

离散数学

命题逻辑

1.3 等值演算

1.3 命题逻辑等值演算

- 等值式
- 基本等值式
- 等值演算
- 置换规则

等值式

- 例子 看下面三个公式的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	T	T	T

- 从真值表可以看出，不论对P、Q作何指派，都使得 $P \rightarrow Q$ 、 $\neg P \vee Q$ 和 $\neg Q \rightarrow \neg P$ 的真值相同，表明它们之间彼此等值。

等值式

- **定义一：** 若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A \leftrightarrow B$ ，并称 $A \leftrightarrow B$ 是等值式。
- **定义二：** A 、 B 是含有命题变元 P_1, P_2, \dots, P_n 的命题公式，如不论对 P_1, P_2, \dots, P_n 作任何指派，都使得 A 和 B 的真值相同，则称之为 A 与 B 等值，记作 $A \leftrightarrow B$ 。
- 说明：定义中， A, B, \leftrightarrow 均为元语言符号， A 或 B 中可能有哑元出现。
- 例如，在 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (\neg r \wedge r))$ 中， r 为左边公式的哑元。
- 用真值表可验证两个公式是否等值
- 请验证： $p \rightarrow (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow r$$

基本等值式

双重否定律： $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

幂等律： $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律： $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律： $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律： $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

吸收律: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

基本等值式(续)

蕴涵等值式: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

等价等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

假言易位: $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$

等价否定等值式: $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

归谬论: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

注意:

A, B, C 代表任意的命题公式

牢记这些等值式是继续学习的基础

等值公式的证明方法

- 方法1：用列真值表。（不再举例）
- 方法2：用公式的等值变换。(用置换定律)

等值演算与置换规则

等值演算：

由已知的等值式推演出新的等值式的过程

置换规则（置换定律）：若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$ （ $\Phi(B)$ 是一个命题公式， B 是 $\Phi(B)$ 中的一部分且也是合式公式，如果 $A \Leftrightarrow B$ ，用 A 代替 $\Phi(B)$ 中的 B 得到公式 $\Phi(A)$ ，则 $\Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$ 。）

等值演算的基础：

- (1) 等值关系的性质：自反、对称、传递
- (2) 基本的等值式
- (3) 置换规则

性质

- 1)有自反性：任何命题公式A，有 $A \Leftrightarrow A$ 。
- 2)有对称性：若 $A \Leftrightarrow B$ ，则 $B \Leftrightarrow A$
- 3)有传递性：若 $A \Leftrightarrow B$ 且 $B \Leftrightarrow C$ ，则 $A \Leftrightarrow C$

应用举例——证明两个公式等值

例1 证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\text{结合律, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r \quad (\text{德·摩根律, 置换规则})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r \quad (\text{蕴涵等值式, 置换规则})$$

说明: 也可以从右边开始演算 (请做一遍)

因为每一步都用置换规则, 故可不写出

应用举例——证明两个公式不等值

- 例2 证明: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \not\equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$
- 用等值演算不能直接证明两个公式不等值,证明两个公式不等值的基本思想是找到一个赋值使一个成真,另一个成假.
- 方法一 真值表法 (自己证)
- 方法二 观察赋值法. 容易看出000, 010等是左边的成真赋值, 是右边的成假赋值.
- 方法三 用等值演算先化简两个公式, 再观察.

应用举例——判断公式类型

例3 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

解 $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

$$\Leftrightarrow q \wedge \neg(\neg p \vee q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \wedge \neg q) \quad (\text{德·摩根律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge (q \wedge \neg q) \quad (\text{交换律, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 0 \quad (\text{矛盾律})$$

$$\Leftrightarrow 0 \quad (\text{零律})$$

由最后一步可知, 该式为矛盾式.

例3 (续)

$$(2) (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

解 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (q \vee \neg p) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow 1$$

由最后一步可知，该式为重言式。

问：最后一步为什么等值于1？

例3 (续)

$$(3) ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$$

解 $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q)) \wedge r \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge 1 \wedge r \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow p \wedge r \quad (\text{同一律})$$

这不是矛盾式，也不是重言式，而是非重言式的可满足式. 如101是它的成真赋值, 000是它的成假赋值。

总结: A 为矛盾式当且仅当 $A \Leftrightarrow 0$

A 为重言式当且仅当 $A \Leftrightarrow 1$

说明: 演算步骤不惟一, 应尽量使演算短些

例4

求证吸收律 $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

证明 $P \wedge (P \vee Q)$

$$\Leftrightarrow (P \vee F) \wedge (P \vee Q) \quad (\text{同一律})$$

$$\Leftrightarrow P \vee (F \wedge Q) \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow P \vee F \quad (\text{零律})$$

$$\Leftrightarrow P \quad (\text{同一律})$$

例5

求证 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

证明 $(\neg P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \wedge Q) \quad (\text{蕴涵等值式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \quad (\text{德摩根定律})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \quad (\text{双重否定律})$$

$$\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee Q) \quad (\text{分配律})$$

$$\Leftrightarrow P \wedge T \quad (\text{排中律})$$

$$\Leftrightarrow P \quad (\text{同一律})$$

例6

化简 $\neg(P \wedge Q) \rightarrow (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$

解 原公式

$$\Leftrightarrow \neg\neg(P \wedge Q) \vee ((\neg P \vee \neg P) \vee Q) \quad (\text{蕴涵等值式, 结合律})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) \quad (\text{双重否定律, 幂等律})$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \vee \neg P) \quad (\text{交换律})$$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee Q) \vee \neg P \quad (\text{结合律})$$

$$\Leftrightarrow Q \vee \neg P \quad (\text{吸收律})$$

基本等值式

双重否定律： $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

等幂律： $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

交换律： $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

结合律： $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

分配律： $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

基本等值式(续)

德·摩根律: $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

吸收律: $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, \quad A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

零律: $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, \quad A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

同一律: $A \vee 0 \Leftrightarrow A, \quad A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

排中律: $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

矛盾律: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$

等价公式的对偶性

- 从前面列出的等值公式看出，有很多是成对出现的。这就是等值公式的**对偶性**。
- **对偶式**：在一个只含有联结词 \neg 、 \vee 、 \wedge 的公式 A 中，将 \vee 换成 \wedge ， \wedge 换成 \vee ， T 换成 F ， F 换成 T ，其余部分不变，得到另一个公式 A^* ，称 A 与 A^* 互为对偶式。

例如::

A	A^*
P	P
$\neg Q \wedge R$	$\neg Q \vee R$
$(P \vee T) \wedge \neg Q$	$(P \wedge F) \vee \neg Q$

用对偶式求公式的否定

- **定理1-5.1** 令 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是一个只含有联结词 \neg 、 \vee 、 \wedge 的命题公式，则 $\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$

此定理可以反复地使用德-摩根定律得以证明。下面我们**验证**一下。

- 令 $A(P, Q) \Leftrightarrow P \vee Q$ $A^*(P, Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$

$$\neg A(P, Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q)$$

$$A^*(\neg P, \neg Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$

可见 $\neg A(P, Q) \Leftrightarrow A^*(\neg P, \neg Q)$

推论: $A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$

例如，利用上述定理求 $\neg(((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee R)$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)) \wedge \neg R$$

对偶原理(定理1-5.2)

- 令 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 、 $B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是只含有联结词 \neg 、 \vee 、 \wedge 的命题公式，则如果 $A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 则

$$A^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

- 证明：因为 $A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B(P_1, P_2, \dots, P_n)$

$$\text{故 } A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

$$\text{而 } A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad \text{定理1-5.1}$$

$$B(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad \text{定理1-5.1}$$

$$\text{故 } \neg A^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow \neg B^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad \text{等价关系的传递性}$$

所以 $A^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 等价否定等值式

下面我们验证一下对偶原理1-5.2:

$$\bullet \quad \frac{P \vee (Q \wedge R)}{A} \Leftrightarrow \frac{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{B}$$

$$\bullet \quad \frac{P \wedge (Q \vee R)}{A^*} \Leftrightarrow \frac{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}{B^*}$$

$$\bullet \quad \frac{P \wedge (Q \vee R)}{A^*} \Leftrightarrow \frac{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}{B^*}$$

$$\bullet \quad \frac{P \vee T}{A} \Leftrightarrow \frac{T}{B}$$

$$\bullet \quad \frac{P \vee T}{A} \Leftrightarrow \frac{T}{B}$$

$$\bullet \quad \frac{P \vee T}{A} \Leftrightarrow \frac{T}{B}$$

$$\bullet \quad \frac{P \wedge F}{A^*} \Leftrightarrow \frac{F}{B^*}$$

$$\bullet \quad \frac{P \wedge F}{A^*} \Leftrightarrow \frac{F}{B^*}$$

作业

- P33
- 1.8(1)(3)
- 1.9(1)(3)

问题？

