离散数学

代数结构

9.3 几个典型的代数系统

9.3 几个典型的代数系统

- 半群、独异点与群
- 环与域
- 格与布尔代数

半群与独异点

定义　设$V=<S,\circ>$是代数系统，$\circ$为二元运算。

(1) 如果$\circ$是可结合的，则称$V=<S,\circ>$为半群。

(2) 如果半群$V=<S,\circ>$中的二元运算含有幺元，则称V为含幺半群，也可叫作独异点。 为了强调幺元e的存在，有时将独异点记为$<S,\circ,e>$。

(3) 如果半群$V=<S,\circ>$ (独异点$V=<S,\circ,e>$) 中的二元运算$\circ$是可交换的，则称V为可交换半群 (可交换独异点)。

半群与独异点的实例

实例

(1) $<Z^+,+>$,$<N,+>$,$<Z,+>$,$<Q,+>$,$<R,+>$都是可交换半群，除了$<Z^+,+>$外都是可交换独异点，+是普通加法。

(2) 设 n 是大于1的正整数，$<M_n(R),\cdot>$是半群与独异点，其中 · 表示矩阵乘法。

(3) $<\Sigma^*,\circ>$是半群和独异点，其中Σ是有穷字母表，$\circ$表示连接运算，幺元是空串λ。

(4) $<P(B),\oplus>$为半群与独异点，其中$\oplus$为集合的对称差运算。

(5) $<Z_n, \oplus>$为半群与独异点，其中 $Z_n=\{0,1, \ldots, n-1\}$，$\oplus$为模 n 加法。

元素的幂运算

- 设$V=<S, \circ>$为半群，对任意 $x \in S$，规定：

  $x^1 = x$

  $x^{n+1} = x^n \circ x \qquad n \in Z^+$

- 在独异点$V=<S,\circ,e>$中，对任意 $x \in S$ ，规定:

  $x^0=e,$

  $x^{n+1}=x^n \circ x \qquad n \in N$

- 幂运算规则：

  $x^n \circ x^m = x^{n+m}$

  $(x^n)^m= x^{nm} \qquad m, n \in Z^+$

证明方法：数学归纳法

群的定义与实例

- 定义 设$<G,\circ>$是代数系统，$\circ$为二元运算。如果$\circ$运算是可结合的，存在单位元 $e\in G$，并且对 G 中的任何元素 x 都有 $x^{-1}\in G$，则称 G 为 群。

- 群的实例

(1) $<\mathbf{Z},+>,<\mathbf{Q},+>,<\mathbf{R},+>$是群；$<\mathbf{Z}^+,+>,<\mathbf{N},+>$不是群。

(2) $<M_n(\mathbf{R}),+>$是群，而$<M_n(\mathbf{R}),\cdot>$不是群。

(3) $<P(B),\oplus>$是群，$\oplus$为对称差运算。

(4) $<\mathbf{Z}_n,\oplus>$是群。$\mathbf{Z}_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$，$\oplus$为模 n 加。

Klein四元群

设$G = \{ e, a, b, c \}$，G上的运算由下表给出，为 **Klein四元群**

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

- 运算表特征：
- 对称性---运算可交换
- 主对角线元素都是幺元
- 每个元素是自己的逆元
- a, b, c 中任两个元素运算都等于第三个元素。

群的术语

- 若群G中的二元运算是可交换的，则称G为交换群或 阿贝尔(Abel)群
- 若群 G 是有穷集，则称 G 是有限群，否则称为无限群
- 群 G 的基数称为群G的 阶，有限群 G 的阶记作$|G|$

- $<Z,+>$ 和 $<R,+>$是无限群，$<Z_n,\oplus>$是有限群，也是 n 阶群，Klein四元群 $G = \{e, a, b, c\}$是 4 阶群
- 上述群都是交换群
- n 阶 ($n \geq 2$) 实可逆矩阵集合关于矩阵乘法构成的群是非交换群。

群的术语（续）

- 定义　设G是群，$x \in G$，$n \in Z$，则 x 的 n 次幂 x^n 定义为

$$x^n = \begin{cases} e & n = 0 \\ x^{n-1}x & n > 0 \\ (x^{-1})^m & m = -n, n < 0 \end{cases} \qquad n \in Z$$

- 实例
  - 在$<Z_3, \oplus>$中有　$2^{-3}=(2^{-1})^3=1^3=1\oplus1\oplus1=0$
  - 在 $<Z,+>$ 中有 $(-2)^{-3}=((-2)^{-1})^3=2^3=2+2+2=6$

群的术语（续）

- 设G是群，$x \in G$，使得等式 $x^k = e$ 成立的最小正整数 k 称为 x 的阶（或周期），记作 $|x| = k$，称 x为 k 阶元。 若不存在这样的正整数 k，则称 x 为无限阶元。
- 在$<Z_6,\oplus>$中，2 和 4 是 3 阶元，3 是 2 阶元，1 和 5 是 6 阶元，0 是 1 阶元
- 在$<Z,+>$中，0 是 1 阶元，其它整数的阶都不存在。

群的性质---幂运算规则

- 定理1 设 G 为群，则 G 中的幂运算满足：

(1) $\forall x \in G$，$(x^{-1})^{-1} = x$。
(2) $\forall x, y \in G$，$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$。
(3) $\forall x \in G$，$x^n x^m = x^{n+m}$，$n, m \in Z$。
(4) $\forall x \in G$，$(x^n)^m = x^{nm}$，$n, m \in Z$。

- 注意
- $(xy)^n = (xy)(xy)\ldots(xy)$, 是 n 个xy 运算，G为交换群，才有 $(xy)^n = x^n y^n$。

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{-1} = x_n^{-1} x_{n-1}^{-1} \ldots x_2^{-1} x_1^{-1}$$

群的性质---群方程存在唯一解

- 定理2 G为群，$\forall a,b\in G$，方程 $ax=b$ 和 $ya=b$ 在G中有解且仅有惟一解。 $a^{-1}b$ 是 $ax=b$的唯一解。 ba^{-1} 是 $ya = b$ 的唯一解。
- 例 设 $G=<P(\{a,b\}),\oplus>$，其中$\oplus$为对称差。 求以下群方程的解

$$\{a\} \oplus X = \varnothing, \qquad Y \oplus \{a,b\} = \{b\}$$

- *解:*
- $X = \{a\}^{-1}\oplus\varnothing = \{a\}\oplus\varnothing = \{a\}$， $Y = \{b\}\oplus\{a,b\}^{-1} = \{b\}\oplus\{a,b\} = \{a\}$

群的性质---消去律

- 定理3 G 为群，则G适合消去律，即$\forall a,b,c\in G$ 有
  (1) 若 $ab = ac$，则 $b = c$。
  (2) 若 $ba = ca$，则 $b = c$。
- 例 设 $G = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 是 n 阶群，令 $a_iG = \{ a_i a_j \mid j = 1,2, \ldots, n \}$ 证明 $a_iG = G$。
- 证 由群中运算的封闭性有 $a_iG\subseteq G$。 假设$a_iG\subset G$，即$|a_iG|<n$。 必有$a_j, a_k\in G$使得

$$a_i a_j = a_i a_k \quad (j\neq k)$$

  由消去律得 $a_j = a_k$, 与 $|G| = n$ 矛盾。

群的性质---运算表排列规则

- 定理4 设 G 为有限群，则 G 的运算表中每行每列都是 G 中元素的一个置换，且不同的行（或列）的置换都不相同。
- 注意：是必要条件，用于判断一个运算表不是群。

	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	b	a	c	d
c	c	d	b	a
d	d	b	a	c

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	b	c	d	a
d	d	a	b	c

子群

- 定义 设 G 是群，H 是 G 的非空子集，如果 H 关于 G 中的运算构成群，则称 H 是 G 的子群, 记作 $H \leq G$。 若 H 是 G 的子群，且 $H \subset G$，则称 H 是 G 的真子群，记作 $H<G$。
- 实例 nZ（n是自然数）是整数加群 <Z,+> 的子群。 当 $n \neq 1$ 时, nZ 是 Z 的真子群。
- 对任何群 G 都存在子群。 G 和 $\{e\}$ 都是 G 的子群，称为 G 的平凡子群。

子群判定

判定定理

- 设 G 为群，H 是 G 的非空子集。 H 是 G 的子群当且仅当 $\forall x, y \in H$ 有 $xy^{-1} \in H$。

例：设 G 为群，$a \in G$，令 $H = \{ a^k \mid k \in Z \}$，则 H 是 G的子群，称为由 a 生成的子群，记作$\langle a \rangle$。

证：首先由 $a \in \langle a \rangle$ 知道$\langle a \rangle \neq \varnothing$。 任取 $a^m, a^l \in \langle a \rangle$，

$$a^m (a^l)^{-1} = a^m a^{-l} = a^{m-l} \in \langle a \rangle$$

根据判定定理可知$\langle a \rangle \leq G$。

实例

整数加群$\langle Z,+\rangle$，

由 2 生成的子群是 $\langle 2\rangle = \{ 2k \mid k \in Z \} = 2Z$

模 6 加群 $\langle Z_6,\oplus \rangle$中

由 2 生成的子群 $\langle 2\rangle = \{ 0, 2, 4 \}$

Klein四元群 $G = \{ e, a, b, c \}$ 的所有生成子群是：

$\langle e\rangle = \{ e \}$,

$\langle a\rangle = \{ e, a \}$, $\langle b\rangle = \{ e, b \}$, $\langle c\rangle = \{ e, c \}$。

实例

- 设 G 为群, 令 $C = \{ a \mid a \in G \wedge \forall x \in G(ax=xa) \}$，则 C 是 G 的子群，称为 G 的中心。 $e \in C$。
- 证 C是 G 的非空子集。

  任取 $a, b \in C$，证明 ab^{-1}与 G 中所有的元素都可交换。

  $\forall x \in G$，有

$$(ab^{-1})x = ab^{-1}x = ab^{-1}(x^{-1})^{-1} = a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1}$$
$$= a(xb^{-1}) = (ax)b^{-1} = (xa)b^{-1} = x(ab^{-1})$$

  由判定定理可知 $C \leq G$。

循环群

- 定义 设 G 是群，若存在 $a \in G$ 使得

$$G = \{ a^k \mid k \in Z \}$$

称 G 是循环群，记作 $G=<a>$，称 a 为 G 的生成元。

- 实例： 整数加群 $G = <Z,+> = <1> = < -1>$

  模 6 加群 $G = <Z_6,\oplus> = <1> = <5>$

- 设 $G = <a>$，若a 是 n 阶元，则G为 n 阶循环群，即

$$G = \{ a^0=e, a^1, a^2, \ldots , a^{n-1} \}$$

- 若 a 是无限阶元，则 G 为无限循环群，即

$$G = \{ a^{\pm 0}=e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \ldots \}$$

循环群的生成元

定理 设 $G = <a>$ 是循环群。

(1) 若G是无限循环群，则 G 只有 a 和 a^{-1} 两个生成元。

(2) 若 G 是 n 阶循环群，则 a^r 是 G 的生成元，当且仅当 r 是小于等于 n 且与 n 互质的正整数。

生成元的实例

(1) 设$G=\{e, a, \ldots, a^{11}\}$是12阶循环群，

则小于或等于12且与12互素的数是 1, 5, 7, 11, 由定理可知 a，a^5，a^7和 a^{11}是 G 的生成元。

(2) 设$G=\langle Z_9,\oplus\rangle$是模9的整数加群，

则小于或等于 9且与 9 互素的数是 1, 2, 4, 5, 7, 8。 根据定理，G的生成元是 1, 2, 4, 5, 7 和 8。

(3) 设 $G=3Z=\{3z \mid z\in Z\}$, G上的运算是普通加法。

那么G只有两个生成元：3 和 -3。

循环群的子群

定理 设$G=\langle a\rangle$是循环群。

(1) 设$G=\langle a\rangle$是循环群，则 G 的子群仍是循环群。

(2) 若$G=\langle a\rangle$是无限循环群，则 G 的子群除$\{e\}$以外都是无限循环群。

(3) 若$G=\langle a\rangle$是 n 阶循环群，则对 n 的每个正因子d，G 恰好含有一个d 阶子群。

子群的实例

(1) G=<Z,+>是1无限循环群，对于自然数m∈N，1 的 m 次幂是 m，m 生成的子群是 mZ，m∈N。 即

$$\langle 0\rangle = \{ 0 \} = 0\mathrm{Z}$$

$$\langle m\rangle = \{ mz \mid z\in \mathrm{Z} \} = m\mathrm{Z},\quad m>0$$

(2) $G=\mathrm{Z}_{12}$是12阶循环群。 12的正因子是1, 2, 3, 4, 6 和12，因此G的子群是：

1 阶子群 <12>=<0>={0}，2 阶子群 <6> = {0,6}
3 阶子群 <4>={0,4,8}，4 阶子群 <3> = {0,3,6,9}

6 阶子群<2>={0,2,4,6,8,10}，12 阶子群<1> = Z_{12}

n元置换的定义

- 定义 设 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$，S上的双射函数 $\sigma:S\to S$ 称为 S上的 n元置换。一般将 n 元置换σ记为

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- 例如 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$，则以下都是 5元置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

k 阶轮换与对换

- 定义 设σ是 $S = \{1, 2, \dots, n\}$上的 n 元置换。 若$\sigma(i_1)=i_2$, $\sigma(i_2)=i_3$, …, $\sigma(i_{k-1})=i_k$, $\sigma(i_k)=i_1$且保持 S 中的其他元素不变，则称σ为 S上的 k 阶轮换，记作 $(i_1 i_2 \dots i_k)$。 若 $k=2$，称σ为S上的对换。
- 例如 5元置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

分别是 4 阶和 2 阶轮换$\sigma=(1\ 2\ 3\ 4)$,$\tau=(1\ 3)$, 其中 τ也叫做对换

n元置换分解为轮换之积

- 例 设 $S = \{ 1, 2, \dots , 8 \}$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- 从σ中分解出来的第一个轮换式 (1 5 2 3 6)；第二个轮换为(4)；第三个轮换为 (7 8)。
- σ的轮换表示式σ=(1 5 2 3 6) (4) (7 8)=(1 5 2 3 6) (7 8)
- 用同样的方法可以得到τ的分解式

  τ=(1 8 3 4 2) (5 6 7)
- 注意：在轮换分解式中，1 阶轮换可以省略。

n元置换的乘法与求逆

- 两个 n 元置换的乘法就是函数的复合运算
- n 元置换的求逆就是求反函数。
- 例 设

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&2&1&4\end{pmatrix},\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&2&5\end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&4&2\end{pmatrix},\quad \sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&3&4\end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&2&1&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&2&5&1\end{pmatrix}$$

- 使用轮换表示是：

$\tau\sigma$ = (1 5 4) (2 3) (1 4 2 3) = (1 5 2)

$\sigma\tau$ = (1 4 2 3) (1 5 4) (2 3) = (3 5 4)

σ^{-1}= $(1\ 5\ 4)^{-1}$ $(2\ 3)^{-1}$ = (5 1 4) (3 2) = (1 4 5) (2 3)

n元置换群及其实例

- 考虑所有的 n 元置换构成的集合 S_n 。
  - S_n关于置换的乘法是封闭的。
  - 置换的乘法满足结合律。
  - 恒等置换(1)是 S_n 中的单位元。 对于任何 n元置换$\sigma \in S_n$，逆置换σ^{-1}是σ 的逆元。
  - 这就证明了S_n关于置换的乘法构成一个群，称为 n元对称群。n元对称群的子群称为 n元置换群。

例 设 $S = \{1, 2, 3\}$，3元对称群

$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

S_3 的运算表

	(1)	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1)	(1)	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 2)	(1 2)	(1)	(1 3 2)	(1 2 3)	(2 3)	(1 3)
(1 3)	(1 3)	(1 2 3)	(1)	(1 3 2)	(1 2)	(2 3)
(2 3)	(2 3)	(1 3 2)	(1 2 3)	(1)	(1 3)	(1 2)
(1 2 3)	(1 2 3)	(1 3)	(2 3)	(1 2)	(1 3 2)	(1)
(1 3 2)	(1 3 2)	(2 3)	(1 2)	(1 3)	(1)	(1 2 3)

S_3的子群

$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$，

$A_3 = \langle(1\ 2\ 3)\rangle = \langle(1\ 3\ \ 2)\rangle = \{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$，

$\langle(1)\rangle = \{(1)\}$

$\langle(1\ 2)\rangle = \{(1), (1\ 2)\}$,

$\langle(1\ 3)\rangle = \{(1), (1\ 3)\}$,

$\langle(2\ 3)\rangle = \{(1), (2\ 3)\}$

环的定义

- 定义 设$<R,+,\cdot>$是代数系统，$+$和$\cdot$是二元运算。如果满足以下条件:
  (1) $<R,+>$构成交换群
  (2) $<R,\cdot>$构成半群
  (3) $\cdot$运算关于$+$运算适合分配律
  则称$<R,+,\cdot>$是一个环。
- 通常称$+$运算为环中的加法，$\cdot$运算为环中的乘法。
- 环中加法单位元记作 0, 乘法单位元(若存在)记作 1。
- 对任何元素 x，称 x 的加法逆元为负元，记作$-x$。
- 乘法逆元(若存在)称为逆元，记作 x^{-1}。

环的实例

(1) 整数集、有理数集、实数集和复数集关于普通的加法和乘法构成环，分别称为**整数环Z**，**有理数环Q**，**实数环R** 和 **复数环C**。

(2) $n(n\geq 2)$阶实矩阵的集合$M_n(\mathbf{R})$关于矩阵的加法和乘法构成环，称为**n阶实矩阵环**。

(3) 集合的幂集$P(B)$关于集合的对称差运算和交运算构成环。

(4) 设$\mathrm{Z}_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$，$\oplus$和$\otimes$分别表示模$n$的加法和乘法，则$<\mathrm{Z}_n,\oplus,\otimes>$构成环，称为**模n的整数环**。

环中的零因子

- 设$<R,+,\cdot>$是环，若存在 $a \cdot b=0$, 且 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 称 a 为左零因子，b 为右零因子。
- 实例
  - $<Z_6,\oplus,\otimes>$，其中 $2\otimes 3=0$，2 和 3 都是零因子。
- 无零因子的条件：$a \cdot b = 0 \rightarrow a=0 \vee b=0$
- 可证明无零因子的充要条件是：对于非零元，乘法满足消去律

特殊的环

定义 设 $<R,+,\cdot>$ 是环，

(1) 若环中乘法·适合交换律，则称 R 是交换环。

(2) 若环中乘法·存在单位元，则称 R 是含幺环。

(3) 若 $\forall a, b \in R$， $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$，则称 R 是无零因子环。

(4) 若 R 既是交换环、含幺环，也是无零因子环，则称 R 是整环。

(5) 若 R 为整环，$|R|>1$, 且 $\forall a\in R^*=R-\{0\}$，$a^{-1}\in R$, 则称 R 为域。

特殊环的实例

(1)整数环Z、有理数环Q、实数环R、复数环C都是交换环、含幺环、无零因子环和整环。 其中除Z之外都是域

(2)令$2Z=\{ 2z \mid z\in Z \}$，则<2Z,+,·>构成交换环和无零因子环。 但不是含幺环和整环。

(3)设$n\in Z$, $n\geq 2$, 则 n 阶实矩阵的集合 $M_n(R)$关于矩阵加法和乘法构成环，它是含幺环，但不是交换环和无零因子环，也不是整环。

(4)$<Z_6,\oplus,\otimes>$构成环，它是交换环、含幺环，但不是无零因子环和整环。

注意：对于一般的 n, Z_n是整环且是域 $\Leftrightarrow$ n是素数。

例题

判断下列集合和给定运算是否构成环、整环和域。

(1) $A=\{a+bi \mid a,b\in \mathrm{Q}\}$, $i^2= -1$, 运算为复数加法和乘法。

(2) $A=\{2z+1 \mid z\in \mathrm{Z}\}$, 运算为普通加法和乘法

(3) $A=\{2z \mid z\in \mathrm{Z}\}$, 运算为普通加法和乘法

(4) $A=\{ x \mid x\geq 0 \wedge x\in \mathrm{Z}\}$, 运算为普通加法和乘法。

(5) $A=\{a+b\sqrt[4]{5} \mid a,b\in \mathrm{Q}\}$ ，运算为普通加法和乘法

- 解 (2), (4), (5) 不是环。 为什么?

  (1) 是环, 是整环, 也是域。

  (3) 是环, 不是整环和域。

环的性质

- 定理 设<R,+,·>是环，则

(1) $\forall a \in R$， $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ --- 加法的幺元是乘法的零元

(2) $\forall a,b \in R$， $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(3) $\forall a,b \in R$， $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

(4) $\forall a,b,c \in R$， $a \cdot (b-c) = a \cdot b - a \cdot c$， $(b-c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$

例 在环中计算 $(a+b)^3$, $(a-b)^2$

解 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+ba+ab+b^2)(a+b)$

$= a^3+ba^2+aba+b^2a+a^2b+bab+ab^2+b^3$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ba-ab+b^2$

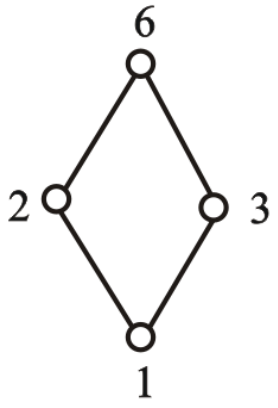
格的定义

- 定义 设$<S, \preccurlyeq>$是偏序集，如果$\forall x,y \in S$，$\{x,y\}$都有最小上界和最大下界，则称S关于偏序$\preccurlyeq$构成格。
- 由于最小上界和最大下界的唯一性，可以把求$\{x,y\}$的最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算$\vee$和$\wedge$，即 $x \vee y$ 和 $x \wedge y$ 分别表示 x 与 y 的最小上界和最大下界。
- 注意：这里出现的$\vee$和$\wedge$符号只代表格中的运算，而不再有其他的含义。

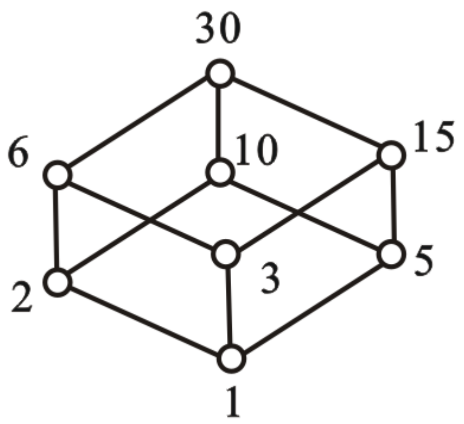
格的实例

- 例 设n是正整数，S_n是n的正因子的集合。 D为整除关系，则偏序集$<S_n,D>$构成格。$\forall x,y\in S_n$，
- $x\vee y$ 是 lcm(x,y)，即 x 与 y 的最小公倍数。 $x\wedge y$ 是 gcd(x,y)，即 x 与 y 的最大公约数。
- 下图给出了格$<S_8,D>$，$<S_6,D>$和$<S_{30},D>$。

(S_8,D)



(S_6,D)



(S_{30},D)

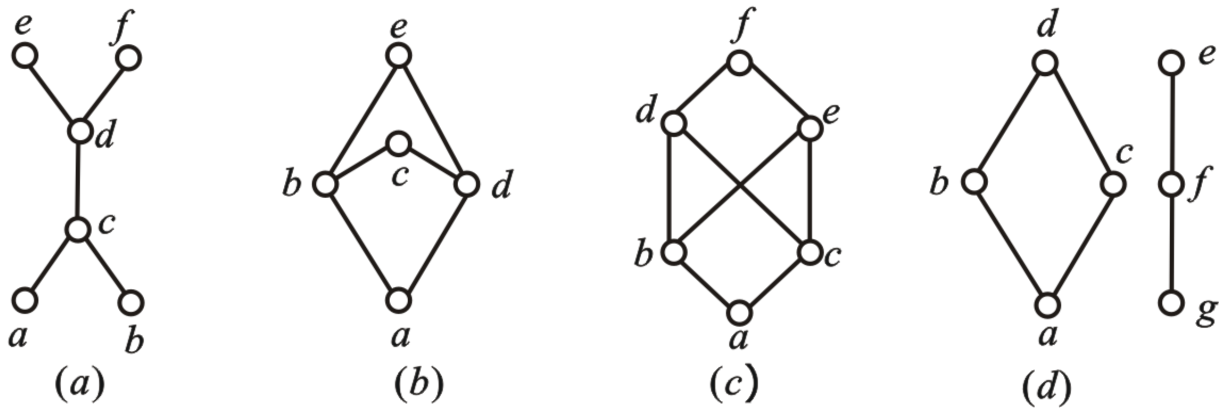
格的实例（续）

例 判断下列偏序集是否构成格，并说明理由。

(1) $<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集。

(2) $<Z, \leq>$，其中Z是整数集，$\leq$为小于等于关系。

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出。



解 (1) 是格。称$<P(B),\subseteq>$为B的幂集格。

(2) 是格。

(3) 都不是格。

格的性质：对偶原理

- 定义 设 f 是含有格中元素以及符号=,≼ ,≽ ,∨和∧的命题。 令 f^*是将 f 中的≼替换成≽,≽替换成≼,∨替换成∧,∧替换成∨所得到的命题。 称 f^* 为 f 的对偶命题。
- 例如, 在格中： f 是 $(a\vee b)\wedge c\preccurlyeq c$, f^* 是 $(a\wedge b)\vee c\succcurlyeq c$ 。

- 格的对偶原理：设 f 是含格中元素以及符号=,≼,≽,∨和∧等的命题。若 f 对一切格为真, 则 f 的对偶命题 f^*也对一切格为真。
- 例如, 若对一切格L都有 $\forall a,b\in L$, $a\wedge b\preccurlyeq a$，那么对一切格L都有 $\forall a,b\in L$, $a\vee b\succcurlyeq a$

格的性质：算律

- 定理 设$<L, \preccurlyeq>$是格,则运算$\vee$和$\wedge$适合交换律、结合律、幂等律和吸收律,即

(1) $\forall a,b\in L$ 有

$$a\vee b=b\vee a,\quad a\wedge b=b\wedge a$$

(2) $\forall a,b,c\in L$ 有

$$(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c),\qquad (a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$$

(3) $\forall a\in L$ 有

$$a\vee a=a,\qquad a\wedge a=a$$

(4) $\forall a,b\in L$ 有

$$a\vee(a\wedge b)=a,\quad a\wedge(a\vee b)=a$$

算律的证明

证 (1) 交换律。

$a \vee b$ 是 $\{a,b\}$ 的最小上界，$b \vee a$ 是 $\{b,a\}$的最小上界

$\{a, b\} = \{b, a\} \Rightarrow a \vee b = b \vee a$。

由对偶原理, $a \wedge b = b \wedge a$ 得证。

算律的证明（续）

(2) 结合律。 由最小上界的定义有

$$(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee b \geqslant a \qquad \text{(I)}$$

$$(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee b \geqslant b \qquad \text{(II)}$$

$$(a\vee b)\vee c \geqslant c \qquad \text{(III)}$$

由式 (II) 和 (III) 有 $(a\vee b)\vee c \geqslant b\vee c$ (IV)

由式 (I) 和 (IV) 有 $(a\vee b)\vee c \geqslant a\vee(b\vee c)$。

同理可证 $(a\vee b)\vee c \leqslant a\vee(b\vee c)$。

根据偏序的反对称性得到 $(a\vee b)\vee c = a\vee(b\vee c)$。

由对偶原理，$(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$ 得证。

算律的证明（续）

(3) 幂等律。 显然 $a \preccurlyeq a \vee a$, 又由 $a \preccurlyeq a$ 得 $a \vee a \preccurlyeq a$。

由反对称性 $a \vee a = a$。 用对偶原理, $a \wedge a = a$ 得证。

(4) 吸收律。 显然有

$$a \vee (a \wedge b) \succcurlyeq a \qquad \text{(V)}$$

由 $a \preccurlyeq a$, $a \wedge b \preccurlyeq a$ 可得

$$a \vee (a \wedge b) \preccurlyeq a \qquad \text{(VI)}$$

由式 (V) 和 (VI) 可得 $a \vee (a \wedge b) = a$

根据对偶原理, $a \wedge (a \vee b) = a$ 得证。

格作为代数系统的定义

定理 设<S,$*$, $\circ$>是具有两个二元运算的代数系统，若对于$*$和$\circ$运算适合交换律、结合律、吸收律, 则可以适当定义S中的偏序$\preccurlyeq$,使得<S, $\preccurlyeq$>构成格, 且$\forall a,b \in S$有 $a \wedge b = a*b$, $a \vee b = a\circ b$。

根据定理,可以给出格的另一个等价定义。

定义 设<S,$*$,$\circ$>是代数系统, $*$和$\circ$是二元运算, 如果$*$和 $\circ$运算满足交换律、结合律和吸收律, 则 <S,$*$,$\circ$>构成格。

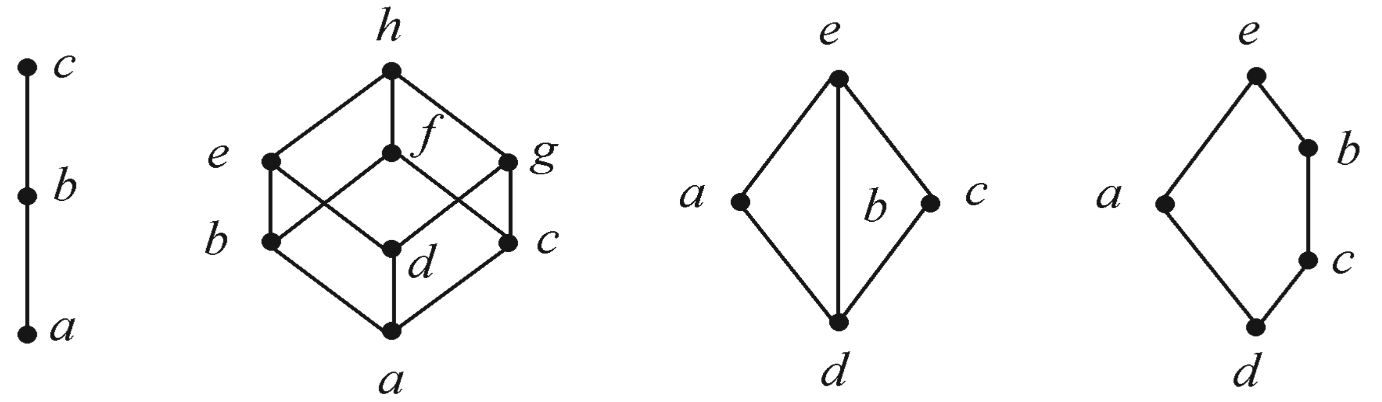
分配格定义

定义 设$<L,\wedge,\vee>$是格, 若$\forall a, b, c\in L$, 有

$$a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$

$$a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

则称 L 为分配格。



(a) (b) (c) (d)

(a)和(b)是分配格，(c)和(d)不是分配格。

全上界与全下界

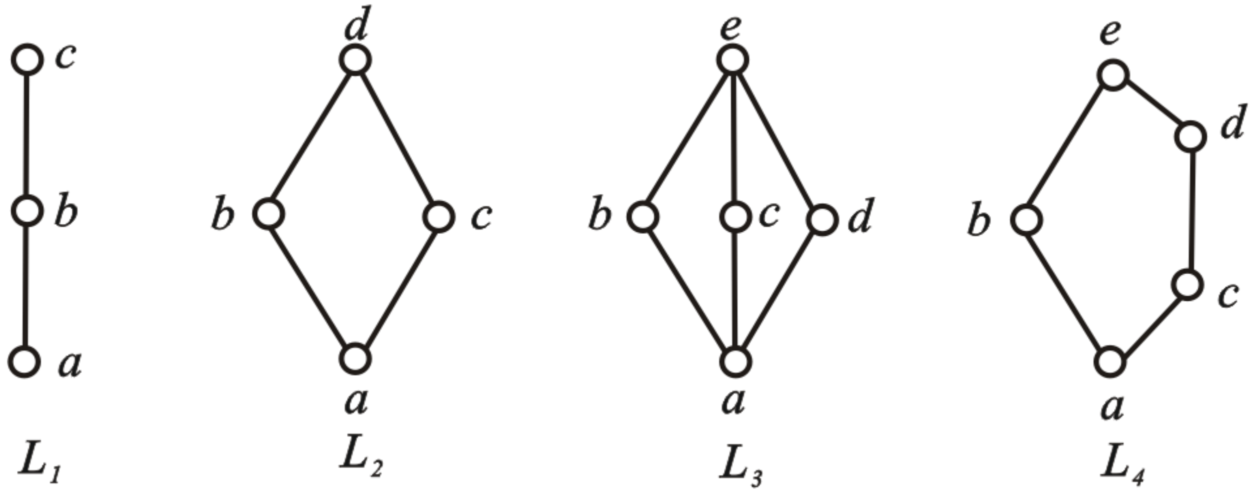
- 定义 设L是格，若存在 $a \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $a \preccurlyeq x$, 则称 a 为 L 的全下界；若存在 $b \in L$ 使得 $\forall x \in L$ 有 $x \preccurlyeq b$, 则称 b 为 L 的全上界。
- 说明： 格 L 若存在全下界或全上界,一定是唯一的。 一般将格 L 的全下界记为 0, 全上界记为 1。
- 定义 设 L是格,若 L存在全下界和全上界, 则称 L为有界格, 有界格 L 记为 $<L,\wedge,\vee,0,1>$。
- 注意：有限格 $L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格，求对偶命题时, 必须将0与1互换。

补元的定义

- 定义 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, $a\in L$, 若存在 $b\in L$ 使得 $a\wedge b = 0$ 和 $a\vee b =1$ 成立, 则称 b 是 a 的补元。

- 注意：
- 若 b 是 a 的补元, 则 a 也是 b 的补元。 a 和 b互为补元。
- 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界分配格。 若L中元素 a 存在补元, 则存在惟一的补元。

实例: 求补元



解：L_1中 a, c互补, b没补元。

L_2中 a, d互补, b, c 互补。

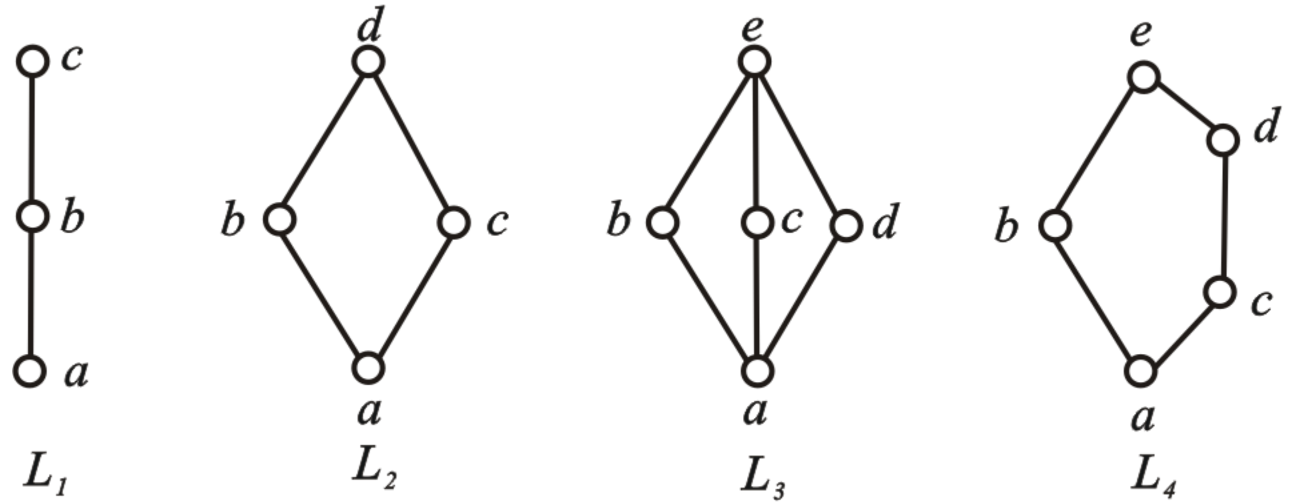
L_3中 a,e互补, b 的补元是 c和d, c 的补元是 b和d, d 的补元是b和c。

L_4中的 a,e互补, b 的补元是 c和d, c 的补元是b, d 的补元是 b。

有补格的定义

- 定义 设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格, 若 L 中所有元素都有补元存在, 则称 L 为有补格。

例如, 下图中的 L_2, L_3和 L_4是有补格, L_1不是有补格。



布尔代数的定义

- 定义 有补分配格, 称为布尔格或布尔代数。
- 求补元的运算看作是布尔代数中的一元运算。布尔代数标记为 $<B,\wedge,\vee,',0,1>$, 其中’为求补运算

例 设 S_{110}= {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110 } 是110的正因子集合。

gcd 表示求最大公约数的运算

lcm表示求最小公倍数的运算。

则 $<S_{110}$, gcd, lcm>是否构成布尔代数?

布尔代数的性质

定理 设$<B, \wedge, \vee, ', 0, 1>$是布尔代数,则

(1) $\forall a \in B, (a')'=a$ 。

(2) $\forall a, b \in B$, $(a \wedge b)'=a' \vee b', (a \vee b)'= a' \wedge b'$ （德摩根律）

注意：德摩根律对有限个元素也是正确的。

证明

证 (1) $(a')'$是 a'的补元。 a 是 a' 的补元。 由补元惟一性得 $(a')'=a$ 。

(2) 对任意 $a, b\in B$有

$$(a\wedge b)\vee(a'\vee b') = (a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')$$
$$= (1\vee b')\wedge(a'\vee 1) = 1\wedge 1 = 1,$$
$$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b') = (a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')$$
$$= (0\wedge b)\vee(a\wedge 0) = 0\vee 0 = 0。$$

所以 $a'\vee b'$是 $a\wedge b$ 的补元, 根据补元惟一性可得

$(a\wedge b)'= a'\vee b'$。

同理可证 $(a\vee b)' = a'\wedge b'$。

有限布尔代数的表示定理

定理 设 L 是有限布尔代数，则 L 含有 2^n 个元素($n\in N$)，且 L 与 $<P(S),\cap,\cup,\sim,\varnothing,S>$ 同构，其中 S 是一个 n 元集合。

结论：含有 2^n 个元素的布尔代数在同构意义下只有一个。

作业

- P227
- 9.20
- 9.22
- 9.24

问题？