离散数学

集合论

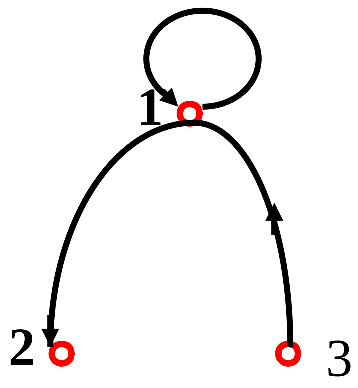
4.4 关系的闭包

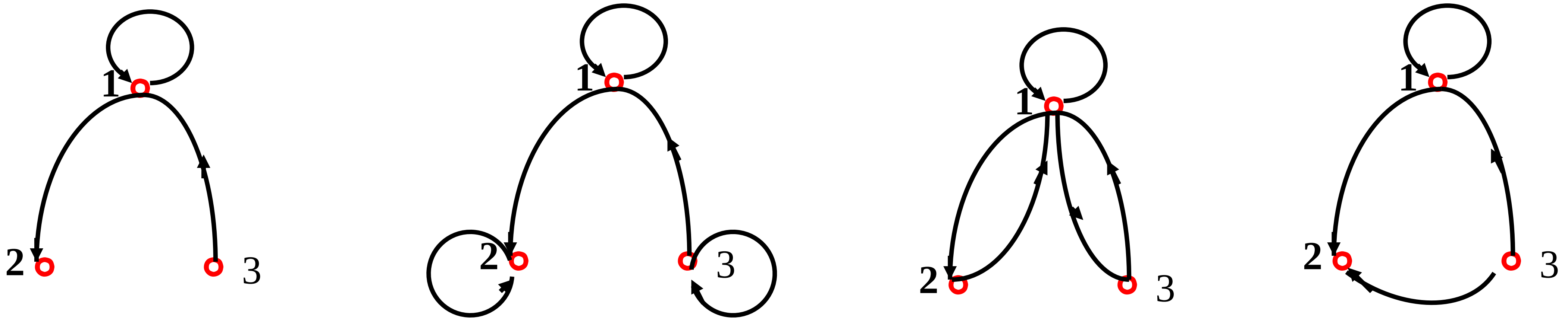
4.4 关系的闭包

- 闭包定义
- 闭包的构造方法
  - 集合表示
  - 矩阵表示
  - 图表示

关系的闭包运算

- 关系的自反闭包、对称闭包和传递闭包。
- 给定 A中关系R，如图所示，分别求A上另一个关系R’，使得它是包含R的“最小的”(有序对尽量少)分别具有自反(对称、传递)性的关系。这个R’就分别是R的自反(对称、传递)闭包。





- 这三个关系图分别是R的自反、对称、传递闭包。

闭包定义

- 定义 设R是非空集合A上的关系, R的自反（对称或传递）闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:
  （1）R'是自反的（对称的或传递的）
  （2）$R \subseteq R'$
  （3）对A上任何包含R的自反（对称或传递）关系 R'' 有 $R' \subseteq R''$.
- 一般将 R 的自反闭包记作 $r(R)$, 对称闭包记作 $s(R)$, 传递闭包记作 $t(R)$. (reflexive、 symmetric、transitive)
- 实际上r(R)、(s(R) 、t(R)) 就是包含R的“最小”的自反(对称、传递)关系。

闭包的构造方法

- **定理1** 设R为A上的关系, 则有

  (1) $r(R) = R \cup R^0$

  (2) $s(R) = R \cup R^{-1}$

  (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

- 说明：
  - 对于有穷集合A ($|A|=n$) 上的关系, (3)中的并最多不超过 R^n.
  - 若 R是自反的，则 $r(R)=R$; 若R是对称的，则$s(R)=R$；若R是传递的，则 $t(R)=R$.

闭包的构造方法（续）

- 设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系矩阵分别为M, M_r, M_s 和 M_t, 则

$$M_r = M + E$$

$$M_s = M + M'$$

$$M_t = M + M^2 + M^3 + \ldots$$

- E 是和 M 同阶的单位矩阵, M'是 M 的转置矩阵.
- 注意在上述等式中矩阵的元素相加时使用逻辑加.

闭包的构造方法（续）

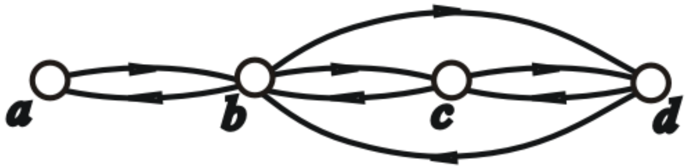
- 设关系R, $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图分别记为G, G_r, G_s, G_t , 则G_r, G_s, G_t 的顶点集与G 的顶点集相等. 除了G 的边以外, 以下述方法添加新边：
- 考察G的每个顶点, 如果没有环就加上一个环，最终得到G_r .
- 考察G的每条边, 如果有一条 x_i 到 x_j 的单向边, $i \neq j$, 则在G中加一条 x_j 到 x_i 的反方向边，最终得到G_s.
- 考察G的每个顶点 x_i, 找从 x_i 出发的每一条路径，如果从 x_i 到路径中任何结点 x_j 没有边，就加上这条边，当检查完所有的顶点后就得到图G_t .

实例

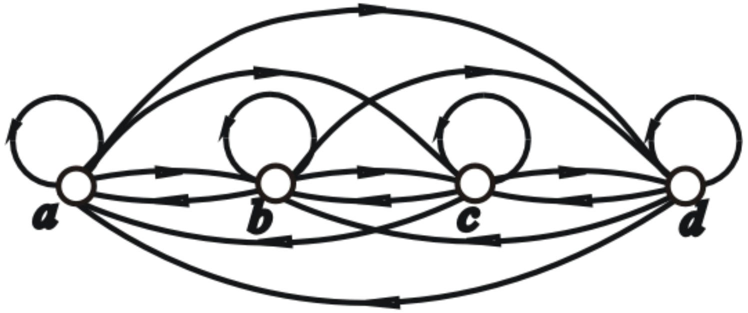
- 例1 设$A=\{a,b,c,d\}$, $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$, R和 $r(R)$, $s(R)$, $t(R)$的关系图如下图所示.

R

$r(R)$



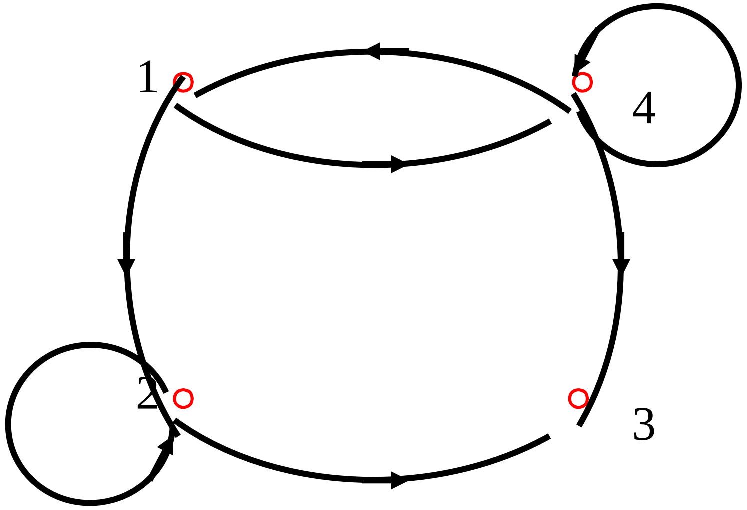
$s(R)$

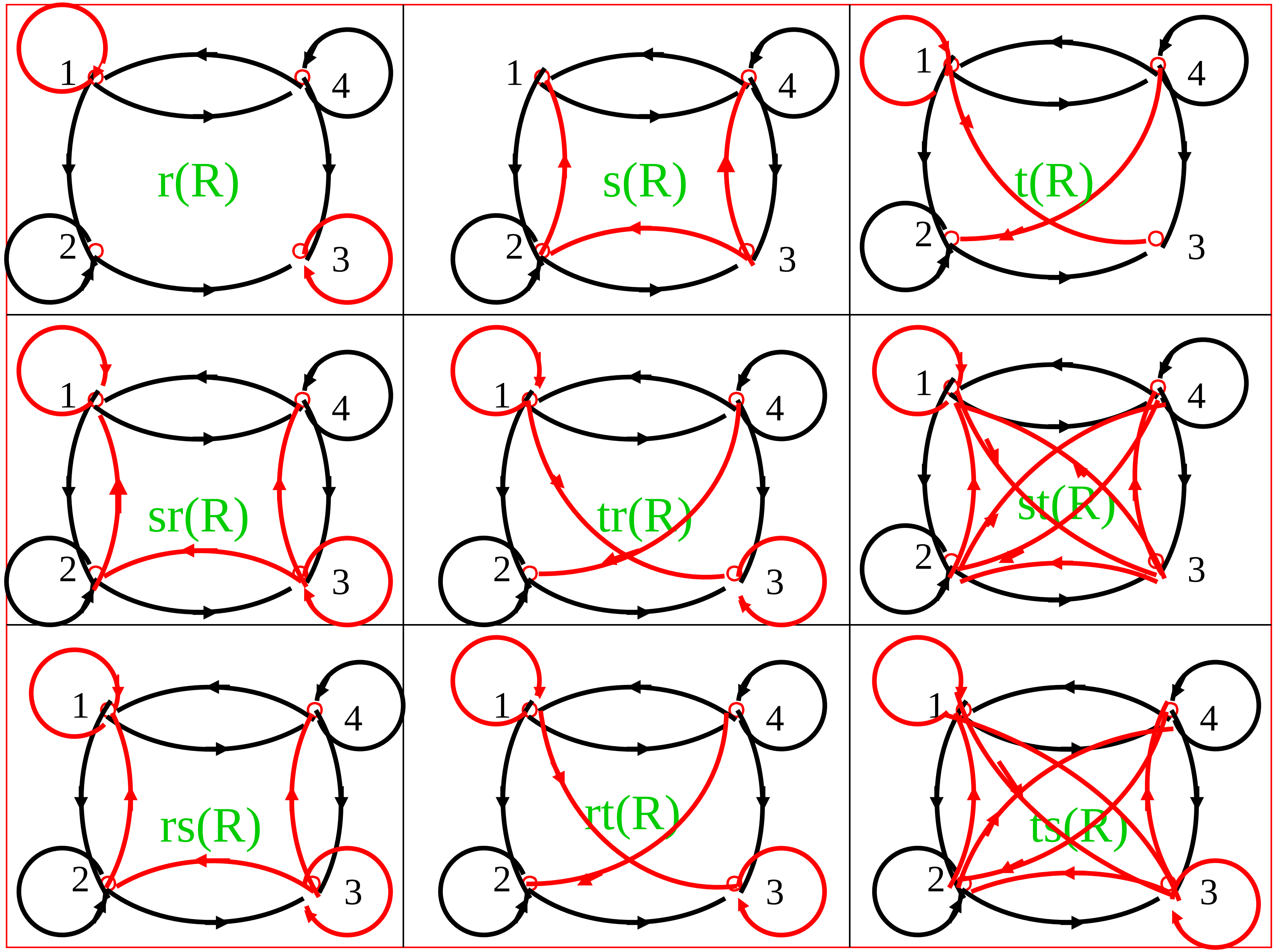


$t(R)$

练习

- 补充：给定A中关系R如图所示：分别画出
  - r(R)、s(R) 、t(R)的图
  - sr(R)、rs(R)、tr(R)、rt(R)、st(R) 、ts(R) 的图。





r(R)
s(R)
t(R)
sr(R)
tr(R)
st(R)
rs(R)
rt(R)
ts(R)

作业

- P116
- 4.14

问题？