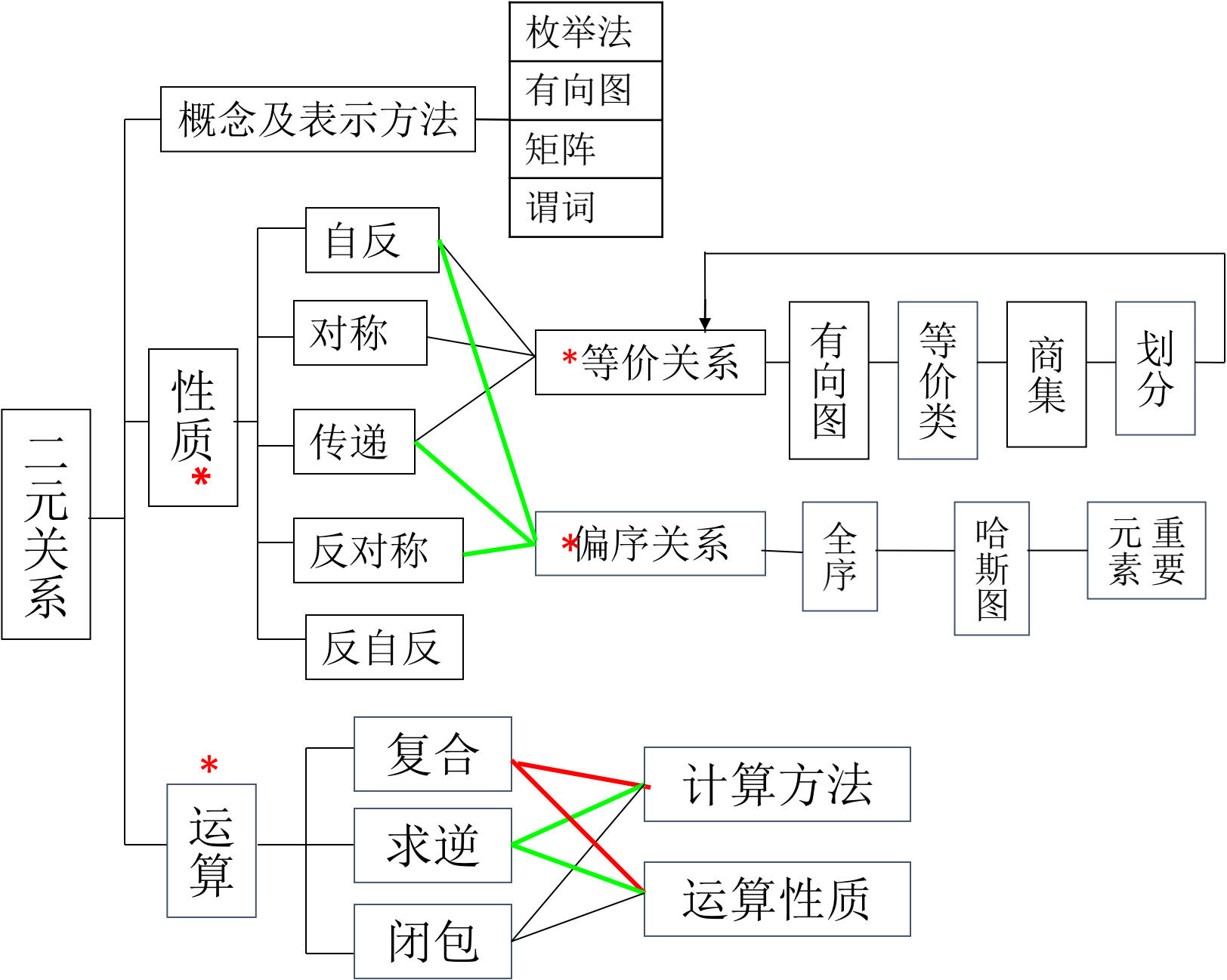


离散数学

集合论
习题课

本章小结



1、 $A=\{0,1\}$ $B=\{1,2\}$ 求 $A^2 \times B$ 。

$$A \times B = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

$$A^2 = A \times A = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$$

$$A^2 \times B = \{ \langle \langle 0, 0 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 1 \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, 1 \rangle, \\ \langle \langle 0, 0 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 0, 1 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 1, 0 \rangle, 2 \rangle, \langle \langle 1, 1 \rangle, 2 \rangle \}$$

2、 $X=\{a,b,c\}$ $Y=\{s\}$ 列出X到Y的所有关系。

$$X \times Y = \{ \langle a, s \rangle, \langle b, s \rangle, \langle c, s \rangle \}$$

$X \times Y$ 的任何一个子集都是一个从X到Y的关系。如果 $|X|=m$ $|Y|=n$ 则有 2^{mn} 个从X到Y的关系, 故, 有 $2^3=8$ 个关系:

$$R_0 = \Phi$$

$$R_1 = \{ \langle a, s \rangle \}$$

$$R_2 = \{ \langle b, s \rangle \}$$

$$R_3 = \{ \langle c, s \rangle \}$$

$$R_4 = \{ \langle a, s \rangle, \langle b, s \rangle \}$$

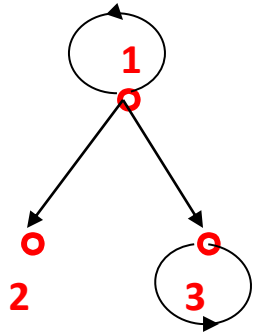
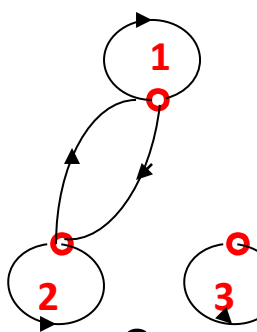
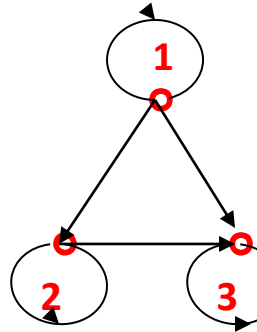
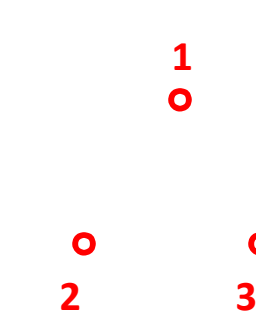
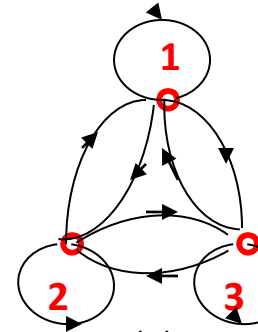
$$R_5 = \{ \langle a, s \rangle, \langle c, s \rangle \}$$

$$R_6 = \{ \langle b, s \rangle, \langle c, s \rangle \}$$

$$R_7 = \{ \langle a, s \rangle, \langle b, s \rangle, \langle c, s \rangle \}$$

3、 $A=\{1,2,3\}$ ， A 上五个关系如下。这五个关系中，哪些是等价关系？如果是等价关系，求其商集。

哪些是偏序关系？如是偏序关系,画哈斯图,并求 A 的极小(大)元、最小(大)元、上界与下界、上确界和下确界。

					
	自反	反自反	对称	反对称	传递
R	N	N	N	Y	Y
S	Y	N	Y	N	Y
T	Y	N	N	Y	Y
Φ	N	Y	Y	Y	Y
$A \times A$	Y	N	Y	N	Y

等价关系：S和 $A \times A$ ，对应的商集分别是：

$$A/S = \{\{1,2\}, \{3\}\} \quad A/A \times A = \{\{1,2,3\}\}$$

偏序关系：T

A 的极小元、最小元、下界、下确界都是：1

A 的极大元、最大元、上界、上确界都是：3



4、R和S都是A上关系，

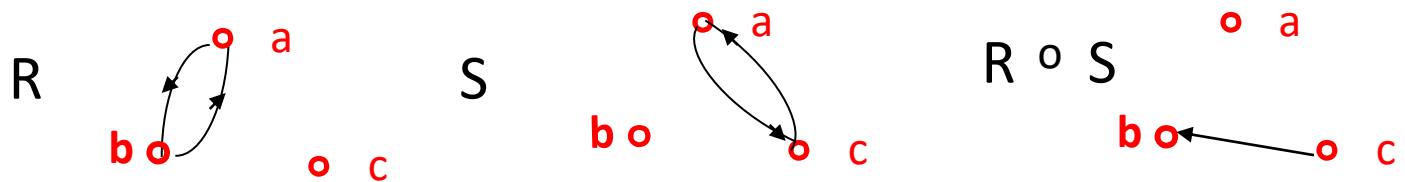
a) R和S都自反， $R \circ S$ 一定自反。

因为任取 $a \in A$, 由于R和S都自反, 所以 $\langle a, a \rangle \in R$ 及 $\langle a, a \rangle \in S$ 故 $\langle a, a \rangle \in R \circ S \therefore R \circ S$ 自反,

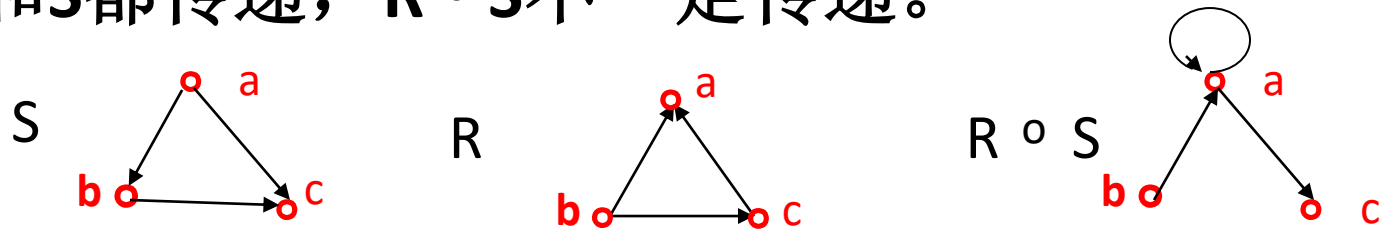
b) R和S都反自反， $R \circ S$ 不一定反自反。



c) R和S都对称， $R \circ S$ 不一定对称。



d) R和S都传递， $R \circ S$ 不一定传递。



5、S是X上关系。

a)证明 S 传递，当且仅当 $S \circ S \subseteq S$ (可用此定理判定传递)

证明：充分性，已知任取 $x, y, z \in X$, 且有 $\langle x, y \rangle \in S, \langle y, z \rangle \in S$,
根据关系的复合得 $\langle x, z \rangle \in S \circ S \subseteq S$, 由已知得 $\langle x, z \rangle \in S$, 所以 S 传递。

必要性，已知 S 传递，任取 $\langle x, y \rangle \in S \circ S$, 根据关系的复合得

$\exists z (z \in X \wedge \langle x, z \rangle \in S \wedge \langle z, y \rangle \in S)$, 由 S 传递得 $\langle x, y \rangle \in S$

所以 $S \circ S \subseteq S$

b)证明 S 自反，当且仅当 $I_X \subseteq S$ 。(可用此定理判定自反)

证明：充分性，已知 $I_X \subseteq S$,

任取 $x \in X$, 有 $\langle x, x \rangle \in I_X$, 由已知得 $\langle x, x \rangle \in S$, 所以 S 自反。

必要性，已知 S 自反，

任取 $\langle x, y \rangle \in I_X$, 得 $x = y$, 而 S 自反，所以 $\langle x, y \rangle \in S \therefore I_X \subseteq S$

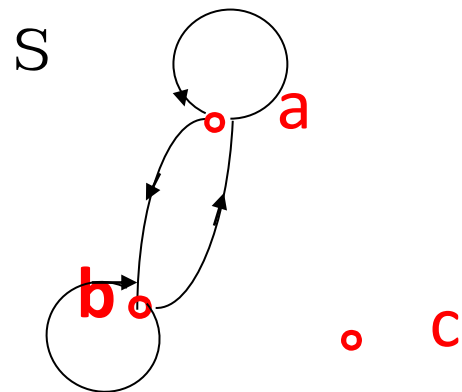
c) S 是 X 上关系，证明 S 是自反和传递，则 $S \circ S = S$ 。其逆为真吗？

证明：由5 a)得 S 传递，则 $S \circ S \subseteq S$ ，只证明 $S \subseteq S \circ S$

任取 $\langle x, y \rangle \in S$ ，又已知 S 自反，所以 $\langle x, x \rangle \in S$ ，于是 $\langle x, x \rangle \in S \wedge \langle x, y \rangle \in S$ ，
由关系的复合得 $\langle x, y \rangle \in S \circ S$

所以有 $S \subseteq S \circ S$ ，最后得 $S \circ S = S$ 。

其逆不一定为真。例如 S 如图所示：
它满足 $S \circ S = S$ ，但 S 不自反。



关系性质证明方法

设 R 是 A 上关系,

一. 证明 R 的自反性:

方法1 用自反定义证: 任取 $x \in A$, 证出 $\langle x, x \rangle \in R$.

方法2 用恒等关系 I_A 证: 证出 $I_A \subseteq R$.

方法3 用自反闭包证: 证出 $r(R) = R$, 即 $R \cup I_A = R$.

二. 证明 R 的反自反性:

方法1 用反自反定义证: 任取 $x \in A$, 证出 $\langle x, x \rangle \notin R$.

三. 证明 R 的对称性:

方法1 用对称定义证: 任取 $x, y \in A$, 设 $\langle x, y \rangle \in R$, 证出 $\langle y, x \rangle \in R$.

方法2 用求逆关系证: 证出 $R^c = R$.

方法3 用对称闭包证: 证出 $s(R) = R$, 即 $R \cup R^c = R$.

四. 证明R的反对称性:

方法1 用定义1证: 任取 $x, y \in A$, 设 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, x \rangle \in R$. 证出 $x=y$ 。

方法2 用定义2证: 任取 $x, y \in A$, $x \neq y$, 设 $\langle x, y \rangle \in R$, 证出 $\langle y, x \rangle \notin R$.

方法3 用定理证: 证出 $R \cap R^c \subseteq I_A$.

五. 证明R的传递性:

方法1 用传递定义证: 任取 $x, y, z \in A$, 设 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in R$, 证出 $\langle x, z \rangle \in R$.

方法2 用传递闭包证: 证出 $t(R)=R$, 即 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = R$.

方法3 用定理证: 证出 $S \circ S \subseteq S$

6、R和S都A上是自反、对称、传递的，求证 $R \cap S$ 也是自反、对称和传递的。

证明：1. 证明 $R \cap S$ 的自反性

方法1 用自反定义证：任取 $x \in A$, (证出 $\langle x, x \rangle \in R \cap S$)

因R和S都自反，所以有 $\langle x, x \rangle \in R$, $\langle x, x \rangle \in S$, 于是有 $\langle x, x \rangle \in R \cap S$, 所以 $R \cap S$ 也自反。

方法2 用恒等关系 I_A 证：(证出 $I_A \subseteq R \cap S$)

因R和S都自反，所以 $I_A \subseteq R$, $I_A \subseteq S$, 所以 $I_A \subseteq R \cap S$, 所以 $R \cap S$ 也自反。

方法3 用自反闭包证：(证出 $r(R \cap S) = R \cap S$, 即 $(R \cap S) \cup I_A = R \cap S$)

因R和S都自反，所以 $r(R) = R$, $r(S) = S$,

$$r(R \cap S) = (R \cap S) \cup I_A = (R \cup I_A) \cap (S \cup I_A) = r(R) \cap r(S) = R \cap S$$

所以 $R \cap S$ 也自反。

2. 证明 $R \cap S$ 的对称性:

方法1 用对称定义证: 任取 $x, y \in A$, 设 $\langle x, y \rangle \in R \cap S$, (证出 $\langle y, x \rangle \in R \cap S$)
则 $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle x, y \rangle \in S$, 因为 R 和 S 对称, 所以有 $\langle y, x \rangle \in R$, $\langle y, x \rangle \in S$, 于是
 $\langle y, x \rangle \in R \cap S$ 。 $\therefore R \cap S$ 对称。

方法2 用求逆关系证: (证出 $(R \cap S)^c = R \cap S$)

因为 R 和 S 对称, 所以有 $R^c = R$, $S^c = S$, 而 $(R \cap S)^c = R^c \cap S^c = R \cap S$, $\therefore R \cap S$ 对称。

方法3 用对称闭包证: (证出 $s(R \cap S) = R \cap S$, 即 $(R \cap S) \cup (R \cap S)^c = R \cap S$.)

因为 R 和 S 对称, 所以 $s(R) = R$, $s(S) = S$

$$\begin{aligned} s(R \cap S) &= (R \cap S) \cup (R \cap S)^c = (R \cap S) \cup (R^c \cap S^c) \\ &= (R \cup R^c) \cap (R \cup S^c) \cap (S \cup S^c) \cap (S \cup R^c) \\ &= (s(R) \cap (R \cup S^c)) \cap (s(S) \cap (S \cup R^c)) \\ &= (R \cap (R \cup S^c)) \cap (S \cap (S \cup R^c)) = R \cap S \quad (\text{吸收律}) \end{aligned}$$

$\therefore R \cap S$ 对称。

三、证明R的传递性：

方法1 用传递定义证：任取 $x, y, z \in A$, 设
 $\langle x, y \rangle \in R \cap S, \langle y, z \rangle \in R \cap S$, (证出 $\langle x, z \rangle \in R \cap S$)

$$\langle x, y \rangle \in R \cap S \wedge \langle y, z \rangle \in R \cap S$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in S$$

$$\Leftrightarrow (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R) \wedge (\langle x, y \rangle \in S \wedge \langle y, z \rangle \in S)$$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle x, z \rangle \in S \quad (\text{因为 } R、S \text{ 传递})$$

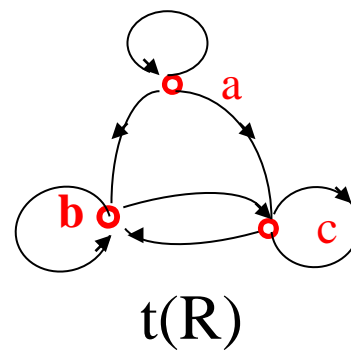
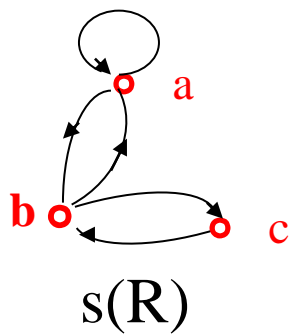
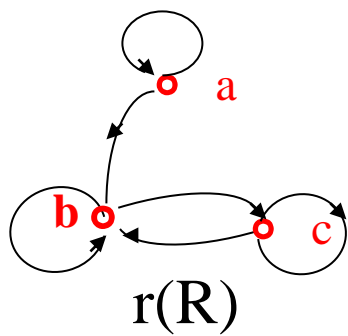
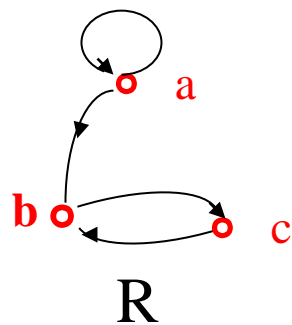
$$\Leftrightarrow \langle x, z \rangle \in R \cap S \quad \text{所以 } R \cap S \text{ 传递。}$$

方法2 用传递闭包证：证出 $t(R \cap S) = R \cap S$,
即 $(R \cap S) \cup (R \cap S)^2 \cup (R \cap S)^3 \cup \dots = R \cap S$.

方法3 用定理证：证出 $S \circ S \subseteq S$

用**方法2**、**方法3**证明此题的传递性有很大难度。

8、R的有向图如图所示，求 $r(R)$ 、 $s(R)$ 、 $t(R)$ 。



9、 R_1 和 R_2 是 A 上关系，且 $R_2 \subseteq R_1$ ，求证

a) $r(R_2) \subseteq r(R_1)$ ， **b)** $s(R_2) \subseteq s(R_1)$ ， **c)** $t(R_2) \subseteq t(R_1)$ 。

证明： **a)** $r(R_2) = R_2 \cup I_A \subseteq R_1 \cup I_A = r(R_1)$ ，

b) $s(R_2) = R_2 \cup (R_2)^c \subseteq R_1 \cup (R_1)^c = s(R_1)$ ，

(因为 $R_2 \subseteq R_1$ ，所以 $(R_2)^c \subseteq (R_1)^c$)

c) 先用归纳法证明 $(R_2)^i \subseteq (R_1)^i$ ，

(1) $i=1$ 时， $R_2 \subseteq R_1$ 显然结论成立

(2)假设 $i \leq k$ 时，结论成立，即 $(R_2)^i \subseteq (R_1)^i$ ；

(3) $i=k+1$ 时， $(R_2)^{k+1} = (R_2)^k \circ R_2 \subseteq (R_1)^k \circ R_1 = (R_1)^{k+1}$ ，

$$\begin{aligned} t(R_2) &= R_2 \cup (R_2)^2 \cup \dots \cup (R_2)^k \cup \dots \\ &\subseteq R_1 \cup (R_1)^2 \cup \dots \cup (R_1)^k \cup \dots = t(R_1)。 \end{aligned}$$

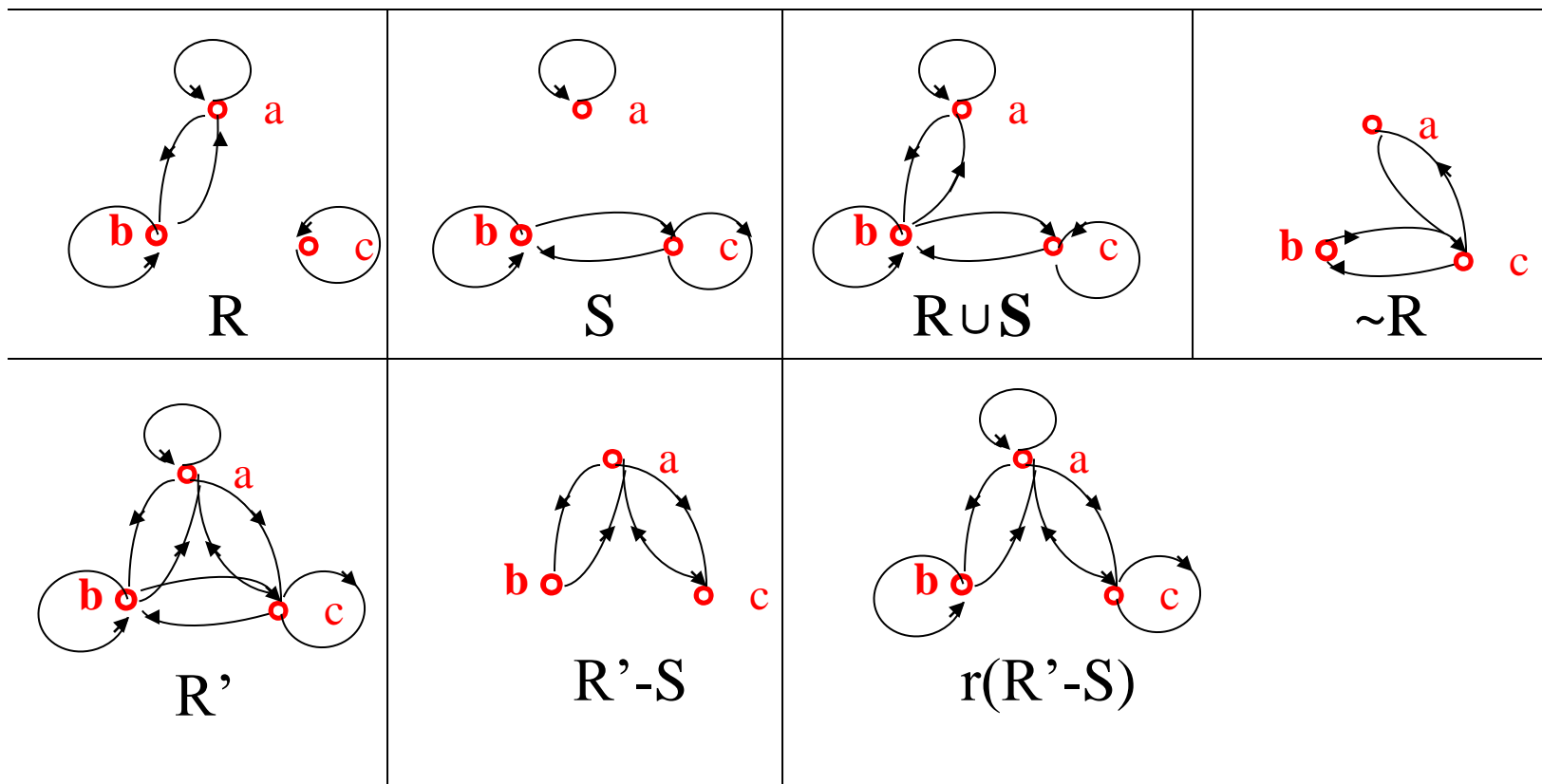
10、 X 是集合，且 $|X|=4$ ， X 有多少个不同的划分？
解.

划分块数	各块元素个数				相应划分个数	总数
1	4				$C_4^4 = 1$	15
2	1	3			$C_4^1 = 4$	
	2	2			$\frac{1}{2} C_4^2 = 3$	
3	1	1	2		$C_4^2 = 6$	
4	1	1	1	1	$C_4^4 = 1$	

11、R和S都是A上等价关系,下面哪个是A上等价关系?
证明或举反例说明.

- a) $R \cup S$ b) $R \cap S$ c) $\sim R$ (即 $A \times A - R$)
d) $R - S$ e) R^2 f) $r(R - S)$

解.a) c) d) f)不是。请看反例:



b). $R \cap S$ 是等价关系, 前面已经证明过

e). ①证 R^2 自反, 任取 $a \in A$, 因为 R 自反, 所以 $\langle a, a \rangle \in R$, 根据关系的复合得, $\langle a, a \rangle \in R \circ R$, 即 $\langle a, a \rangle \in R^2$, 所以 R^2 自反。

②证 R^2 对称, $(R^2)^c = (R^c)^2 = R^2$ (由 R 对称得 $R^c = R$) $\therefore R^2$ 对称

③证 R^2 传递, 任取 $a, b, c \in A$, 设有 $\langle a, b \rangle \in R^2, \langle b, c \rangle \in R^2$,

根据关系的复合得,

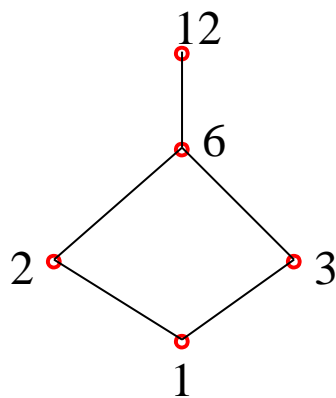
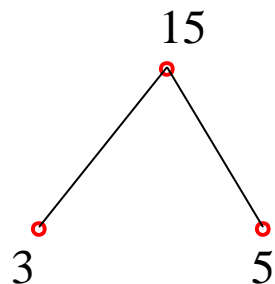
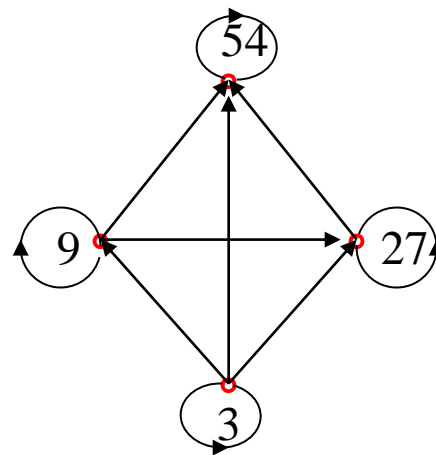
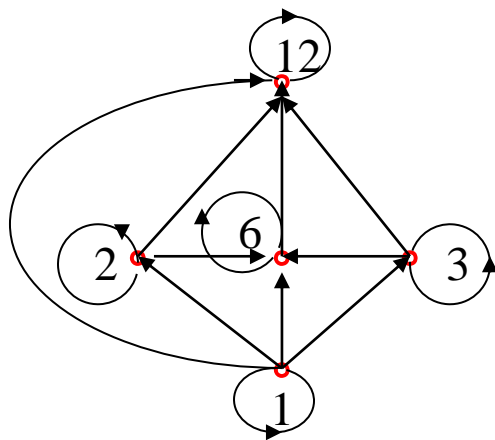
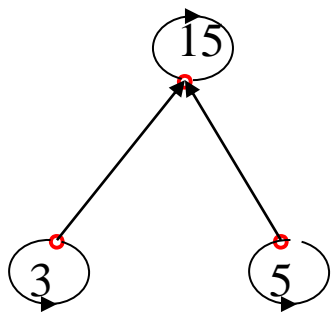
$(\exists d \in A \wedge \langle a, d \rangle \in R \wedge \langle d, b \rangle \in R) \wedge (\exists e \in A \wedge \langle b, e \rangle \in R \wedge \langle e, c \rangle \in R)$,

由于 R 传递, 所以有 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R$, $\therefore \langle a, c \rangle \in R^2$

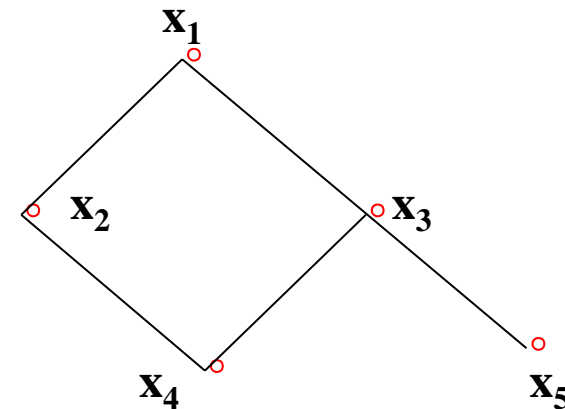
所以 R^2 传递。

最后得 R^2 是等价关系。

11、给定集合 $\{3,5,15\}$, $\{1,2,3,6,12\}$, $\{3,9,27,54\}$, \leq 为整除关系, 分别画出上述集合上的 \leq 的关系图, 哈斯图, 并指出哪些是全序关系。



12、 $P=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, P 上偏序关系的哈斯图如图所示, 求子集 $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_3, x_4, x_5\}$ 和 P 的极小(大)元、最小(大)元、上界、下界、最小上界和最大下界(上确界和下确界)。



子集	极小元	极大元	最小元	最大元	上界	下界	上确界	下确界
$\{x_1, x_2, x_3\}$	x_2, x_3	x_1	无	x_1	x_1	x_4	x_1	x_4
$\{x_2, x_3, x_4\}$	x_4	x_2, x_3	x_4	无	x_1	x_4	x_1	x_4
$\{x_3, x_4, x_5\}$	x_4, x_5	x_3	无	x_3	x_1, x_3	无	x_3	无
P	x_4, x_5	x_1	无	x_1	x_1	无	x_1	无

问题？

