

离散数学

图论

5.3 图的矩阵表示

5.3 图的矩阵表示

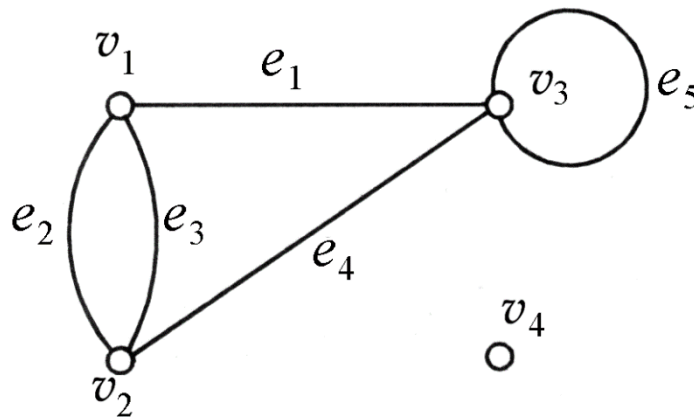
- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

无向图的关联矩阵

- **定义** 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 **G 的关联矩阵**, 记为 $M(G)$.

例

$$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



无向图的关联矩阵

• **定义** 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 m_{ij} 为 v_i 与 e_j 的关联次数, 称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 **G 的关联矩阵**, 记为 $M(G)$.

性质 (1) 每一列恰好有两个1或一个2

$$(2) \sum_{j=1}^m m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(3) \sum_{i,j} m_{ij} = 2m$$

(4) v_i 为孤立点当且仅当第 i 行全为0

(5) 平行边的列相同

有向图的关联矩阵

定义 设无环有向图 $D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令

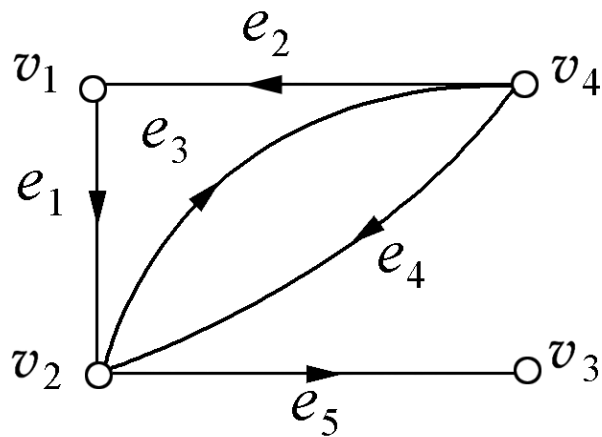
$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 为 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称 $(m_{ij})_{n \times m}$ 为 **D 的关联矩阵**, 记为 $M(D)$.

有向图的关联矩阵(续)

例

$$M(D) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



性质

- (1) 每一列恰好有一个1和一个-1
- (2) 第 i 行1 的个数等于 $d^+(v_i)$, -1 的个数等于 $d^-(v_i)$
- (3) 1的总个数等于-1的总个数, 且都等于 m
- (4) 平行边对应的列相同

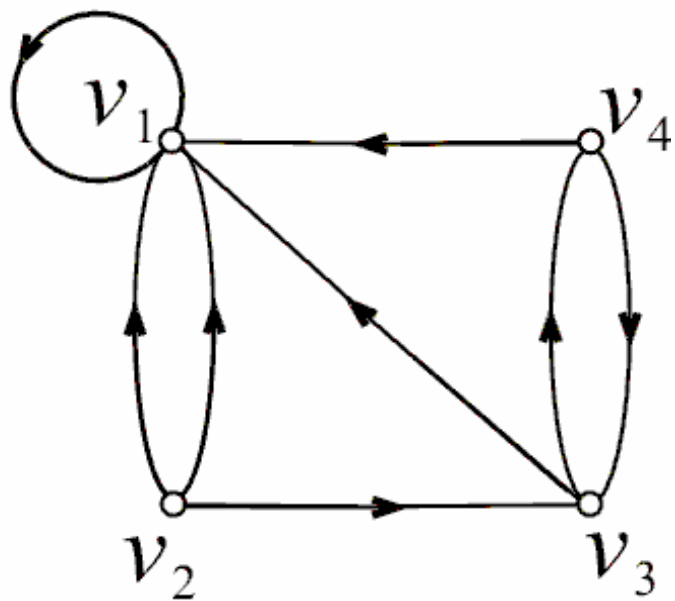
有向图的邻接矩阵

定义 设有向图 $D=<V,E>$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $E=\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, 令 $a_{ij}^{(1)}$ 为顶点 v_i 邻接到顶点 v_j 边的条数, 称 $(a_{ij}^{(1)})_{m \times n}$ 为 **D 的邻接矩阵**, 记作 $A(D)$, 简记为 A .

性质

- (1) $\sum_{j=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$
- (2) $\sum_{i=1}^n a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j), \quad j = 1, 2, \dots, n$
- (3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ --- D 中长度为1的通路数
- (4) $\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(1)}$ --- D 中长度为1的回路数

有向图的邻接矩阵实例



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

D 中的通路及回路数

定理 设 A 为 n 阶有向图 D 的邻接矩阵, 则 $A^l(l \geq 1)$ 中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中 v_i 到 v_j 长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$ 为 v_i 到自身长度为 l 的回路数,

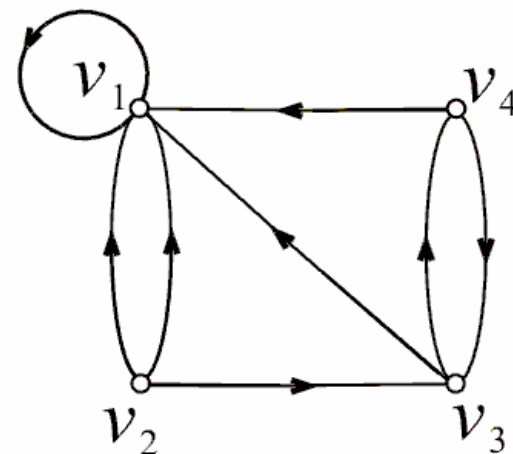
$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^n a_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度为 l 的回路总数.

- 这里的通路包含回路
- 通路和回路的计算是在定义的意义下, 而不是同构的意义下

D 中的通路及回路数(续)

推论 设 $B_l = A + A^2 + \dots + A^l (l \geq 1)$, 则 B_l 中元素
 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的通路数,
 $\sum_{i=1}^n b_{ii}^{(l)}$ 为 D 中长度小于或等于 l 的回路数.



例 问在有向图 D 中

- (1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条? 其中回路分别为多少条?
- (2) 长度小于或等于4的通路为多少条? 其中有多少条回路?

例(续)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
----	----	----

1	8	1
---	---	---

2	11	3
---	----	---

3	14	1
---	----	---

4	17	3
---	----	---

合计	50	8
----	----	---

有向图的可达矩阵

定义 设 $D=\langle V,E \rangle$ 为有向图, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 可达 } v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n \times n}$ 为 **D 的可达矩阵**, 记作 $P(D)$, 简记为 P .

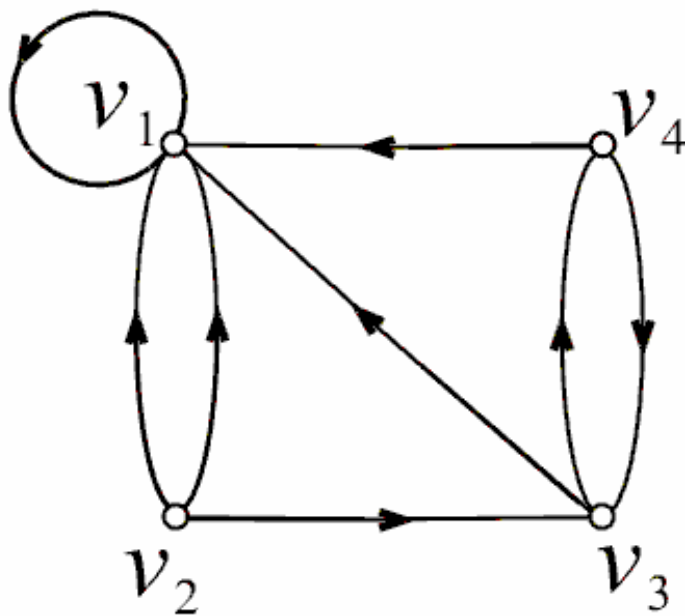
性质:

$P(D)$ 主对角线上的元素全为1.

D 强连通当且仅当 $P(D)$ 的元素全为1.

有向图的可达矩阵实例

• 例



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

问题？

