$\therefore u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

四加速度 $w^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds} = \cdots$　　对 $u^iu_i = 1$ 微分，$w^iu_i + w_iu^i = 2u_iw^i = 0$

w^i 与 u^i 正交。

第二章 相对论力学

最小作用量原理

$S = -\alpha\int_a^b ds$　　沿世界线积分；α 为常数；S 洛伦兹不变

$\alpha > 0$　　$\int_a^b ds$ 有最大值，S 有最小值

对时间的积分　$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$　　拉格朗日函数

$ds = c\,dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

，$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$

$L = -\alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

当 $c \to \infty$ 时，$L = -\alpha c\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right) = -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c} = -\alpha c + \frac{mv^2}{2}$

$\alpha = mc$，$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$　　$S = -mc\int_a^b ds$

广义动量 $\vec{p} = m\frac{d\vec{q}}{d\tau} = \gamma m\dot{\vec{q}}$

构造拉格朗日量使 $\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{m\dot{\vec{q}}}{\sqrt{1-\dot{q}^2/c^2}}$

$L = T^* - V(q_1, q_2, q_3)$

$\vec{p} = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\vec{q}}} = \frac{m\dot{\vec{q}}}{\sqrt{1-\beta^2}}$　　解得 $T^* = -mc^2\sqrt{1-\beta^2}$

$L = T^* - V = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - V = -mc^2\sqrt{1-\frac{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2}{c^2}} - V$

见赵亚溥力学讲义 P168

$\vec{p}=\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. 若速度大小不变，则 $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}$

若速度方向不变，$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{m}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\frac{d\vec{v}}{dt}$

粒子能量 $\mathcal{E}=\vec{p}\cdot\vec{v}-L=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

$\mathcal{E}_0=mc^2$ $\mathcal{E}\approx mc^2+\frac{1}{2}mv^2$

$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}=p^2+m^2c^2$ 哈密顿量 $\mathcal{H}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}$

$p\ll mc$, $\mathcal{H}=mc^2+\frac{p^2}{2m}$

$\vec{p}=\frac{\mathcal{E}\vec{v}}{c^2}$，对光子 $p=\frac{\mathcal{E}}{c}$

(或极端相对论粒子)

四维形式：$\delta S=-mc\,\delta\int_a^b ds=0$

$ds=\sqrt{dx_i dx^i}$, $\delta S=-mc\int_a^b\frac{dx_i\,\delta dx^i}{ds}=-mc\int_a^b u_i\,d\delta x^i$

$\delta S=-mc\,u_i\delta x^i\Big|_a^b+mc\int_a^b\delta x^i\frac{du_i}{ds}ds$

求运动方程 $(\delta x^i)_a=(\delta x^i)_b=0$

$\Rightarrow\frac{du_i}{ds}=0$

作用量的变分为坐标的函数，则a点固定，b点变化，只考虑实际的轨道，满足 $\frac{du_i}{ds}=0$

于是 $\delta S=-mc\,u_i(\delta x^i)_b=-mc\,u_i\delta x^i$

$p_i=-\frac{\partial S}{\partial x^i}$，四维动量

$\frac{\partial S}{\partial x}$，$\frac{\partial S}{\partial y}$，$\frac{\partial S}{\partial z}$是动量分量，$-\frac{\partial S}{\partial t}$为能量 $\mathcal{E}$

$p^i=(\frac{\mathcal{E}}{c},\vec{p})$ $p_i=(\frac{\mathcal{E}}{c},-\vec{p})$

四维动量的分量为 $p^i=mcu^i$

将四维动量代入到洛仑兹变换式，得

$p_x=\frac{p_x'+\frac{V}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ $p_y=p_y'$ $p_z=p_z'$ $\mathcal{E}=\gamma(\mathcal{E}'+Vp_x')$

$p_i p^i = m^2c^2$

四维力：$g^i = \frac{dp^i}{ds} = mc\frac{du^i}{ds}$，满足 $g^i u_i = 0$

g^i 用三维力矢量 $\vec{f} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ 表示为 $g^i = \left(\frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{f}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)$

将 $p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i}$ 代入 $\cancel{p^2 = m c u^2}$ $p^i p_i = m^2c^2$

得哈密顿－雅可比方程 $\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x^i} \equiv g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2c^2$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2$$

若取 $S = S' - mc^2 t$，代入上式得

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

$c\to\infty$ 时，为经典的 H-J 方程

分布函数的变换

动量分布函数：$d^3N = f(\vec{p})\, dp_x dp_y dp_z$

确定动量"体积元" $dp_x dp_y dp_z$ 的洛伦兹变换

$dp_x dp_y dp_z$ 可看作超曲面 $p^i p_i = m^2c^2$ 面元的零分量

此面元沿超曲面法向，（与 p^i 平行），故 $\frac{dp_x dp_y dp_z}{\varepsilon}$ 为定值

粒子数 $f\, dp_x dp_y dp_z$ 也应是不变量

$d^3N = f(\vec{p})\,\varepsilon\frac{dp_x dp_y dp_z}{\varepsilon}$，$\Rightarrow f(\vec{p})\varepsilon$ 是不变量

K' 与 K 系中的分布：$f'(\vec{p}') = \frac{f(\vec{p})}{\varepsilon'}\varepsilon$

$\vec{p}$、ε 与 $\vec{p}'$、ε' 可变换

相空间中的分布函数：$d^6N = f(\vec{r}, \vec{p})\, dp_x dp_y dp_z dV$

在动量空间中引入球坐标，则 $dp_x dp_y dp_z$ 变为 $p^2 dp\, d\Omega$

由 $\frac{\mathcal{E}^2}{c^2}=p^2+m^2c^2$， $\frac{\mathcal{E}d\mathcal{E}}{c^2}=pdp$

$$\frac{p^2dpd\Omega}{\mathcal{E}}=\frac{pd\mathcal{E}d\Omega}{c^2}$$ ，$pd\mathcal{E}d\Omega$ 也是不变量

故K、K'系外，再引入运动的粒子在其中静止的参考系 K_0。

粒子在 K_0 中占有固有体积元 dV_0，由尺缩公式

$dV=dV_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ，$dV'=dV_0\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}$

$\frac{dV}{dV'}=\frac{\mathcal{E}'}{\mathcal{E}}$ ，又 $\frac{d^3p}{d^3p'}=\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}'}$ $\therefore d\tau=d\tau'$

相空间体积元是不变量，$fd\tau$ 不变，

$$f(\vec{r}',\vec{p}')=f(\vec{r},\vec{p})$$

粒子的衰变

静止系中有一粒子质量为M，衰变为静质量 m_1, m_2 之粒子。

$M=\mathcal{E}_{10}+\mathcal{E}_{20}$ （设c=1）

$\mathcal{E}_{10}>m_1$，$\mathcal{E}_{20}>m_2$， $M>m_1+m_2$

$\vec{p}_{10}+\vec{p}_{20}=\vec{0}$ $p_{10}^2=p_{20}^2$ $\mathcal{E}_{10}^2-m_1^2=\mathcal{E}_{20}^2-m_2^2$

$$\Rightarrow\begin{cases}\mathcal{E}_{10}=\frac{M^2+m_1^2-m_2^2}{2M}\\ \mathcal{E}_{20}=\frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{2M}\end{cases}$$

在质心系（动量中心系）中考察粒子的碰撞

设实验室系下，m_1，$\mathcal{E}_1$ 粒子与 m_2 静止粒子碰撞

$\mathcal{E}=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2=\mathcal{E}_1+m_2$ ，$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}_1$

质心速度 $\vec{V}=\frac{\vec{p}}{\mathcal{E}}=\frac{\vec{p}_1}{\mathcal{E}_1+m_2}$

总质量 $M^2=\mathcal{E}^2-p^2=(\mathcal{E}_1+m_2)^2-(\mathcal{E}_1^2-m_1^2)$

不变截面

设两个碰撞粒子束，粒子数密度 n_1, n_2，速度 $\vec{v_1}, \vec{v_2}$

在粒子2静止的参考系中，dV 内此间碰撞次数

$$d\nu = \sigma v_{rel} n_1 n_2 dV dt$$

v_{rel} 为1相对2的速度。 $d\nu$ 应该为一个不变量

$$d\nu = A n_1 n_2 dV dt$$

$dVdt$ 是不变量，$A n_1 n_2$ 也是不变量

dV 中的 $dN = n dV$ 不变量， $n dV = n_0 dV_0$，

$$\Rightarrow \quad n = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad 或\ n = n_0 \frac{\varepsilon}{m}$$

$A n_1 n_2$ 不变量 $\Leftrightarrow$ $A \varepsilon_1 \varepsilon_2$ 不变量 $\Leftrightarrow$ $\frac{A \varepsilon_1 \varepsilon_2}{p_{1i} p_2^i} = A \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p_1} \cdot \vec{p_2}} = inv$

在2静止系中，$\varepsilon_2 = m_2$，$\vec{p_2} = 0$，上 inv 为A，而此系中 $A = \sigma v_{rel}$，∴ 任意系中 $A = \sigma v_{rel} \frac{p_{1i} p_2^i}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$

为用表示 v_{rel}，在2静止系中 $p_{1i} p_2^i = \frac{m_1 m_2}{\sqrt{1-v_{rel}^2}}$

$$v_{rel} = \sqrt{1 - \frac{m_1^2 m_2^2}{(p_{1i} p_2^i)^2}}$$

由四维动量表达式，$p_{1i} p_2^i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p_1} \cdot \vec{p_2}$

$$(\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) = \vec{v_1} \cdot [\vec{v_2} \times (\vec{v_1} \times \vec{v_2})]$$
$$= \vec{v_1} \cdot [(\vec{v_2} \cdot \vec{v_2}) \vec{v_1} - (\vec{v_2} \cdot \vec{v_1}) \vec{v_2}]$$
$$= v_1^2 v_2^2 - (\vec{v_2} \cdot \vec{v_1})^2$$

$$= m_1 m_2 \frac{1 - \vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}{\sqrt{(1-v_1^2)(1-v_2^2)}}$$

代入 v_{rel} 式，整理得 $v_{rel} = \frac{\sqrt{(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2 - (\vec{v_1} \times \vec{v_2})^2}}{1 - \vec{v_1} \cdot \vec{v_2}}$

再代入 $d\nu = A n_1 n_2 dV dt = \cdots \sigma v_{rel} \frac{p_{1i} p_2^i}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \sigma v_{rel} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \vec{p_1} \cdot \vec{p_2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} n_1 n_2 dV dt$

$$= \sigma \sqrt{(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2 - (\vec{v_1} \times \vec{v_2})^2}\, n_1 n_2 dV dt$$

$\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ 共线，则 $d\nu = \sigma|\vec{v_1}-\vec{v_2}|\, n_1 n_2 dV dt$

粒子的弹性碰撞

俩粒子 $\vec{p_1}, \varepsilon_1$；$\vec{p_2}, \varepsilon_2$　' 号代表碰后

四维动量守恒：$p_1^i + p_2^i = p_1'^i + p_2'^i$

$$p_1^i + p_2^i - p_1'^i = p_2'^i$$

两边平方　　$p_1^i p_{1i} = m_1^2 = p_1'^i p_{1i}'$

$$m_1^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_1'^i - p_{2i}p_1'^i = 0 \quad (*)$$

类似 $p_1^i + p_2^i - p_2'^i = p_1'^i \Rightarrow m_2^2 + p_{1i}p_2^i - p_{1i}p_2'^i - p_{2i}p_2'^i = 0 \quad (☆)$

L 系的碰撞，m_2 碰前静止，则 $\vec{p_2}=0$，$\varepsilon_2 = m_2$

$$p_{1i}p_2^i = \varepsilon_1 m_2$$

$$p_{2i}p_1'^i = m_2\varepsilon_1'$$

$$p_{1i}p_1'^i = \varepsilon_1\varepsilon_1' - \vec{p_1}\cdot\vec{p_1'} = \varepsilon_1\varepsilon_1' - p_1 p_1' \cos\theta_1$$

θ_1 为 m_1 的散射角．代入 $*$ 式得 $\cos\theta_1 = \dfrac{\varepsilon_1'(\varepsilon_1+m_2) - \varepsilon_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}$

同理由 ☆，$\cos\theta_2 = \dfrac{(\varepsilon_1+m_2)(\varepsilon_2'-m_2)}{p_1 p_2'}$　☆'

θ_2 为 p_2 的散射角（$\langle \vec{p_2'}, \vec{p_1} \rangle$）

将 $p_1 = \sqrt{\varepsilon_1^2 - m_1^2}$　$p_2' = \sqrt{\varepsilon_2'^2 - m_2^2}$ 代入 ☆'，两边平方

$$\Rightarrow \varepsilon_2' = m_2 \frac{(\varepsilon_1+m_2)^2 + (\varepsilon_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}{(\varepsilon_1+m_2)^2 - (\varepsilon_1^2 - m_1^2)\cos^2\theta_2}$$

同理可得 ε_1' 与 θ_1 的关系

若 $m_1 > m_2$，则 $\sin\theta_{1\,max} = \dfrac{m_2}{m_1}$，与经典一致

当入射粒子 $m_1 = 0$，　$p_1 = \varepsilon_1$，　$p_1' = \varepsilon_1'$，

$$\varepsilon_1' = \frac{m_2}{1-\cos\theta_1 + \frac{m_2}{\varepsilon_1}}$$

对任意质量粒子碰撞，在质心系中考虑，有 $\vec{p}_{10} = -\vec{p}_{20} = \vec{p}_0$

动量守恒 ⇒ 二粒子动量始终大小相等，反向

能量守恒 ⇒ 动量数值不变

设 χ 为 C系的散射角，即 $\vec{p}_0$ 旋转的角

借 χ 表示二粒子在 L 中的终态能量

$$p_{1i}p_1'^i = \varepsilon_{10}\varepsilon_{10}' - \vec{p}_{10}\vec{p}_{10}' = \varepsilon_{10}^2 - p_0^2\cos\chi = p_0^2(1-\cos\chi) + m_1^2$$

$$\varepsilon_{10}' = \varepsilon_{10}$$

由 * 式 $\quad \varepsilon_1' - \varepsilon_1 = \frac{-p_0^2}{m_2}(1-\cos\chi) \quad$ (在 L 系中)

L系、C系中不变量 $p_{1i}p_2^i$ 相等

$$\varepsilon_{10}\varepsilon_{20} - \vec{p}_{10}\cdot\vec{p}_{20} = \varepsilon_1 m_2$$

$$\sqrt{(p_0^2+m_1^2)(p_0^2+m_2^2)} = \varepsilon_1 m_2 - p_0^2$$

解得 $p_0^2 = \frac{m_2^2(\varepsilon_1^2 - m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\varepsilon_1}$

$$\Rightarrow \varepsilon_1' = \varepsilon_1 - \frac{m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\varepsilon_1}(1-\cos\chi)$$

$$\varepsilon_1 + m_2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' \Rightarrow \varepsilon_2' = m_2 + \frac{m_2(\varepsilon_1^2-m_1^2)}{m_1^2+m_2^2+2m_2\varepsilon_1}(1-\cos\chi)$$

角动量 $\quad \vec{M} = \sum \vec{r}\times\vec{p} \quad$ (转动对称)

四维形式：粒子四坐标为 x^i，在无限小转动下变为 x'^i

$$x'^i - x^i = x_k\,\delta\Omega^{ik}$$

$\delta\Omega_{ik}$ 为无限小系数

保距变换 $\Rightarrow$ $x_i x'^i = x_i x^i$

$x^i x^k \delta\Omega_{ik} = 0$，对 $\forall x^i$ 成立，$x^i x^k$ 对称，故

$\delta\Omega_{ik}$ 为反对称张量

$\delta\Omega_{ik} = -\delta\Omega_{ki}$

对起点 a、终点 b 轨道的无限小坐标变换，

作用量的改变 $\delta S = -\sum p^i \delta x_i \Big|_a^b$（遍求所有粒子）

$\delta x_i = \delta\Omega_{ik} x^k$，$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \sum p^i x^k \Big|_a^b$

把 $\sum p^i x^k$ 分解为对称、反对称部分

$\delta S = -\delta\Omega_{ik} \cdot \frac{1}{2} \sum (p^i x^k - p^k x^i) \Big|_a^b$

拉格朗日函数为不变量，

则 $\sum (p^i x^k - p^k x^i)_b = \sum (p^i x^k - p^k x^i)_a$

$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i)$ 守恒，四维角动张量

空间分量为 $\vec{M} = \sum \vec{r} \times \vec{p}$ 之分量：$M^{23} = M_x$，$-M^{13} = M_y$，

$M^{12} = M_z$

分量 M^{01}, M^{02}, M^{03} 构成矢量 $\sum \left(t\vec{p} - \frac{\varepsilon \vec{r}}{c^2}\right)$

$M^{ik} = \left(c \sum \left(t\vec{p} - \frac{\varepsilon \vec{r}}{c^2}\right), -\vec{M}\right)$

M^{ik} 对封闭系统守恒，则 $\sum \left(t\vec{p} - \frac{\varepsilon \vec{r}}{c^2}\right) = \text{const}$

总能量 $\sum \varepsilon$ 守恒，则 $\frac{\sum \varepsilon \vec{r}}{\sum \varepsilon} - t \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum \varepsilon} = \text{const}$

$\vec{R} = \frac{\sum \varepsilon \vec{r}}{\sum \varepsilon}$ 的点以 $v = \frac{c^2 \sum \vec{p}}{\sum \varepsilon}$ 运动

质心