

# 离散数学

## 图论

### 5.4最短路径,关键路径与着色

# 最短路径,关键路径与着色

- 带权图
- 最短路径与**Dijkstra**标号法
- 项目网络图与关键路径
- 着色问题

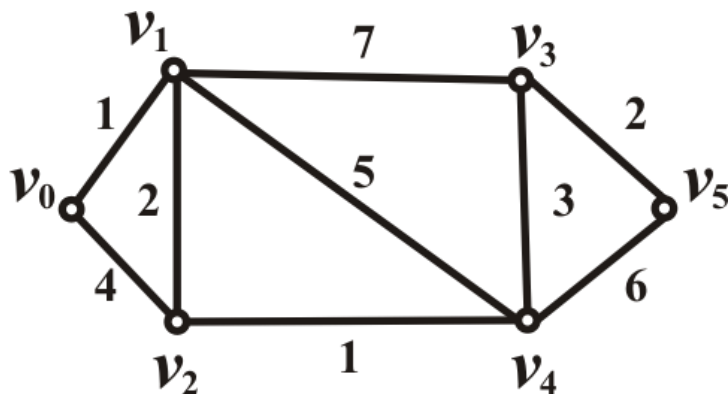
# 最短路径

- **带权图**  $G=\langle V,E,w\rangle$ , 其中  $w:E\rightarrow\mathbf{R}$ .  $\forall e\in E$ ,  $w(e)$  称作  $e$  的**权**.  $e=(v_i,v_j)$ , 记  $w(e)=w_{ij}$ . 若  $v_i,v_j$  不相邻, 记  $w_{ij}=\infty$ .
- 通路  $L$  的**权**:  $L$  的所有边的权之和, 记作  $w(L)$ .
- $u$  和  $v$  之间的**最短路径**:  $u$  和  $v$  之间权最小的通路.

例  $L_1=v_0v_1v_3v_5$ ,  $w(L_1)=10$ ,

$L_2=v_0v_1v_4v_5$ ,  $w(L_2)=12$ ,

$L_3=v_0v_2v_4v_5$ ,  $w(L_3)=11$ .

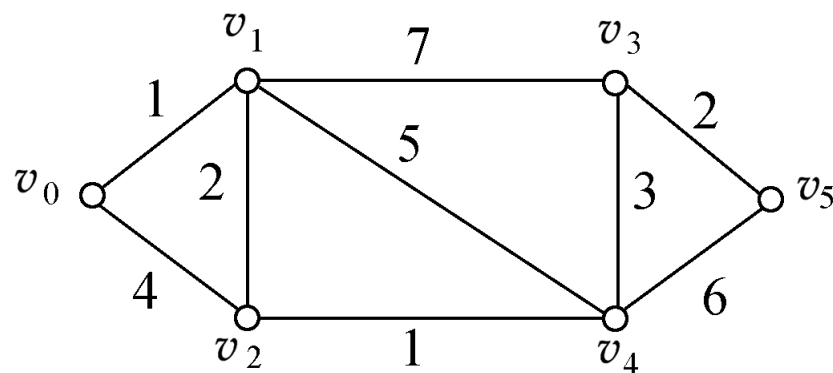


# 标号法(E.W.Dijkstra, 1959)

- 设带权图 $G=\langle V, E, w \rangle$ , 其中 $\forall e \in E, w(e) \geq 0$ .
  - 设 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 求 $v_1$ 到其余各顶点的最短路径
1. 令  $l_1 \leftarrow 0, p_1 \leftarrow \lambda, l_j \leftarrow +\infty, p_j \leftarrow \lambda, j=2, 3, \dots, n, P=\{v_1\}, T=V-\{v_1\}, k \leftarrow 1, t \leftarrow 1$ . /  $\lambda$ 表示空
  2. 对所有的 $v_j \in T$ 且 $(v_k, v_j) \in E$   
    令 $l \leftarrow \min\{l_j, l_k + w_{kj}\}$ ,  
    若 $l = l_k + w_{kj}$ , 则令 $l_j \leftarrow l, p_j \leftarrow v_k$ .
  3. 求 $l_i = \min\{l_j \mid v_j \in T_t\}$ .  
    令 $P \leftarrow P \cup \{v_i\}, T \leftarrow T - \{v_i\}, k \leftarrow i$ .
  4. 令 $t \leftarrow t+1$ ,  
    若 $t < n$ , 则转2.

# Dijkstra标号法实例

- 例 求 $v_0$ 到 $v_5$ 的最短路径



$t$	$v_0$	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(1, v_0)^*$	$(4, v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3, v_1)^*$	$(8, v_1)$	$(6, v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(8, v_1)$	$(4, v_2)^*$	$(+\infty, \lambda)$
5				$(7, v_4)^*$		$(10, v_4)$
6						$(9, v_3)^*$

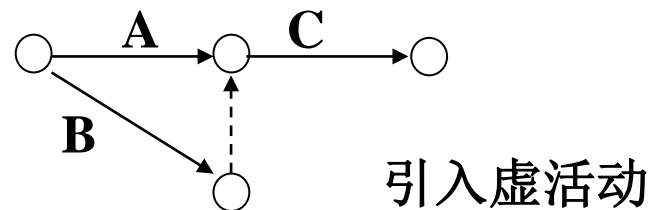
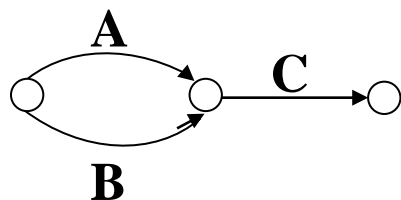
$v_0$ 到 $v_5$ 的最短路径:  
 $v_0v_1v_2v_4v_3v_5$ ,  
 $d(v_0, v_5)=9$

# 关键路径问题

- 由雷明顿-兰德公司(Remington- Rand)的JE克里(JE Kelly)和杜邦公司的MR沃尔克(MR Walker)在1957年提出的，用于对化工工厂的维护项目进行日程安排。
- 它适用于有很多作业而且必须按时完成的项目。
- 对于一个项目而言,只有项目网络中最长的或耗时最多的活动完成之后,项目才能结束,这条最长的活动路线就叫关键路径( **Critical Path** ),组成关键路径的活动称为关键活动。

# 项目网络图

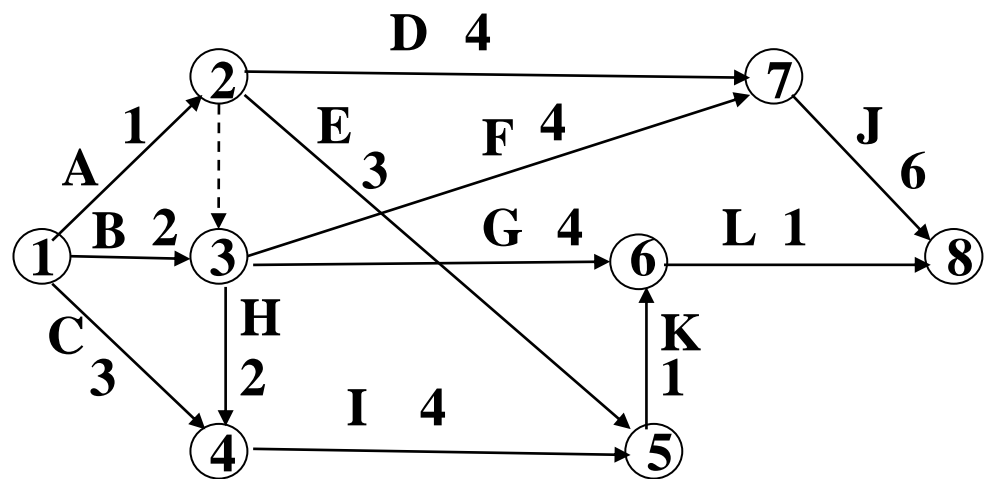
- **项目网络图**: 表示项目的活动之间前后顺序一致的带权有向图. **边表示活动**, 边的权是活动的完成时间, **顶点表示事项**(项目的开始和结束、活动的开始和结束).
- 要求: (1) 有一个始点(入度为0)和一个终点(出度为0).  
(2) 任意两点之间只能有一条边.



- (3) 没有回路.
- (4) 每一条边始点的编号小于终点的编号.

# 例

活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
紧前活动	—	—	—	A	A	A,B	A,B	A,B	C,H	D,F	E,I	G,K
时间(天)	1	2	3	4	3	4	4	2	4	6	1	1





# 关键路径

- **关键路径**: 项目网络图中从始点到终点的最长路径
  - **关键活动**: 关键路径上的活动设 $D=<V,E,W>$ ,  $V=\{1,2,\dots,n\}$ , 1是始点,  $n$ 是终点.
- (1) **事项 $i$ 的最早开始时间 $ES(i)$** :  $i$ 最早可能开始的时间,即从始点到 $i$ 的最长路径的长度.

$$ES(1)=0$$

$$ES(i)=\max\{ES(j)+w_{ji}|\langle j,i\rangle\in E\}, \quad i=2,3,\dots,n$$

- (2) **事项 $i$ 的最晚完成时间 $LF(i)$** : 在不影响项目工期的条件下, 事项 $i$ 最晚必须完成的时间.

$$LF(n)=ES(n)$$

$$LF(i)=\min\{LF(j)-w_{ij}|\langle i,j\rangle\in E\}, \quad i=n-1,n-2,\dots,1$$

# 关键路径(续)

- (3) 活动 $\langle i,j \rangle$ 的最早开始时间 $ES(i,j)$ :  $\langle i,j \rangle$ 最早可能开始时间.
- (4) 活动 $\langle i,j \rangle$ 的最早完成时间 $EF(i,j)$ :  $\langle i,j \rangle$ 最早可能完成时间.
- (5) 活动 $\langle i,j \rangle$ 的最晚开始时间 $LS(i,j)$ : 在不影响项目工期的条件下,  $\langle i,j \rangle$ 最晚必须开始的时间.
- (6) 活动 $\langle i,j \rangle$ 的最晚完成时间 $LF(i,j)$ : 在不影响项目工期的条件下,  $\langle i,j \rangle$ 最晚必须完成的时间.
- (7) 活动 $\langle i,j \rangle$ 的缓冲时间 $SL(i,j)$ : 活动 $\langle i,j \rangle$ 的最晚开始时间与最早开始时间的差, 也是活动 $\langle i,j \rangle$ 的最晚完成时间与最早完成时间的差.

显然,  $ES(i,j)=ES(i), \quad EF(i,j)=ES(i)+w_{ij},$   
 $LF(i,j)=LF(j), \quad LS(i,j)=LF(j)-w_{ij},$   
 $SL(i,j)=LS(i,j)-ES(i,j)=LF(i,j)-EF(i,j)$

# 例(续)

- 事项的最早开始时间

$$ES(1)=0$$

$$ES(2)=\max\{0+1\}=1$$

$$ES(3)=\max\{0+2,1+0\}=2$$

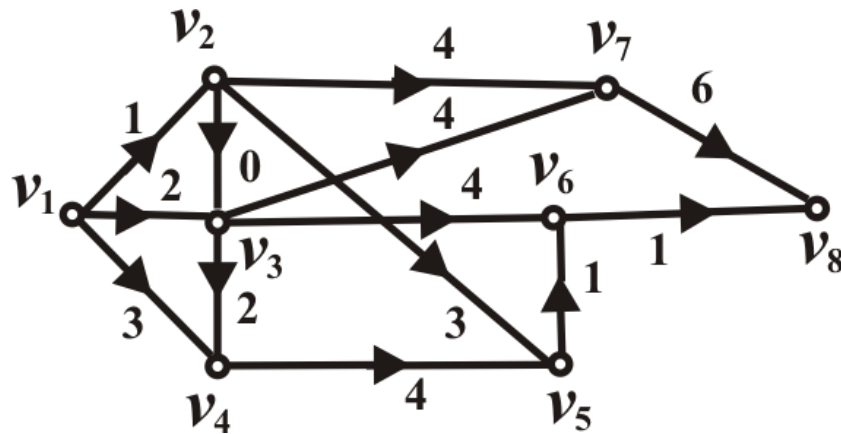
$$ES(4)=\max\{0+3,2+2\}=4$$

$$ES(5)=\max\{1+3,4+4\}=8$$

$$ES(6)=\max\{2+4,8+1\}=9$$

$$ES(7)=\max\{1+4,2+4\}=6$$

$$ES(8)=\max\{9+1,6+6\}=12$$



# 例(续)

- 事项的最晚完成时间

$$LF(8)=12$$

$$LF(7)=\min\{12-6\}=6$$

$$LF(6)=\min\{12-1\}=11$$

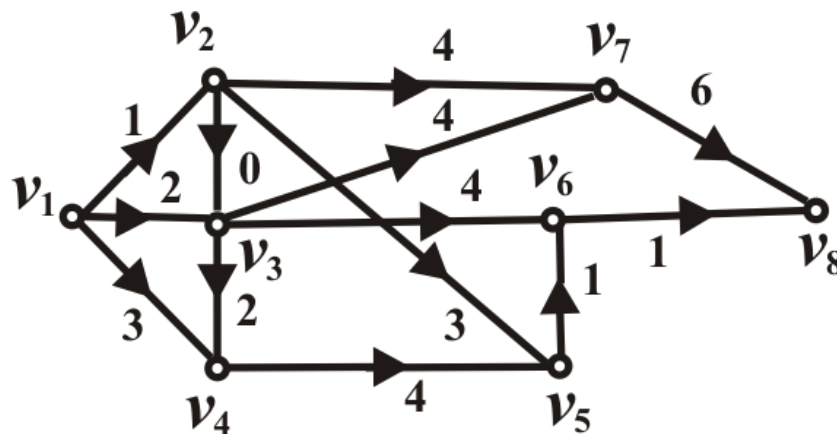
$$LF(5)=\min\{11-1\}=10$$

$$LF(4)=\min\{10-4\}=6$$

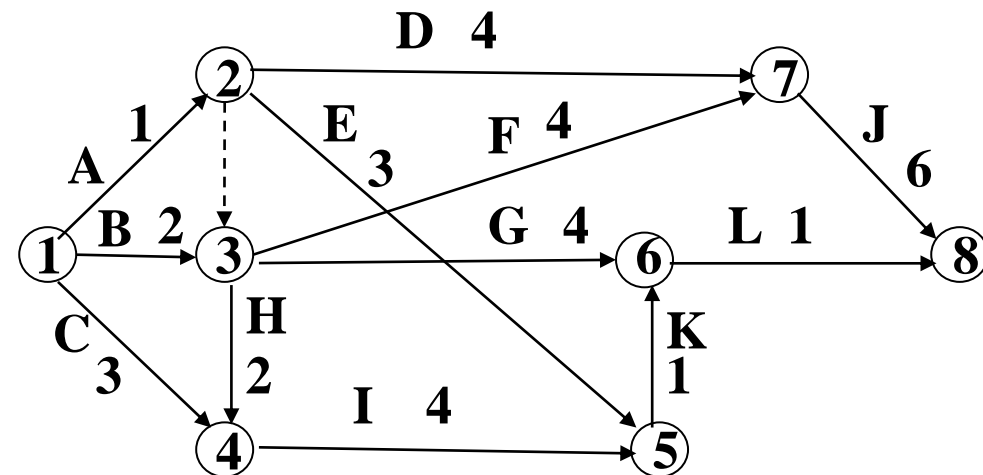
$$LF(3)=\min\{6-2, 11-4, 6-4\}=2$$

$$LF(2)=\min\{2-0, 10-3, 6-4\}=2$$

$$LF(1)=\min\{2-1, 2-2, 6-3\}=0$$



# 例(续)

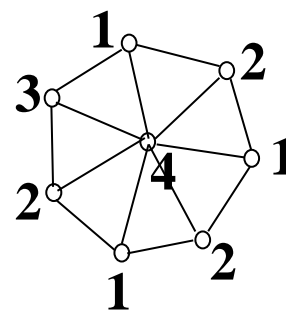
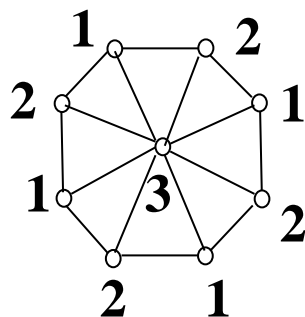
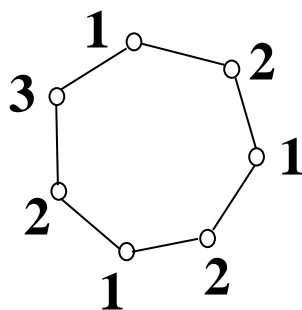
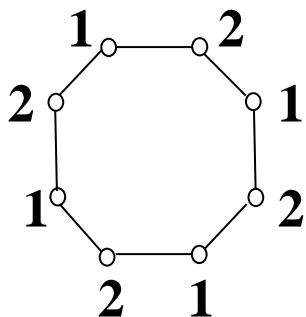


活动	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
<i>ES</i>	0	0	0	1	1	2	2	2	4	6	8	9
<i>EF</i>	1	2	3	5	4	6	6	4	8	12	9	10
<i>LF</i>	2	2	6	6	10	6	11	6	10	12	11	12
<i>LS</i>	1	0	3	2	7	2	7	4	6	6	10	11
<i>SL</i>	1	0	3	1	6	0	5	2	2	0	2	2

- 总工期:12天
- 关键路径:  $v_1v_3v_7v_8$       关键活动: B,F,J

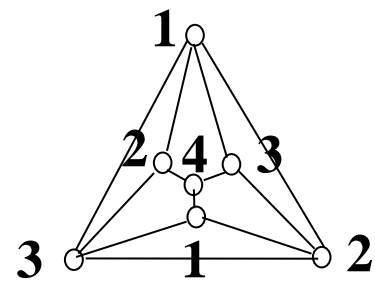
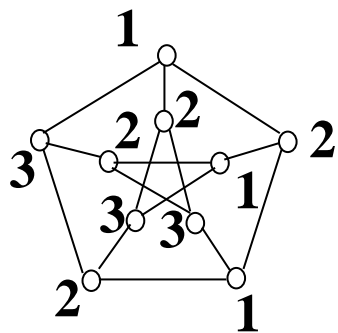
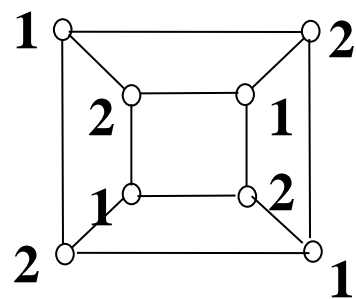
# 着色

- **定义** 设无向图 $G$ 无环, 对 $G$ 的每个顶点涂一种颜色, 使相邻的顶点涂不同的颜色, 称为图 $G$ 的一种**点着色**, 简称**着色**. 若能用 $k$ 种颜色给 $G$ 的顶点着色, 则称 $G$ 是 **$k$ -可着色**的.
- **图的着色问题**: 用尽可能少的颜色给图着色.
- 例1



# 例

- 例2



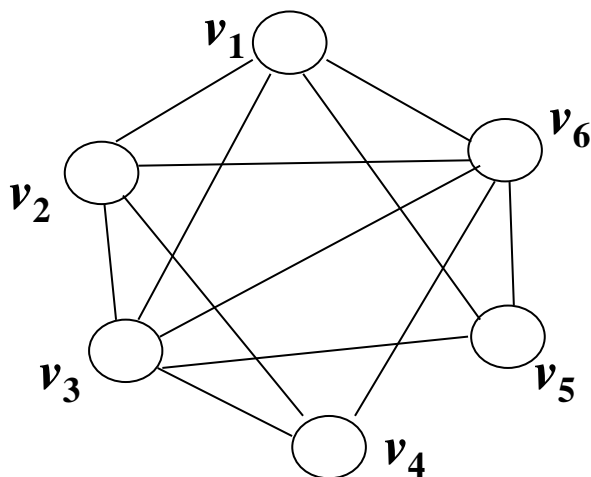
# 应用

- 有 $n$ 项工作, 每项工作需要一天的时间完成. 有些工作由于需要相同的人员或设备不能同时进行, 问至少需要几人或几天才能完成所有的工作?
- 计算机有 $k$ 个寄存器, 现正在编译一个程序, 要给每一个变量分配一个寄存器. 如果两个变量要在同一时刻使用, 则不能把它们分配给同一个寄存器. 如何给变量分配寄存器?
- 无线交换设备的波长分配. 有 $n$ 台设备和 $k$ 个发射波长, 要给每一台设备分配一个波长. 如果两台设备靠得太近, 则不能给它们分配相同的波长, 以防止干扰. 如何分配波长?



# 例

- 例3 学生会下设6个委员会, 第一委员会={张, 李, 王}, 第二委员会={李, 赵, 刘}, 第三委员会={张, 刘, 王}, 第四委员会={赵, 刘, 孙}, 第五委员会={张, 王}, 第六委员会={李, 刘, 王}. 每个月每个委员会都要开一次会, 为了确保每个人都能参加他所在的委员会会议, 这6个会议至少要安排在几个不同时间段?



至少要4个时段  
第1时段:一,四  
第2时段:二,五  
第3时段:三  
第4时段:六

# 作业

- P138
- 5.19
- 5.20
- 5.22

问题？

