, 构造 A 上的二元运算 $*$ 使得 $a*b=c, c*b=b$, 且 $*$ 运算是幂等的、可交换的, 给出关于 $*$ 运算的一个运算表, 说明它是否可结合, 为什么?
- 根据幂等律和已知条件 $a*b=c, c*b=b$ 得到运算表
- 根据交换律得到新的运算表
- 方框 \square 可以填入 a, b, c 中任一选定的符号, 完成运算表
- 不结合, 因为 $(a*b)*b = c*b = b, a*(b*b) = a*b = c$

$*$	a	b	c
a	a	c	\square
b	c	b	b
c	\square	b	c

由运算表判别算律的一般方法

- 交换律：运算表关于主对角线对称
- 幂等律：主对角线元素排列与表头顺序一致
- 消去律：所在的行与列中没有重复元素
- 单位元：所在的行与列的元素排列都与表头一致
- 零元：元素的行与列都由该元素自身构成
- A 的可逆元： a 所在的行中某列 (比如第 j 列) 元素为 e ，且第 j 行 i 列的元素也是 e ，那么 a 与第 j 个元素互逆
- 结合律：除了单位元、零元之外，要对所有3个元素的组合验证表示结合律的等式是否成立

作业

- P226
- 9.14
- 9.16
- 9.19

问题？

