

离散数学

命题逻辑

1.2 命题公式及分类

1.2 命题公式及分类

- 命题变项与合式公式
- 公式的赋值
- 真值表
- 命题的分类
 - 重言式
 - 矛盾式
 - 可满足式
- 真值函数

命题变项与合式公式

- **命题常项（常值命题）**：即是我们前面所说的命题。它是有具体含义（真值）的。例如：“3是素数。”就是命题常项。
- **命题变项（命题变元）**：真值不确定的陈述句。用单独一个英文字母如P、Q等表示任何命题。称这些字母为命题变项。
- 对命题变项作指派（给命题变项一个解释）：将一个命题常项赋予命题变元的过程，或者是直接赋给命题变元真值“T”或“F”的过程。
- **注意**：命题变项本身不是命题，只有给它一个解释，才变成命题。

合式公式

- 定义合式公式 (命题公式, 公式) :
 1. 单个命题变元是个合式公式。
 2. 若 A 是合式公式, 则 $(\neg A)$ 是合式公式。
 3. 若 A 和 B 是合式公式, 则 $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式。
 4. 当且仅当有限次地应用(1), (2), (3)所得到的含有命题变元、联结词和括号的符号串是合式公式。
- 注意这个定义是递归的。1是递归的基础, 由1开始, 使用2、3规则, 可以得到任意的合式公式。

合式公式--2

- 这里所谓的合式公式可以解释为合法的命题公式之意，在命题逻辑里又称之为**命题公式**，有时也简称**公式**。
- 下面的式子不是合式公式：
 $P \wedge Q, \quad P \neg \rightarrow R, \quad P \vee Q \wedge R$
- 下面的式子才是合式公式：
 $(P \wedge Q), \quad (\neg P \rightarrow R), \quad ((P \vee Q) \wedge R)$
- **约定**：为方便，最外层括号可以不写，上面的合式公式可以写成：
 $P \wedge Q, \quad \neg P \rightarrow R, \quad (P \vee Q) \wedge R$

合式公式的层次

定义

- (1) 若公式 A 是单个的命题变项, 则称 A 为0层公式.
- (2) 称 A 是 $n+1$ ($n \geq 0$) 层公式是指下面情况之一:
 - (a) $A = \neg B$, B 是 n 层公式;
 - (b) $A = B \wedge C$, 其中 B, C 分别为 i 层和 j 层公式, 且 $n = \max(i, j)$;
 - (c) $A = B \vee C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (d) $A = B \rightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b);
 - (e) $A = B \leftrightarrow C$, 其中 B, C 的层次及 n 同(b).

合式公式的层次 --2

例如 确定公式 $((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$ 的层次

p 0层

$\neg p$ 1层

$\neg p \wedge q$ 2层

$(\neg p \wedge q) \rightarrow r$ 3层

$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$ 4层

公式的赋值

- **定义** 给公式 A 中的命题变项 p_1, p_2, \dots, p_n 指定一组真值称为对 A 的一个**赋值**或**解释**
- **成真赋值**: 使公式为真的赋值
- **成假赋值**: 使公式为假的赋值
- **说明**:
 - 赋值 $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 之间不加标点符号, $\alpha_i = 0$ 或 1 .
 - A 中仅出现 p_1, p_2, \dots, p_n , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ 是指 $p_1 = \alpha_1, p_2 = \alpha_2, \dots, p_n = \alpha_n$
 - A 中仅出现 p, q, r, \dots , 给 A 赋值 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ 是指 $p = \alpha_1, q = \alpha_2, r = \alpha_3 \dots$
 - 含 n 个变项的公式有 2^n 个赋值.

命题公式的真值表

- 一个命题公式不是复合命题，所以它没有真值，但是给其中的所有命题变元作指派以后它就有了真值。可以以表的形式反应它的真值情况
- 给出公式 $A = ((q \rightarrow p) \wedge q) \rightarrow p$ 的真值表

p	q	$q \rightarrow p$	$(q \rightarrow p) \wedge q$	$((q \rightarrow p) \wedge q) \rightarrow p$
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

- 由于对每个命题变元可以有两个真值(T,F)被指派，所以有 n 个命题变元的命题公式 $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 的真值表有 2^n 行。
- 为了有序地列出公式的真值表，在对命题变元做指派时，可以按照二进制数的次序列表。

实例

例 $B = \neg (\neg p \vee q) \wedge q$ 的真值表

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg (\neg p \vee q)$	$\neg (\neg p \vee q) \wedge q$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

例 $C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$ 的真值表

p	q	r	$p \vee q$	$\neg r$	$(p \vee q) \rightarrow \neg r$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

公式的类型

• **定义** 设 A 为一个命题公式

- (1) 若 A 无成假赋值，则称 A 为**重言式** (也称**永真式**)
- (2) 若 A 无成真赋值，则称 A 为**矛盾式** (也称**永假式**)
- (3) 若 A 不是矛盾式，则称 A 为**可满足式**

注意：重言式是可满足式，但反之不真。

上例中 A 为重言式， B 为矛盾式， C 为可满足式

$$A = (q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow p, \quad B = \neg(\neg p \vee q) \wedge q, \quad C = (p \vee q) \rightarrow \neg r$$

重言式(永真式)与矛盾式(永假式)

• 例子:

P	$\neg P \vee P$	$\neg P \wedge P$
F	T	F
T	T	F

• 可见不论P取什么真值 $\neg P \vee P$ 的真值总是为真,
 $\neg P \wedge P$ 的真值总是为假。故称 $\neg P \vee P$ 为重言式(永真式), 称 $\neg P \wedge P$ 为矛盾式(永假式)。

重言式(永真式)与矛盾式(永假式) --2

- 重言式的证明方法

- 方法1：列真值表。

- 方法2：公式的等价变换，化简成“T”。

- 方法3：用公式的主析取范式。

- 其中方法2 和方法3 我们在以后讨论。

重言式(永真式)与矛盾式(永假式) --2

- 列真值表。

例如，证明 $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 为重言式。

P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \wedge (P \rightarrow Q)$	$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

真值函数

- 问题：含 n 个命题变项的所有公式共产生多少个互不相同的真值表？
- **定义** 称定义域为 $\{00\cdots 0, 00\cdots 1, \cdots, 11\cdots 1\}$ ，值域为 $\{0, 1\}$ 的函数是 **n 元真值函数**，定义域中的元素是长为 n 的0,1串。常用 $F: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ 表示 F 是 n 元真值函数。
- 共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数。
- 例如 $F: \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ ，且 $F(00)=F(01)=F(11)=0$ ， $F(10)=1$ ，则 F 为一个确定的2元真值函数。

命题公式与真值函数

- 对于任何一个含 n 个命题变项的命题公式 A ，都存在唯一的一个 n 元真值函数 F 为 A 的真值表.
- 等值的公式对应的真值函数相同.
- 下表给出所有 2 元真值函数对应的真值表，每一个含 2 个命题变项的公式的真值表都可以在下表中找到.
- 例如： $p \rightarrow q$, $\neg p \vee q$, $(\neg p \vee q) \vee (\neg(p \rightarrow q) \wedge q)$ 等都对应表中的 $F_{13}^{(2)}$

2元真值函数对应的真值表

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

作业

- P32
- 1.6(2)(4)

问题？

