离散数学

图论

6.1 二部图

第6章 特殊的图

6.1 二部图

6.2 欧拉图

6.3 哈密顿图

6.4 平面图

6.1 二部图

- 二部图
- 完全二部图
- 匹配：极大匹配,最大匹配,完美匹配,完备匹配
- Hall定理

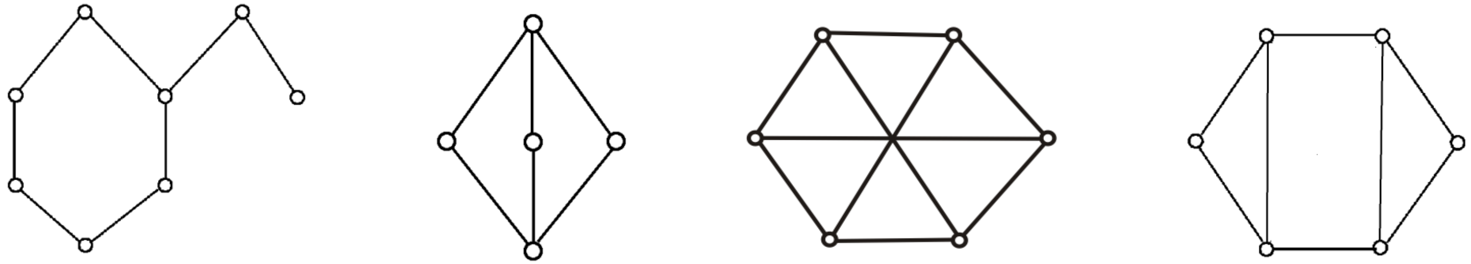
二部图

- 定义 设无向图 $G=<V,E>$，若能将V 划分成V_1 和 V_2，($V_1 \cup V_2=V$, $V_1 \cap V_2=\varnothing$), 使得G中的每条边的两个端点都一个属于V_1, 另一个属于V_2, 则称G为二部图, 记为$<V_1,V_2,E>$, 称V_1和V_2为互补顶点子集.
- 又若G是简单图, 且V_1中每个顶点都与V_2中每个顶点相邻,则称G为完全二部图, 记为$K_{r,s}$, 其中$r=|V_1|$, $s=|V_2|$.

- 注意: n 阶零图为二部图.

二部图(续)

- 例 下述各图是否是二部图?

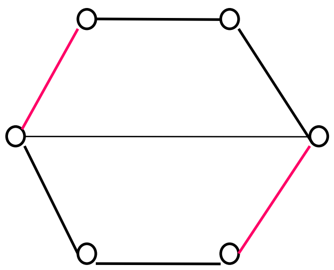


不是

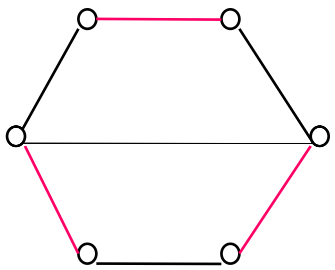
- **定理** 无向图$G=<V,E>$是二部图当且仅当G中无奇圈

匹配

- 设$G=<V,E>$,
- 匹配(边独立集): 任2条边均不相邻的边子集
- 极大匹配: 添加任一条边后都不再是匹配的匹配
- 最大匹配: 边数最多的匹配
- 匹配数: 最大匹配中的边数, 记为β_1
- 例



极大匹配



最大匹配 $\beta_1=3$

匹配 (续)

设M为G中一个匹配

v_i与v_j被M匹配: $(v_i,v_j)\in M$

v为M饱和点: M中有边与v关联

v为M非饱和点: M中没有边与v关联

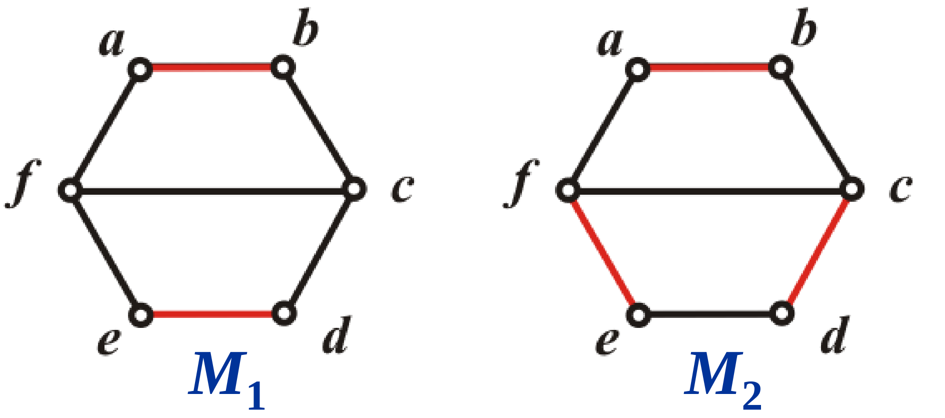
M为完美匹配: G的每个顶点都是M饱和点

例 关于M_1, a,b,e,d是饱和点

f,c是非饱和点

M_1不是完美匹配

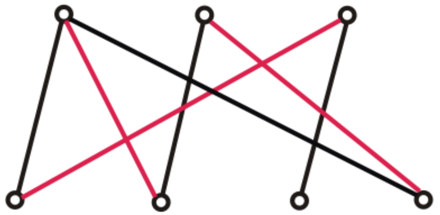
M_2是完美匹配



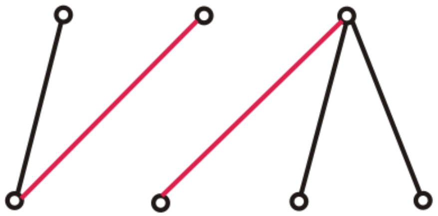
二部图中的匹配

- 定义 设$G=<V_1,V_2,E>$为二部图，$|V_1|\le|V_2|$，M是G中最大匹配，若V_1中顶点全是M饱和点，则称M为G中V_1到V_2的完备匹配. 当$|V_1|=|V_2|$时，完备匹配变成完美匹配.

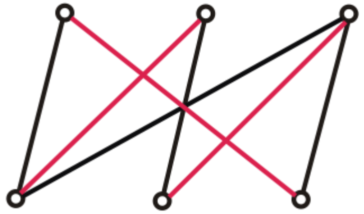
- 例



完备,不完美



不完备



完美

Hall定理

- 定理(Hall定理) 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G中存在从V_1到V_2的完备匹配当且仅当V_1中任意k个顶点至少与V_2中的k个顶点相邻($k=1,2,\ldots,|V_1|$).
  —相异性条件
- 由Hall定理, 上一页第2个图没有完备匹配.

- 定理 设二部图$G=<V_1,V_2,E>$中, 如果存在$t\ge1$, 使得V_1中每个顶点至少关联 t 条边, 而V_2中每个顶点至多关联t条边，则G中存在V_1到V_2的完备匹配。
  —t 条件
- 证 V_1中任意k个顶点至少关联kt条边, 这kt条边至少关联V_2中的k个顶点, 即V_1中任意k个顶点至少邻接V_2中的k个顶点. 由Hall定理, G中存在V_1到V_2的完备匹配.

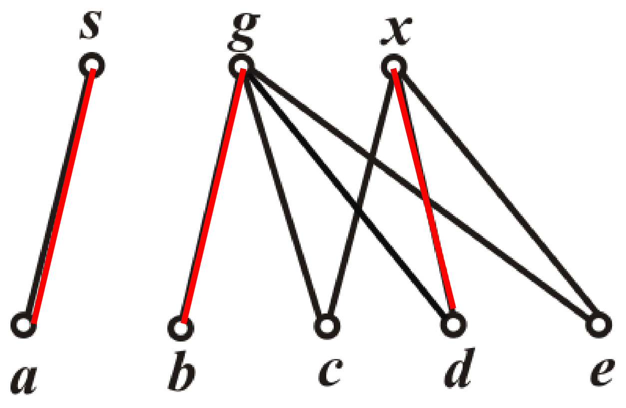
一个应用实例

- 例 某课题组要从a, b, c, d, e 5人中派3人分别到上海、广州、香港去开会. 已知a只想去上海，b只想去广州，c, d, e都表示想去广州或香港. 问该课题组在满足个人要求的条件下，能否找出合适的派遣方案？
- 解 令$G=<V_1,V_2,E>$, 其中$V_1=\{s, g, x\}$, $V_2=\{a, b, c, d, e\}$,

  $E=\{(u,v) \mid u\in V_1, v\in V_2, v$想去$u\}$,

  其中s, g, x分别表示上海、广州和香港.
- G 满足相异性条件，红边是一个完备匹配, 对应的派遣方案:

  a–上海, b–广州, d–香港



作业

- P154
- 6.1
- 6.2
- 6.3
- 6.4
- 6.6

问题？