离散数学

集合论

集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

第3章 集合的基本概念和运算

- **3.1** 集合的基本概念
- **3.2** 集合的基本运算
- **3.3** 集合中元素的计数

3.1 集合的基本概念

- 集合的定义与表示
- 集合与元素
- 集合之间的关系
- 空集
- 全集
- 幂集

集合

- 集合是个最基本的概念。
- 集合：是由确定的对象(客体)构成的无序整体。用大写的英文字母表示。
- 这里所谓“确定”是指：论域内任何客体，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，是唯一确定的。
- 集合的表示
  - 列元素法　$A=\{ a, b, c, d \}$
  - 谓词表示法　$B=\{ x \mid P(x) \}$，B 由使得 $P(x)$ 为真的 x 构成
- 常用数集
  - N, Z, Q, R, C 分别表示自然数、整数、有理数、实数和复数集合，注意 0 是自然数.

集合与元素

- 元素：集合中的对象，称之为元素。
- 元素与集合的关系：隶属关系
- 属于$\in$，不属于 $\notin$
- 实例

  $A=\{\, x \mid x\in \mathrm{R} \wedge x^2-1=0 \,\}$，$A=\{-1,1\}$

  $1\in A$，$2\notin A$

- 注意：对于任何集合 A 和元素 x (可以是集合)，

  $x\in A$和 $x\notin A$ 两者成立其一，且仅成立其一

说明

⑴集合中的元素间次序是无关紧要的，但是必须是可以区分的，即是不同的。例如A={a,b,c,a}，B={c,b,a}，则A与B是一样的。

⑵对集合中的元素无任何限制，例如令

A={人，石头，1，Ｂ}, B={Φ,{Φ}}

⑶常用的几个集合符号的约定：

自然数集合N= {1,2,3,……}

整数集合I，实数集合R，有理数集合Q

⑷集合中的元素也可以是集合，下面的集合的含义不同：

如　a：　张书记

{a}:　党支部(只有一个书记)

{{a}}：　分党委(只有一个支部)

{{{a}}}：　党委 (只有一个分党委)

{{{{a}}}}：　市党委(只有一个党委)

隶属关系的层次结构

例 3.1

$A=\{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \}$

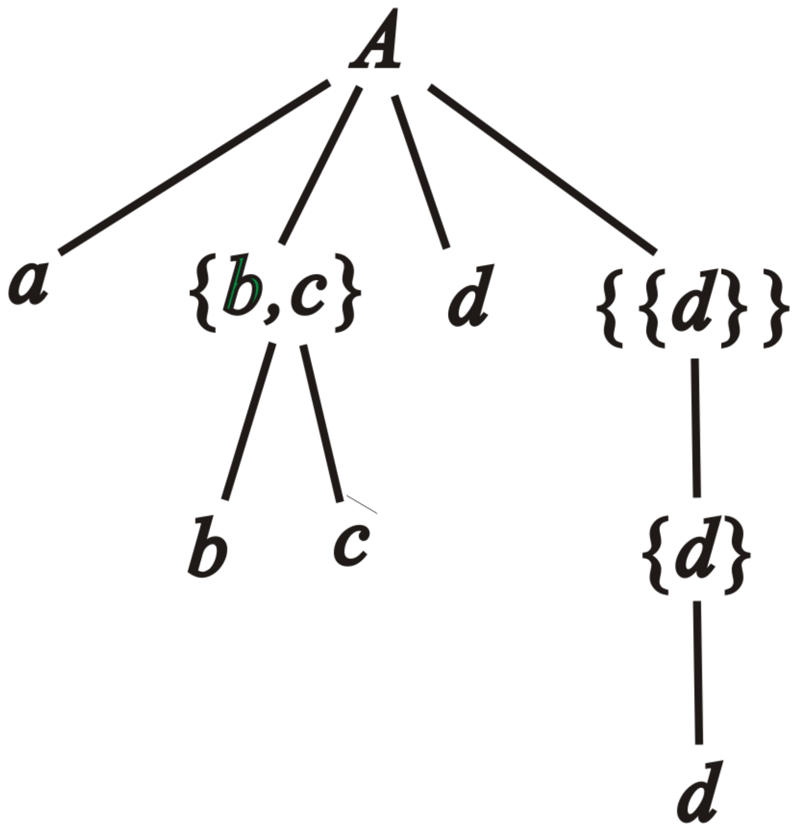
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$

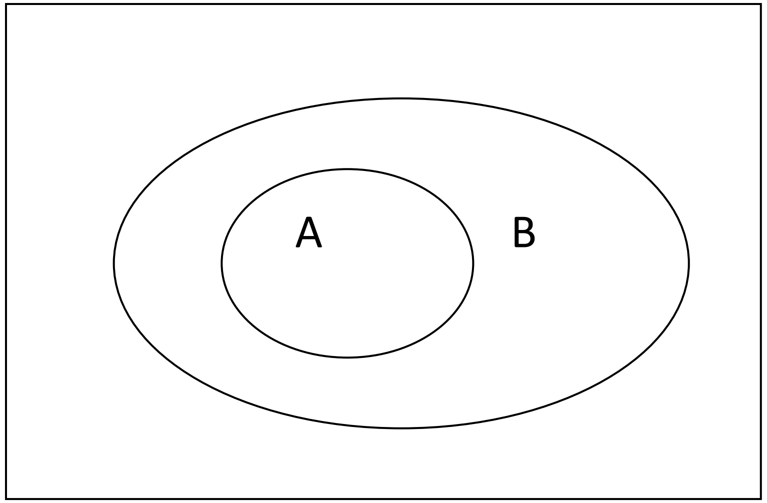


集合间的关系

一. 被包含关系(子集) $\subseteq$

定义：A、B是集合，如果A中元素都是B中元素，则称B包含A，A包含于B，也称A是B的子集。记作$A\subseteq B$。

文氏图表示如右图。



例如，N是自然数集合，R是实数集合，则$N\subseteq R$

谓词定义：

$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$

集合间的关系

二. 相等关系

- 定义：A、B是集合，如果它们的元素完全相同，则称A与B相等。记作A=B。
- 定理：A=B，当且仅当$A\subseteq B$且 $B\subseteq A$。
- 证明：充分性，已知$A\subseteq B$且 $B\subseteq A$，假设$A\neq B$，则至少有一个元素a，使得$a\in A$而$a\notin B$；或者$a\in B$而$a\notin A$。如果$a\in A$而 $a\notin B$，则与$A\subseteq B$矛盾。如果$a\in B$而$a\notin A$，则与 $B\subseteq A$矛盾。所以A=B。
- 必要性显然成立，因为如果A=B，则必有$A\subseteq B$且 $B\subseteq A$。

谓词定义：

$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A)$

$\Leftrightarrow \forall x((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$

$\Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

集合间的关系

- 三. 真被包含关系（真子集） $\subset$
- 定义：A、B是集合，如果$A\subseteq B$且$A\neq B$，则称B真包含A，A真包含于B，也称A是B的真子集。记作$A\subset B$。
- 谓词定义：$A\subset B \Leftrightarrow A\subseteq B\wedge A\neq B$

$$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge(\neg\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\vee\neg\forall x(x\in B\rightarrow x\in A))$$

$$\Leftrightarrow(\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\neg\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)) \vee (\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge \neg\forall x(x\in B\rightarrow x\in A))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B) \wedge \exists x(x\in B\wedge x\notin A)$$

特殊集合

- 全集　E
- **定义**：包含所讨论的所有集合的集合，称之为全集，记作E。实际上，就是论域。
- 由于讨论的问题不同，全集也不同。所以全集不唯一。例如，
  - 若讨论实数，可以把实数集看成全集。
  - 若讨论人，可以把人类看成全集。
- 由于论域内任何客体x都属于E，所以x∈E为永真式。所以需要用永真式定义E。

  $E=\{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$
- **性质**：对于任何集合A，都有$A \subseteq E$。

- 空集　Φ
- **定义**：没有元素的集合，称之为空集，记作Φ。
- 因为论域内如何客体x∈Φ是矛盾式，所以要用一个矛盾式定义Φ。

$$\Phi=\{x \mid P(x)\wedge\neg P(x)\}$$

- **性质**：

1.对于如何集合A，都有Φ⊆A。

　因为$\forall x(x\in\Phi\rightarrow x\in A)$为永真式，所以Φ⊆A。

2.空集是唯一的。

证明 假设有两个空集Φ_1、Φ_2，则

　因为是Φ_1空集，则由性质1得 $\Phi_1\subseteq\Phi_2$。

　因为是Φ_2空集，则由性质1得 $\Phi_2\subseteq\Phi_1$。

所以$\Phi_1=\Phi_2$。

集合的幂集

- **定义:** A是集合， 由A的所有子集构成的集合， 称之为A的幂集。记作P(A)或2^A。

  $P(A)=\{B \mid B \subseteq A\}$

- 例如， A P(A)

A	P(A)
Φ	$\{\Phi\}$
$\{a\}$	$\{\Phi,\{a\}\}$
$\{a,b\}$	$\{\Phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

- $A=\{a,b,c\}$ 则

  $P(A)=\{\Phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

  $|P(A)| = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$

- **性质**：

给定有限集合A，如果|A|=n, 则|P(A)|=2^n。

证明：因为A有n个元素，故P(A)中元素个数为:

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$$

而

$$(x+y)^n=\mathrm{C}_n^0x^n+\mathrm{C}_n^1x^{n-1}y+\mathrm{C}_n^2x^{n-2}y^2+\cdots+\mathrm{C}_n^ny^n$$

令$x=y=1$时得：

$$2^n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n$$

所以：

|P(A)|=2^n

作业

- P74
- 3.9
- 3.10/（2）（4）

问题？