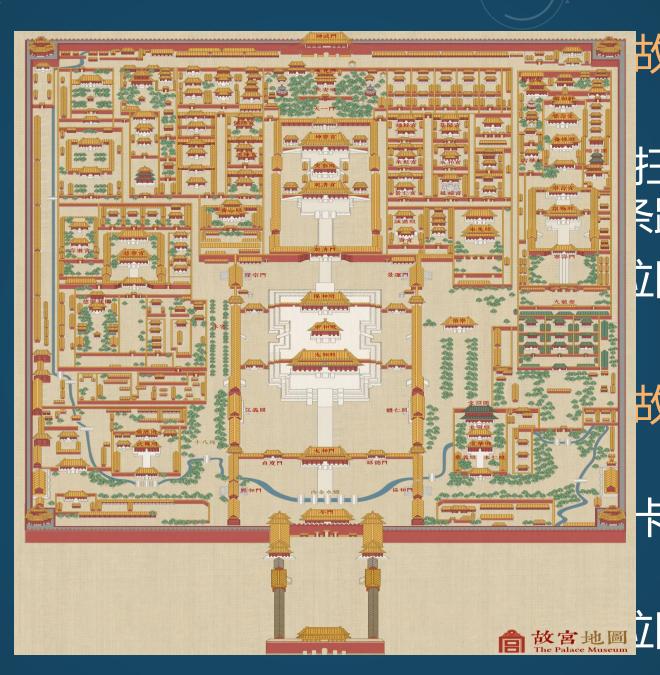




哈密顿图

计算机科学与技术学院 管昕洁





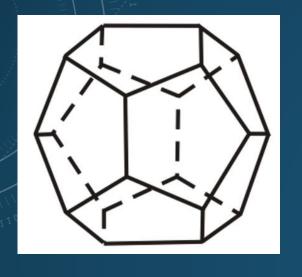
故宫博物院

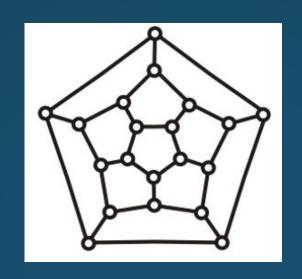
扫、检查、 <路径 <加路!

故宫博物院

卡所有的殿、

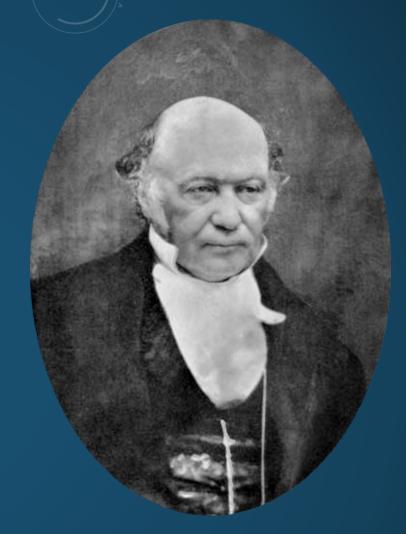
江回路?





"周游世界"游戏

每个顶点是一个城市,有20个城市,要求从一个城市出发,恰好经过每一个城市一次,回到出发点。



威廉·卢云·哈密顿爵士 Sir William Rowan Hamilton

哈密顿图

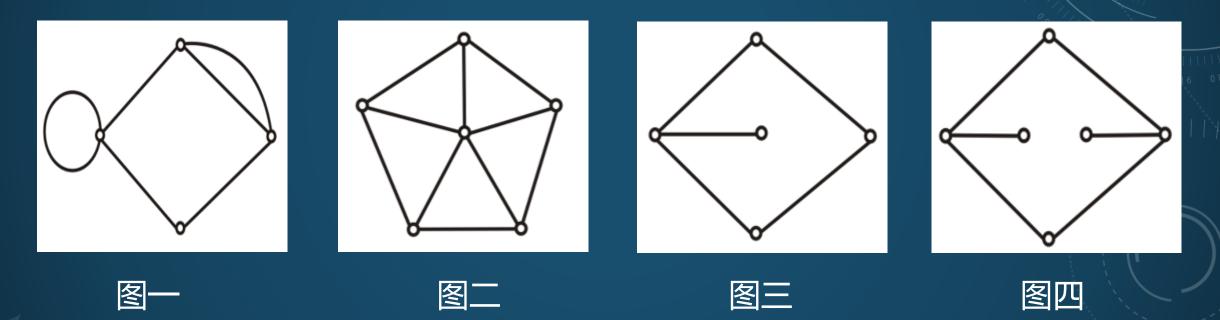


- 哈密顿通路: 经过图中所有顶点一次且仅一次的通路。
- 哈密顿回路: 经过图中所有顶点一次且仅一次的回路。
- 哈密顿图: 具有哈密顿回路的图。
- 半哈密顿图: 具有哈密顿通路而无哈密顿回路的图。
- 几点说明:
 - 平凡图是哈密顿图。当n≥3时, K_n均为哈密顿图
 - 哈密顿通路是初级通路,哈密顿回路是初级回路。
 - 环与平行边不影响图的哈密顿性。

实例



• 下面四个无向图是哈密顿图吗?



图一、图二为哈密顿图,图三为半哈密顿图,图四不是。

哈密顿图的判定-必要条件

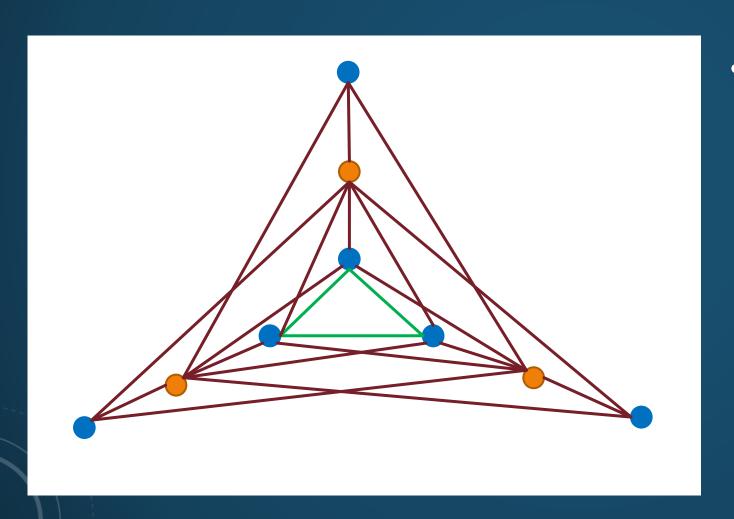


• 定理 设无向图G=<V,E>是哈密顿图,则对于任意 $V_1\subset V$ 且 $V_1\neq\emptyset$,均有 $p(G-V_1)\leq |V_1|$ 。

• 证明思路

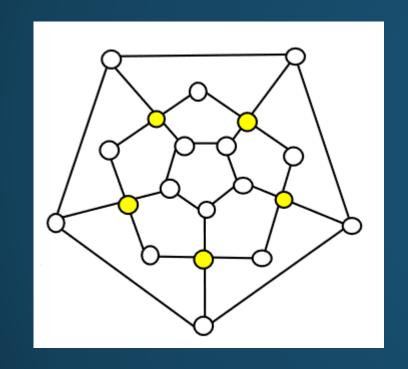
- ・设C为G中一条哈密顿回路,有 $p(C-V_1) \leq |V_1|$
- 又因为 $C \subseteq G$,故 $p(G-V_1) \le p(C-V_1) \le |V_1|$

哈密顿图的判定-必要条件-例

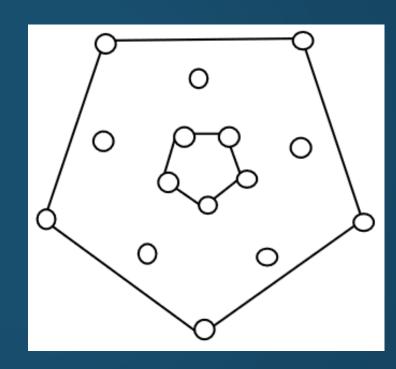


- 判定思路:
 - 将图中黄色的点记为 $集合V_1$
 - $G-V_1$ 有4个连通分支, 而 $|V_1|=3$
 - G不是Hamilton图

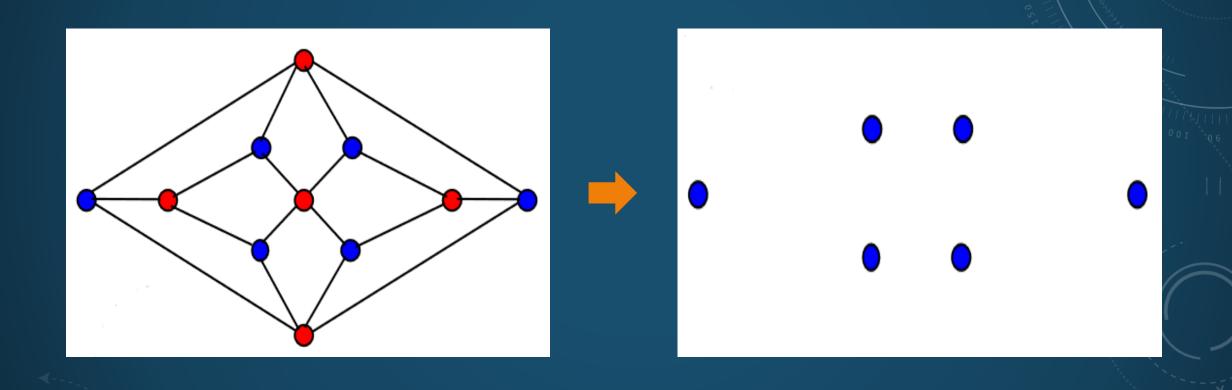
哈密顿图的判定-必要条件-例2



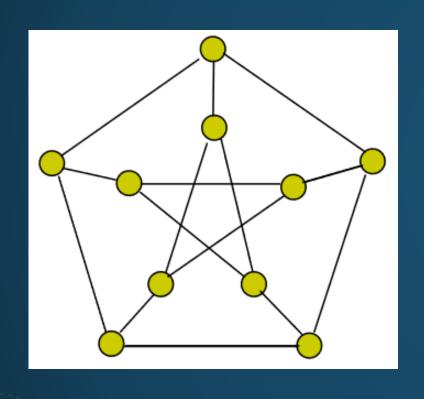




哈密顿图的判定-必要条件-例3



哈密顿图的判定-必要条件-说明



- · 反例 Petersen 图满足上述必要条件,但 不是哈密尔顿图
- 说明:
 - · 定理中的条件是哈密顿图的必要条件,但不是充分条件
 - · 可利用该定理判断某些图不是哈密 顿图

哈密顿图的判定-例



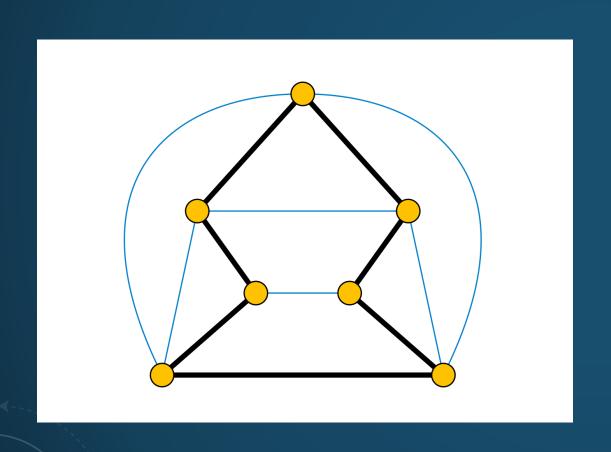
- ·例:设G为n阶无向连通简单图,若G中有割点或桥,则G不是哈密顿图.
- 回顾: 什么是割点? 什么是桥?
- · 证:
- 1. 设v为割点,则 $p(G-v) \ge 2>|\{v\}|=1$. 根据定理,G不是哈密顿图。
- 2. 若 $G = K_2(K_2)$ 有桥),它显然不是哈密顿图。 除 K_2 外,其他的有桥连通图均有割点. 由(1),得证G不是哈密顿图。

哈密顿图的判定-充分条件



- Dirac定理 (1952) G是无向简单图, 当|G|=n≥3时, 若δ(G)≥n/2, 则G 中存在哈密顿回路。
- Ore定理 (1960) G是无向简单图,当 $|G|=n\geq 3$ 时,若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n,则G中存在哈密顿回路。
- · 推论 设G是n阶无向简单图,若任意两个不相邻的顶点的度数之和大于等于n-1,则G中存在哈密顿通路。

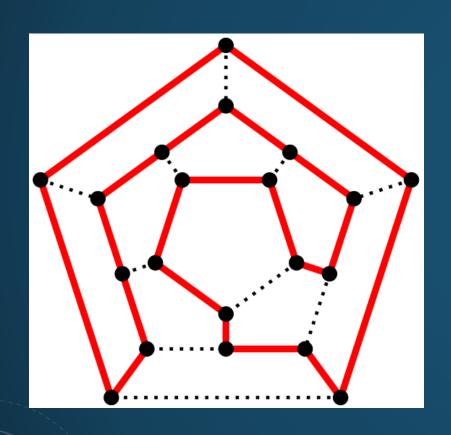
哈密顿图的判定-充分条件-例



• 判定思路:

- G中顶点数量为7
- · 任意两个不相邻的顶点 度数和至少为7
- 满足Ore定理要求
- G为哈密顿图

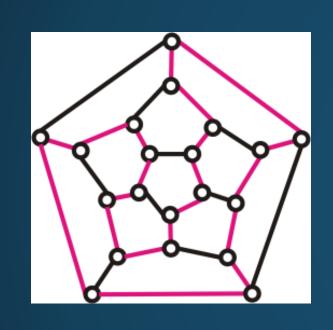
哈密顿图的判定-充分条件-反例

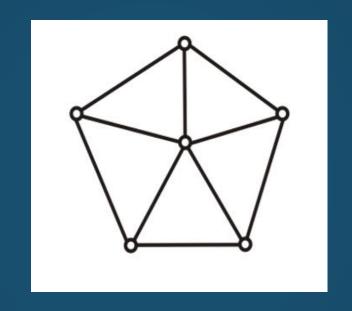


- 反例2: n(≥5)个顶点的圈是哈密顿图,不满足条件。
- 定理中的条件是充分条件,但不是必要条件。

哈密顿图的判定-可行方法







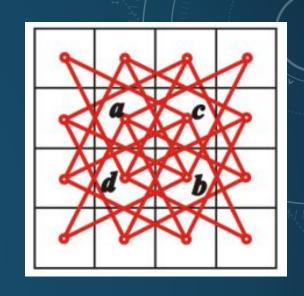
1. 观察法: 观察出一条哈密顿回路。

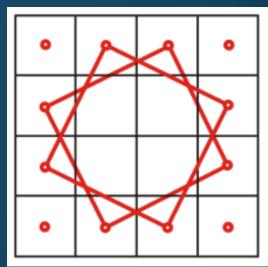
2.满足充分条件:任何两个不相邻顶点的度数之和大于等于 顶点个数 (6),所以它是哈密顿图

哈密顿图的判定-可行方法 Q

3. 不满足必要条件

- 例 4×4国际象棋盘上的骑士巡游问题: 骑士是否能恰好经过每一个方格一次后回到原处?
- 解 取 $V_1 = \{a, b, c, d\}$, 则 $p(G V_1) = 6 > |V_1|$ 由定理,图中无哈密顿回路,故问题无解。
- · 在8×8国际象棋盘上, 骑士巡游问题是否有解?





应用实例-分配问题



例 某次国际会议8人参加,已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言,问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座,使得每个人都能与两边的人交谈?

- 1. 对问题进行抽象转化
- 2. 对转化后图性质的判定
- 3. 得出结论,或进一步构造可行解

应用实例-分配问题



某次国际会议8人参加,已知每人至少与其余7人中的4人有共同语言,问服务员能否将他们安排在同一张圆桌就座,使得每个人都能与两边的人交谈?

解:

- 1. 抽象问题: 作无向图G=<V,E>, 其中V={v|v为与会者}, E={(u,v) | u,v∈V, u与v有共同语言, 且u≠v}。G为简单图。
- 2. 判定性质:根据条件, ∀v∈V, d(v)≥4。于是, ∀u,v∈V, 有d(u)+d(v)≥8。由Ore定理可知G为哈密顿图。
- 3. 构造解:服务员在G中找一条哈密顿回路C,按C中相邻关系安排座位即可。

应用实例-分配问题-练习



• 计算机学院在6天里需要安排6门课(A,B,C,D,E,F)的考试,每天考1门。假设学生选课情况可归为四类,分别选课: ACD, BCF, BE, AB。请问应该如何安排日程,才能使得没有人必须连续两天都有考试?

• 思考:

• 如何抽象问题? 将什么抽象为顶点? 什么抽象为边?

应用实例-分配问题-练习



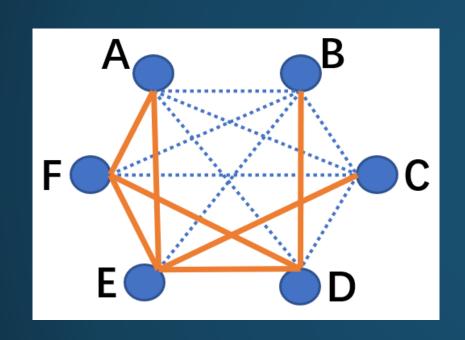
• 计算机学院在6天里需要安排6门课(A,B,C,D,E,F)的考试,每天考1门。假设学生选课情况可归为四类,分别选课: ACD, BCF, BE, AB。请问应该如何安排日程,才能使得没有人必须连续两天都有考试?

• 解:

- 以课程为顶点,对应可连续安排的考试添加边得图G
- 在图G中寻找哈密顿路径

应用实例-分配问题-练习

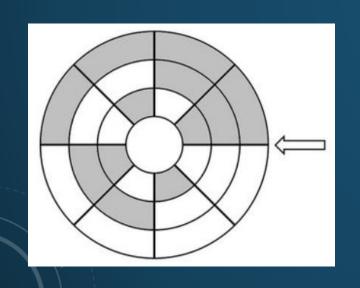


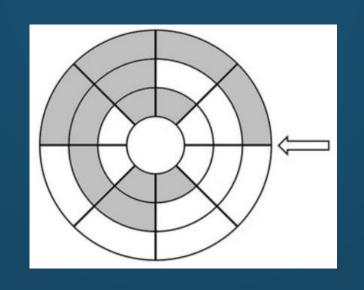


解:

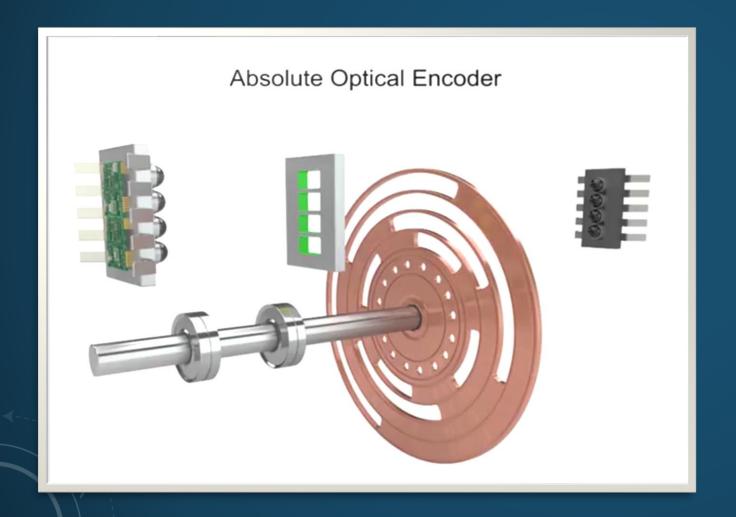
- 以课程为顶点,对应可连续安排的 考试添加边得图G
- 在图G中寻找哈密顿路径
- · 对应哈密顿路径,如CEAFDB,安 排考试日期

- 数字系统、机械工具、汽车制动等系统中,常用编码盘将模拟信号转化为数字信号。
- 当触点靠近两个扇面边界时,可能会带来误差。如何将转化带来的误差降到最低?





缩小相邻位置所 对应数码的差别!



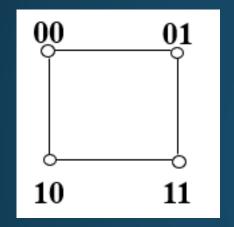


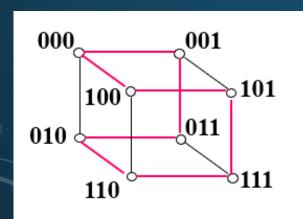
- **福電码**:将2ⁿ个长为n的二进制串组成一个序列,使得将 序列按圆形排列时一对相邻的二进制串只有一位不同。

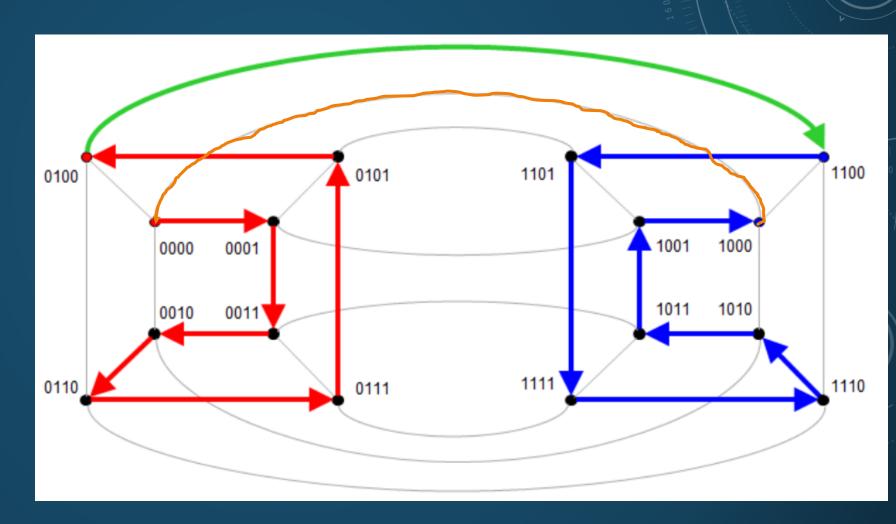
• 如何设计格雷码?

- 如何设计格雷码?
- 1. 抽象问题:
 - 构造n维立方体图: 2ⁿ个顶点, 每个顶点表示一个n位串, 两个顶点之间有一条边当且仅当它们的n位串仅相差一位。
 - n位格雷码对应n维立方体图中的一条哈密顿回路
- 2. 判定性质:
 - 当n≥2时, 图中一定存在哈密顿回路
- 3. 构造哈密顿回路









总结 Q

- •哈密顿"环游世界"
- 哈密顿图的判定
 - 必要条件
 - 充分条件
- 应用和拓展
 - 分配问题
 - 格雷码



• P154/6.15, 6.16



