离散数学

命题逻辑
1.7推理理论

1.7 推理理论

- 推理的形式结构
- 判断推理是否正确的方法
- 推理定律与推理规则
- 构造证明

  直接证明法, 附加前提证明法, 归缪法

推理的形式结构—问题的引入

- **推理**就是根据一个或几个已知的判断得出一个新的判断的思维过程。称这些已知的判断为**前提**，得到的新的判断为前提的**有效结论**。
- 实际上，推理的过程就是证明永真蕴含式的过程，即令H_1，H_2，…，H_n是已知的命题公式(前提)，若有 $H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n \Rightarrow C$ 则称C是H_1，H_2，…H_n的有效结论，简称结论。
- 即对于每组赋值，或者$H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n$为假，或者当$H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n$为真时，C也为真，则称由$H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n$推C的推理正确，否则推理不正确（错误）。
- **推理的形式结构**：$H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n \rightarrow C$**或**

  前提： $H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n$

  结论： C
- **若推理正确，则记作：** $H_1 \wedge H_2 \wedge 。。。。\wedge H_n \Rightarrow C$。

判断推理是否正确的方法

- 真值表法
- 等值演算法　　判断推理是否正确
- 主析取范式法
- 构造证明法　　证明推理正确
- 说明：用前3个方法时采用形式结构

  "$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \to B$"。
- 用构造证明时, 采用

  "前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$, 结论: B"。

实例

例 判断下面推理是否正确

(1) 若今天是**1**号，则明天是**5**号。 今天是**1**号。 所以明天是**5**号。

解 设 p：今天是**1**号，q：明天是**5**号。

推理的形式结构为: $(p\to q)\wedge p\to q$

证明（用等值演算法）

$$(p\to q)\wedge p\to q$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$$

$$\Leftrightarrow \neg p\vee\neg q\vee q \Leftrightarrow 1$$

得证推理正确

实例 (续)

（2）若今天是1号，则明天是5号。 明天是5号。 所以今天是1号。

解 设p：今天是1号，q：明天是5号。

推理的形式结构为: $(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$

证明（用主析取范式法）

$$(p\rightarrow q)\wedge q\rightarrow p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge q\rightarrow p$$
$$\Leftrightarrow \neg\ ((\neg p\vee q)\wedge q)\vee p$$
$$\Leftrightarrow \neg q\vee p$$
$$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee (p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$$
$$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$$

结果不含m_1, 故01是成假赋值，所以推理不正确。

推理定律——重言蕴涵式

- 重要的推理定律

$A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律

$(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律

$(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理

$(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式

$(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论

$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论

$(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论

$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

$(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难（特殊形式）

$(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

推理规则

(1) 前提引入规则：在推理过程中，可以随时引入前提。

(2) 结论引入规则：在推理过程中，如果前边有一个或几个公式永真蕴涵公式S，则可将S纳入推理过程中。

(3) 置换规则：在推理过程中，命题公式的任何子命题公式都可由与之等价的公式置换

(4)-(11)以及由8条推理定律得出8条推理规则

- 下面主要介绍三种推理方法：直接证明、附加前提证明法及反证法

- 证明:描述推理过程的命题公式序列，其中每个命题公式或者是已知的前提，或者是由前面的命题公式应用推理规则得到的结论。
- 在推理过程中，还要应用教材P23推理定律和 P9等值公式(常用的公式要熟记)

构造证明之一——直接证明法

- **直接证明/直接推理**，就是从前提直接推出结论。
- 上面讲到推理的过程实际上是证明重言蕴涵式的过程。只不过证明的过程采用另外一种书写格式。
- 格式中包含：步骤号，给定前提或得出的结论，此结论是从哪几步得到的以及所用公式。

直接证明法(续)

- 例 求证 前提： $P\rightarrow Q$，$Q\rightarrow R$，P 结论： R
- 证明

步骤号	前提或结论	从哪几步得到	所用公式
(1)	P	前提引入	
(2)	$P\rightarrow Q$	前提引入	
(3)	Q	(1)(2)	假言推理
(4)	$Q\rightarrow R$	前提引入	
(5)	R	(3)(4)	假言推理

直接证明法 (续)

例 构造下面推理的证明：

- 若明天是星期一或星期三，我就有课。 若有课，今天必备课。我今天没备课。 所以，明天不是星期一或星期三。

解 设 p：明天是星期一，q：明天是星期三，

r：我有课，s：我备课

推理的形式结构为

前提：$(p \vee q) \rightarrow r$，$r \rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p \wedge \neg q$

直接证明法 (续)

证明

① $r \rightarrow s$ 前提引入

② $\neg s$ 前提引入

③ $\neg r$ ①②拒取式

④ $(p \vee q) \rightarrow r$ 前提引入

⑤ $\neg(p \vee q)$ ③④拒取式

⑥ $\neg p \wedge \neg q$ ⑤德摩根律

直接证明法 (续)

例 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：

如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩扑克，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩扑克。

解设 P：我学习。

Q：我数学及格。

R：我热衷于玩扑克。

推理的形式结构为：

前提： $P \to Q$，$\neg R \to P$，$\neg Q$

结论： R

证明：

① $P \to Q$　　前提引入

② $\neg Q$　　前提引入

③ $\neg P$　　① ② 拒取式

④ $\neg R \to P$　　前提引入

⑤ $\neg\neg R$　　③ ④拒取式

⑥ R　　⑤　双重否定律

例* 求证 前提：$P\rightarrow(Q\rightarrow S),\neg R\vee P,Q$ 结论：$R\rightarrow S$

证明(1) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$ 前提引入

(2) $\neg P\vee(\neg Q\vee S)$ (1) 蕴涵等值式

(3) $\neg P\vee(S\vee\neg Q)$ (2) 交换律

(4) $(\neg P\vee S)\vee\neg Q$ (3) 结合律

(5) Q 前提引入

(6) $\neg P\vee S$ (4)(5) 析取三段论

(7) $P\rightarrow S$ (6) 蕴涵等值式

(8) $\neg R\vee P$ 前提引入

(9) $R\rightarrow P$ (8)蕴涵等值式

(10) $R\rightarrow S$ (7)(9) 假言三段论

构造证明之二——附加前提证明法

- 欲证明

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：$C \rightarrow B$
- 等价地证明

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k, C$

  结论：B
- 理由：

$$
\begin{aligned}
& (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \rightarrow (C \rightarrow B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B \\
\Leftrightarrow\ & (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \rightarrow B
\end{aligned}
$$

附加前提证明法(续)

- 例* 用附加前提证明法，证明 前提：$P\rightarrow(Q\rightarrow S)$，$\neg R\vee P$，$Q$ 结论：$R\rightarrow S$

证明 (1) R 附加前提引入

(2) $\neg R\vee P$ 前提引入

(3) P (1)(2) 析取三段论

(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$ 前提引入

(5) $Q\rightarrow S$ (3)(4) 假言推理

(6) Q 前提引入

(7) S (5)(6) 假言推理

由附加前提证明法可知，推理正确

- 与直接证明法证明相比，因为它增加了一个附加前提，所以推理就容易些。

附加前提证明法 (续)

例 构造下面推理的证明:

2是素数或合数。若2是素数，则$\sqrt{2}$是无理数。若$\sqrt{2}$是无理数，则4不是素数。所以，如果4是素数，则2是合数。用附加前提证明法构造证明。

解 设 p：2是素数，q：2是合数，

r：$\sqrt{2}$是无理数，s：4是素数

推理的形式结构

前提：$p \vee q$, $p \rightarrow r$, $r \rightarrow \neg s$

结论：$s \rightarrow q$

附加前提证明法 (续)

证明：

① s	附加前提引入
② $p\rightarrow r$	前提引入
③ $r\rightarrow\neg s$	前提引入
④ $p\rightarrow\neg s$	②③假言三段论
⑤ $\neg p$	①④拒取式
⑥ $p\vee q$	前提引入
⑦ q	⑤⑥析取三段论

课后请用直接证明法证明

附加前提证明法 (续)

例 用命题逻辑推理方法证明下面推理的有效性：

- 如果体育馆有球赛，青年大街交通就拥挤。在这种情况下，如果小王不提前出发，就会迟到。因此，小王没有提前出发也未迟到，则体育馆没有球赛。
- 证明 先将命题符号化。

  设 P：体育馆有球赛。

  Q：青年大街交通拥挤。

  R：小王提前出发。

  S：小王迟到。
- 推理的形式结构

  前提： $P \to Q$，$(Q \land \neg R) \to S$

  结论： $(\neg R \land \neg S) \to \neg P$

附加前提证明法 (续)

证明

(1)	$\neg R \wedge \neg S$	附加前提引入
(2)	$\neg R$	(1) 化简
(3)	$\neg S$	(1) 化简
(4)	$(Q \wedge \neg R) \rightarrow S$	前提引入
(5)	$\neg(Q \wedge \neg R)$	(3)(4) 拒取式
(6)	$\neg Q \vee R$	(5) 德摩根律
(7)	$\neg Q$	(2)(6) 析取三段论
(8)	$P \rightarrow Q$	前提引入
(9)	$\neg P$	(7)(8) 拒取式

构造证明之三——归谬法(反证法)

- 欲证明

  前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

  结论：B
- 将$\neg B$加入前提，若推出矛盾，则得证推理正确。
- 理由:

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$$
$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$$

- 括号内部为矛盾式当且仅当 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B)$为重言式

归谬法 (续)

- 例 前提：$P \to Q, (\neg Q \vee R) \wedge \neg R$，$\neg(\neg P \wedge S)$ 结论：$\neg S$

(1)	$\neg\neg S$	结论否定引入	
(2)	S	(1)	双重否定律
(3)	$\neg(\neg P \wedge S)$	前提引入	
(4)	$P \vee \neg S$	(3)	德摩根律
(5)	P	(2)(4)	析取三段论
(6)	$P \to Q$	前提引入	
(7)	Q	(5)(6)	假言推理
(8)	$(\neg Q \vee R) \wedge \neg R$	前提引入	
(9)	$\neg Q \vee R$	(8)	化简
(10)	$\neg R$	(8)	化简
(11)	R	(7)(9)	析取三段论
(12)	$R \wedge \neg R$	(10)(11)	合取

由**(12)**得出了矛盾，根据归谬法说明推理正确

归谬法 (续)

例 构造下面推理的证明

前提：$\neg(p\wedge q)\vee r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

证明（用归缪法）

① q 结论否定引入

② $r\rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

归谬法 (续)

⑤ $\neg(p \wedge q) \vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p \wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p \vee \neg q$	⑥德摩根律
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p \wedge p$	⑧⑨合取

课后请用直接证明法证明。

作业

- P35
- 1.19/（3）（5）
- 1.20

问题？