

离散数学

图论

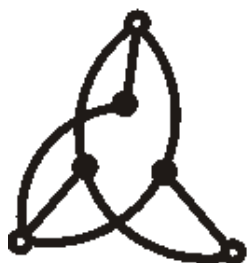
6.4 平面图

6.4 平面图

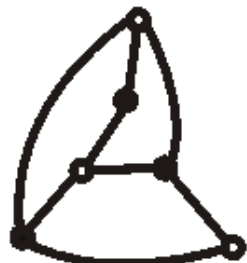
- 平面图与平面嵌入
- 平面图的面
- 极大平面图与极小非平面图
- 欧拉公式
- 平面图的对偶图
- 地图着色与四色定理

平面图和平面嵌入

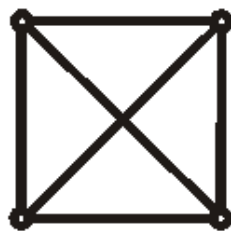
- **定义** 如果能将图 G 除顶点外, 边不相交地画在平面上, 则称 G 是**平面图**. 这个画出的无边相交的图称作 G 的**平面嵌入**. 没有平面嵌入的图称作**非平面图**.
- 例如 下图中(1)~(4)是平面图, (2)是(1)的平面嵌入, (4)是(3)的平面嵌入. (5)是非平面图.



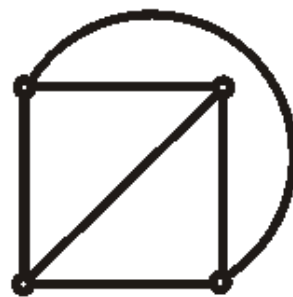
(1)



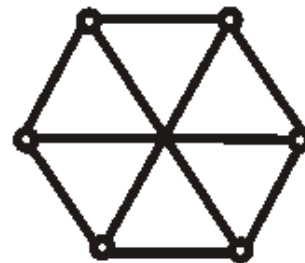
(2)



(3)



(4)



(5)

平面图和平面嵌入(续)

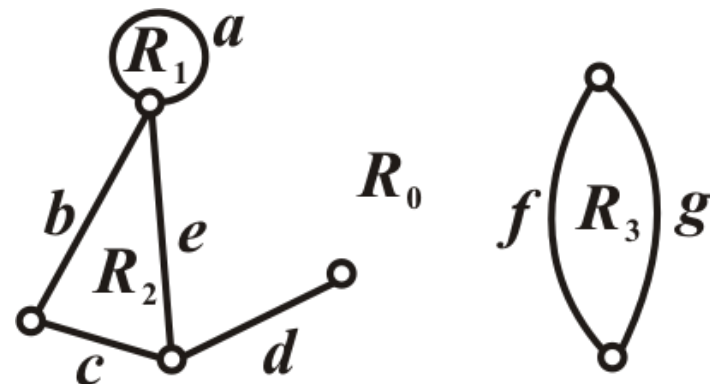
- 今后称一个图是平面图, 可以是指定义中的平面图, 又可以是指平面嵌入, 视当时的情况而定. 当讨论的问题与图的画法有关时, 是指平面嵌入.
- K_5 和 $K_{3,3}$ 是非平面图
- 设 $G' \subseteq G$, 若 G 为平面图, 则 G' 也是平面图; 若 G' 为非平面图, 则 G 也是非平面图.
- $K_n (n \geq 5)$, $K_{n,m} (n, m \geq 3)$ 都是非平面图.
- 平行边与环不影响图的平面性.

平面图的面与次数

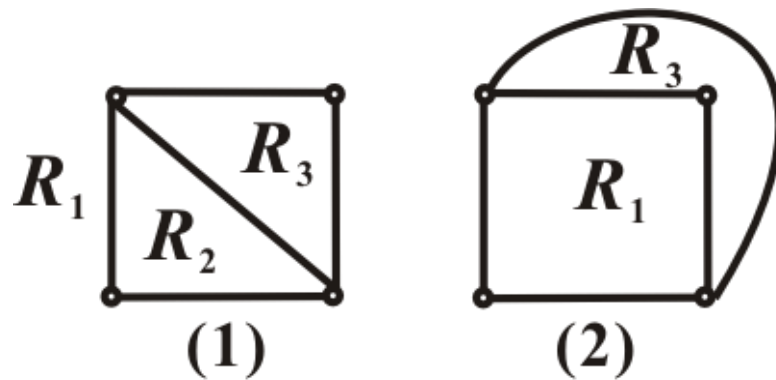
- 设 G 是一个平面嵌入
- **G 的面**: 由 G 的边将平面划分成的每一个区域
- **无限面(外部面)**: 面积无限的面, 用 R_0 表示
- **有限面(内部面)**: 面积有限的面, 用 R_1, R_2, \dots, R_k 表示
- **面 R_i 的边界**: 包围 R_i 的所有边构成的回路组
- **面 R_i 的次数**: R_i 边界的长度, 用 $\deg(R_i)$ 表示
- **定理** 平面图各面的次数之和等于边数的2倍.
- 证 每条边可能在两个面的公共边界上, 也可能只在一个面的边界上. 前者, 在每个面的边界上这条边只出现一次, 计算两次. 后者, 它在这个面的边界上出现2次, 也计算两次.

平面图的面与次数(续)

- 例1 右图有4个面, $\deg(R_1)=1$, $\deg(R_2)=3$, $\deg(R_3)=2$, $\deg(R_0)=8$.



- 例2 右边2个图是同一个平面图的平面嵌入. R_1 在(1)中是外部面, 在(2)中是内部面; R_2 在(1)中是内部面, 在(2)中是外部面. 其实, 在平面嵌入中可把任何面作为外部面.

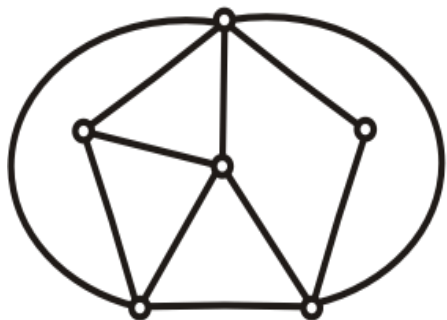


极大平面图

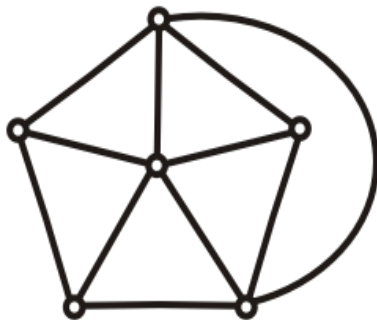
- **定义** 若 G 是简单平面图, 并且在任意两个不相邻的顶点之间加一条新边所得图为非平面图, 则称 G 为**极大平面图**.
- 例如, K_5 若删去一条边是极大平面图.
 K_1, K_2, K_3, K_4 都是极大平面图(它们已无不相邻顶点).

实例

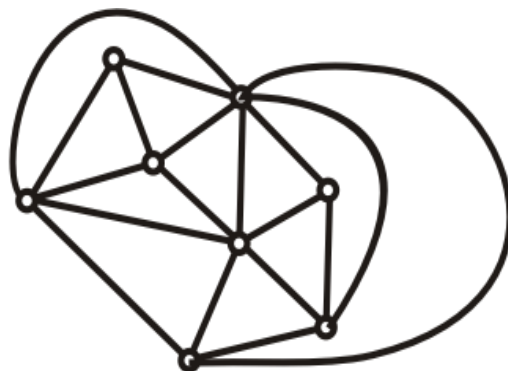
- 例 是否是极大平面图?



不是



不是



是

极大平面图

- **定理** $n(n \geq 3)$ 阶简单平面图是极大平面图当且仅当它连通且每个面的次数都为3.
- 极大平面图必连通.
- 阶数大于等于3的极大平面图中不可能有割点和桥.
- 任何 $n(n \geq 4)$ 阶极大平面图 G 均有 $\delta(G) \geq 3$.

极小非平面图

- **定义** 若 G 是非平面图, 并且任意删除一条边所得图都是平面图, 则称 G 为**极小非平面图**.
- 极小非平面图必为简单图
- 例如, $K_5, K_{3,3}$ 是极小非平面图

欧拉公式

• **定理 (欧拉公式)** 设 G 为 n 阶 m 条边 r 个面的连通平面图, 则

$$n-m+r=2.$$

证 对边数 m 做归纳证明.

$m=0$, G 为平凡图, 结论为真.

设 $m=k(k \geq 0)$ 结论为真, $m=k+1$ 时分情况讨论如下:

- (1) 若 G 中有一个1度顶点 v , 则 $G'=G-v$ 连通, 有 $n-1$ 个顶点, k 条边和 r 个面. 由归纳假设, $(n-1)-k+r=2$, 即 $n-(k+1)+r=2$, 得证 $m=k+1$ 时结论成立.
- (2) 否则, G 中必有圈. 删除一个圈上的一条边, 记作 G' . G' 连通, 有 n 个顶点, k 条边和 $r-1$ 个面. 由归纳假设, $n-k+(r-1)=2$, 即 $n-(k+1)+r=2$, 得证 $m=k+1$ 时结论也成立.

欧拉公式(续)

- 推论(欧拉公式的推广) 设 G 是有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, 则

$$n - m + r = p + 1$$

- 证 设第 i 个连通分支有 n_i 个顶点, m_i 条边和 r_i 个面. 对各连通分支用欧拉公式,

$$n_i - m_i + r_i = 2, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

求和并注意 $r = r_1 + \dots + r_p - p + 1$, 即得

$$n - m + r = 2p - p + 1$$

平面图性质

- **定理** 设 G 为 n 阶 m 条边的连通平面图, 每个面的次数不小于 l ($l \geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$$

设 G 为有 p ($p \geq 2$) 个连通分支的平面图, 且每个面的次数不小于 l ($l \geq 3$), 则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-p-1)$$

- 证 由各面次数之和等于边数的2倍及欧拉公式得

$$2m \geq lr = l(2+m-n)$$

可解得所需结论.

对 p ($p \geq 2$) 个连通分支的情况类似可证.

平面图性质 (续)

推论 K_5 和 $K_{3,3}$ 不是平面图.

证 用反证法, 假设它们是平面图,

则 $K_5 : n=5, m=10, l=3$

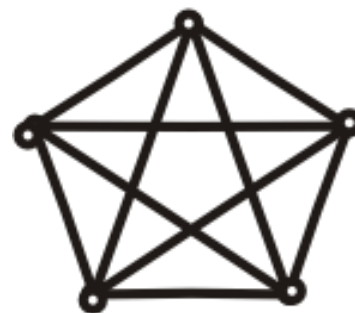
$$10 \leq \frac{3}{3-2} \times (5-2) = 9$$

矛盾.

$$K_{3,3} : n=6, m=9, l=4$$

$$9 \leq \frac{4}{4-2} \times (6-2) = 8$$

矛盾.



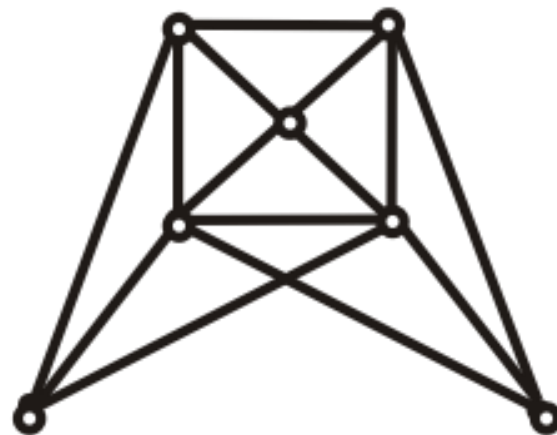
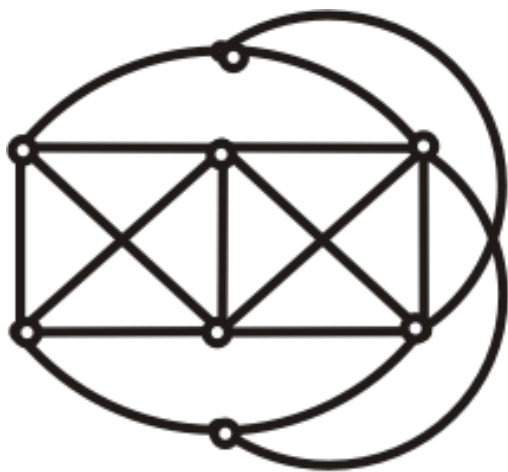
K_5



$K_{3,3}$

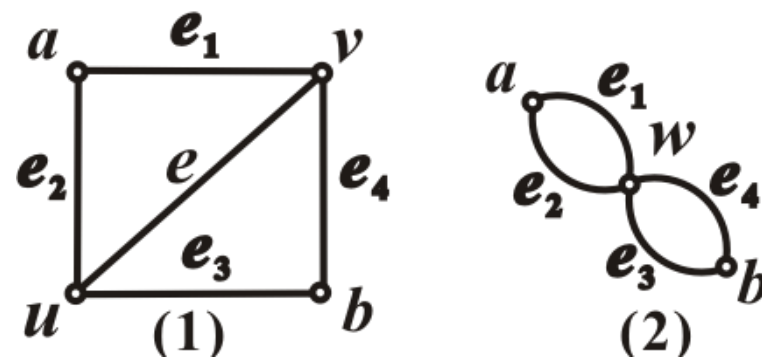
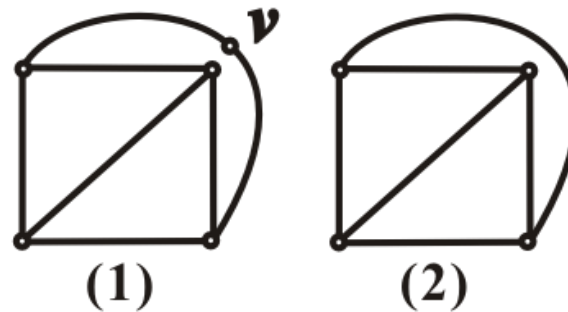
平面图性质 (续)

- 下面两个图是否是平面图?



同胚与收缩

- 消去2度顶点 v 如上图从(1)到(2)
- 插入2度顶点 v 如上图从(2)到(1)
- G_1 与 G_2 同胚: G_1 与 G_2 同构, 或经过反复插入、或消去2度顶点后同构
- 收缩边 e 如下图从(1)到(2)

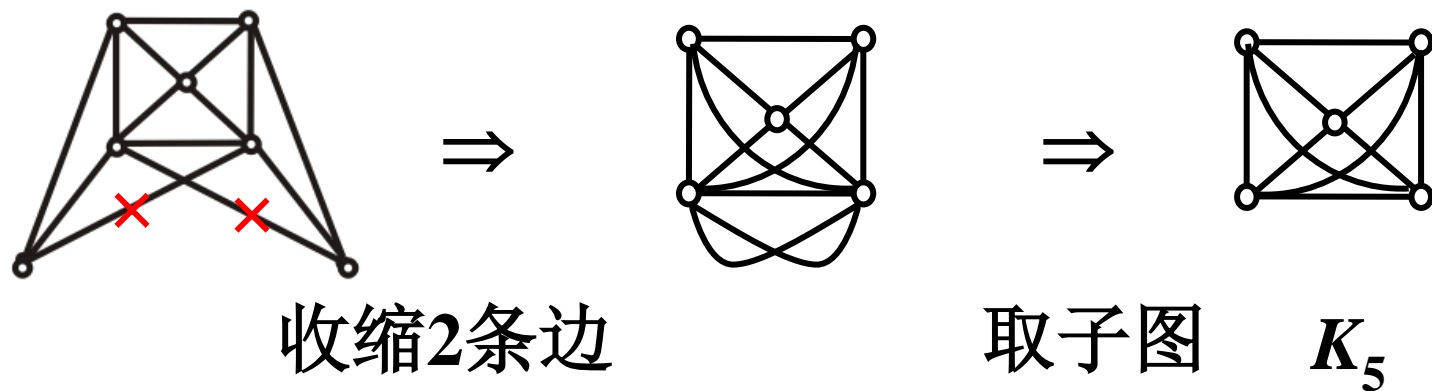
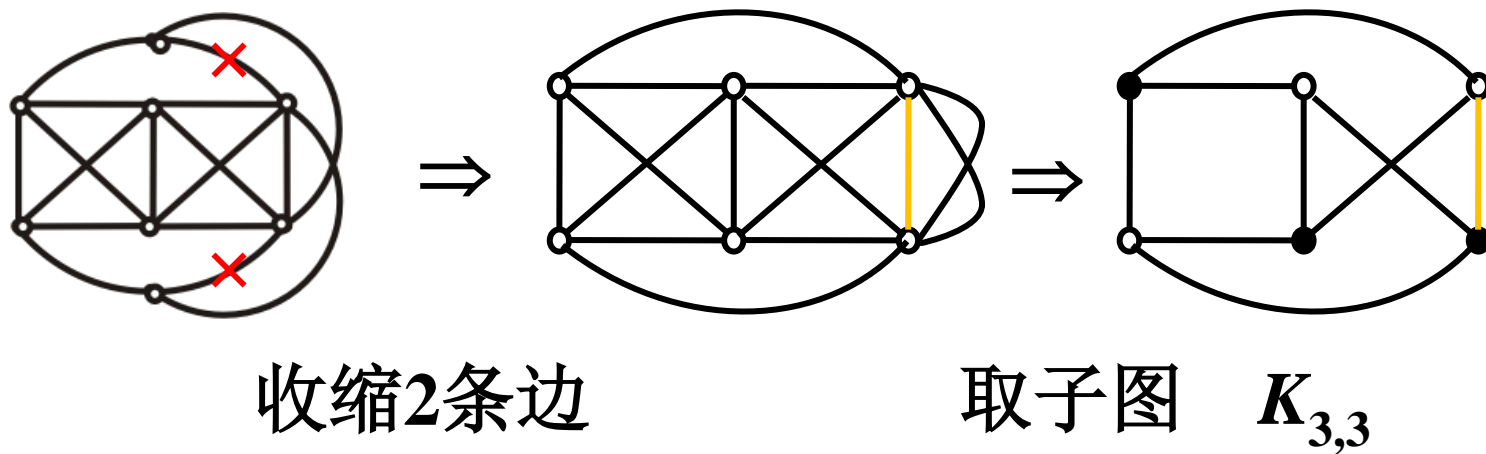


库拉图斯基定理

- **定理** G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 中不含与 K_5 同胚的子图, 也不含与 $K_{3,3}$ 同胚的子图.
- **定理** G 是平面图 $\Leftrightarrow G$ 中无可收缩为 K_5 的子图, 也无可收缩为 $K_{3,3}$ 的子图.

非平面图证明

- 例 证明下述2个图均为非平面图.



平面图的对偶图

• **定义** 设平面图 G , 有 n 个顶点, m 条边和 r 个面, G 的**对偶图** $G^* = \langle V^*, E^* \rangle$ 如下:

• 在 G 的每一个面 R_i 中任取一个点 v_i^* 作为 G^* 的顶点,

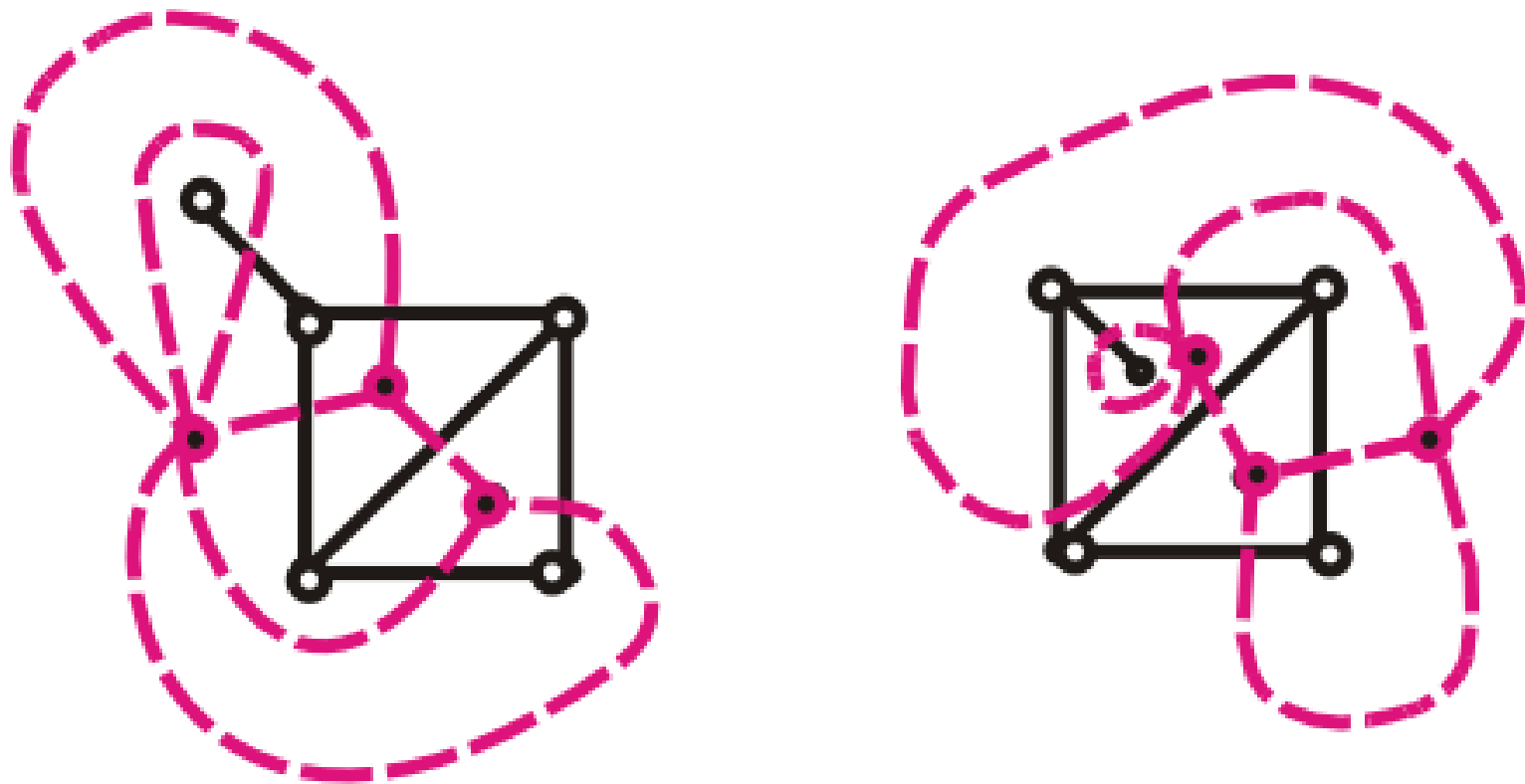
$$V^* = \{ v_i^* / i=1, 2, \dots, r \}.$$

• 对 G 每一条边 e_k , 若 e_k 在 G 的面 R_i 与 R_j 的公共边界上, 则作边 $e_k^* = (v_i^*, v_j^*)$, 且与 e_k 相交; 若 e_k 为 G 中的桥且在面 R_i 的边界上, 则作环 $e_k^* = (v_i^*, v_i^*)$.

$$E^* = \{ e_k^* | k=1, 2, \dots, m \}.$$

平面图的对偶图的实例

- 例 黑色实线为原平面图, 红色虚线为其对偶图



平面图的对偶图的性质

性质：

- 对偶图是平面图，而且是平面嵌入.
- 对偶图是连通图
- 若边 e 为 G 中的环，则 G^* 与 e 对应的边 e^* 为桥；若 e 为桥，则 G^* 中与 e 对应的边 e^* 为环.
- 同构的平面图的对偶图不一定同构.

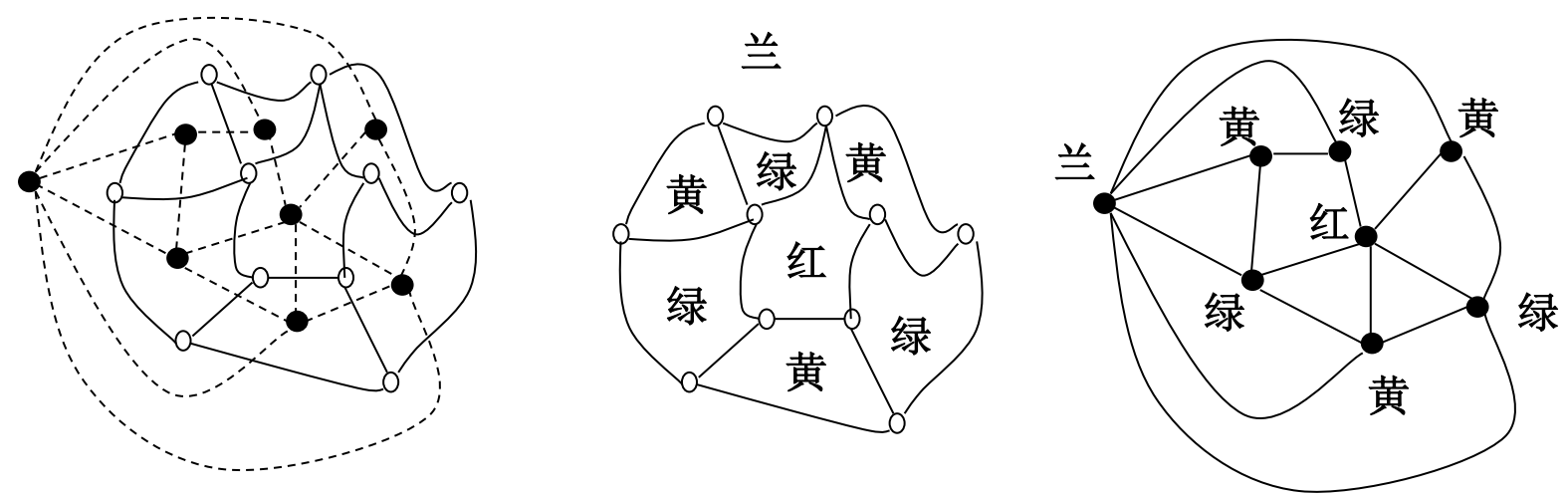
上页两个平面图同构, 它们的对偶图不同构.

地图着色

- **地图**: 连通无桥平面图의 平面嵌入, 每一个面是一个国家. 若两个国家有公共边界, 则称它们是相邻的.
- **地图着色(面着色)**: 对地图的每个国家涂一种颜色, 使相邻的国家涂不同的颜色.
- **地图着色问题**: 用尽可能少的颜色给地图着色.
- 地图着色可以转化成平面图的点着色. 当 G 中无桥时, G^* 中无环. G 的面与 G^* 的顶点对应, 且 G 的两个面相邻当且仅当 G^* 对应的两个顶点相邻, 从而 G 的面着色等同于 G^* 的点着色.

地图着色与平面图的点着色

• 例



四色定理

- **四色猜想**(100多年前): 任何地图都可以用4种颜色着色, 即任何平面图都是4-可着色的.
- 1890年希伍德证明五色定理: 任何平面图都是5-可着色的.
- 1976年美国数学家阿佩尔和黑肯证明, 如果四色猜想不成立, 则存在一个反例, 这个反例大约有2000种可能(后来有人简化到600多种), 他们用计算机分析了所有这些可能, 都没有导致反例.
- **四色定理** 任何平面图都是4-可着色的.

作业

- P154
- 6.19
- 6.22
- 6.24
- 6.25

问题？

