离散数学

命题逻辑
1.4范式

范式

- 析取范式与合取范式
- 主析取范式与主合取范式

范式

- 范式就是命题公式形式的规范形式。这里约定在范式中只含有联结词¬、∨和∧。
- 文字:命题变项及其否定的总称
- 简单析取式:有限个文字构成的析取式，如 $p, \neg q, p\lor\neg q, p\lor q\lor r, \ldots$
- 简单合取式:有限个文字构成的合取式，如 $p, \neg q, p\land\neg q, p\land q\land r, \ldots$
- 析取范式:由有限个简单合取式组成的析取式$A_1\lor A_2\lor\ldots\lor A_r$，其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单合取式
- 合取范式:由有限个简单析取式组成的合取式$A_1\land A_2\land\ldots\land A_r$ ，其中$A_1,A_2,\ldots,A_r$是简单析取式

析取范式与合取范式

- 公式A的析取范式: 与A等值的析取范式
- 公式A的合取范式: 与A等值的合取范式
- 说明：单个文字既是简单析取式，又是简单合取式。
- $p\wedge\neg q\wedge r, \neg p\vee q\vee\neg r$，是析取范式，还是合取范式？

命题公式的范式

- 定理 任何命题公式都存在着与之等值的析取范式与合取范式.
- 求公式A的范式的步骤：

  (1) 消去A中的$\rightarrow, \leftrightarrow$（若存在）

  (2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

  (3) 使用分配律

  $\wedge$对$\vee$分配（析取范式）

  $\vee$对$\wedge$分配（合取范式）
- 公式的范式存在，但不惟一

求公式的范式举例

例 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $A=(p\to\neg q)\vee\neg r$

解 $(p\to\neg q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee\neg r$ （消去→）

$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee\neg r$ （结合律）

- 这既是A的析取范式（由3个简单合取式组成的析取式），又是A的合取范式（由一个简单析取式组成的合取式）

求公式的范式举例(续)

(2) $B=(p\to\neg q)\to r$

解 $(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\to r$ （消去第一个→）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee\neg q)\vee r$ （消去第二个→）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$ （否定号内移——德·摩根律）

这一步已为析取范式（两个简单合取式构成）

继续： $(p\wedge q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$ （∨对∧分配律）

这一步得到合取范式（由两个简单析取式构成）

主析取范式与主合取范式

- 一个公式的析取范式与合取范式的形式是**不唯一**的，因此不能作为同一真值函数所对应的命题公式的**标准形式**。
- 定义形式唯一的**主析取范式与主合取范式**。
- 定义 **在含有n个命题变项的简单合取式(简单析取式)中，若每个命题变项均以文字的形式出现且仅出现一次，称这样的简单合取式(简单析取式)为极小项(极大项）**。
- 例如，有两个变元的极小项：

  $P\wedge Q$、$P\wedge\neg Q$、 $\neg P\wedge Q$、 $\neg P\wedge\neg Q$

极小项与极大项

- n个命题变项产生2^n个极小项和2^n个极大项
- 2^n个极小项（极大项）均互不等值
- 在极小项和极大项中，文字均按下标或字母顺序排列
- 用m_i表示第i个极小项，其中i是该极小项成真赋值的十进制表示。用M_i表示第i个极大项，其中i是该极大项成假赋值的十进制表示，$m_i(M_i)$称为极小项(极大项)的名称.
- m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

极小项与极大项(续)

- 由p, q两个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

m_i与M_i的关系： $\neg m_i \Leftrightarrow M_i$， $\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

- 由p, q, r三个命题变项形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

主析取范式与主合取范式

- 主析取范式：由极小项构成的析取范式
- 主合取范式：由极大项构成的合取范式
- 例如，n=3, 命题变项为p, q, r时，

  $(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$ 是主析取范式

  $(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\wedge M_5$ 是主合取范式
- A的主析取范式：与A等值的主析取范式
- A的主合取范式：与A等值的主合取范式

主析取范式与主合取范式(续)

- **定理　任何命题公式都存在着与之等值的主析取范式和主合取范式,并且是唯一的。**
- 主析取范式的求法
- **方法1：列真值表**

(1)列出给定公式的真值表。

(2)找出真值表中每个“T”对应的极小项。 (如何根据一组指派写对应的为“T”的项：如果变元P被指派为T，P在极小项中以P形式出现；如变元P被指派为F，P在极小项中以¬P形式出现(因要保证该极小项为T))

(3)用“∨”联结上述极小项，即可。

例 求 $P\rightarrow Q$和$P\leftrightarrow Q$的主析取范式

P	Q	$P\rightarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	F	F
T	T	T	T

$$P\rightarrow Q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow m_0 \vee m_3$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$$

思考题:永真式的主析取范式是什么样？

课堂练习

1.已知A(P,Q,R)的真值表如图:
求它的主析取和主合取范式。

P	Q	R	A(P,Q,R)
F	F	F	T
F	F	T	F
F	T	F	F
F	T	T	T
T	F	F	T
T	F	T	F
T	T	F	T
T	T	T	T

2.已知A(P,Q,R)的主析取范式中含有下面极小项m_1, m_3, m_5, m_7求它的主合取范式.

练习答案

1.A(P,Q,R)的主析取范式:

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_6 \vee m_7$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

A(P,Q,R)的主合取范式:

$A(P,Q,R) \Leftrightarrow M_1 \wedge M_2 \wedge M_5$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$

2. $A(P,Q,R) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_6$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

方法2：用公式的等值变换

⑴先写出给定公式的析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ 。

⑵为使每个A_i都变成小项，对缺少变元的A_i补全变元，比如缺变元R，就用∧联结永真式($R \vee \neg R$)形式补R。

⑶用分配律等公式加以整理。

例 $P \rightarrow Q$

$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

例 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主析取范式与主合取范式.

(1) 求主析取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\vee r$,　　（析取范式）　①

$(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\wedge(\neg r\vee r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_6\vee m_7$,　　②

r

$\Leftrightarrow(\neg p\vee p)\wedge(\neg q\vee q)\wedge r$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_7$ ③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r\Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$（主析取范式）

(2) 求A的主合取范式

$(p\to\neg q)\to r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(q\vee r)$,　　（合取范式）　①

$p\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg q)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_{2,}$　　②

$q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee q\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_4$　　③

②, ③代入①并排序，得

$(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_4$　　（主合取范式）

主范式的用途——与真值表相同

(1) 求公式的成真赋值和成假赋值

例如 $(p\to\neg q)\to r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$，其成真赋值为**001, 011, 101, 110, 111**，其余的赋值 **000, 010, 100**为成假赋值。

类似地，由主合取范式也可立即求出成假赋值和成真赋值。

(2) 判断公式的类型

- 设A含n个命题变项，则

A为重言式$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式含$2^n$个极小项$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式为**1.**

A为矛盾式$\Leftrightarrow$ A的主析取范式为**0** $\Leftrightarrow$ A的主合取范式含2^n个极大项

A为非重言式的可满足式$\Leftrightarrow$$A$的主析取范式中至少含一个且不含全部极小项$\Leftrightarrow$$A$的主合取范式中至少含一个且不含全部极大项

主范式的用途(续)

(3)判断两个公式是否等值

例 用主析取范式判断下述两个公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\wedge q)\to r$

(2) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$

解 $p\to(q\to r) = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\wedge q)\to r = m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

$(p\to q)\to r = m_1\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_7$

故(1)中的两公式等值,而(2)的不等值.

主范式的用途(续)

例　某公司要从赵、钱、孙、李、周五名新毕业的大学生中选派一些人出国学习。选派必须满足以下条件：

(1)若赵去，钱也去；

(2)李、周两人中至少有一人去；

(3)钱、孙两人中有一人去且仅去一人；

(4)孙、李两人同去或同不去；

(5)若周去，则赵、钱也去.

试用主析取范式法分析该公司如何选派他们出国?

例 (续)

解此类问题的步骤为:

① 将简单命题符号化

② 写出各复合命题

③ 写出由②中复合命题组成的合取式

④ 求③中所得公式的主析取范式

例 (续)

解 ① 设p：派赵去，q：派钱去，r：派孙去，

s：派李去，u：派周去.

② (1) $(p\to q)$

(2) $(s\vee u)$

(3) $((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$

(4) $((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

(5) $(u\to(p\wedge q))$

③ (1) ~ (5)构成的合取式为

$$A=(p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$$

$A=(p\to q)\wedge(s\vee u)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))\wedge(u\to(p\wedge q))$

$A\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))\wedge(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))\wedge$
$((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$ （交换律）

$B_1=(\neg p\vee q)\wedge((q\wedge\neg r)\vee(\neg q\wedge r))$
$\Leftrightarrow((\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(q\wedge\neg r))$ （分配律）

$B_2=(s\vee u)\wedge(\neg u\vee(p\wedge q))$
$\Leftrightarrow((s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge u))$ （分配律）

$B_1\wedge B_2\Leftrightarrow(\neg p\wedge q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)$
$\vee(q\wedge\neg r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge s)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge u)$

再令 $B_3=((r\wedge s)\vee(\neg r\wedge\neg s))$

得 $A\Leftrightarrow B_1\wedge B_2\wedge B_3$
$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge r\wedge s\wedge\neg u)\vee(p\wedge q\wedge\neg r\wedge\neg s\wedge u)$

注意：在以上演算中多次用矛盾律

要求：自己演算一遍

④ $A \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \wedge \neg u) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge u)$

结论：由④可知，A的成真赋值为00110与11001，因而派孙、李去（赵、钱、周不去）或派赵、钱、周去（孙、李不去）.

例

- **安排课表，教语言课的教师希望将课程安排在第一或第三节；**

  教数学课的教师希望将课程安排在第二或第三节；

  教原理课的教师希望将课程安排在第一或第二节。

  如何安排课表，使得三位教师都满意。

- 解

令L_1、L_2、L_3分别表示语言课排在第一、第二、第三节。

M_1、M_2、M_3分别表示数学课排在第一、第二、第三节。

P_1、P_2、P_3分别表示原理课排在第一、第二、第三节。

三位教师都满意的条件是：$(L_1 \vee L_3) \wedge (M_2 \vee M_3) \wedge (P_1 \vee P_2)$ 为真。

将上式写成析取范式(用分配律)得：

$$((L_1 \wedge M_2) \vee (L_1 \wedge M_3) \vee (L_3 \wedge M_2) \vee (L_3 \wedge M_3)) \wedge (P_1 \vee P_2)$$

$$\Leftrightarrow (L_1 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee (L_3 \wedge M_2 \wedge P_1) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_1) \vee$$

$$(L_1 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_1 \wedge M_3 \wedge P_2) \vee (L_3 \wedge M_2 \wedge P_2) \vee (L_3 \wedge M_3 \wedge P_2)$$

可以取$(L_3 \wedge M_2 \wedge P_1)$、$(L_1 \wedge M_3 \wedge P_2)$为T，得到两种排法。

作业

- P33
- 1.12(3)
- 1.13(1)

问题？