离散数学

集合论
3.3集合中元素的计数

3.3 集合中元素的计数

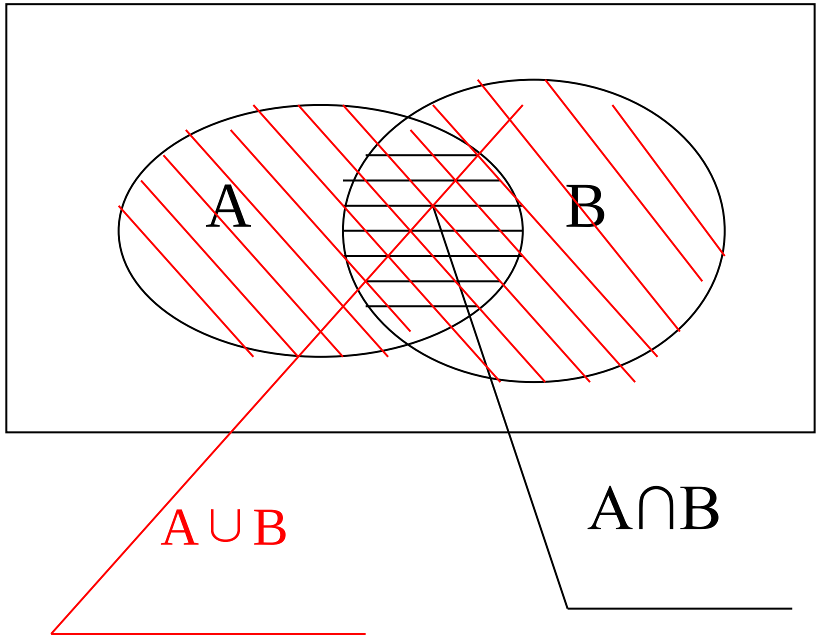
- 集合的基数与有穷集合
- 包含排斥原理
- 有穷集的计数

集合的基数与有穷集合

- 集合 A 的基数：集合A中的元素数，记作 card$A$
- 有穷集 A： card$A$=|A|=n，n为自然数.
- 有穷集的实例：
  - $A=\{a,b,c\}$, card$A$=|A|=3；
  - $B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=|$B$|=0
- 无穷集的实例：
  - N, Z, Q, R, C 等

- **例如有AB两个商店，A店经营1000种商品，B店经营1200种商品，其中有100种商品两个商店都经营，问两个商店共经营多少种商品？**

显然 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$



如果有ABC三个有限集合，则

$|A\cup B\cup C|=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|$

$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|$

$=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-(|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|)$

$=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

包含排斥原理

- 定理 设 S 为有穷集，$P_1, P_2, \ldots, P_m$ 是 m 种性质，A_i 是 S 中具有性质 P_i 的元素构成的子集，$i=1, 2,\ldots, m$.则 S 中不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 的元素数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}| \\
&= |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots \\
&+ (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|
\end{aligned}
$$

证明

证明要点：任何元素 x，如果不具有任何性质，则对等式右边计数贡献为 1 ，否则为 0

证 设 x不具有性质 $P_1, P_2, \ldots, P_m$,

$$x \notin A_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x \notin A_i \cap A_j,\ 1 \le i < j \le m$$

$$\ldots$$

$$x \notin A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m,$$

x 对右边计数贡献为

$$1 - 0 + 0 - 0 + \ldots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

证明

设 x具有 n 条性质，$1 \le n \le m$

x 对 $|S|$ 贡献为 1

x 对 $\sum_{i=1}^{m} |A_i|$贡献为 C_n^1

x 对 $\sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$ 贡献为 C_n^2

….

x 对 $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$ 贡献为 C_n^m

x 对右边计数贡献为

$$1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^m C_n^m = 0$$

推论

S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$$

$$= \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots$$

$$+ (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$$

证明 $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m|$

$$= |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}|$$

$$= |S| - |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_m}|$$

将定理 1 代入即可

应用

例1 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？

解： $S = \{ x \mid x \in \mathrm{Z}, 1 \le x \le 1000 \}$,

如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C：

$A = \{ x \mid x \in S, 5 \mid x \}$,

$B = \{ x \mid x \in S, 6 \mid x \}$,

$C = \{ x \mid x \in S, 8 \mid x \}$

例1（续）

对上述子集计数：

$|S|=1000,$

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200,\quad |B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$，

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125,$

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33,\quad |A\cap C| = \lfloor 1000/40 \rfloor=25,$

$|B\cap C|=\lfloor 1000/24 \rfloor=41,$

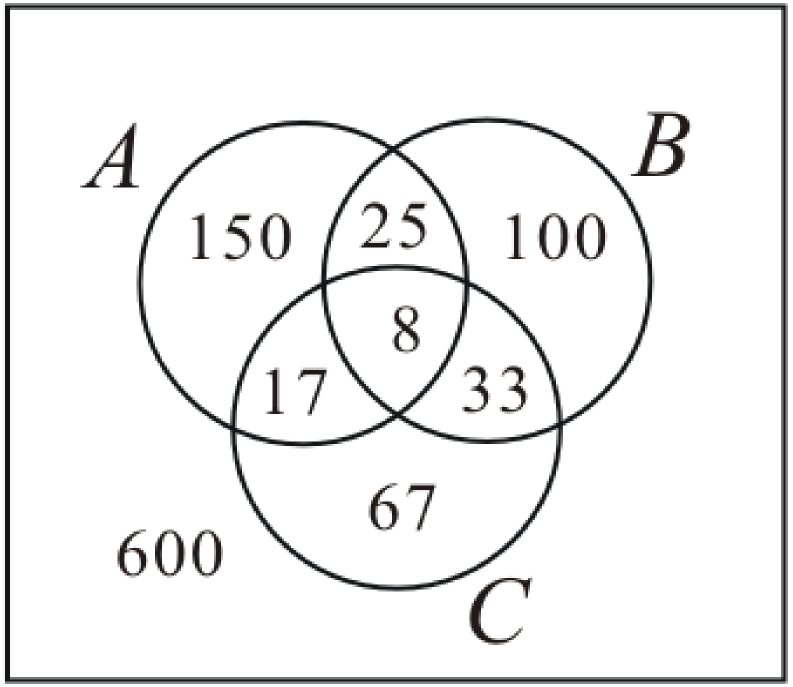
$|A\cap B\cap C| = \lfloor 1000/120 \rfloor=8,$

代入公式

$N = 1000-(200+166+125)+(33+25+41)-8=600$

文氏图法

- 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



例2

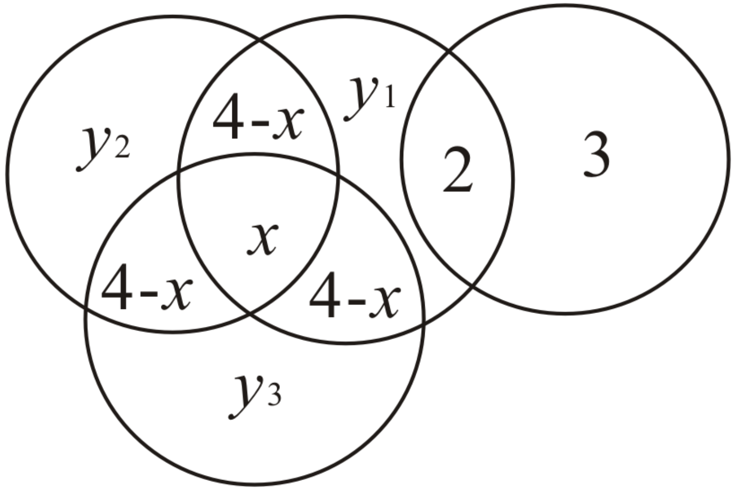
24名科技人员，每人至少会1门外语.

英语：13；　日语：5；　德语：10；　法语：9

英日：2；　　英德：4；　英法：4；　　法德：4

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数



$x+2(4-x)+y_1+2=13$

$x+2(4-x)+y_2=10$

$x+2(4-x)+y_3=9$

$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3=19$

$x=1, y_1=4, y_2=3, y_3=2$

例3 求欧拉函数的值

欧拉函数： $\phi(n)$

表示$\{0,1,\ldots,n-1\}$中与n互素的数的个数.

$\phi(12)=4$，与12互素的数有1, 5, 7, 11.

解： n 的素因子分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

$$A_i = \{\, x \mid 0 \le x < n-1 \text{且 } p_i \text{整除 } x \,\}$$

$$\phi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}|$$

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad 1 \le i < j \le n$$

$$\ldots$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k| = \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k}$$

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_k}| \\
&= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \ldots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \ldots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) \\
&\quad - \ldots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} \\
&= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)
\end{aligned}$$

实例

与 60 互素的正整数

$$\phi(60) = 60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})$$

$$= 60\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = 16$$

有 16 个：

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59.

作业

- P77
- 3.18
- 3.19
- 3.21

问题？