离散数学

图论

5.2 通路、回路、图的连通性

通路、回路、图的连通性

- 简单通(回)路, 初级通(回)路, 复杂通(回)路
- 无向图的连通性：无向连通图, 连通分支
- 有向连通图：弱连通图, 单向连通图, 强连通图
- 点割集与割点
- 边割集与割边(桥)

通路与回路

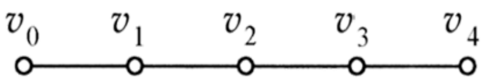
- 定义 给定图$G=\langle V,E\rangle$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$，

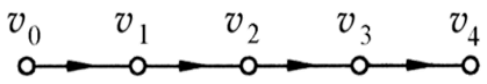
(1) 若$\forall i(1\le i\le l)$, v_{i-1}, v_i是e_i的端点(对于有向图, 要求v_{i-1}是始点, v_i是终点), 则称Γ为通路, v_0是通路的起点, v_l是通路的终点, l为通路的长度. 又若$v_0=v_l$，则称Γ为回路.

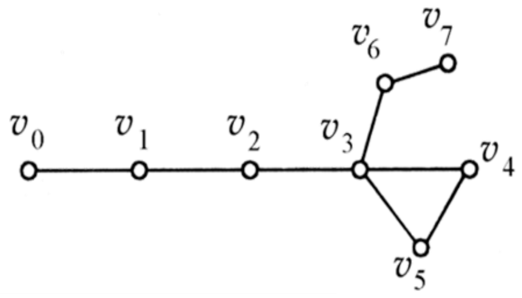
(2) 若通路(回路)中所有顶点(对于回路，除$v_0=v_l$)各异，则称为初级通路(初级回路).初级通路又称作路径, 初级回路又称作圈.

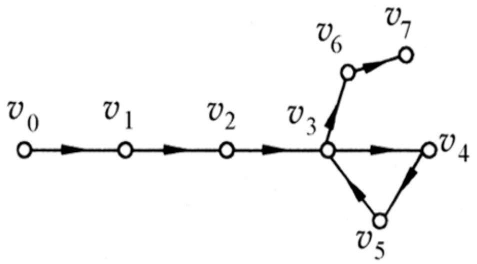
(3) 若通路(回路)中所有边各异, 则称为简单通路(简单回路), 否则称为复杂通路(复杂回路).

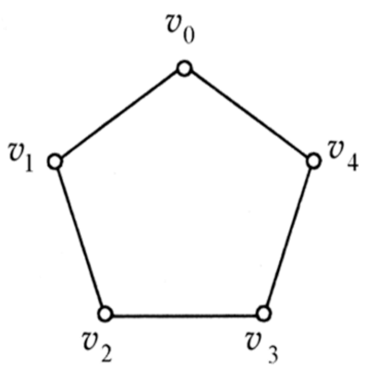
通路与回路实例

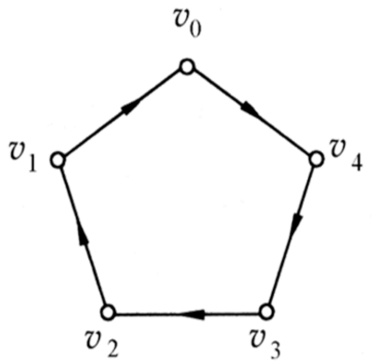

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4

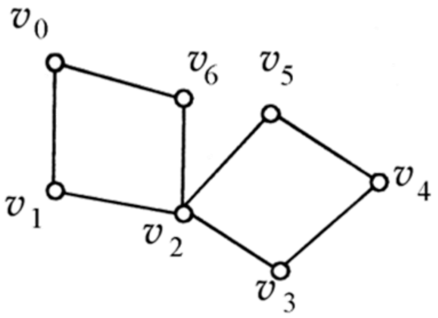

v_0
v_1
v_2
v_3
v_4

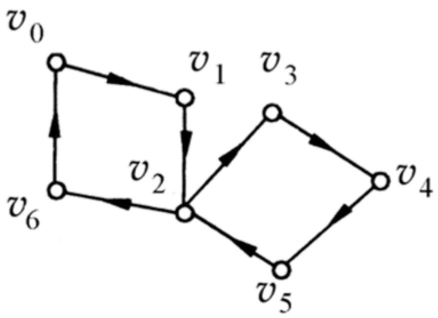

v_6
v_7
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5


v_6
v_7
v_0
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5


v_0
v_1
v_4
v_2
v_3


v_0
v_1
v_4
v_2
v_3


v_0
v_6
v_5
v_4
v_1
v_2
v_3


v_0
v_1
v_3
v_2
v_4
v_6
v_5

通路与回路(续)

- 说明:
- 表示方法

  ① 用顶点和边的交替序列(定义), 如$\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$

  ② 用边的序列, 如$\Gamma=e_1e_2\ldots e_l$

  ③ 简单图中, 用顶点的序列, 如$\Gamma=v_0v_1\ldots v_l$

  ④ 非简单图中,可用混合表示法,如$\Gamma=v_0v_1e_2v_2e_5v_3v_4v_5$
- 环是长度为1的圈, 两条平行边构成长度为2的圈.
- 在无向简单图中, 所有圈的长度≥3; 在有向简单图中, 所有圈的长度≥2.

通路与回路(续)

- 在两种意义下计算圈的个数

  ① 定义意义下

- 在无向图中，一个长度为$l(l\geq3)$的圈看作$2l$个不同的圈．如$v_0v_1v_2v_0$，$v_1v_2v_0v_1$，$v_2v_0v_1v_2$，$v_0v_2v_1v_0$，$v_1v_0v_2v_1$，$v_2v_1v_0v_2$看作6个不同的圈.
- 在有向图中, 一个长度为$l(l\geq3)$的圈看作l个不同的圈.

  ② 同构意义下

- 所有长度相同的圈都是同构的, 因而是1个圈.

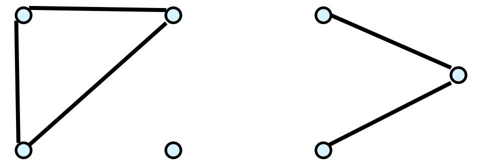
通路与回路(续)

- 定理 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.
- 推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

- 定理 在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.
- 推论 在一个n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.

无向图的连通性

例



设无向图$G=<V,E>$,

- **u与v连通**: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.
- **连通关系** $R=\{<u,v>| u,v \in V$且$u\sim v\}$是V上的等价关系
- **连通图**:任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.
- **连通分支**: V关于连通关系R的等价类的导出子图
- 设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$是G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.
- G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

点割集

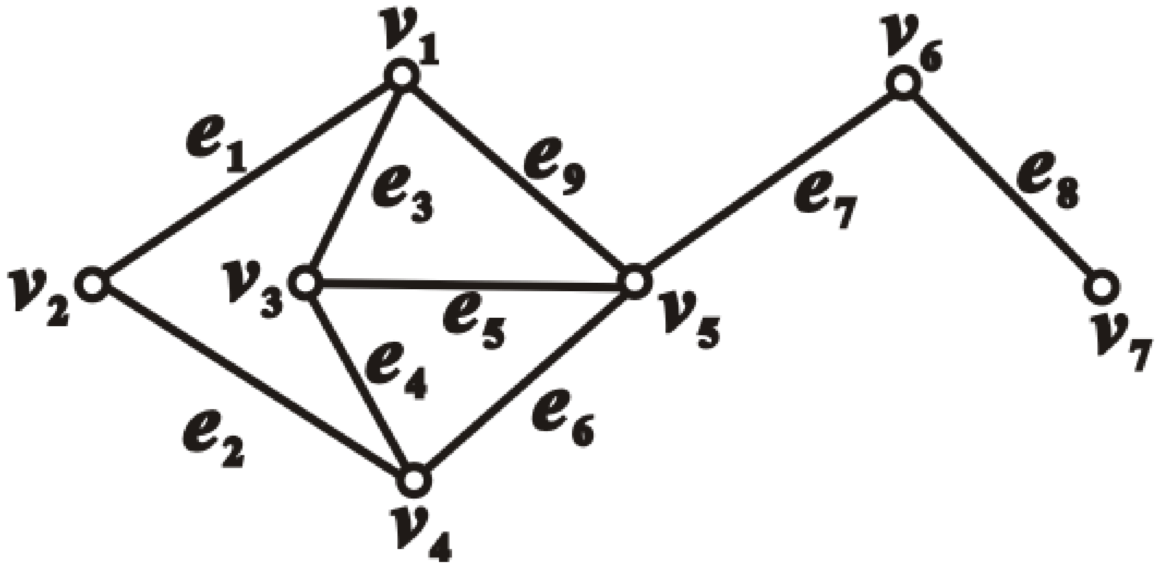
- 记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边
  $G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边
  $G-e$: 从G中删除e
  $G-E'$: 从G中删除E'中所有边

- 定 义 设 无 向 图 $G=\langle V,E\rangle$, $V'\subset V$, 若 $p(G-V')>p(G)$ 且 $\forall V''\subset V'$, $p(G-V'')=p(G)$, 则称V'为G的点割集. 若$\{v\}$为点割集, 则称v为割点.

点割集实例

例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$是不是点割集？



边割集

- 定义　设无向图$G=<V,E>$，$E'\subseteq E$，若$p(G-E')>p(G)$且$\forall E''\subset E'$，$p(G-E'')=p(G)$，则称E'为G的边割集. 若$\{e\}$为边割集，则称e为割边或桥.
- 在上一页的图中，$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$不是边割集

- 说明：K_n无点割集
- n阶零图既无点割集，也无边割集.
- 若G连通，E'为边割集，则$p(G-E')=2$
- 若G连通，V'为点割集，则$p(G-V')\geq 2$

点连通度与边连通度

- 定义 G为连通非完全图

  点连通度— $\kappa(G) = \min\{\,|V'|\;\big|\; V'\text{为点割集}\,\}$

  规定 $\kappa(K_n) = n-1$

  若G非连通，$\kappa(G) = 0$

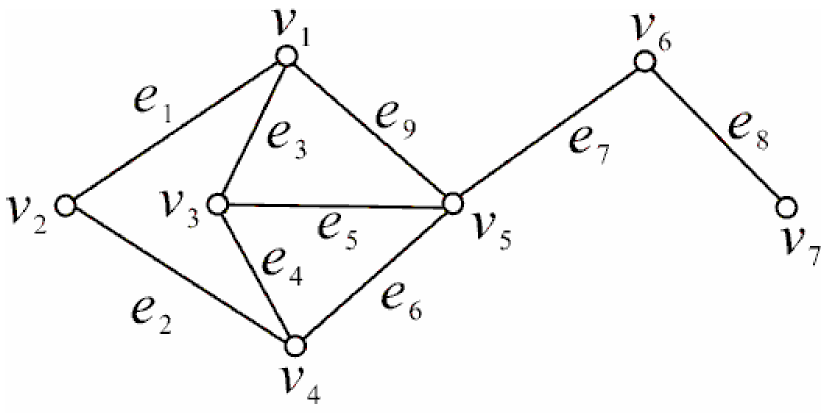
  若 $\kappa(G) \geq k$，则称G为 k-连通图

- 定义 设G为连通图

  边连通度——$\lambda(G) = \min\{|E'|\;\big|\; E'\text{为边割集}\}$

  若G非连通，则$\lambda(G) = 0$

  若$\lambda(G) \geq r$，则称G是 r 边-连通图



- 图中， $\kappa=\lambda=1$，它是 1-连通图 和 1边-连通图

几点说明

- $\kappa(K_n)=\lambda(K_n)=n-1$
- G非连通，则 $\kappa=\lambda=0$
- 若G中有割点，则$\kappa=1$，若有桥，则$\lambda=1$
- 若$\kappa(G)=k$, 则G是1-连通图，2-连通图，…，k-连通图，但不是$(k+s)$-连通图，$s\geq1$
- 若$\lambda(G)=r$, 则G是1-边连通图，2-边连通图，…，r-边连通图，但不是$(r+s)$-边连通图，$s\geq1$

有向图的连通性

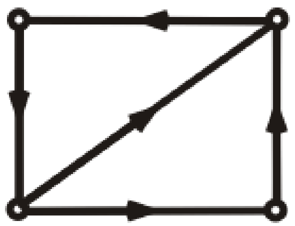
设有向图$D=<V,E>$
u可达v: u到v有通路. 规定u到自身总是可达的.
可达具有自反性和传递性

D弱连通(连通): 基图为无向连通图
D单向连通: $\forall u,v \in V$，u可达v 或v可达u
D强连通: $\forall u,v \in V$，u与v相互可达

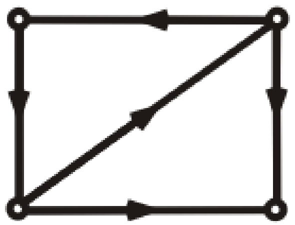
强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

有向图的连通性(续)

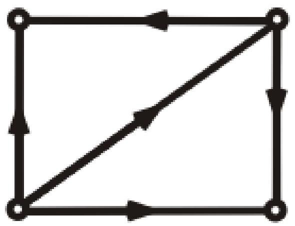
例



强连通



单向连通



弱连通

定理(强连通判别法) D强连通，当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的回路

定理(单向连通判别法) D单向连通，当且仅当D中存在经过每个顶点至少一次的通路

作业

- P138
- 5.16
- 5.17
- 5.18

问题？