

离散数学

集合论

3.2 集合的基本运算

3.2 集合的基本运算

- 集合基本运算的定义

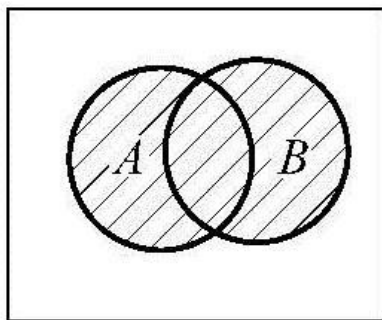
$$\cup \cap - \sim \oplus$$

- 文氏图 (John Venn)
- 例题
- 集合运算的算律
- 集合包含或恒等式的证明

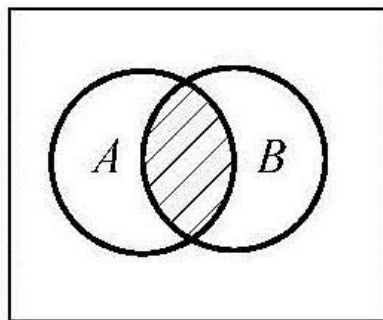
集合基本运算的定义

- 并 $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$
- 交 $A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$
- 相对补 $A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$
- 对称差 $A \oplus B = \{ x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \}$
 $= (A - B) \cup (B - A)$
 $= (A \cup B) - (A \cap B)$
- 绝对补 $\sim A = E - A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \} = \{ x \mid x \notin A \}$

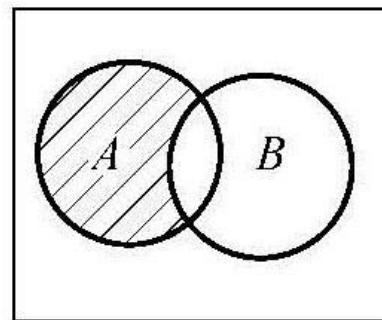
文氏图表示



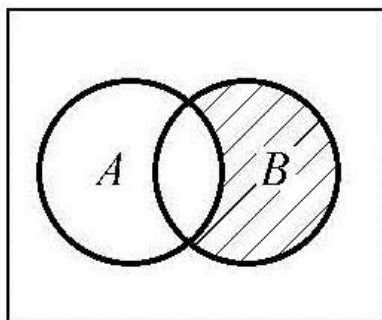
$$A \cup B$$



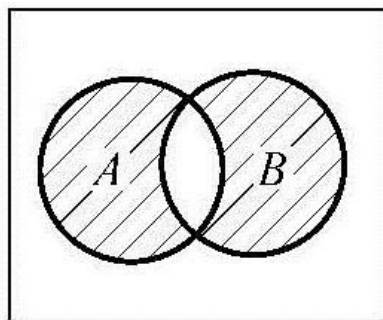
$$A \cap B$$



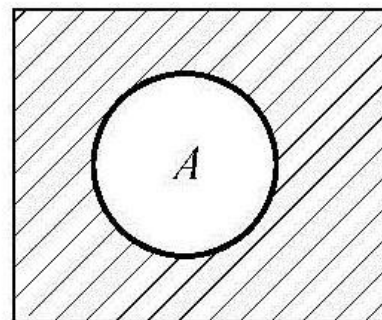
$$A - B$$



$$B - A$$



$$A \oplus B$$



$$\sim A$$

关于运算的说明

- 运算顺序： \sim 和幂集优先，其他由括号确定
- 并和交运算可以推广到有穷个集合上，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\}$$

- 某些重要结果

$$\emptyset \subseteq A - B \subseteq A$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \emptyset \text{ (后面证明)}$$

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A - B = A$$

例1

F:一年级大学生的集合

R: 计算机系学生的集合

T: 选修离散数学的学生的集合

L: 爱好文学学生的集合

S: 二年级大学生的集合

M: 数学系学生的集合

P: 爱好体育运动学生的集合

所有计算机系二年级学生都选修离散数学

数学系一年级的学生都没有选修离散数学

数学系学生或爱好文学或爱好体育运动

只有一、二年级的学生才爱好体育运动

除去数学和计算机系二年级学生外都不选修离散数学

$$T \subseteq (M \cup R) \cap S$$

$$R \cap S \subseteq T$$

$$(M \cap F) \cap T = \emptyset$$

$$M \subseteq L \cup P$$

$$P \subseteq F \cup S$$

$$S - (M \cup R) \subseteq P$$

例2

- 分别对条件(1)到(5), 确定 X 集合与下述那些集合相等。
- $S_1 = \{ 1, 2, \dots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$, $S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$,
- $S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \emptyset$, 则 $X = S_2$

(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \emptyset$, 则 $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$, $X \not\subseteq S_3$, 则 $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \emptyset$, 则 $X = S_3, S_5$

(5) 若 $X \subseteq S_3$, $X \not\subseteq S_1$, 则 X 与 S_1, \dots, S_5 都不等

集合运算的算律

	\cup	\cap	\oplus
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

	\cup 与 \cap	\cap 与 \oplus
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

集合运算的算律

	$-$	\sim
<i>D.M</i> 律	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$	$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$ $\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$
双重否定		$\sim\sim A=A$

	\emptyset	E
补元律	$A\cap\sim A=\emptyset$	$A\cup\sim A=E$
零律	$A\cap\emptyset=\emptyset$	$A\cup E=E$
同一律	$A\cup\emptyset=A$	$A\cap E=A$
否定	$\sim\emptyset=E$	$\sim E=\emptyset$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
 - 命题演算法
 - 包含传递法
 - 等价条件法
 - 反证法
 - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
 - 命题演算法
 - 等式代入法
 - 反证法
 - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证 $X \subseteq Y$

- 任取 x ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

例3 证明 $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

任取 x

$$x \in P(A) \Rightarrow x \subseteq A \Rightarrow x \subseteq B \Rightarrow x \in P(B)$$

任取 x

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \\ &\Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B \end{aligned}$$

包含传递法证 $X \subseteq Y$

- 找到集合 T 满足 $X \subseteq T$ 且 $T \subseteq Y$, 从而有 $X \subseteq Y$

- 例4 $A - B \subseteq A \cup B$

证 $A - B \subseteq A$

$$A \subseteq A \cup B$$

所以 $A - B \subseteq A \cup B$

利用包含的等价条件证 $X \subseteq Y$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \phi$$

例5 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 $A \subseteq C \Rightarrow A \cup C = C$

$$B \subseteq C \Rightarrow B \cup C = C$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup C = C$$

$$(A \cup B) \cup C = C \Leftrightarrow A \cup B \subseteq C$$

命题得证

反证法证 $X \subseteq Y$

欲证 $X \subseteq Y$, 假设命题不成立, 必存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$. 然后推出矛盾.

例6 证明 $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

证 假设 $A \cup B \subseteq C$ 不成立,

则 $\exists x (x \in A \cup B \wedge x \notin C)$

因此 $x \in A$ 或 $x \in B$, 且 $x \notin C$

若 $x \in A$, 则与 $A \subseteq C$ 矛盾;

若 $x \in B$, 则与 $B \subseteq C$ 矛盾.

利用已知包含式并交运算

由已知包含式通过运算产生新的包含式

$$X \subseteq Y \Rightarrow X \cap Z \subseteq Y \cap Z, X \cup Z \subseteq Y \cup Z$$

例7 证明 $A \cap C \subseteq B \cap C \wedge A - C \subseteq B - C \Rightarrow A \subseteq B$

证 $A \cap C \subseteq B \cap C, A - C \subseteq B - C$

上式两边求并，得

$$(A \cap C) \cup (A - C) \subseteq (B \cap C) \cup (B - C)$$

$$\Rightarrow (A \cap C) \cup (A \cap \sim C) \subseteq (B \cap C) \cup (B \cap \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap (C \cup \sim C) \subseteq B \cap (C \cup \sim C)$$

$$\Rightarrow A \cap E \subseteq B \cap E$$

$$\Rightarrow A \subseteq B$$

集合包含或相等的证明方法

- 证明 $X \subseteq Y$
 - 命题演算法
 - 包含传递法
 - 等价条件法
 - 反证法
 - 并交运算法
- 证明 $X=Y$
 - 命题演算法
 - 等式代入法
 - 反证法
 - 运算法

以上的 X, Y 代表集合公式

命题演算法证明 $X=Y$

任取 x ,

$$x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$$

$$x \in Y \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in X$$

或者

$$x \in X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in Y$$

例8 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ (吸收律)

证 任取 x ,

$$x \in A \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow x \in A$$

等式替换证明 $X=Y$

不断进行代入化简，最终得到两边相等

例9 证明 $A \cup (A \cap B) = A$ （吸收律）

证（假设交换律、分配律、同一律、零律成立）

$$A \cup (A \cap B)$$

$$= (A \cap E) \cup (A \cap B) \quad \text{同一律}$$

$$= A \cap (E \cup B) \quad \text{分配律}$$

$$= A \cap (B \cup E) \quad \text{交换律}$$

$$= A \cap E \quad \text{零律}$$

$$= A \quad \text{同一律}$$

反证法证明 $X=Y$

假设 $X=Y$ 不成立, 则存在 x 使得 $x \in X$ 且 $x \notin Y$, 或者存在 x 使得 $x \in Y$ 且 $x \notin X$, 然后推出矛盾.

例10 证明以下等价条件

$$\begin{array}{cccc} A \subseteq B & \Leftrightarrow & A \cup B = B & \Leftrightarrow & A \cap B = A & \Leftrightarrow & A - B = \emptyset \\ (1) & & (2) & & (3) & & (4) \end{array}$$

证明顺序:

$$(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (3), (3) \Rightarrow (4), (4) \Rightarrow (1)$$

$(1) \Rightarrow (2)$

显然 $B \subseteq A \cup B$, 下面证明 $A \cup B \subseteq B$.

任取 x ,

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in B \Leftrightarrow x \in B$$

因此有 $A \cup B \subseteq B$. 综合上述 (2) 得证.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

(1)
(2)
(3)
(4)

(2) \Rightarrow (3)

$$A = A \cap (A \cup B) \Rightarrow A = A \cap B$$

(将 $A \cup B$ 用 B 代入)

(3) \Rightarrow (4)

假设 $A - B \neq \emptyset$, 即 $\exists x \in A - B$, 那么 $x \in A$ 且 $x \notin B$. 而 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cap B$.

从而与 $A \cap B = A$ 矛盾.

(4) \Rightarrow (1)

假设 $A \subseteq B$ 不成立, 那么

$$\exists x (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A - B \Rightarrow A - B \neq \emptyset$$

与条件 (4) 矛盾.

集合运算法证明 $X=Y$

由已知等式通过运算产生新的等式

$$X=Y \Rightarrow X \cap Z = Y \cap Z, X \cup Z = Y \cup Z, X - Z = Y - Z$$

例11 证明 $A \cap C = B \cap C \wedge A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$

证 由 $A \cap C = B \cap C$ 和 $A \cup C = B \cup C$ 得到

$$(A \cup C) - (A \cap C) = (B \cup C) - (B \cap C)$$

从而有 $A \oplus C = B \oplus C$

因此

$$\begin{aligned} A \oplus C = B \oplus C &\Rightarrow (A \oplus C) \oplus C = (B \oplus C) \oplus C \\ &\Rightarrow A \oplus (C \oplus C) = B \oplus (C \oplus C) \Rightarrow A \oplus \emptyset = B \oplus \emptyset \Rightarrow A = B \end{aligned}$$

作业

- P74
- 3.13 (3) (5)
- 3.14 (4)
- 3.17 (2) (4)

问题？

