离散数学

一阶逻辑
2.1一阶逻辑基本概念

命题逻辑的局限性

- 在第一章，一个原子命题只用一个字母表示，而不再对命题中的句子成分细分。这样有一些逻辑问题无法解决。
- 例1. 令Ｐ：小张是大学生。

  Ｑ：小李是大学生。
- 从符号Ｐ、Ｑ中不能归纳出他们都是大学生的共性。我们希望从所使用的符号那里带给我们更多的信息，比如可以看出他们的共性。这种想法在第一章是无法实现的。

命题逻辑的局限性-2

- 例2. 令　A：所有自然数都是整数。

  　　　B：8是自然数。

  　　　C：8是整数。
- 这是著名的三段论推理，A是大前提，B是小前提，C是结论。显然，由A和B可以推出结论C。这个推理是有效的，但是这个推理在第一章也是无法实现的。
- 分析：命题P与Q中的谓语是相同的(是大学生)，只是主语不同。命题A、B、C之间在主语谓语方面也是有联系的，靠这种联系才能由A、B推出C。而从这三个符号上看不出此种联系。

命题逻辑的局限性-3

- 苏格拉底三段论：

  凡是人都要死的.

  苏格拉底是人.

  所以苏格拉底是要死的.

- 在命题逻辑中，只能用p、q、r表示以上3个命题，上述推理可表成：$(p \wedge q) \rightarrow r$，这不是重言式。
- 所以就要另外考虑表示命题的方法。

解决这个问题的方法

- 在表示命题时，既表示出主语，也表示出谓语，就可以解决上述问题。这就提出了谓词的概念。
- 令C(x)表示x是大学生，a:小张，b:小李

  命题P表示成C(a):小张是大学生。

  命题Q表示成C(b):小李是大学生。
- 从符号C(a)、C(b)可看出小张和小李都是大学生的共性.
- 令N(x):x是自然数。I(x):x是整数。∀表示所有的。

  A: $\forall x(N(x)\rightarrow I(x))$

  B :$N(8)$

  C :$I(8)$

推理如此实现： $N(8)\rightarrow I(8)$

$N(8)$

$\Rightarrow I(8)$

符号 C(x)、N(x)、I(x)就是所谓的谓词。

2.1 一阶逻辑基本概念

- 个体词
- 谓词
- 量词
- 一阶逻辑中命题符号化

基本概念——个体词

- 个体词（个体或客体）：所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的个体。
- 个体常项：具体的事物，用a, b, c表示
- 个体变项：抽象的事物，用x, y, z表示
- 个体域: 个体变项的取值范围
- 有限个体域，如$\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$
- 无限个体域，如N, Z, R, …
- 全总个体域： 宇宙间一切事物组成

基本概念——谓词

- 谓词: 表示个体词性质或相互之间关系的词
- 谓词常项：$F(a)$：a是人
- 谓词变项：$F(x)$：x具有性质F
- 一元谓词: 表示事物的性质
- 多元谓词(n元谓词, $n\geq 2$): 表示事物之间的关系。
  - 例如

    C(x):表示x是大学生。　　一元谓词

    G(x, y)：表示 x>y。　　二元谓词

    B(x, y, z)：表示x在y与z之间。　　三元谓词

    一般地 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$　　是n元谓词。
- 0元谓词: 不含个体变项的谓词, 即命题常项或命题变项

命题函数

- 谓词本身并不是命题，只有谓词的括号内填入足够的个体常项，同时将谓词部分由谓词常项代替，才变成命题。
- 例如，

  a表示小张，b表示小李，则

  C(a):小张是大学生。

  C(b):小李是大学生。

  G (7,3)表示: 7 > 3 。
- 如果c表示锦州，d表示沈阳，e表示山海关，则B(c,d,e)表示：锦州在沈阳与山海关之间。
- 这时C(a)、C(b)、G(7,3)、B(c,d,e)才是命题。

命题函数--2

- 令谓词C(x):x是大学生，括号内填入不同的人名，就得到不同的命题，故谓词C(x)相当于一个函数，称之为命题函数。
- **定义**：n元谓词$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$称之为**简单命题函数**。
- 规定：当命题函数$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中 n=0 时，即0元谓词，表示不含有个体变元的谓词，它本身就是一个**命题变元**。
- **定义**：将若干个简单命题函数用逻辑联结词联结起来，构成的表达式，称之为**复合命题函数**。简单命题函数与复合命题函数统称为**命题函数**。

命题函数--3

- 例如　给定简单命题函数：

  A(x)：x身体好，

  B(x)：x学习好，

  C(x)：x工作好，

- 复合命题函数　$\neg A(x) \rightarrow (\neg B(x) \wedge \neg C(x))$

  表示如果x身体不好，则x的学习与工作都不会好。

基本概念—量词

- 例如：**有些**人是大学生。

  所有事物都是发展变化的。

“有些”，“所有的”，就是对个体量化的词。

- 定义：在命题中表示对个体数量化的词，称之为量词。
- 定义了两种量词：

(1). 存在量词：记作∃，表示“有些”、“一些”、“某些”、“至少一个”等。

(2). 全称量词：记作∀，表示“每个”、“任何一个”、“一切”、“所有的”、“凡是”、“任意的”等。

基本概念—量词

- **定义**：量词后边要有一个**个体变元**，指明对哪个个体变元量化，称此个体变元是**量词后的指导变元**。
- 例如 $\forall x$(读作“任意x”)，$\exists x$(读作“存在x”)，其中的x就是量词后的指导变元。
- 例题１.所有的自然数都是整数。

  设 N(x)：x是自然数。I(x)：x是整数。

  此命题可以写成 $\forall x(N(x)\rightarrow I(x))$
- 例题２.有些自然数是偶数。

  设 E(x)：x是偶数。

  此命题可以写成 $\exists x(N(x)\land E(x))$

- 例题3.　每个人都有一个生母。

  设 P(x):x是个人。M(x,y):y是x的生母。

  此命题可以写成

$$\forall x(P(x)\rightarrow\exists y(P(y)\wedge M(x,y)))$$

一阶逻辑中命题符号化

例 用0元谓词将命题符号化

要求：先将它们在命题逻辑中符号化，再在一阶逻辑中符号化

(1) 墨西哥位于南美洲

在命题逻辑中, 设 p: 墨西哥位于南美洲

符号化为 p

在一阶逻辑中, 设a：墨西哥，$F(x)$：x位于南美洲

符号化为$F(a)$

例(续)

(2) $\sqrt{2}$ 是无理数仅当$\sqrt{3}$是有理数

在命题逻辑中，设 p：$\sqrt{2}$是无理数，q：$\sqrt{3}$是有理数.

符号化为 $p \to q$

在一阶逻辑中, 设$F(x)$: x是无理数, $G(x)$: x是有理数.

符号化为$F(\sqrt{2}) \to G(\sqrt{3})$

(3) 如果2>3，则3<4

在命题逻辑中, 设 p：2>3，q：3<4.

符号化为 $p\to q$

在一阶逻辑中, 设 $F(x,y)$：$x>y$，$G(x,y)$：$x<y$,

符号化为 $F(2,3)\to G(3,4)$

- **命题的符号表达式与论域有关系**。例如

1. 每个自然数都是整数。

(1). 如果论域是自然数集合N，

令$I(x)$：x是整数，则命题的表达式为$\forall x I(x)$

(2). 如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\forall x I(x)$表示“所有客体都是整数”，显然这是假的命题，此表达式已经不能表达原命题了。

因此需要添加谓词$N(x)$：x是自然数，用于表明x的特性，于是命题的符号表达式为 $\forall x(N(x)\rightarrow I(x))$

2. 有些大学生吸烟。

(1). 如果论域是大学生集合S，

令A(x)：x吸烟，则命题的表达式为 $\exists xA(x)$

(2). 如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\exists xA(x)$表示“有些客体吸烟”，就不是表示此命题了，

故需要添加谓词 S(x)：x是大学生，用于表明x的特性，于是命题的表达式为 $\exists x(S(x)\wedge A(x))$

- 从上述两个例子可以看出，命题的符号表达式与论域有关。当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为**特性谓词**。
- 特性谓词往往就是给定命题中量词后边的那个名词。如上面两个例子中的“所有*自然数*”、“有些*大学生*”。
- **如何添加特性谓词，这是个十分重要的问题，这与前边的量词有关。**
- 特性谓词的添加方法如下：
- **如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“→”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“∧”。**

例(续)

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 人都爱美; (2) 有人用左手写字

分别取(a) D为人类集合, (b) D为全总个体域 .

解：(a) (1) 设$G(x)$: x爱美, 符号化为 $\forall x\, G(x)$

(2) 设$G(x)$: x用左手写字, 符号化为 $\exists x\, G(x)$

(b) 设$F(x)$: x为人，$G(x)$: 同(a)中

(1) $\forall x\, (F(x)\rightarrow G(x))$

(2) $\exists\, x\, (F(x)\wedge G(x))$

例 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 正数都大于负数

(2) 有的无理数大于有的有理数

解：注意: 题目中没给个体域, 使用全总个体域

(1) 令$F(x)$: x为正数, $G(y)$: y为负数, $L(x,y)$: $x>y$

$$\forall x(F(x)\to\forall y(G(y)\to L(x,y)))$$

或 $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to L(x,y))$ 两者等值

(2) 令$F(x)$: x是无理数, $G(y)$: y是有理数,

$L(x,y)$：$x>y$

$$\exists x(F(x)\wedge\exists y(G(y)\wedge L(x,y)))$$

或 $\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x,y))$ 两者等值

例 所有大学生都喜欢一些歌星。

令S(x)：x是大学生，X(x)：x是歌星，L(x, y)：x喜欢y。

则命题的表达式为 $\forall x(S(x)\rightarrow\exists y(X(y)\wedge L(x,y)))$

例 没有不犯错误的人。

此话就是“没有人不犯错误”，“没有”就是“不存在”之意。

令P(x)：x是人，F(x)：x犯错误，

此命题的表达式为 $\neg\exists x(P(x)\wedge\neg F(x))$

或者 $\forall x(P(x)\rightarrow F(x))$

例 不是所有的自然数都是偶数。

令N(x)：x是自然数，E(x)：x是偶数，

命题的表达式为: $\neg\forall x(N(x)\rightarrow E(x))$或者$\exists x(N(x)\wedge\neg E(x))$

6.如果一个人只是说谎话，那么他所说的每句话没有一句是可以相信的。

令A(x)：x是人，B(x, y)：y是x说的话，C(x):x是谎话，D(x)：x是可以相信的

命题的表达式为:

$$\forall x(A(x)\rightarrow(\forall y(B(x,y)\rightarrow C(y))\rightarrow\neg\exists z(B(x,z)\wedge D(z))))$$

7.每个自然数都有唯一的后继数。

令N(x)：x是自然数，A(x, y)：y是x的后继数，E(x, y)：x=y

则命题的表达式为

$$\forall x(N(x)\rightarrow\exists y(\underbrace{N(y)\wedge A(x,y)}_{\text{有一个后继数}})\wedge\forall z\underbrace{((N(z)\wedge A(x,z))\rightarrow E(y,z))}_{\text{后继数的唯一性}}))$$

一阶逻辑中命题符号化(续)

- 几点注意:
  - 无特别要求, 应使用全总个体域, 引入特性谓词
  - 量词顺序一般不能随便颠倒
  - 两个基本形式$\forall x\,(F(x)\rightarrow G(x))$和$\exists\, x\,(F(x)\wedge G(x))$的使用
  - 否定的表示，如“没有不呼吸的人”等同于“所有的人都呼吸”，“不是所有的人都喜欢吃糖”等同于“存在不喜欢吃糖的人”

作业

- P52
- 2.3

问题？