

离散数学

集合论

4.5 等价关系与偏序关系

4.5 等价关系与偏序关系

- 等价关系的定义与实例
- 等价类及其性质
- 商集与集合的划分
- 等价关系与划分的一一对应
- 偏序关系
- 偏序集与哈斯图
- 偏序集中的特定元素

等价关系的定义与实例

- **定义** 设 R 为非空集合上的关系. 如果 R 是自反的、对称的和传递的, 则称 R 为 A 上的**等价关系**. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x, y \rangle \in R$, 称 x 等价于 y , 记做 $x \sim y$.
- **实例** 设 $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, 如下定义 A 上的关系 R :
$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \pmod{3} \equiv y \pmod{3} \}$$

其中 $x \pmod{3} \equiv y \pmod{3}$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.
- **例如** $4 \pmod{3} = 7 \pmod{3}$ $3 \pmod{3} = 6 \pmod{3}$
$$R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 6 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 7 \rangle, \langle 5, 2 \rangle, \langle 5, 5 \rangle, \langle 5, 8 \rangle, \langle 6, 3 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 7, 1 \rangle, \langle 7, 4 \rangle, \langle 7, 7 \rangle, \langle 8, 2 \rangle, \langle 8, 5 \rangle, \langle 8, 8 \rangle \}$$

等价关系的验证

验证模 3 相等关系 R 为 A 上的等价关系, 因为

$$\forall x \in A, \text{ 有 } x(\bmod 3) \equiv x(\bmod 3)$$

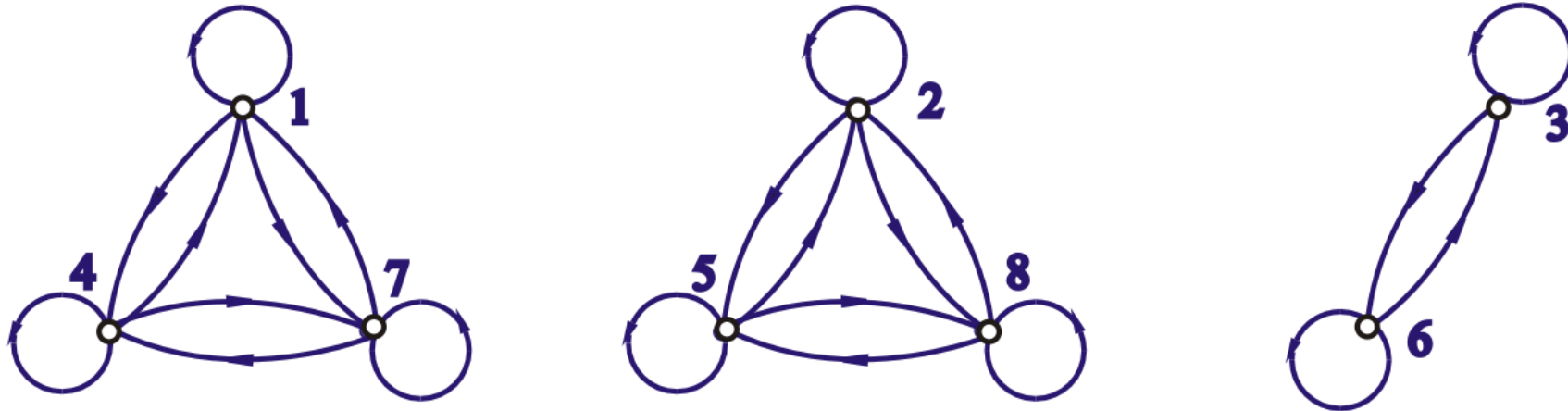
$$\forall x, y \in A, \text{ 若 } x(\bmod 3) \equiv y(\bmod 3), \text{ 则有 } y(\bmod 3) \equiv x(\bmod 3)$$

$$\forall x, y, z \in A, \text{ 若 } x(\bmod 3) \equiv y(\bmod 3), y(\bmod 3) \equiv z(\bmod 3), \text{ 则有 } x(\bmod 3) \equiv z(\bmod 3)$$

自反性、对称性、传递性得到验证

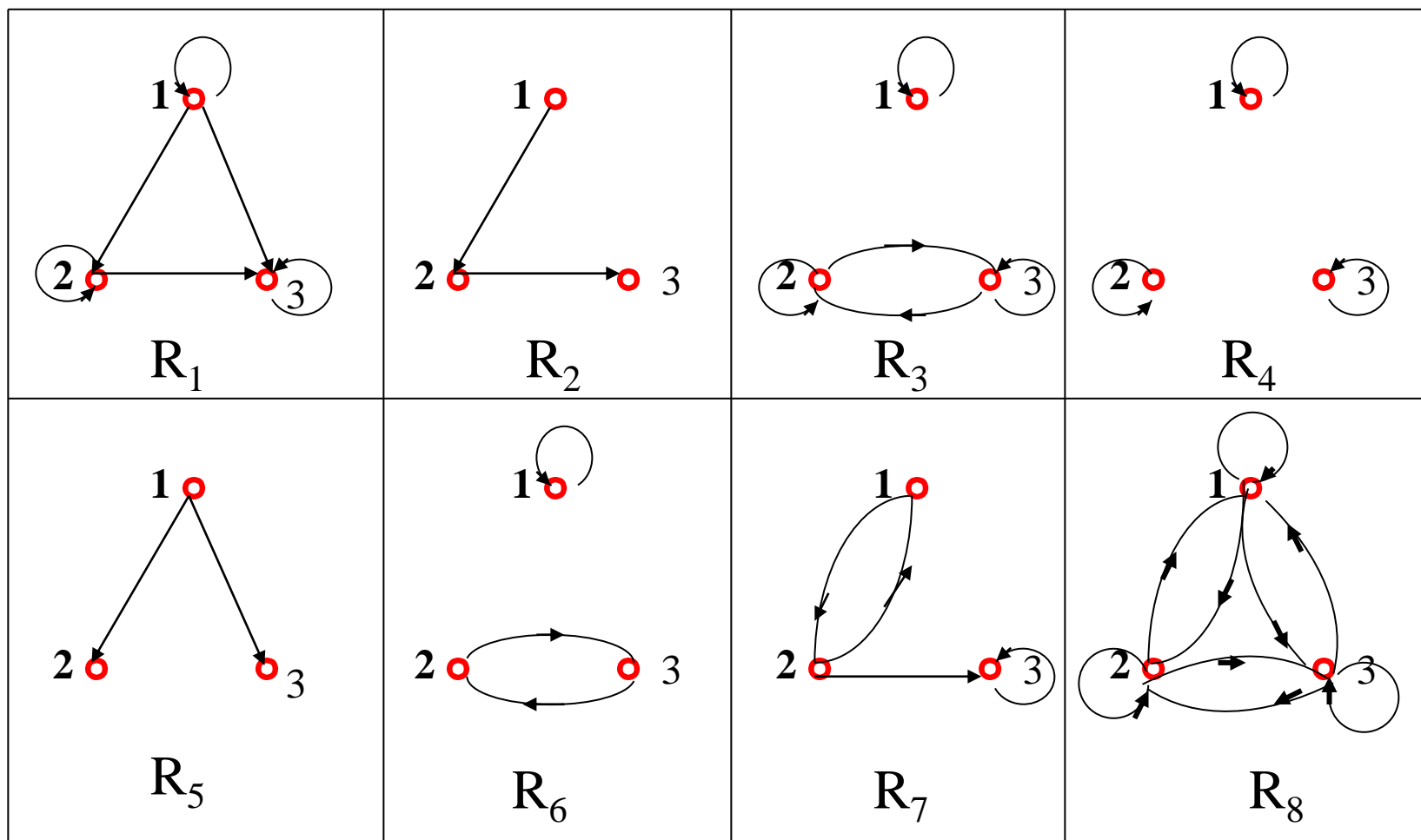
A上模3等价关系的关系图

- 设 $A=\{1,2,\dots,8\}$,
 $R=\{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$



- 从关系图可看出，R是自反、对称、传递的关系，所以R是等价关系。
- 等价关系R的有向图可能由若干个独立子图(R图的一部分)构成的，每个独立子图都是完全关系图。
- 上述关系R图就是由三个独立的完全图构成的。

- 下面给出 $A=\{1,2,3\}$ 中的八个关系，根据等价关系有向图的特点，判断哪些是等价关系



等价类

- **定义** 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$$

称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的**等价类**, 简称为 x 的等价类, 简记为 $[x]$.

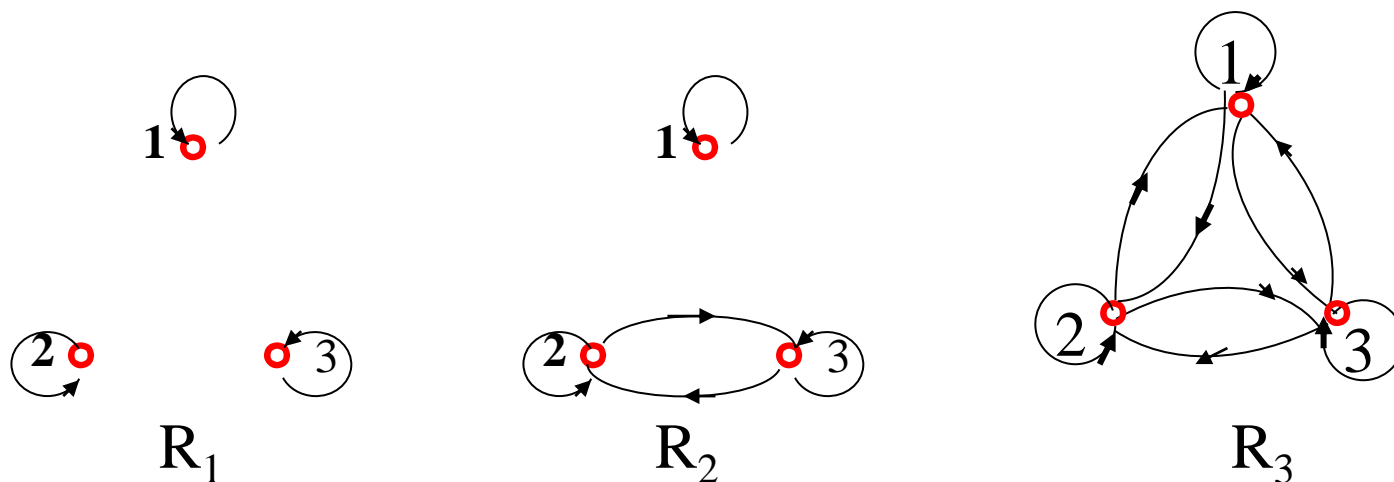
- **实例** $A = \{ 1, 2, \dots, 8 \}$ 上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{ 1, 4, 7 \}$$

$$[2] = [5] = [8] = \{ 2, 5, 8 \}$$

$$[3] = [6] = \{ 3, 6 \}$$

- 由等价关系图求等价类：R图中每个独立子图上的结点，构成一个等价类。不同的等价类个数=独立子图个数



- 上述三个等价关系各有几个等价类？说出对应的各个等价类
- 从上述模3同余关系例子中，可以归纳出等价类的性质：任何两个等价类要么相等，要么交集为空；那么在什么情况下相等？那么在什么情况下交集为空？

等价类的性质

• **定理1** 设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

(1) $\forall x \in A, [x]$ 是 A 的非空子集.

(2) $\forall x, y \in A$, 如果 $x R y$, 则 $[x]=[y]$.

(3) $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交.

(4) $\cup \{ [x] \mid x \in A \} = A$, 即所有等价类的并集就是 A .

- 证明 $\forall x, y \in A$, 如果 $x R y$, 则 $[x]=[y]$.
- 证明: 若 $x R y$, 则任何 $a \in [x]$, 有 $\langle x, a \rangle \in R$,
- 由对称性得 $\langle y, x \rangle \in R$, 再由传递性得 $\langle y, a \rangle \in R, \therefore a \in [y]$, 所以 $[x] \subseteq [y]$ 。

类似可证 $[y] \subseteq [x] \therefore [x]=[y]$ 。

- 证明 $\forall x, y \in A$, 如果 $x \not R y$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交.

证明: 设 $\langle x, y \rangle \notin R$, 假设 $[x] \cap [y] \neq \Phi$, 则存在 $a \in [x] \cap [y]$,

$\therefore a \in [x] \wedge a \in [y]$,

$\therefore \langle x, a \rangle \in R, \langle y, a \rangle \in R$, 由 R 对称得 $\langle a, y \rangle \in R$

又由 R 传递得 $\langle x, y \rangle \in R$, 产生矛盾。

实例

$A = \{1, 2, \dots, 8\}$ 上模 3 等价关系的等价类:

$$[1] = [4] = [7] = \{1, 4, 7\},$$

$$[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\},$$

$$[3] = [6] = \{3, 6\}$$

以上3类两两不交, 且 $\{1, 4, 7\} \cup \{2, 5, 8\} \cup \{3, 6\} = \{1, 2, \dots, 8\}$

商集

- **定义** 设 R 为非空集合 A 上的等价关系, 以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的**商集**, 记做 A/R , $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$

- **实例** $A = \{1, 2, \dots, 8\}$,

A 关于模3等价关系 R 的商集为

$$A/R = \{ \{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6\} \}$$

A 关于恒等关系和全域关系的商集为:

$$A/I_A = \{ \{1\}, \{2\}, \dots, \{8\} \}$$

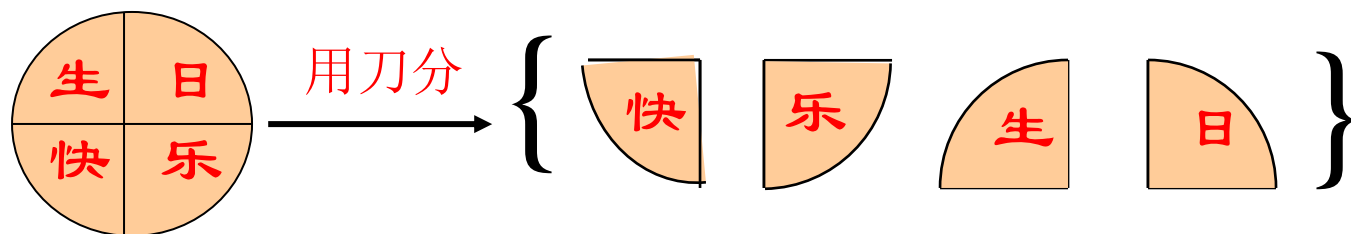
$$A/E_A = \{ \{1, 2, \dots, 8\} \}$$

- “商”和除法有关，比如把一块蛋糕平均分成四份，从两种不同的角度看这件事：

- 从算术角度看：1用4除，每份 $1/4$ ，这就是“商”，于是：

$$1 = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4$$

- 从集合角度看：



- 集合A用模3同余关系R划分，得到三个等价类，所以

$$A \xrightarrow{\text{用R分}} \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\} = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} \text{---商集}$$

集合的划分

定义 设 A 为非空集合, 若 A 的子集族 $\pi(\pi \subseteq P(A))$ 满足下面条件:

(1) $\emptyset \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

(3) $\bigcup \pi = A$

则称 π 是 A 的一个**划分**, 称 π 中的元素为 A 的**划分块**.

例题

例1 设 $A = \{a, b, c, d\}$,

给定 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ 如下:

$$\pi_1 = \{ \{a, b, c\}, \{d\} \}, \quad \pi_2 = \{ \{a, b\}, \{c\}, \{d\} \}$$

$$\pi_3 = \{ \{a\}, \{a, b, c, d\} \}, \quad \pi_4 = \{ \{a, b\}, \{c\} \}$$

$$\pi_5 = \{ \emptyset, \{a, b\}, \{c, d\} \}, \quad \pi_6 = \{ \{a, \{a\}\}, \{b, c, d\} \}$$

哪个（哪些）是 A 的划分？

则 π_1 和 π_2 是 A 的划分, 其他都不是 A 的划分.

等价关系与划分的一一对应

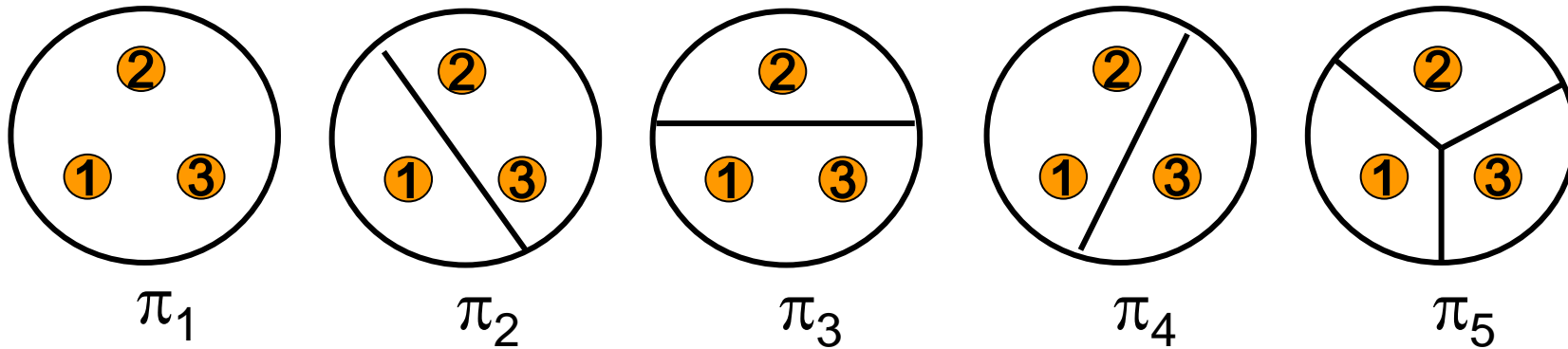
- 商集 A/R 就是 A 的一个划分
- 不同的商集对应于不同的划分
- 任给 A 的一个划分 π , 如下定义 A 上的关系 R :
$$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \text{ 与 } y \text{ 在 } \pi \text{ 的同一划分块中} \}$$

则 R 为 A 上的等价关系, 且该等价关系确定的商集就是 π .

例2 给出 $A = \{1, 2, 3\}$ 上所有的等价关系

求解思路: 先做出 A 的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.

等价关系与划分之间的对应



- π_1 对应于全域关系 E_A , π_5 对应于恒等关系 I_A
- π_2, π_3 和 π_4 分别对应等价关系 R_2, R_3 和 R_4 .

$$R_2 = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \} \cup I_A, \quad R_3 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_4 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} \cup I_A$$

实例

例3 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, 在 $A \times A$ 上定义二元关系 R :

$$\langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$$

求 R 导出的划分.

解 $A \times A = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 1 \rangle, \langle 4, 2 \rangle, \langle 4, 3 \rangle, \langle 4, 4 \rangle \}$

实例（续）

根据 $\langle x, y \rangle$ 的 $x + y = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 将 $A \times A$ 划分成7个等价类:

$$(A \times A)/R = \{ \{ \langle 1, 1 \rangle \}, \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \}, \\ \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \}, \\ \{ \langle 1, 4 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}, \\ \{ \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 4, 2 \rangle \}, \\ \{ \langle 3, 4 \rangle, \langle 4, 3 \rangle \}, \{ \langle 4, 4 \rangle \} \}$$

次序关系

- 次序关系也是常遇到的重要关系，例如：
 - 数值的 \leq 、 $<$ 、 \geq 、 $>$ 关系；
 - 集合的 \subseteq 、 \subset 关系；
 - 图书馆的图书按书名的字母次序排序；
 - 词典中的字(词)的排序；
 - 计算机中文件按文件名排序；
 - 程序按语句次序执行；
- 接下来讨论几种次序关系。

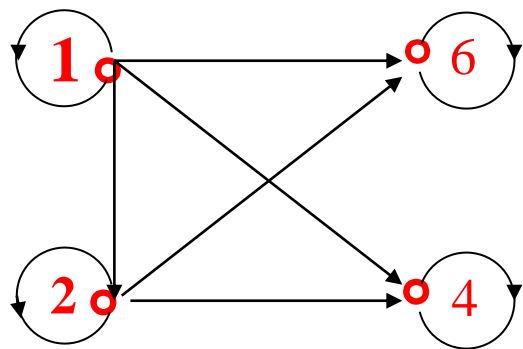
偏序关系

定义 非空集合 A 上的自反、反对称和传递的关系，称为 A 上的**偏序关系**，记作 \leq 。设 \leq 为偏序关系，如果 $\langle x, y \rangle \in \leq$ ，则记作 $x \leq y$ ，读作 x “小于或等于” y 。**注意!!“ \leq ”不是“小于或等于”的含义**

- 实例

- 集合 A 上的恒等关系 I_A 是 A 上的偏序关系。
- 小于或等于关系，整除关系和包含关系也是相应集合上的偏序关系。

例 $A=\{1,2,4,6\}$, \leq 是 A 中的整除关系, 其关系图如下图
显然 \leq 是自反、反对称和传递的, 即它是个偏序关系。



相关概念

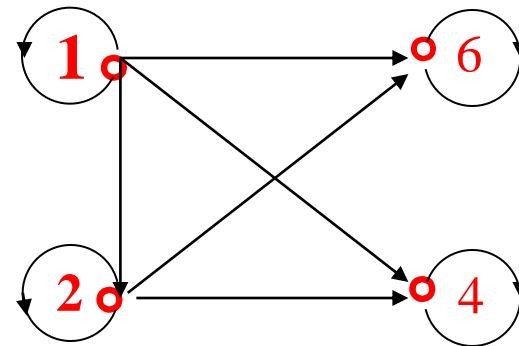
- **x 与 y 可比**: 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系,

$$x, y \in A, x \text{与} y \text{可比} \Leftrightarrow x \leq y \vee y \leq x.$$

- 结论: 任取两个元素 x 和 y , 可能有下述情况:

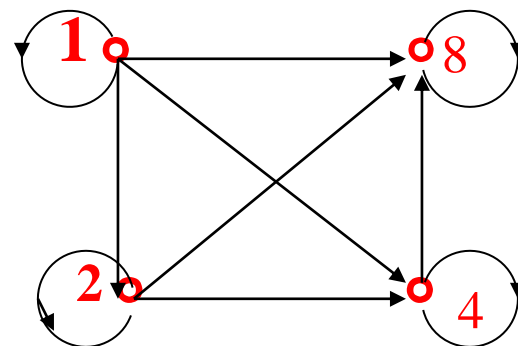
$x < y$ (或 $y < x$), $x = y$, x 与 y 不是可比的

- 上例中1,2,4或1,2,6间是可比较的。而4与6间是不可比较的



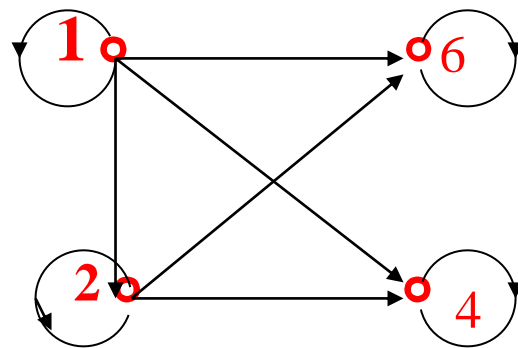
全序关系

- R 为非空集合 A 上的偏序, $\forall x, y \in A$, x 与 y 都是可比的, 则称 R 为 **全序** (或 **线序**)
- 实例: 数集上的小于或等于关系是全序关系
整除关系不是正整数集合上的全序关系
- 例 $B = \{1, 2, 4, 8\}$, \preceq 表示整除关系, 则 \preceq 是全序关系, 如图:
- 全序关系一定是偏序关系, 但是偏序不一定是全序。



相关概念（续）

- **覆盖**：设 R 为非空集合 A 上的偏序关系， $x, y \in A$ ，如果 $x < y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x < z < y$ ，则称 y 覆盖 x 。
- **实例**：{ 1, 2, 4, 6 }集合上的整除关系，
 - 2 覆盖 1，
 - 4 和 6 覆盖 2.
 - 4 不覆盖 1.



- 偏序关系的有向图，不能直观地反映出元素之间的次序，所以下面介绍另外一种图---哈斯图。通过这个图，就能够清晰地反映出元素间的层次。

偏序集与哈斯图

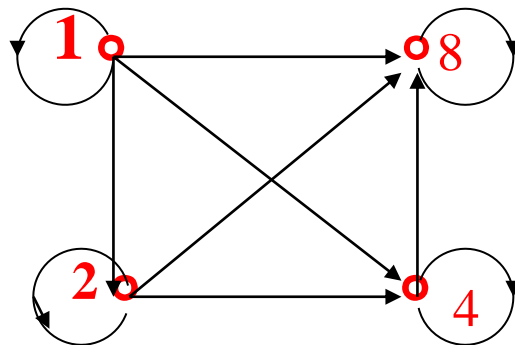
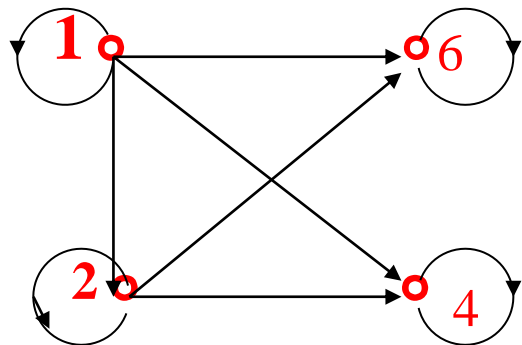
- **哈斯图**：利用偏序自反、反对称、传递性简化的关系图
- **特点**：每个结点没有环，两个连通的结点之间的序关系通过结点位置的高低表示，位置低的元素的顺序在前，具有覆盖关系的两个结点之间连边
- **定义** 集合 A 和 A 上的偏序关系 \leq 一起叫做**偏序集**，记作 $\langle A, \leq \rangle$.
实例：整数集和小于等于关系构成偏序集 $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ ，幂集 $P(A)$ 和包含关系构成偏序集 $\langle P(A), R_{\subseteq} \rangle$.

偏序集哈斯图的画法

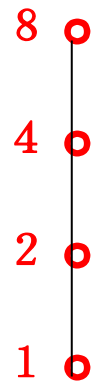
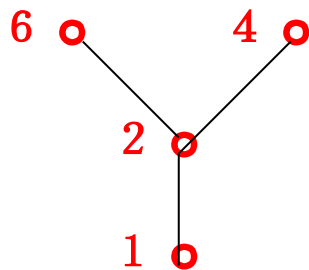
令 $\langle A, \preceq \rangle$ 是偏序集,

1. 用“ \circ ”表示 A 中元素。
2. 如果 $x \preceq y$, 且 $x \neq y$, 则结点 y 要画在结点 x 的上方。
3. 如果 $x \preceq y$, 且 y 盖住 x , x 与 y 之间连一直线。
4. 一般先从最下层结点(全是射出的边与之相连(不考虑环)), 逐层向上画, 直到最上层结点(全是射入的边与之相连)。(采用抓两头, 带中间的方法)

- 例如，前边两个例子：



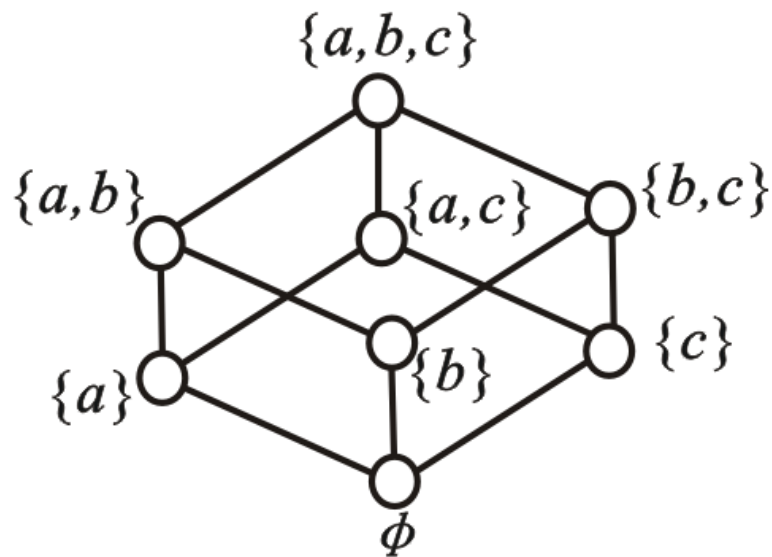
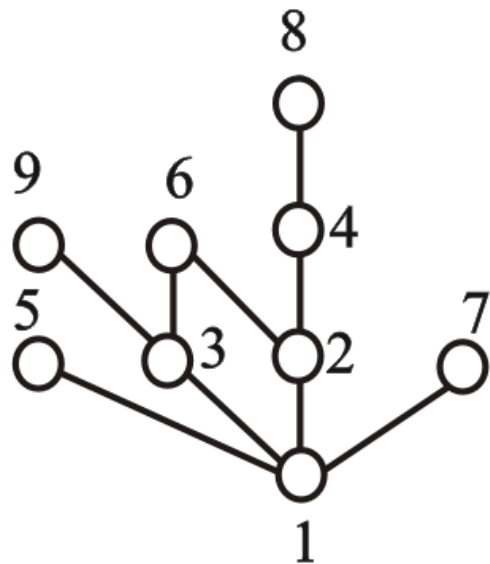
- 它们的哈斯图分别如下：



- 可见右图，是全序，它的哈斯图是一条直线，所以全序也叫线序，或链，是从它的哈斯图得名

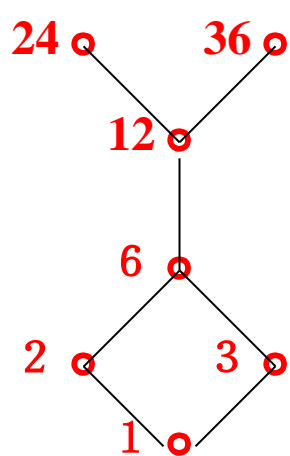
哈斯图实例

- 例4 $\langle \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, R_{\text{整除}} \rangle$
 $\langle P(\{a, b, c\}), R_{\subseteq} \rangle$

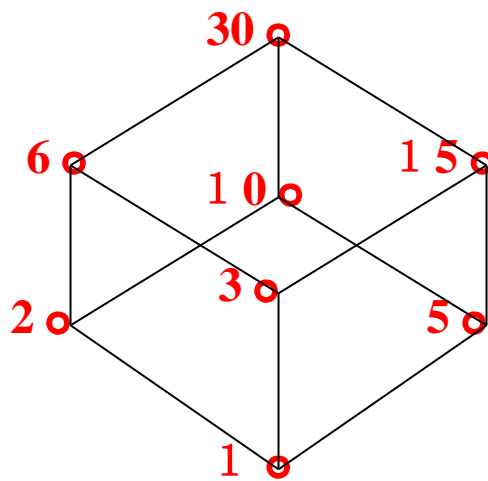


练习

$C=\{1,2,3,6,12,24,36\}$, $D=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, \leq 是C、D上整除关系。
请画出 $\langle C, \leq \rangle$, $\langle D, \leq \rangle$ 的哈斯图



$\langle C, \leq \rangle$



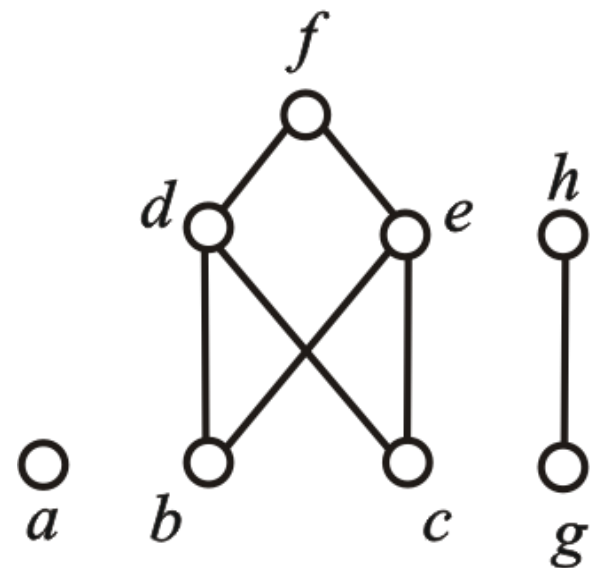
$\langle D, \leq \rangle$

哈斯图实例（续）

- 例5
- 已知偏序集 $\langle A, R \rangle$ 的哈斯图如右图所示，试求出集合 A 和关系 R 的表达式。

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$$

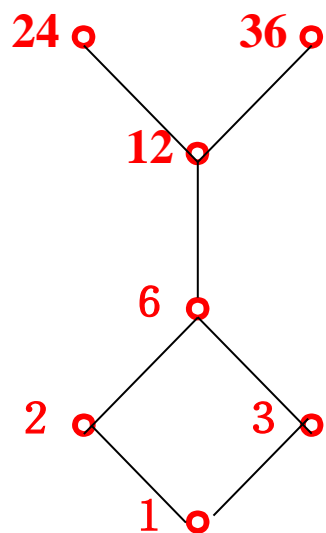
$$R = \{\langle b, d \rangle, \langle b, e \rangle, \langle b, f \rangle, \langle c, d \rangle, \langle c, e \rangle, \langle c, f \rangle, \langle d, f \rangle, \langle e, f \rangle, \langle g, h \rangle\} \cup I_A$$



偏序集的特定元素

• **定义** 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in B$.

- (1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最小元**. (y 比 B 中所有元素都小)
- (2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**最大元**. (y 比 B 中所有元素都大)
- (3) 若 $\neg \exists x (x \in B \wedge x < y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极小元**. (在 B 中没有比 y 更小的元素了)
- (4) 若 $\neg \exists x (x \in B \wedge y < x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**极大元**. (在 B 中没有比 y 更大的元素了)



子集B	极小元	极大元
{2,3}		
{1,2,3}		
{6,12,24}		
C		

子集B	最小元	最大元
{2,3}		
{1,2,3}		
{6,12,24}		
C		

举例，给定 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如图所示：

- 从哈斯图找极小(大)元：子集中处在最下(上)层的元素是极小(大)元。
- 从哈斯图找最小(大)元：子集中如果只有唯一的极小(大)元，则这个极小(大)元，就是最小(大)元。否则就没有最小(大)元

特殊元素的性质

- 对于有穷集，极小元和极大元必存在，可能存在多个.
- 最小元和最大元不一定存在，如果存在一定惟一.
- 最小元一定是极小元；最大元一定是极大元.
- 孤立结点既是极小元，也是极大元.

偏序集的特定元素(续)

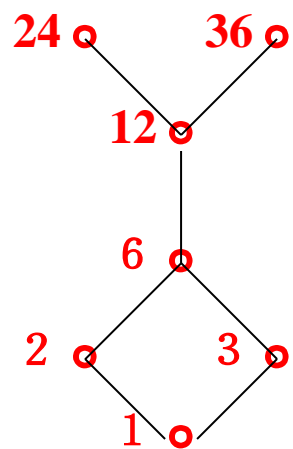
• **定义** 设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$.

(1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**上界**. (上界 y 是 A 中元素, 该元素比 B 中所有元素都大)

(2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**下界**. (上界 y 是 A 中元素, 该元素比 B 中所有元素都小)

(3) 令 $C = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的**最小上界** 或 **上确界**. (上界 y 是 A 中元素, 该元素比 B 中所有元素都大)

(4) 令 $D = \{y \mid y \text{ 为 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 D 的最大元为 B 的**最大下界** 或 **下确界**. (上界 y 是 A 中元素, 该元素比 B 中所有元素都小)



子集B	上界	上确界	下界	下确界
{2,3}				
{1,2,3}				
{6,12,24}				
C				

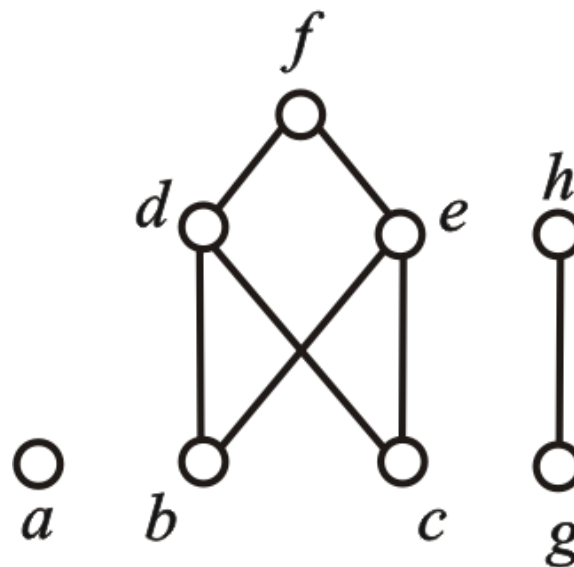
- **举例**，给定 $\langle A, \leq \rangle$ 的哈斯图如图所示：
- 从哈斯图找上(下)界、上(下)确界：**注意**是在**A**中找！

特殊元素的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界存在不一定惟一
- 下确界、上确界如果存在，则惟一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.

实例

- 例6 设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 如下图所示, 求 A 的极小元、最小元、极大元、最大元. 设 $B = \{b, c, d\}$, 求 B 的下界、上界、下确界、上确界.
- 极小元: a, b, c, g ;
- 极大元: a, f, h ;
- 没有最小元与最大元.
- B 的下界和下确界都不存在,
- 上界有 d 和 f
- 上确界为 d



作业

- P116
- 4.16(2)
- 4.24

问题？

