离散数学

集合论

4.1 集合的笛卡儿积与二元关系

第4章 二元关系与函数

- **4.1** 集合的笛卡儿积与二元关系
- **4.2** 关系的运算
- **4.3** 关系的性质
- **4.4** 关系的闭包
- **4.5** 等价关系和偏序关系
- **4.6** 函数的定义和性质
- **4.7** 函数的复合和反函数

4.1 集合的笛卡儿积和二元关系

- 有序对
- 笛卡儿积及其性质
- 二元关系的定义
- 二元关系的表示

有序对

- 定义 由两个客体 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作 $\langle x,y \rangle$，称x、y分别为有序对 $\langle x,y \rangle$ 的第一，第二元素
- 实例：点的直角坐标(3,–4)
- 有序对性质
  - 有序性 $\langle x,y \rangle \neq \langle y,x \rangle$ （当 $x \neq y$ 时）
  - $\langle x,y \rangle$ 与 $\langle u,v \rangle$ 相等的充分必要条件是

$$\langle x,y \rangle = \langle u,v \rangle \Leftrightarrow x=u \wedge y=v$$

- 例1 $\langle 2, x+5 \rangle = \langle 3y-4, y \rangle$，求 x, y.

解 $3y-4 = 2,\ x+5 = y \Rightarrow y = 2,\ x = -3$

有序 *n* 元组

- 定义　一个有序 n ($n\geq 3$) 元组 $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ 是一个有序对，其中第一个元素是一个有序 n-1元组，即

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle = \langle \langle x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$$

- 注意：有序3元组<< a,b>, c>可以简记成<a,b,c>。但<a,<b,c>>不是有序3元组。
- 当 n=1时, $\langle x\rangle$ 形式上可以看成有序 1 元组.
- 实例　n 维向量是有序 n元组.

集合的笛卡尔积

例如“斗兽棋”的16颗棋子，

象 狮 虎 豹 狼 狗 猫 鼠

象 狮 虎 豹 狼 狗 猫 鼠

可看成是由两种颜色的集合A和8种动物的集合B组成的。

A={红,蓝}

B={象,狮,虎,豹,狼,狗,猫,鼠}

每个棋子可以看成一个有序对，斗兽棋可记成集合A×B：

{ <红,象>,<红,狮>,<红,虎>,<红,豹>,<红,狼>,<红,狗>,<红,猫>,<红,鼠>,
<蓝,象>,<蓝,狮>,<蓝,虎>,<蓝,豹>,<蓝,狼>,<蓝,狗>,<蓝,猫>,<蓝,鼠> }

笛卡儿积

- 定义　设A,B为集合，A与B 的笛卡儿积记作$A\times B$，　即

$$A\times B = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \}$$

- 例2　$A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$

$A\times B = \{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 2,c\rangle, \langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$

$B\times A = \{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle,\langle a,3\rangle, \langle b,3\rangle,\langle c,3\rangle\}$

$A=\{\varnothing\}$,　$P(A)\times A=\{\langle\varnothing,\varnothing\rangle, \langle\{\varnothing\},\varnothing\rangle\}$

性质1：不适合交换律　$A\times B\neq B\times A$　$(A\neq B, A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

笛卡儿积

- $(A\times B)\times C=\{<<a,b>,c>|<a,b>\in A\times B \wedge c\in C\}$

  $A\times(B\times C)=\{<a,<b,c>>|a\in A \wedge <b,c>\in B\times C\}$,

  因 $<a,<b,c>>$不是有序三元组,

  所以$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$。
- **性质2：不适合结合律** $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$ $(A\neq\varnothing, B\neq\varnothing)$

笛卡儿积的性质

- **对于并或交运算满足分配律**

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

- **若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.**

$$A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$$

- **若$|A|=m$, $|B|=n$, 则 $|A\times B|=mn$**

证明：由笛卡尔积的定义及排列组合中的乘法原理，直接推得此定理。

性质的证明—分配律*

证明　$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证 任取$<x,y>$

$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\cup C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in A\times B\vee<x,y>\in A\times C$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

所以有$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$

例题

例3 (1) 证明 $A=B \wedge C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \wedge C=D$? 为什么？

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \wedge y\in D \Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下：

$A=\{1\}$，$B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$, 则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$

N阶笛卡尔积

- 设A_1, A_2, … A_n是集合(n≥ 2), 它们的N阶笛卡尔积记作 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$， 特别 $A \times A \times \ldots \times A = A^n$
- 设A是实数集合，则A^2表示笛卡尔坐标平面，A^3表示三维空间，A^n表示n维空间。

应用

1)令$\mathbf{A_1}$={x|x是学号}　$\mathbf{A_2}$={x|x是姓名}　$\mathbf{A_3}$={男,女}

$\mathbf{A_4}$={x|x是出生日期}　$\mathbf{A_5}$={x|x是班级}　$\mathbf{A_6}$={x|x是籍贯}

则$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$中一个元素：

<001，王强，男，1981:02:16，计2001-1，辽宁>

这就是学生档案数据库的一条信息，所以学生的档案就是$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6$的一个子集。

应用

2) 令A={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}是英文字母表

一个英文单词可以看成有序n元组：如

at=<a, t>, boy=<b, o, y>, data=<d, a, t, a>, computer=<c, o, m, p, u, t, e, r>

于是可以说：

$at \in A^2, boy \in A^3, data \in A^4, computer \in A^8, \ldots$

于是英文词典中的单词集合可以看成是$A \cup A^2 \cup \ldots \cup A^n$ 的一个子集。

关系

- 关系是一个非常普遍的概念，如数值的大于关系、整除关系，人类的父子关系、师生关系、同学关系等。
- **例子**

1. 大写英字母与五单位代码的对应关系R_1:

   令$\boldsymbol{\alpha}$={A,B,C,D,…Z}

   五单位代码集合$\boldsymbol{\beta}$={11000, 10011, 01110, 10010,…, 10001}

   （ $\boldsymbol{\beta}$={30,23,16,22,…,21}）

   $\mathbf{R_1=\{<A,30>,<B,23>,<C,16>,\ldots,<Z,21>\}\subseteq\alpha\times\beta}$

二元关系的定义

- 定义 如果一个集合满足以下条件之一：

（1）集合非空, 且它的元素都是有序对

（2）集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

- 如$\langle x,y\rangle \in R$, 可记作 xRy；如果$\langle x,y\rangle \notin R$, 则记作$x \not{R}\, y$
- 实例：$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle a,b\rangle\}$, $S=\{\langle 1,2\rangle, a, b\}$
  - R是二元关系, 当a, b不是有序对时，S不是二元关系
  - 根据上面的记法，可以写 $1R2$, aRb, $a \not{R}\, c$ 等.

从A到B的关系与A上的关系

- 定义 设A, B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系, 当$A=B$时则叫做 A上的二元关系.
- 例4 $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{<0,2>\}$, $R_2=A\times B$, $R_3=\varnothing$, $R_4=\{<0,1>\}$. 那么 R_1, R_2, R_3, R_4是从 A 到 B 的二元关系, R_3和R_4同时也是 A上的二元关系.
- 计数
  - $|A|=n$, $|A\times A|=n^2$, $A\times A$的子集有 2^{n^2}个. 所以 A上有 2^{n^2}个不同的二元关系.
  - 例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

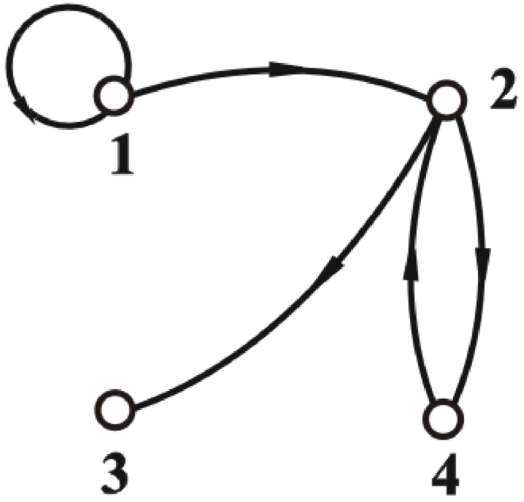
关系的表示

- 表示方式：关系的集合表达式、关系矩阵、关系图
- 枚举法:即将关系中所有有序对一一列举出，写在大括号内。如R $=\{ <1,1>,<1,2>,<1,3>, <1,4>,<2,2>, <2,3>, <2,4>, <3,3>, <3,4>,<4,4>\}$ 。
- 谓词公式法：即用谓词公式表示有序对的第一元素与第二元素间的关系。例如$R=\{<x,y>|x<y\}$
- 关系矩阵：若$A=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$，$B=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$，$R$是从$A$到$B$的关系，$R$的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\, r_{ij} \,]_{m\times n}$, 其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow < a_i, b_j> \in R$.
- 关系图：若$A= \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$R$是$A$上的关系，$R$的关系图是$G_R=<A, R>$, 其中$A$为结点集，$R$为边集.如果$<x_i,x_j>$属于关系$R$，在图中就有一条从 x_i 到 x_j 的有向边.
- 注意：A, B为有穷集，关系矩阵适于表示从A到B的关系或者A上的关系，关系图适于表示A上的关系

实例

- $A=\{1,2,3,4\}$,
- $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<2,4>,<4,2>\}$,
- R的关系矩阵M_R和关系图G_R如下：

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



A上重要关系的实例

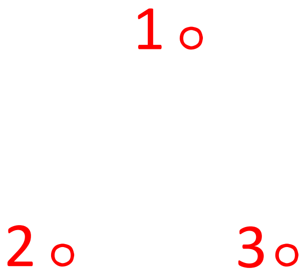
- 设 A 为任意集合，$\varnothing$是 A 上的关系，称为空关系。
- E_A, I_A 分别称为全域关系与恒等关系，定义如下：

$$E_A=\{<x,y>|x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$$
$$I_A=\{<x,x>|x\in A\}$$

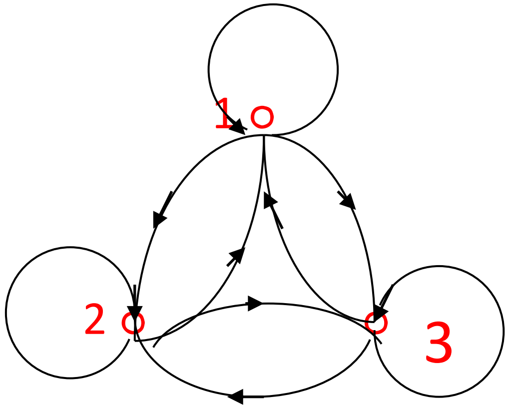
- 例如, $A=\{1,2\}$, 则

$$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$$
$$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$$

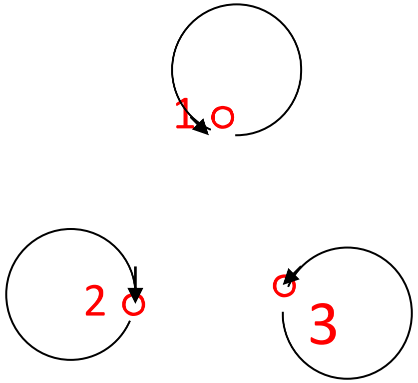
A={1,2,3}, 则A上的空关系、全域关系E_A及恒等关系I_A的关系图及矩阵如下：



Φ



A×A



I_A

$$\mathbf{M}_{\Phi}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$\mathbf{M}_{A\times A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

$$M_{IA}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

A上重要关系的实例（续）

- 小于等于关系 L_A, 整除关系D_A, 包含关系$R_{\subseteq}$定义:
  - L_A={<x,y>| $x,y\in A \wedge x\leq y$}, $A\subseteq$R， R为实数集合
  - D_B={<x,y>| $x,y\in B \wedge x$整除y}, $B\subseteq$Z*, Z*为非0整数集
  - $R_{\subseteq}$={<x,y>| $x,y\in A \wedge x\subseteq y$}, A是集合族.
- 类似的还可以定义大于等于关系, 小于关系, 大于关系, 真包含关系等等.

实例

- 例如 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 则

  $L_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

  $D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

- $A=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则 A上的包含关系是

  $R_\subseteq=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$

  $<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

作业

- P112/4.1
- P115/4.11(1)(3)

问题？