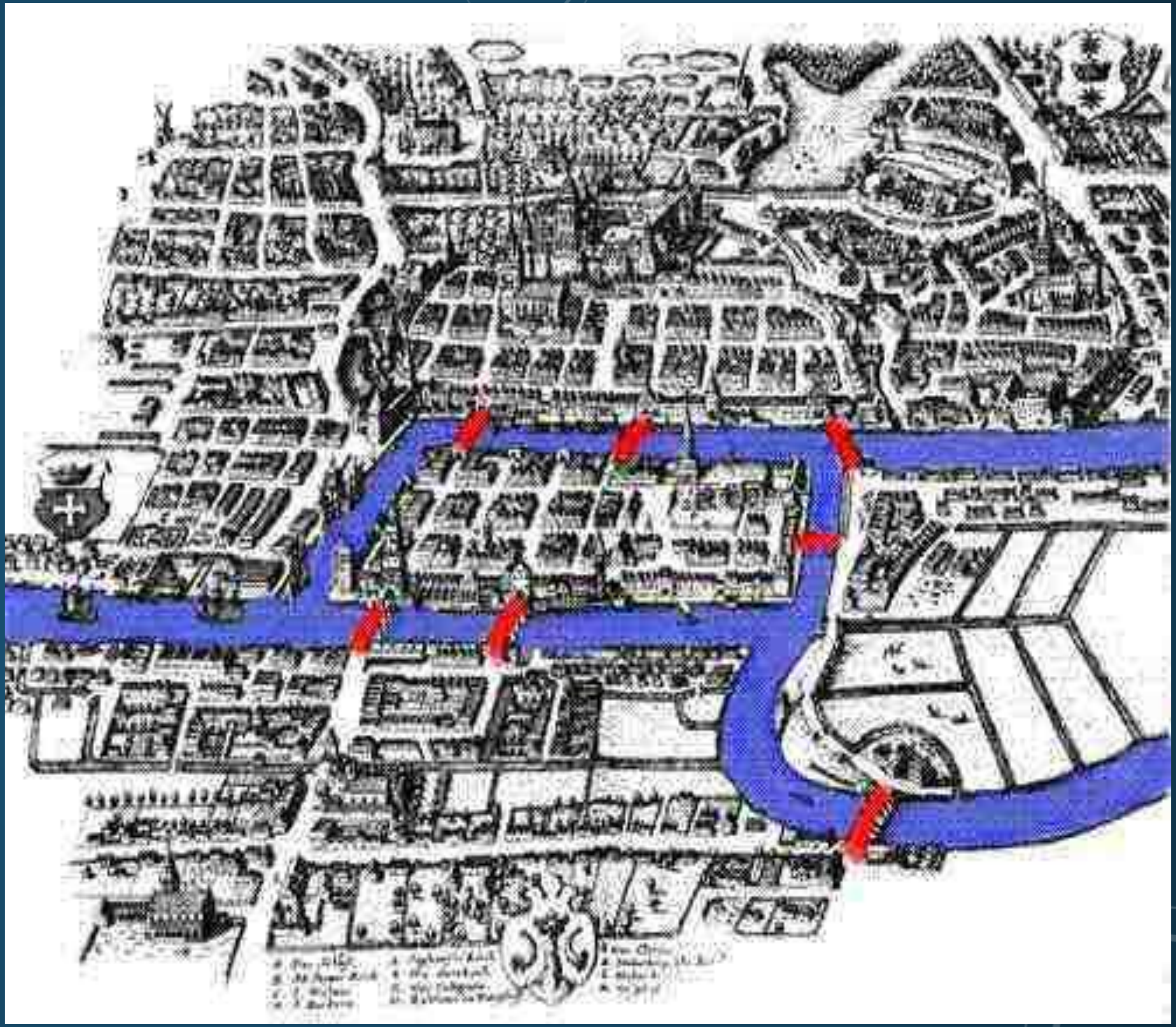
离散数学 图论

欧拉图

计算机科学与技术学院 管昕洁

哥尼斯堡七桥问题

“一个步行者怎样才能不重复、不遗漏地一次走完七座桥，最后回到出发点呢？”

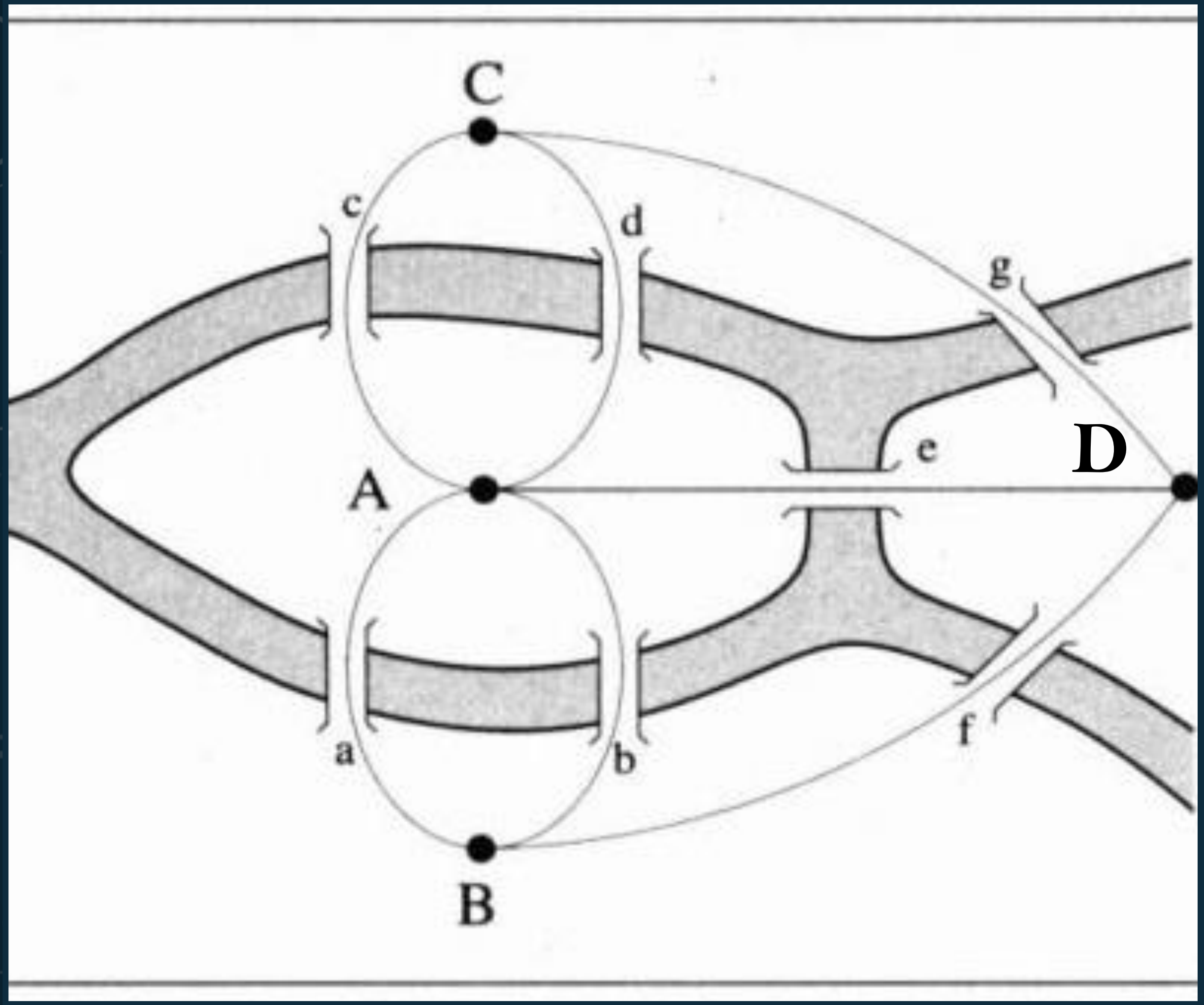


莱昂哈德·保罗·欧拉

LEONHARD PAUL EULER

(1707年4月15日 - 1783年9月18日)

- 1736年，提交了《哥尼斯堡七桥》的论文
  - 圆满的解决了哥尼斯堡七桥问题
  - 抽象的表示了哥尼斯堡七桥问题



七桥问题的抽象和泛化

- 每一块陆地抽象为一个点，称为顶点（Vertex）
- 连接两块陆地的桥抽象为两个顶点间的一条线，称为边（Edge）
- 连接到同一个顶点的边的数量称为顶点的度数（Degree）

欧拉图

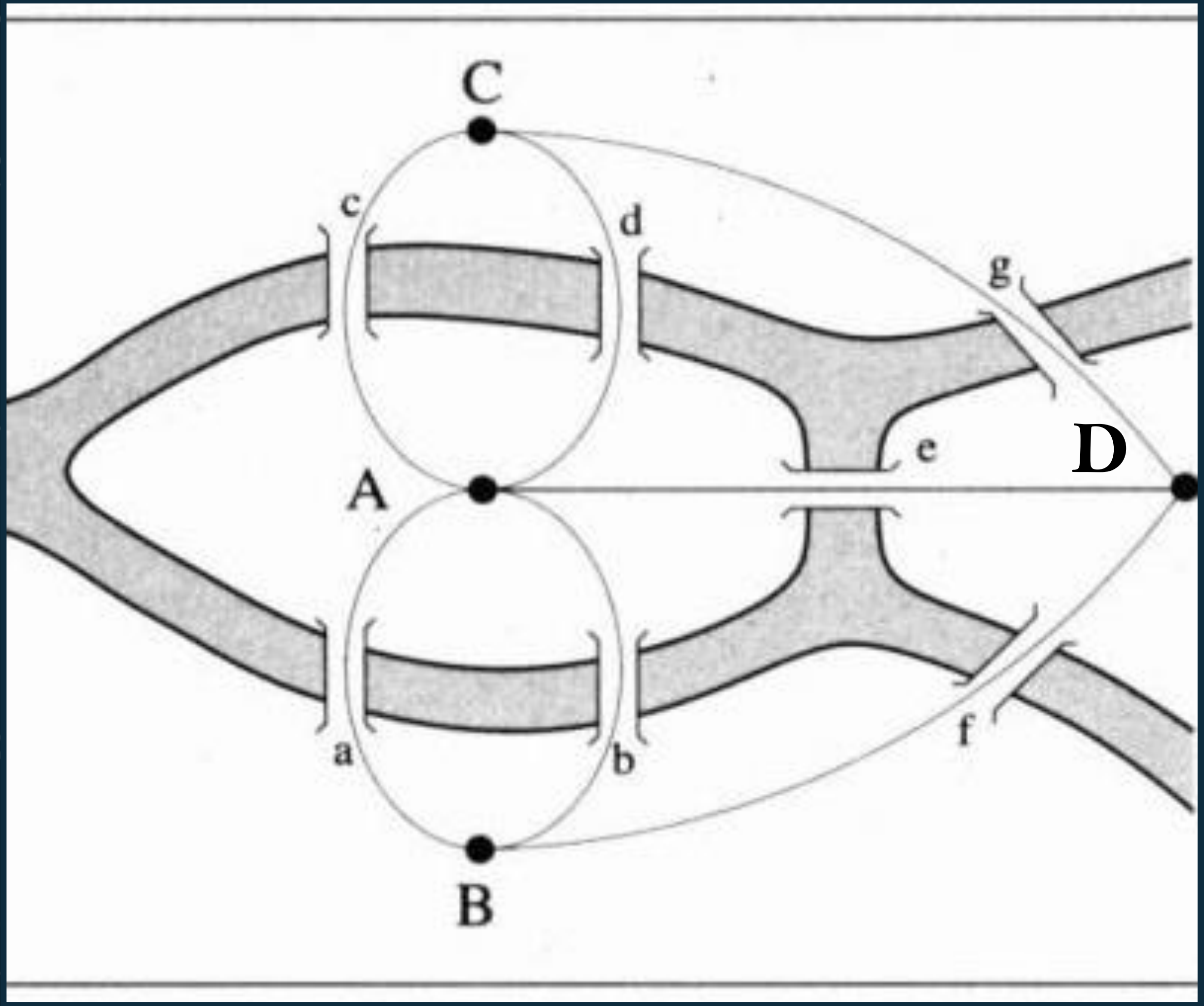
- **欧拉通路**: 图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的通路。
- **欧拉回路**: 图中行遍所有顶点且恰好经过每条边一次的回路。
- **欧拉图**: 有欧拉回路的图。
- **半欧拉图**: 有欧拉通路,但无欧拉回路的图。

- **上述定义对无向图和有向图都适用。**

欧拉图的判定定理

- **定理** 无向图G为欧拉图当且仅当G连通且无奇度顶点。G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点。

- **定理** 有向图D是欧拉图当且仅当D连通且每个顶点的入度都等于出度。D是半欧拉图当且仅当D连通且恰有两个奇度顶点, 其中一个入度比出度大1, 另一个出度比入度大1, 其余顶点的入度等于出度。

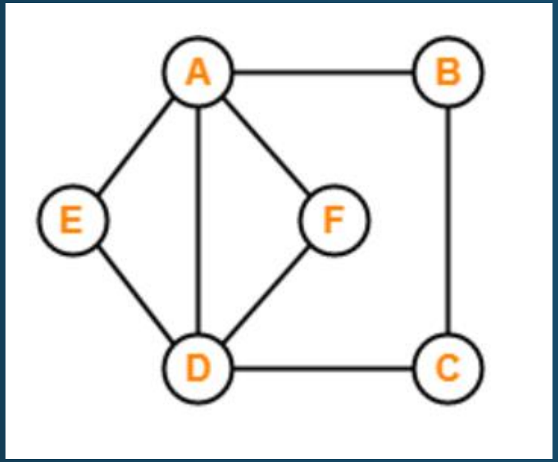


七桥问题的判定

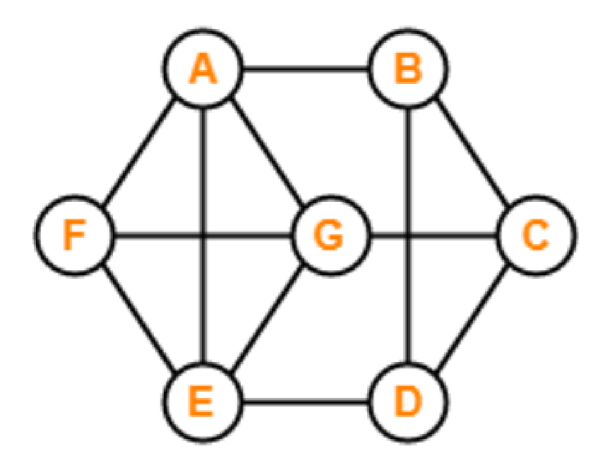
- 4个奇度顶点
- 不存在欧拉通路，更不存在欧拉回路

实例

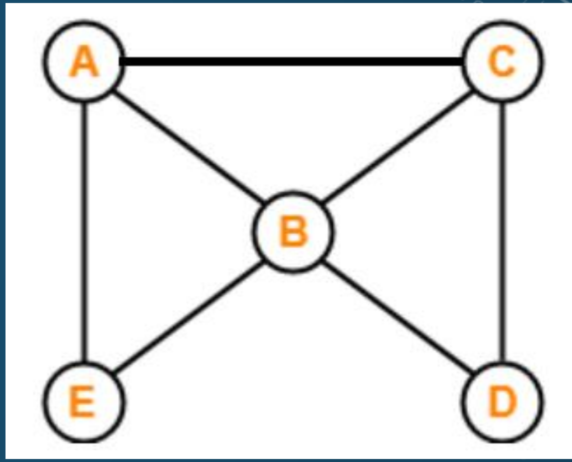
- 下面三个无向图是欧拉图吗?



图一



图二

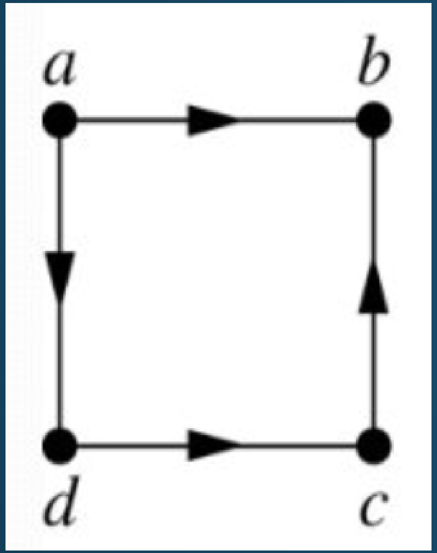


图三

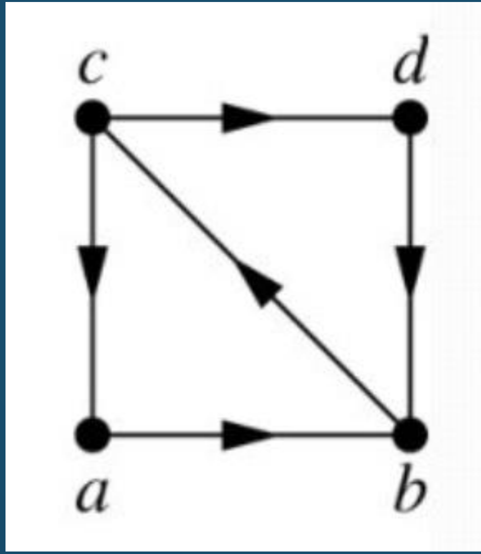
图一为欧拉图，图二不是欧拉图，图三为半欧拉图

实例

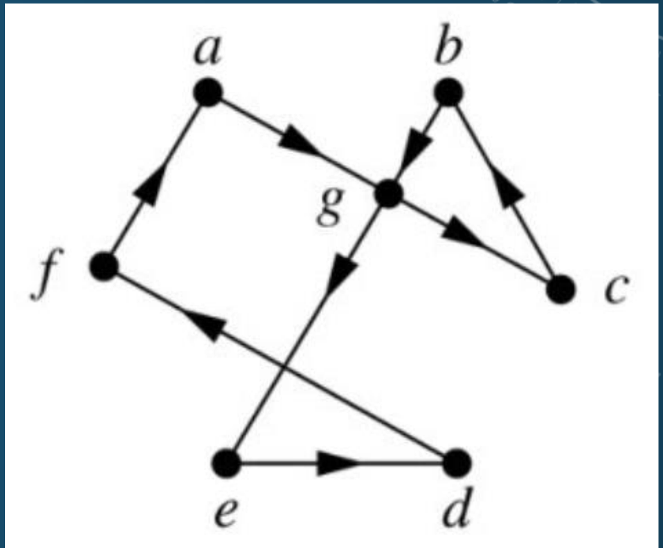
- 下面三个有向图是欧拉图吗?



图四



图五



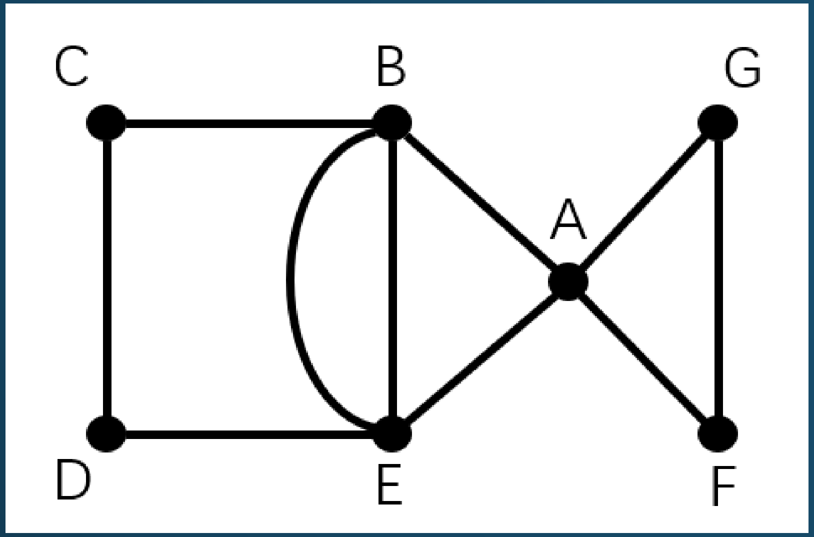
图六

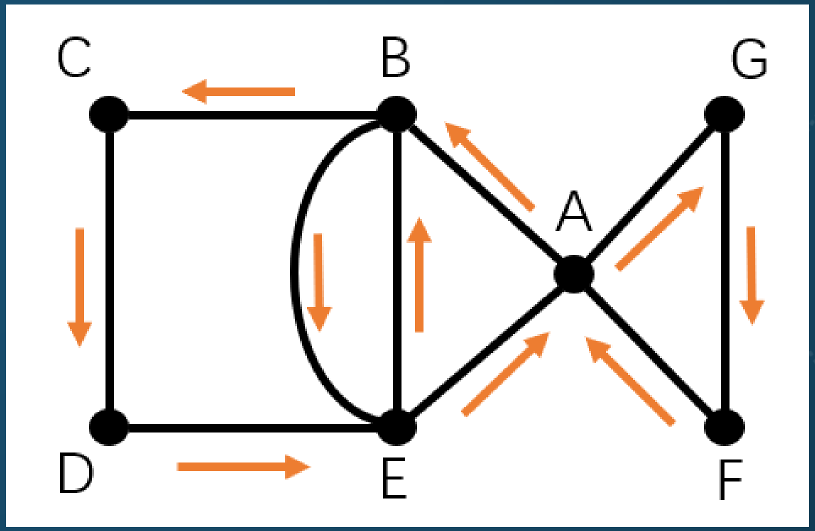
图四不是欧拉图，图五为半欧拉图，图六为欧拉图

欧拉回路的构造—FLEURY算法

- 核心思想：从任一点出发，优先选择非桥的边，直到所有的边添加入序列

例：





欧拉回路的构造—FLEURY算法

- 核心思想：从任一点出发，优先选择非桥的边，直到所有的边添加入序列

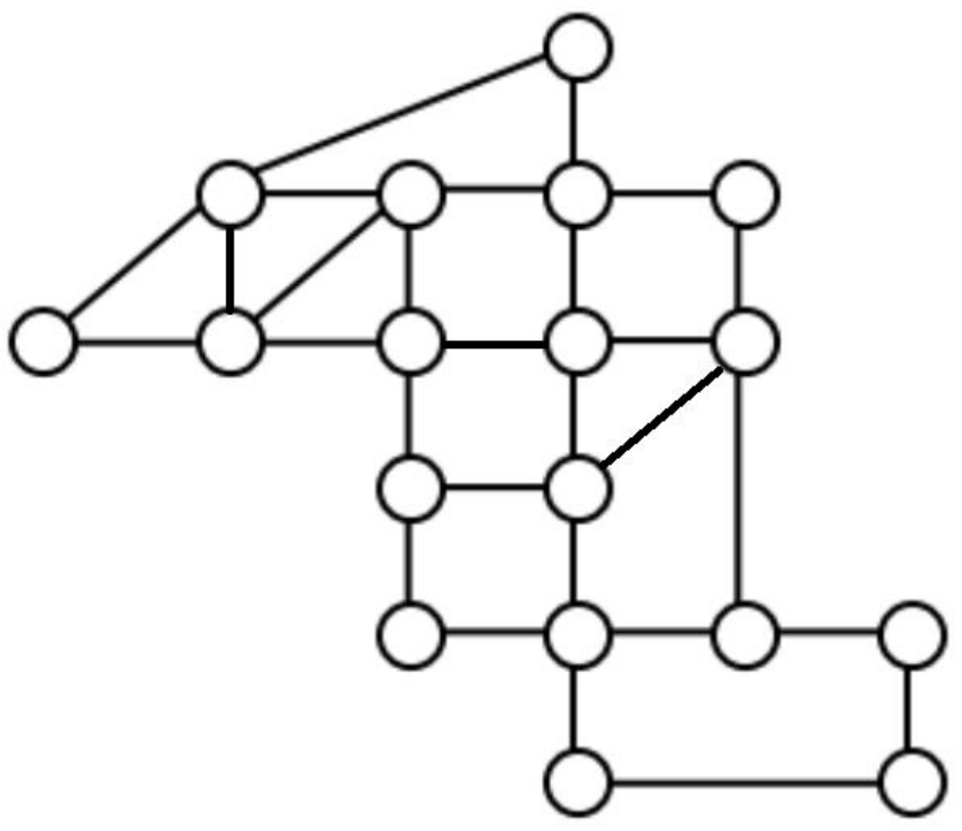
1. 任取$v_0 \in V(G)$，令$P_0=v_0$；
2. 设$P_i=v_0e_1v_1e_2 \ldots e_iv_i$已经行遍，按下面方法从中选取$e_{i+1}$：

（a）e_{i+1}与v_i相关联；

（b）除非无别的边可供行遍，否则e_{i+1}不应该为$G_i=G-\{e_1,e_2, \ldots, e_i\}$中的桥（所谓桥是一条删除后使连通图不再连通的边）；

（c）当（b）不能再进行时，算法停止。

应用实例-清扫车问题



☆为了保证路面清洁，派了一辆清扫车来负责江浦街区的路面清扫

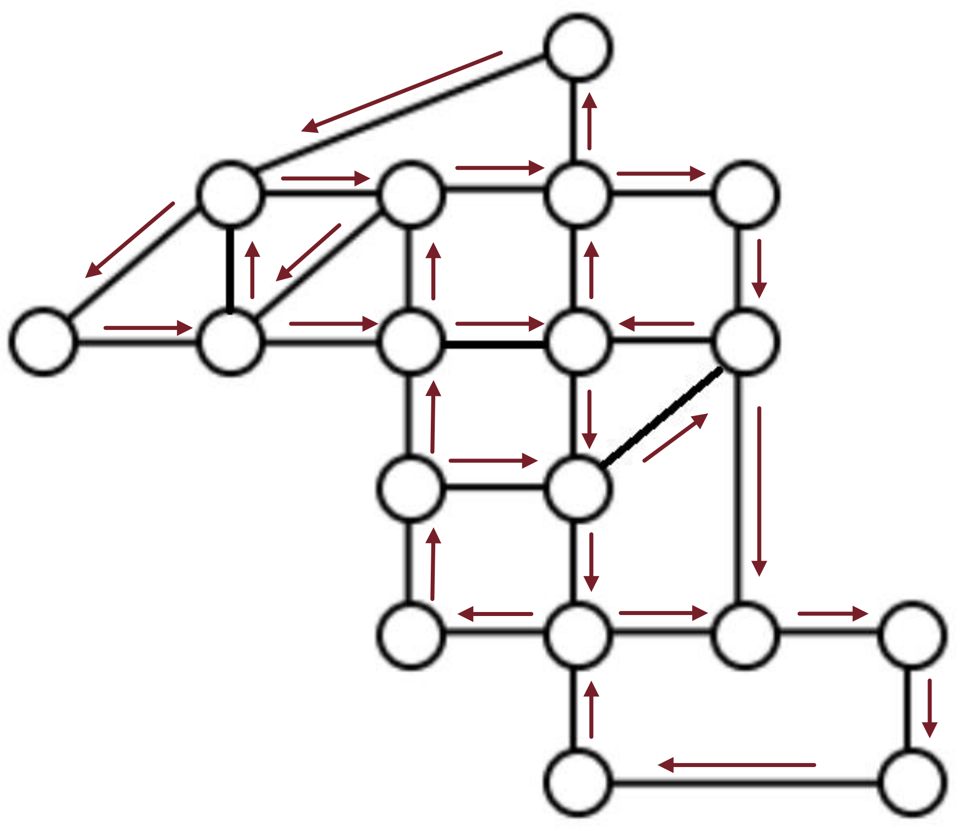
☆假设经过路面一次即可将该段马路打扫干净

☆怎么样规划清扫路线，使得所有的路面都被打扫干净，同时降低清扫的成本呢?

应用实例-清扫车问题

1. 对问题进行抽象转化
   - 马路的交叉点抽象为顶点，马路抽象为边
   - 转化为访问每一条边一次并且仅有一次
2. 判定转化后的问题的性质
3. 构造解

应用实例-清扫车问题



2. 判定转化后的问题的性质
   - 有两个奇度顶点
   - 半欧拉图！
3. 构造解
   - 奇度顶点作为起点和终点
   - Fleury算法

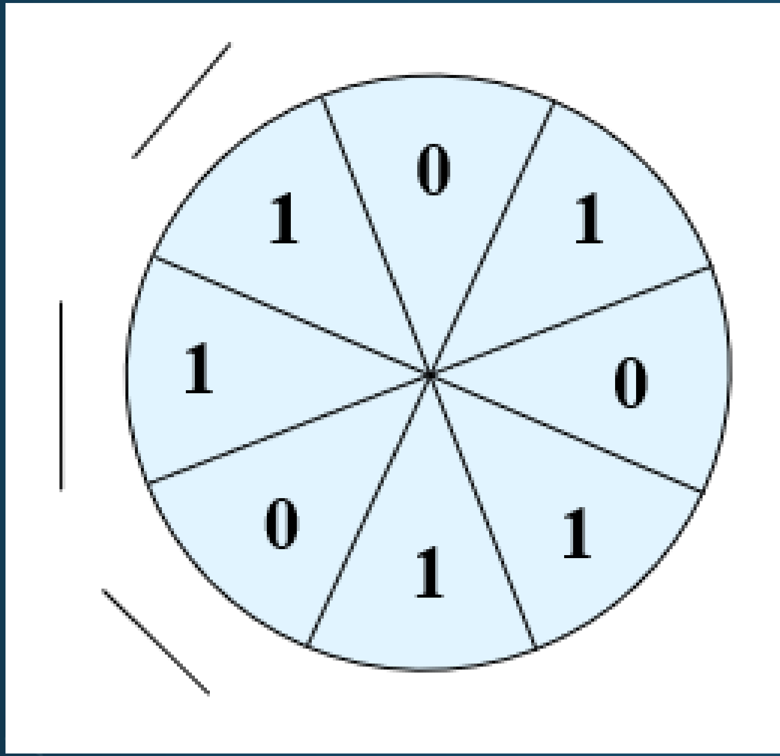
问题拓展—中国邮差问题

- 假如抽象转化后的图不是欧拉图或半欧拉图怎么办？怎么才能找到最经济快捷的路线呢?
- 中国学者管梅谷于1960年提出中国邮路问题
  - 一个邮差走遍每条街道去送信，最短路径应该是什么样的?
  - 问题的关键点：奇度顶点不为0个或2个
  - 通过匹配奇度顶点、添加合适的边的方式将原图转化为欧拉图，然后运用欧拉回路构造算法求解转化后的图

问题拓展—更多的现实问题

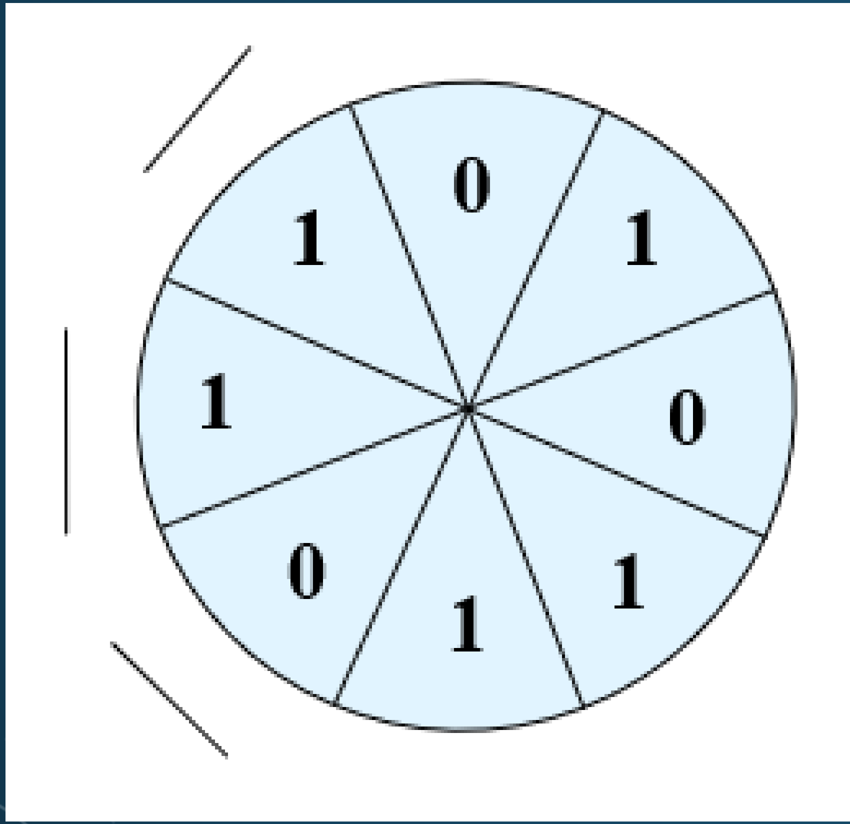
- 关键路段优先清扫
- 单行线或限行路段
- 多扫雪车合作
- …
- 是挑战也是机遇！

应用实例-磁鼓定位问题



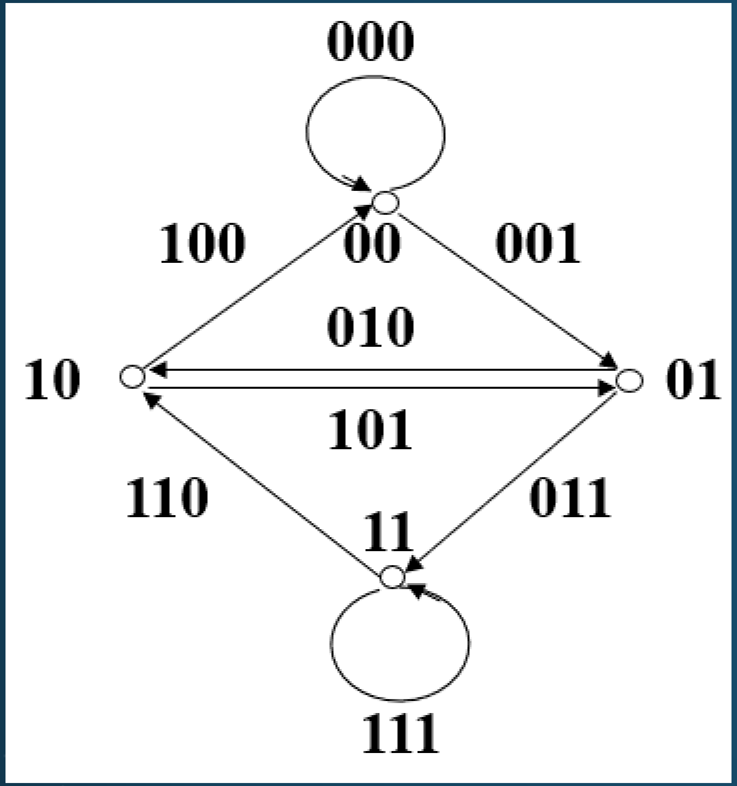
- 旋转磁鼓分成了8个扇区，每个扇区用0或1标记
- 3个探测器能够读出连续的3个扇区的标记
- 如何赋给扇区标记，使得能够根据探测器的读数确定磁鼓的位置？

应用实例-磁鼓定位问题



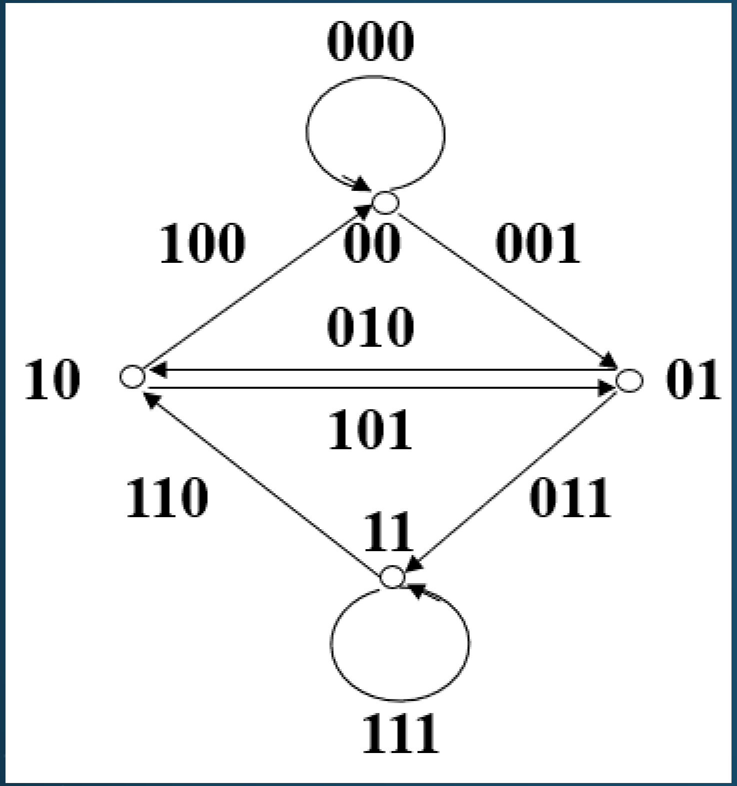
- 思路
  - 不同的三个连续扇区对应不同的三位二进制数—不能重复
  - 不同的三位二进制数一共有8个，对应8个不同的连续扇区组合——一对应
  - 每次转动的时候，挤出一位也加入一位二进制数，得到新的三位数—关系表达
  - 构造有向图，每个三位二进制数对应图中的一条边，访问每一条边

应用实例-磁鼓定位问题



1. 对问题进行抽象转化
   - 每条边对应不同的三位二进制数
   - 每条边的始点用边的前两位标记，终点用边的后两位标记
   - 在这条回路上连续3条边的标记的第一位恰好与第一条边的标记相同
   - 转化后的图里是否能找到一条**回路**经过且仅经过每条边一次呢？

应用实例-磁鼓定位问题



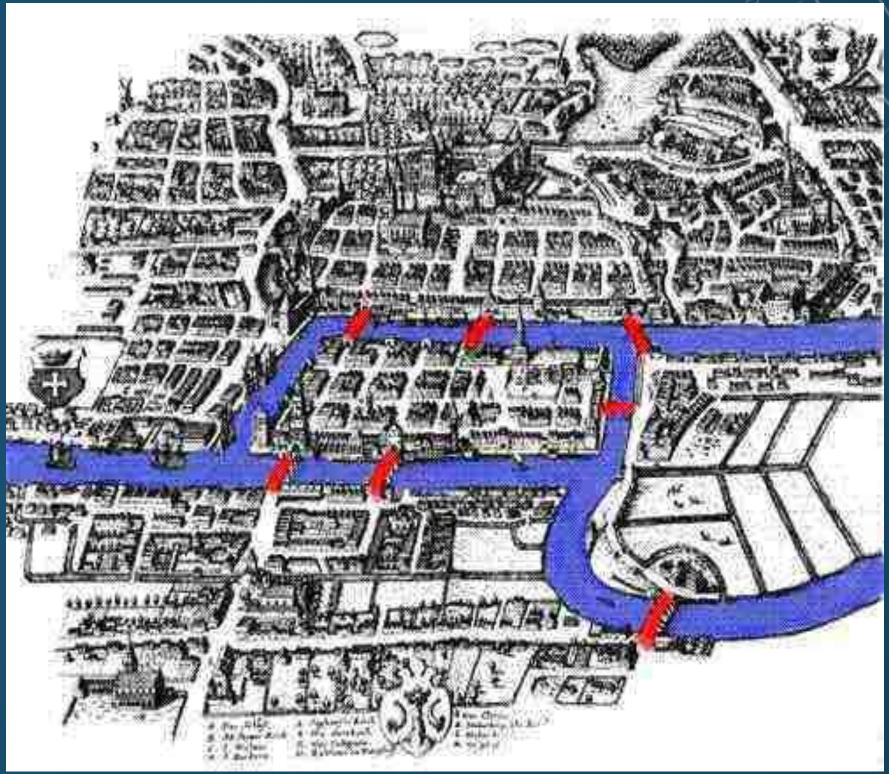
2. 判定转化后的图的性质
   - 无奇度顶点
   - 是欧拉图
3. 构造解
   - 欧拉回路：000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100
   - 得到满足要求的磁鼓扇区标记 00011101

更多的应用

- 终端产品的可用性检测
  - 1996年诺基亚出的2110的菜单有88个项目，273种操作
  - 富兰克林故居的网站有66个网页，1191个超链接
  - 要点击多少次才可以测试所有的功能或链接?

总结

- 哥尼斯堡七桥问题
- 欧拉图的判定
- 欧拉回路的构造
- 应用和拓展
  - 路径规划问题
  - 编码定位问题



作业

- P154/6.7, 6.17, 6.18