离散数学

一阶逻辑
2.3一阶逻辑等值式与前束范式

2.3一阶逻辑等值式与前束范式

- 等值式
- 基本等值式

  量词否定等值式

  量词辖域收缩与扩张等值式

  量词分配等值式
- 前束范式

等值式与基本等值式

- 定义：给定谓词公式A、B，E是它们的论域，如果不论对公式A、B作任何赋值，都使得A与B的真值相同(或者说A↔B是永真式)，则称公式A与B在论域E上是等价的。如果不论对什么论域E，都使得公式A与B等价，则称A与B等价，记作A⇔B。
- 例如，I(x)：表示x是整数，N(x)：表示x是自然数，假设论域E是自然数集合，公式I(x)与N(x)在E上是等价的。
- 而公式N(x)→I(x)与¬N(x)∨I(x)就是与论域无关的等价的公式，即 N(x)→I(x)⇔¬N(x)∨I(x)。

由命题公式推广出的公式

- 定义 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用A_i处处代替A_0中的$p_i\,(1 \le i \le n)$，所得公式A称为A_0的代换实例.
- 如 $F(x) \to G(x)$, $\forall x F(x) \to \exists y G(y)$是$p \to q$的代换实例
- 定理 重言式的代换实例都是永真式，矛盾式的代换实例都是矛盾式.
- 因一个不含自由变元的谓词公式本身如$\forall x A(x)$、$\exists x B(x)$就是命题。一个含有n个自由变元的谓词公式，赋予论域中的n个指定客体后就变成命题。因此可以把此公式看成一个命题变元。
- 所以在命题演算的永真式中，将其中的同一个命题变元，用同一个谓词公式代替，所得到的公式也是永真式。这样就可以将命题演算中的等价公式和永真蕴含式推广到谓词演算中使用。

由命题公式推广出的公式-2

- **命题逻辑中16组基本等值式的代换实例**
- 如， $\forall xF(x) \rightarrow \exists yG(y) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \vee \exists yG(y)$

  $\neg(\forall xF(x) \vee \exists yG(y)) \Leftrightarrow \neg\forall xF(x) \wedge \neg\exists yG(y)$ 等

带量词的公式在论域内的展开式（消去量词等值式）

- 设$D=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

  $\forall xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\dots\wedge A(a_n)$

  $\exists xA(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\dots\vee A(a_n)$

- 举一个例子，令A(x)：表示x是整数，B(x)：表示x是奇数，设论域是{1,2,3,4,5}，谓词公式∀xA(x)表示论域内所有的客体都是整数，显然公式∀xA(x)的真值为真，因为A(1)、A(2)、A(3)、A(4)、A(5)都为真，于是有

  $$\forall xA(x)\Leftrightarrow A(1)\wedge A(2)\wedge A(3)\wedge A(4)\wedge A(5)$$

- 类似地，谓词公式∃xB(x)表示论域内有些客体是奇数，显然公式∃xB(x)的真值也为真，因为B(1)、B(3)、B(5)的真值为真，于是有

  $$\exists xB(x)\Leftrightarrow B(1)\vee B(2)\vee B(3)\vee B(4)\vee B(5)$$

量词否定等值式

- 设$A(x)$是含x自由出现的公式

$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

- 还是用一个例子说明这个问题。令A(x)表示x是优等生，论域是某班级的学生集合。

  ¬∀xA(x)表示：不是所有人都是优等生；∃x¬A(x)表示：有些人不是优等生。

  ¬∃xA(x)表示：没有人是优等生；∀x¬A(x)表示：所有人都不是优等生。

- 从这个例子可以看出

“不是所有人都是优等生。”与“有些人不是优等生。”是等价的。

“没有人是优等生。”与“所有人都不是优等生。”是等价的。

$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

- 对这两个公式可以证明如下：

证明： 设论域为$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$，则

$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \ldots \vee \neg A(a_n) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

- 类似可以证明另一个公式。
- 从这两个公式，可以总结出如下规律：将量词前的“¬”移到量词的后边，或者将量词后的“¬”移到量词的前边时，量词也随着改变，如果原来是全称量词改成存在量词，如果原来是存在量词改成全称量词。所以我们也把这两个公式称为**量词转换公式**。

量词辖域的扩张或收缩等值式

- 如果 B 是个不含客体变元x的谓词公式，且不在∀x和∃x的辖域内，可以将 B 放入∀x和∃x的辖域内。即得如下公式：
  1. $\forall xA(x)\vee B\Leftrightarrow\forall x(A(x)\vee B)$
  2. $\forall xA(x)\wedge B\Leftrightarrow\forall x(A(x)\wedge B)$
  3. $\exists xA(x)\vee B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\vee B)$
  4. $\exists xA(x)\wedge B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\wedge B)$
  5. $B\rightarrow\forall xA(x)\Leftrightarrow\forall x(B\rightarrow A(x))$
  6. $B\rightarrow\exists xA(x)\Leftrightarrow\exists x(B\rightarrow A(x))$
  7. $\forall xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\exists x(A(x)\rightarrow B)$
  8. $\exists xA(x)\rightarrow B\Leftrightarrow\forall x(A(x)\rightarrow B)$

证明

- 设论域为$\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$，
- $\forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow (A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \ldots \wedge A(a_n)) \vee B$

  $\Leftrightarrow (A(a_1) \vee B) \wedge (A(a_2) \vee B) \wedge \ldots \wedge (A(a_n) \vee B)$

  $\Leftrightarrow \forall x(A(x) \vee B)$
- $B \rightarrow \exists xA(x) \Leftrightarrow \neg B \vee \exists xA(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg B \vee A(x)) \Leftrightarrow \exists x(B \rightarrow A(x))$
- $\forall xA(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \neg \forall xA(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee B$

  $\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x(A(x) \rightarrow B)$
- 在使用公式7、8时，要特别注意，量词的辖域扩充后，量词发生了变化。

量词分配等值式

1. $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$
2. $\forall x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge\forall xB(x)$
3. $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow \exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$
4. $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

证明：设论域为$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$，

$\exists x(A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow (A(a_1)\vee B(a_1))\vee(A(a_2)\vee B(a_2))\vee\ldots\vee(A(a_n)\vee B(a_n))$

$\Leftrightarrow (A(a_1)\vee A(a_2)\vee...\vee A(a_n))\vee(B(a_1)\vee B(a_2)\vee...\vee B(a_n))$

$\Leftrightarrow \exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

- 注意公式3.和4.不是等价公式，而是永真蕴含式。
- 例如公式3.由$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$不能推出$\exists x(A(x)\wedge B(x))$，
- 我们可以举一个反例，设$A(x)$和$B(x)$分别表示“x是奇数”和“x是偶数”，显然命题$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$为真。而$\exists x(A(x)\wedge B(x))$是表示命题“存在一些数既是奇数，也是偶数”，显然不为真。所以说由$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$不能推出$\exists x(A(x)\wedge B(x))$
- **证明公式3.**

$$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

- **证明：假设前件$\exists x(A(x)\wedge B(x))$为真，则论域中至少有一个客体a，使得$A(a)\wedge B(a)$为真，于是$A(a)$和$B(a)$都为真，所以有$\exists xA(x)$以及$\exists xB(x)$为真，进而得$\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$为真。于是有**

$$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$$

- 下面利用公式3.证明公式4.。
- 证明：因为公式3.中的A(x)和B(x)是任意的谓词公式，不妨用$\neg A(x)$和$\neg B(x)$分别代替公式3.中的A(x)和B(x)得

$$\exists x(\neg A(x)\wedge\neg B(x)) \Rightarrow \exists x\neg A(x)\wedge\exists x\neg B(x)$$

$$\exists x\neg(A(x)\vee B(x)) \Rightarrow \neg\forall xA(x)\wedge\neg\forall xB(x)$$

$$\neg\forall x(A(x)\vee B(x)) \Rightarrow \neg(\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$$

应用公式 $P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q\rightarrow\neg P$ 得

$$\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$$

- 公式4.得证。
- 在使用公式4.的时候，特别要注意蕴含式的方向，不要搞错。

例

例 将下面命题用两种形式符号化

(1) 没有不犯错误的人

(2) 不是所有的人都爱看电影

解 **(1)** 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x犯错误.

$$\neg\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg(F(x)\wedge\neg G(x))$$

$$\Leftrightarrow\forall x(F(x)\to G(x))$$

(2) 令$F(x)$：x是人，$G(x)$：爱看电影.

$$\neg\forall x(F(x)\to G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg(F(x)\to G(x))$$

$$\Leftrightarrow\exists x(F(x)\wedge\neg G(x))$$

前束范式

- 与命题公式的范式类似，谓词公式也有规范形式。这里主要介绍前束范式--所有量词都在公式前边约束变元。
- 定义 设*A*为一个一阶逻辑公式, 若*A*具有如下形式

  $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$, 则称*A*为前束范式, 其中$Q_i$ $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$, *B*为不含量词的公式.
- **前束范式**符合下面条件：

  所有量词前面都没有联接词；

  所有量词都在公式的左面；

  所有量词的辖域都延伸到公式的末尾。

前束范式-2

- 例如，$\forall x\exists y(F(x)\rightarrow(G(y)\wedge H(x,y)))$

  $\forall x\neg(F(x)\wedge G(x))$

  是前束范式, 而

  $\forall x(F(x)\rightarrow\exists y(G(y)\wedge H(x,y)))$

  $\neg\exists x(F(x)\wedge G(x))$

  不是前束范式.

公式的前束范式

- 定理（前束范式存在定理）一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

- 求前束范式：使用重要等值式、置换规则、换名规则进行等值演算。

前束范式的写法

- 给定一个带有量词的谓词公式，

1) 消去公式中的联接词→和↔(为了便于量词辖域的扩充)；
2) 如果量词前有“¬”，则用量词否定公式将“¬”后移，再用德摩根定律，或求公式的否定公式，将“¬”后移到原子谓词公式之前。
3) 用约束变元的改名规则或自由变元的代入规则对变元换名(为量词辖域扩充作准备)
4) 用量词辖域扩充公式提取量词，使之成为前束范式形式。

- 例1. $\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

  $\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

  $\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

  $\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists yB(y)$ （换元）

  $\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee\exists yB(y))$ （量词辖域扩充）

  $\Leftrightarrow\exists x\exists y(\neg A(x)\vee B(y))$
- 另一个方法：$\forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

  $\Leftrightarrow\neg\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$

  $\Leftrightarrow\exists x\neg A(x)\vee\exists xB(x)$

  $\Leftrightarrow\exists x(\neg A(x)\vee B(x))$ （量词分配公式）
- 两步结果都是前束范式，说明前束范式不惟一.

- 例2. $\forall x(P(x)\wedge R(x))\rightarrow(\neg\exists xP(x)\wedge Q(x))$

$\Leftrightarrow\neg\forall x(P(x)\wedge R(x))\vee(\neg\exists xP(x)\wedge Q(x))$ （去→）

$\Leftrightarrow\exists x\neg(P(x)\wedge R(x))\vee(\forall x\neg P(x)\wedge Q(x))$ （量词转换）

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee\neg R(x))\vee(\forall x\neg P(x)\wedge Q(x))$ （后移¬）

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee\neg R(x))\vee(\forall y\neg P(y)\wedge Q(z))$ （换变元）

$\Leftrightarrow\exists x(\neg P(x)\vee\neg R(x))\vee\forall y(\neg P(y)\wedge Q(z))$ （扩量词辖域）

$\Leftrightarrow\exists x\forall y((\neg P(x)\vee\neg R(x))\vee(\neg P(y)\wedge Q(z)))$ （扩量词辖域）

苏格拉底三段论的正确性

"凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的."

设$F(x)$：x是人，$G(x)$：x是要死的，a：苏格拉底.

$$\forall x(F(x)\to G(x))\land F(a)\to G(a)$$

设前件为真，即$\forall x(F(x)\to G(x))$与$F(a)$都为真.

由于$\forall x(F(x)\to G(x))$为真，故$F(a)\to G(a)$为真.

由$F(a)$ 与$F(a)\to G(a)$为真，根据假言推理得证$G(a)$为真.

作业

- P54/2.12，2.15

问题？