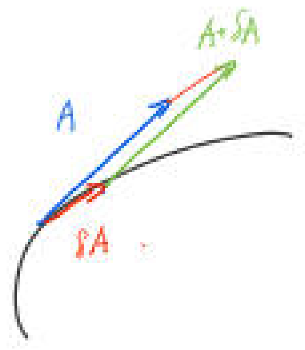
第十一章 引力场方程

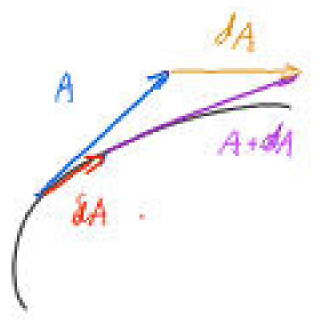
§11.1. 曲率张量

考虑矢量的无限小平行移动：在伽利略坐标系下保持各分量不变。



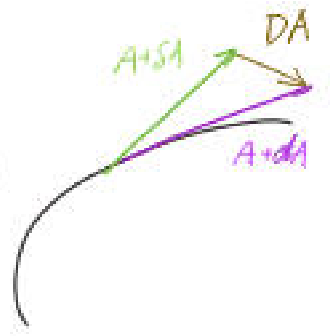
δA为定义的无限小平行移动

[在x点的切空间上移动]



dA为参数微变后的差值 →

(沿着曲线移动)



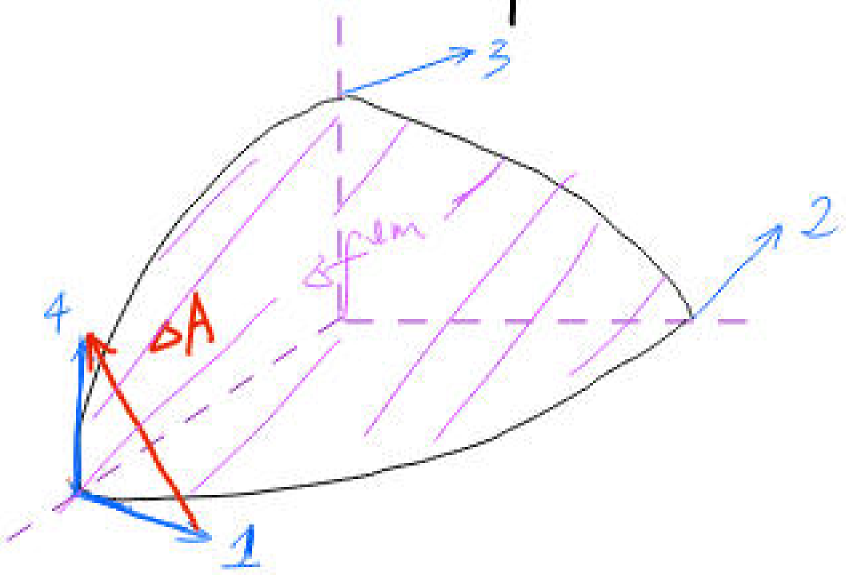
$DA = dA - \delta A$

显然，对于 $x^i = x^i(s)$ 而言，矢量 $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ 是切矢。

对于测地线而言，$Du^i = 0$，说明测地线上的切矢沿之移动时自平行。

对于平行移动的两个矢量，其夹角是不变的，因而进一步可知任意矢量沿测地线平行移动时切分量不变。

现在考察弯曲空间中不同路径带来的效应。如下图，三条测地线组成了一个曲面三角形。



点1沿着它们走了一个回路，1→2→3→4，显然1与4并不重合。

如何描述1→4的变化？自然地，有：

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma^i_{kl} A_i dx^l$$

使用Stokes定理：$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\Gamma^i_{km}A_i)}{\partial x^l} - \frac{\partial(\Gamma^i_{kl}A_i)}{\partial x^m}\right]\Delta f^{lm}$，其中 Δf^{lm} 为三角形面积。

展开：$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} A_i + \Gamma^i_{km}\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} A_i - \Gamma^i_{kl}\frac{\partial A_i}{\partial x^m}\right)$

其中注意 $\frac{\partial A_i}{\partial x^l}$，$A_i$对于不同的回路1234有着不同的值，这是显然的。但这对于无限小回路而言，差别体现于二阶量，故只要在一阶精度下，可以认为A_i是不变的。（可由后续结果看出，说明白）

于是 $\delta A_i = \Gamma^n_{il} A_n dx^l$，$\frac{\partial A_i}{\partial x^l} = \Gamma^n_{il} A_n$ $\Rightarrow \Delta A_k = \frac{1}{2} R^i{}_{klm} A_i \Delta f^{lm}$

其中 $R^i{}_{klm}$ 是一个四阶张量，$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$ 称为曲率张量/黎曼张量。

对于逆变矢量 A^k 类似公式可由如下技巧获得：$\Delta(A^k B_k) = 0$

$$\Rightarrow A^k \Delta B_k + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2}A^k B_i R^i{}_{klm}\Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k = \frac{1}{2}A^i B_k R^k{}_{ilm}\Delta f^{lm} + B_k \Delta A^k$$

$$= B_k\left(\frac{1}{2}A^i R^k{}_{ilm}\Delta f^{lm} + \Delta A^k\right) = 0 \Rightarrow \Delta A^k = -\frac{1}{2}A^i R^k{}_{ilm}\Delta f^{lm}$$

现在我们来考虑将矢量A对x^k与x^l进行两次协变微分，则有 $\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k} = A_m R^m{}_{ikl}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\Gamma^n_{il} A_n\right) = \frac{\partial \Gamma^n_{il}}{\partial x^k} A_n + \Gamma^n_{il}\frac{\partial A_n}{\partial x^k} \\ \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\Gamma^n_{ik} A_n\right) = \frac{\partial \Gamma^n_{ik}}{\partial x^l} A_n + \Gamma^n_{ik}\frac{\partial A_n}{\partial x^l} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^l \partial x^k} = \frac{\partial \Gamma^n_{ik}}{\partial x^l} A_n - \frac{\partial \Gamma^n_{il}}{\partial x^k} A_n + \Gamma^n_{ik}\frac{\partial A_n}{\partial x^l} - \Gamma^n_{il}\frac{\partial A_n}{\partial x^k} = A_n R^n{}_{ikl} = A_m R^m{}_{ikl}$$

当然，有逆变矢量的公式 $\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x^l \partial x^k} = -A^m R^i{}_{mkl}$ （代公式如上计算即可）

于是对于一个张量 A_{ik} 可以得到：$\frac{\partial^2 A_{ik}}{\partial x^l \partial x^m} - \frac{\partial^2 A_{ik}}{\partial x^m \partial x^l} = A_{in}R^n{}_{klm} + A_{nk}R^n{}_{ilm}$ 使用技巧：$\delta(A^i B^k) \Longleftrightarrow \delta(A^{ik})$ 可简便计算，如(85.11).

易知，平直空间上，$R=0$。因为我们可以选择坐标系使全空间 $\Gamma^i_{kl}=0$ $\Rightarrow R^i{}_{klm}=0$ $\Rightarrow$ R所有坐标系都为零。

同样，若 $R^i{}_{klm}=0$ 则空间平直。因为 $R^i{}_{klm}=0$ 意味着任意的切空间伽利略坐标系可以被推至全空间。

注意：弯曲空间中我们虽然可以找 $\Gamma^i_{kl}=0$，但此时 Γ^i_{kl} 的导数不为零，故 $R\neq 0$。

§11.2. 曲率张量的特性.

① 曲率张量具有对称性，可以化为协变分量以看得更清楚. $\boxed{R_{iklm} = g_{in} R^n_{klm}}$.

经过简单变换 !!! 很容易得到 $\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)$. $R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}$

$$\boxed{R_{iklm} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^l}\right) + g_{np}\left(\Gamma^n_{kl}\Gamma^p_{im} - \Gamma^n_{km}\Gamma^p_{il}\right)}$$

显然，ik 与 lm 的对称性是一样的. ik、lm 反对称；而 ik 与 lm 又是对称的.

即：$\boxed{R_{iklm} = -R_{kilm} = -R_{ikml}}$, $\boxed{R_{iklm} = R_{lmik}}$.

则易知：假如我们轮换 iklm 的任意三个指标，并把它们加起来，有：

$$\boxed{R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0}$$

② 关于曲率张量的微分有毕安基恒等式：

$$\boxed{\frac{\partial R^n_{ikl}}{\partial x^m} + \frac{\partial R^n_{imk}}{\partial x^l} + \frac{\partial R^n_{ilm}}{\partial x^k} = 0}$$

Proof: $\frac{\partial}{\partial x^p}(R^i_{klm}) = \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}\right) = \frac{\partial^2 \Gamma^i_{km}}{\partial x^p \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma^i_{kl}}{\partial x^p \partial x^m} + \boxed{\frac{\partial \Gamma^i_{nl}}{\partial x^p}\Gamma^n_{km} + \Gamma^i_{nl}\frac{\partial \Gamma^n_{km}}{\partial x^p} - \Gamma^i_{nm}\frac{\partial \Gamma^n_{kl}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^i_{nm}}{\partial x^p}\Gamma^n_{kl}} = 0$

可以采取局部平坦坐标系使 $\Gamma = 0$

则显然 klm 轮换后相加为零，此即毕安基恒等式.

对曲率张量 R_{iklm} 进行缩并，可以获得一个二阶张量。(注意，只可能对 il 进行缩并，若 ik 或 lm 则恒为零，对 im 之类的可能差负号)

考虑：$\boxed{R_{ik} = R^l_{ilk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial x^k} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm} - \Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}}$ → 里奇张量.

里奇张量显然是对称的，有 $R_{ik} = R_{ki}$.

并且它满足微分恒等式 $R^i_{k;i} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^k}$. 其中 $R = R^l_l$.

$\frac{\partial R^l_{iil}}{\partial x^m} + \frac{\partial R^l_{imi}}{\partial x^l} + \frac{\partial R^l_{ilm}}{\partial x^i} = 0 \xrightarrow{\text{同时升一次i}} -\frac{\partial R^l_l}{\partial x^m} + \frac{\partial R^l_m}{\partial x^l} + \frac{\partial R^i_m}{\partial x^i} = 0 \xrightarrow{\text{整理}} R^i_{k;i} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial R}{\partial x^k}$

继续缩并 ik 可得 $\boxed{R = g^{ik}R_{ik} = g^{il}g^{km}R_{iklm}}$. 称为曲率标量.

③ 考虑到 R_{iklm} 具有如①所述的对称性，可以知道 R_{iklm} 的各分量之间并非独立. 下面讨论其独立分量的数目.

(1) 先对二维空间进行考察. 在这种情况下采用 P_{abcd} 代表曲率张量，用 γ_{ab} 代表度规. 其中 $abcd \in \{1,2\}$.

在这种情况下，由于 $(a=b)\vee(c=d) \Longrightarrow P_{abcd} = 0$. 故 ab 与 cd 中必须不同. 而 ab 与 cd 又只能取 $\{1,2\}$. 所以说各分量只相差负号.

可见此时只有一个独立分量，取 P_{1212} 为该独立分量.

$$\begin{aligned} R = g^{il}(g^{km}R_{iklm}) = \; & g^{11}\left(g^{11}\boxed{R_{1111}} + g^{12}\boxed{R_{1112}} + g^{21}\boxed{R_{1211}} + g^{22}R_{1212}\right) \\ + \; & g^{12}\left(g^{11}\boxed{R_{1121}} + g^{12}\boxed{R_{1122}} + g^{21}R_{1221} + g^{22}\boxed{R_{1222}}\right) \\ + \; & g^{21}\left(g^{11}\boxed{R_{2111}} + g^{12}R_{2112} + g^{21}\boxed{R_{2211}} + g^{22}\boxed{R_{2212}}\right) \\ + \; & g^{22}\left(g^{11}R_{2121} + g^{12}\boxed{R_{2122}} + g^{21}\boxed{R_{2221}} + g^{22}\boxed{R_{2222}}\right) \\ = \; & 2(g^{11}g^{22} - g^{21}g^{12})R_{1212} \end{aligned}$$

则此时曲率标量 $\boxed{P = \frac{2P_{1212}}{|\gamma_{ab}|}}$

我感觉这里应该是 $2|\gamma_{ab}|P_{1212}$

此时还有 $\frac{P}{2} = \frac{P_{1212}}{|\gamma_{ab}|} = K = \frac{1}{\rho_1\rho_2}$ 为高斯曲率. $\rho_1\ \rho_2$ 为曲面的主曲率半径.

在 $x=0, y=0$ 处写曲面方程 $z = x^2/2\rho_1 + y^2/2\rho_2$ 则

此处线元. $dl^2 = d(z^2 + x^2 + y^2) = 2\left(\frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}\right)\left(\frac{dx^2}{2\rho_1} + \frac{1}{2\rho_2}dy^2\right) + dx^2 + dy^2 = (1+\frac{x^2}{\rho_1})dx^2 + (1+\frac{y^2}{\rho_2})dy^2 + \frac{xy\,d(xy)}{\rho_1\rho_2}$

可以认为 $d(xy)$ 在 0 附近有 $dx\cdot y + x\,dy = 2dx\,dy$ ∴ $dl^2 = (1+\frac{x^2}{\rho_1^2})dx^2 + (1+\frac{y^2}{\rho_2^2})dy^2 + 2\frac{xy}{\rho_1\rho_2}dx\,dy$.

$$\therefore \gamma = \begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{\rho_1^2} & \frac{xy}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{xy}{\rho_1\rho_2} & 1+\frac{y^2}{\rho_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \gamma=\begin{pmatrix} 1+\frac{x^2}{\rho_1^2} & \frac{xy}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{xy}{\rho_1\rho_2} & 1+\frac{y^2}{\rho_2^2}\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial x}=\begin{pmatrix} \frac{2x}{\rho_1^2} & \frac{y}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{y}{\rho_1\rho_2} & 0\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\gamma}{\partial y}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{x}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{x}{\rho_1\rho_2} & \frac{2y}{\rho_2^2}\end{pmatrix}\quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\rho_1} & \frac{1}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{1}{\rho_1\rho_2} & 0\end{pmatrix}\quad \frac{\partial^2\gamma}{\partial y\partial x}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_1\rho_2} \\ \frac{1}{\rho_1\rho_2} & \frac{2}{\rho_1\rho_2}\end{pmatrix}$$

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2\partial x^1}+\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}\right)+g_{np}\left(\Gamma^n_{21}\Gamma^p_{12}-\Gamma^n_{22}\Gamma^p_{11}\right)$$

$$\Gamma^i_{kl}=\frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right).$$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)\quad \Gamma^2_{11}=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)$$

$$\Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial y}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial y}\right)\quad \Gamma^2_{12}=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial y}+\frac{\partial g_{12}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial y}+\frac{\partial g_{22}}{\partial x}-\frac{\partial g_{12}}{\partial y}\right)$$

$$\Gamma^1_{21}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x}-\frac{\partial g_{21}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y}\right)\quad \Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x}-\frac{\partial g_{21}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+\frac{\partial g_{21}}{\partial x}-\frac{\partial g_{21}}{\partial y}\right)$$

$$\Gamma^1_{22}=\frac{1}{2}g^{11}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+\frac{\partial g_{22}}{\partial y}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right)\quad \Gamma^2_{22}=\frac{1}{2}g^{21}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial y}+\frac{\partial g_{12}}{\partial y}-\frac{\partial g_{22}}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial y}+\frac{\partial g_{22}}{\partial y}-\frac{\partial g_{22}}{\partial y}\right)$$

$$\Gamma^1_{11}=\frac{x}{\rho_1^2}\left(1+\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_2^2}\right)\quad \Gamma^1_{12}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{\rho_1^2}\right)\frac{y}{\rho_1\rho_2}\quad \Gamma^1_{21}=\frac{xy}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{x}{\rho_1^2}+\frac{y}{\rho_2^2}\right)\quad \Gamma^1_{22}=\frac{x}{\rho_1\rho_2}\left(1+\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_2^2}\right)$$

$$\Gamma^2_{11}=\frac{y}{\rho_1\rho_2}\left(1+\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_2^2}\right)\quad \Gamma^2_{12}=\frac{xy}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{x}{\rho_1^2}+\frac{y}{\rho_2^2}\right).\quad \Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{\rho_2^2}\right)\frac{x}{\rho_1\rho_2}.\quad \Gamma^2_{22}=\frac{y}{\rho_2^2}\left(1+\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_2^2}\right)$$

当 $x=0,\ y=0$. Γ 全为于零！故只用考虑二阶导.

$$R_{1212}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x^2\partial x^1}+\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1\partial x^2}-\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2\partial x^1}-\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1\partial x^1}\right)=\frac{1}{\rho_1\rho_2}\qquad \text{成立.}\left(|\gamma_{ab}|_{x=0,y=0}=1\right)$$

(ii) 三维：用 $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 表示曲率张量. $\alpha.\beta.\gamma.\delta\in\{1,2,3\}$、度规张量用 γ_{ab} 表示.

显然在这里. $\alpha\beta\in\{23,31,12\}$、$(P_{12\gamma\delta}=-P_{21\gamma\delta})$ 所以说 $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 分量中独立的应当有6个.（3个 $\alpha\beta=\gamma\delta$. 3个 $\alpha\beta\neq\gamma\delta$）

对于 $P_{\alpha\beta}$、也有同样多的分量. 且可以通过 $P_{\alpha\beta}=g^{\gamma\delta}P_{\alpha\gamma\delta\beta}$ 得知 $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 的所有分量可以用 $P_{\alpha\beta}$ 与 $\gamma_{\alpha\beta}$ 来表示.

例题：用二阶张量 $P_{\alpha\beta}$ 表示三维空间的曲率张量 $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

可以使用：$P_{\alpha\beta\gamma\delta}=A_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}-A_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}+A_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma}-A_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}$.

其中 $A_{\alpha\beta}$ 是某个对称张量. 可以由该式对 $\alpha\delta$ 缩并来确定，则得到 $P_{\alpha\beta}=A\gamma_{\alpha\beta}+A_{\alpha\beta}$. $A_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}P\gamma_{\alpha\beta}$.

最终可以有 $P_{\alpha\beta\gamma\delta}=P_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}-P_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}+P_{\beta\delta}\gamma_{\alpha\gamma}-P_{\beta\gamma}\gamma_{\alpha\delta}+\frac{P}{2}\left(\gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}-\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta}\right)$

假如我们选择一个坐标系，它在给定点是笛卡尔坐标系，则可以通过适当旋转就能够将张量 $P_{\alpha\beta}$ 变到主轴上.

即对角化. 对角化之后显然只剩三个变量. 故三维空间的曲率最终由三个量确定.

(iii) 四维就同理了。对于 R_{iklm}，ik 与 lm 可以取6种不同的数值组合. 01.02.03.12,13.23.

故而 ik 与 lm 不同时可以有 $\frac{5\times6}{2}$ 种（ik 与 lm 地位相同. 可交换、故 $C_6^2=15$ 种）

ik 与 lm 相同时有6种. 一共21种.

又由于存在轮换对称导致的式：$R_{iklm}+R_{imkl}+R_{ilmk}=0$ 这样的式子上述21种搭配只有得出一个

即 $R_{0123}+R_{0312}+R_{0231}=0$ 故 $21-1=20$ 个独立变量.

同样地. 我们可以找一个伽利略坐标系.（四维笛卡尔）考虑它的旋转. 可以使曲率张量6个分量为零（3个 burst、3个 rotation）

故四维空间每点曲率由14个独立分量确定.

(iv) 讨论：(1). 若 $R_{ik}=0$. 则在任意坐标系下 R_{iklm} 总共有10个独立分量. 适当变换下可以把它化为正则形式.

此时它的分量可以只用4个独立的值表示.（完全对角化了.）

(2) 若 $R_{ik}\neq0$. 就构造一个 C_{iklm}. 让它满足具备 R_{iklm} 所有对称性的同时 按 ik 缩并为于零的条件即可.

构造如下：$C_{iklm}=R_{iklm}-\frac{1}{2}R_{il}g_{km}+\frac{1}{2}R_{im}g_{kl}+\frac{1}{2}R_{kl}g_{im}-\frac{1}{2}R_{km}g_{il}+\frac{1}{6}R\left(g_{il}g_{km}-g_{im}g_{kl}\right)\longrightarrow$ 外尔张量.

$=R_{iklm}-R_{i[l}g_{m]k}+R_{k[l}g_{m]i}+\frac{1}{3}R\,g_{i[l}g_{m]k}$. 其中 $A_{[ik]}=\frac{1}{2}(A_{ik}-A_{ki})$

(2) 之前说到 $R_{ik}=0$，可以把曲率张量化为正则形式，以下将为可能出现的情况进行分类.

首先假设四维空间给定点上的度规已经化为伽利略形式.

则 R_{iklm} 的 20 个独立分量可以用这三个三维张量表示：$\boxed{A_{\alpha\beta}=R_{0\alpha0\beta}}$、$\boxed{B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma\delta}R_{0\beta\gamma\delta}}$、$\boxed{C_{\alpha\beta}=\frac{1}{4}e_{\alpha\gamma\delta}e_{\beta\lambda\mu}R_{\gamma\delta\lambda\mu}}$.

其中 $e_{\alpha\beta\gamma}$ 是单位反对称张量. 且由于度规已化为伽利略形式. 三维度规就是笛卡尔形式. 求和时就无所谓上下标了.

按定义来看. $A_{\alpha\beta}$、$C_{\alpha\beta}$ 都是对称的. 而 $B_{\alpha\beta}$ 一般而言不是对称的、但是 $\mathrm{tr}B_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}e_{\alpha\gamma\delta}R_{0\alpha\gamma\delta}=0$

那么 $R_{km}=g^{il}R_{iklm}=0 \Leftrightarrow A_{\alpha\alpha}=0$，$B_{\alpha\beta}=B_{\beta\alpha}$，$A_{\alpha\beta}=-C_{\alpha\beta}$.

引入对称的复张量 $D_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(A_{\alpha\beta}+2iB_{\alpha\beta}-C_{\alpha\beta})=A_{\alpha\beta}+iB_{\alpha\beta}$. 就可以把两个三维实张量合并成一个复张量.

与之前把 $\vec{E}$ 与 $\vec{H}$ 捏成 $\vec{F}$ 是同一个操作. 则与之同理. $D_{\alpha\beta}$ 之于 R_{iklm}. 即 $\vec{F}$ 之于 F_{ik}. 故 R_{iklm} 四维转动 $\Leftrightarrow$ $D_{\alpha\beta}$ 三维复转动.

定义：本征值 $\lambda=\lambda'+i\lambda''$、本征矢 n_α 为 $\boxed{D_{\alpha\beta}n_\beta=\lambda n_\alpha}$ 的解. 由于 $D_{\alpha\alpha}=0$. 故 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ 是显然的

根据独立的本征矢 n_α 的数目，可以把曲率张量分为3类、为 彼得罗夫正则型 I—III

I型：3个独立的本征矢. 此时它们的平方 $n_\alpha n^\alpha\neq0$. 则可以把 $A_{\alpha\beta}$ 与 $B_{\alpha\beta}$ 同时对角化（把 $D_{\alpha\beta}$ 对角化）.

$$\text{有 } A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda_1' & & \\ & \lambda_2' & \\ & & -\lambda_1'-\lambda_2'\end{pmatrix} \qquad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda_1'' & & \\ & \lambda_2'' & \\ & & -\lambda_1''-\lambda_2''\end{pmatrix}$$

复数不变量 λ_1 与 λ_2 可以用复数标量的代数形式表示：$I_1=\frac{1}{48}(R_{iklm}R^{iklm}-iR_{iklm}\overset{*}{R}{}^{iklm})$. $I_2=\frac{1}{96}(R_{iklm}R^{lmpr}R_{pr}{}^{ik}+iR_{iklm}R^{lmpr}\overset{*}{R}_{pr}{}^{ik})$

其中 $\overset{*}{R}_{iklm}=\frac{1}{2}E_{ikpr}R^{pr}{}_{lm}$. 借助 $A_{\alpha\beta}$ 与 $B_{\alpha\beta}$ 可以得到：$I_1=\frac{1}{3}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$. $I_2=\frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)$.

用这些公式可以使我们能够在任何参考系中由 R_{iklm} 的值出发计算 λ_1 λ_2.

II型. 2个独立本征矢. 其一个平方为于零. 相当于这个矢量在迷向平面上. 则有 $n_2=in_1$. $n_3=0$.

$$\Rightarrow D_{11}+iD_{12}=\lambda. \ D_{22}-iD_{12}=\lambda. \Rightarrow D_{11}=\lambda-i\mu. \ D_{22}=\lambda+i\mu. \ D_{12}=\mu.$$

其中 μ 经过适当的复转动可以被赋予任意相位，可以认为 μ 是实数

$$\Rightarrow A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda' & \mu & \\ \mu & \lambda' & \\ & & -2\lambda'\end{pmatrix} \qquad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}\lambda''-\mu & & \\ & \lambda''+\mu & \\ & & -2\lambda''\end{pmatrix}$$

此时只有2个变量 λ' 与 λ''. 且 $I_1=\lambda^2$. $I_2=\lambda^3 \Rightarrow I_1^3=I_2^2$

III型. 只有1个本征矢. 且它平方等于零. 于是所有的本征值 λ 相同且为零.

$$\Rightarrow D_{11}=D_{22}=D_{12}=0. \ D_{13}=\mu. \ D_{23}=i\mu. \quad A_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} & & \mu \\ & 0 & \\ \mu & & \end{pmatrix} \quad B_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 0 & \mu \\ & \mu & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ III型很特殊. 空间弯曲. 但找不到可以作为曲率度量的不变量.

[把空间按曲率的 Petrov 类分类似乎是很常用的方法. 但我知乎不到. 百度也不到. 文献查来也看不懂]

§11.3. 引力场的作用量.

引力场的作用量：$S_g=\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$，其中G是一个函数，$\sqrt{-g}\,d\Omega$是四维空间的体元，$g=|g_{\alpha\beta}|$.

下面确定G的形式，与电磁场方程同理，引力场方程应包含势的不高于二阶的导数，故G应包含 g_{ik} 不高于一阶导.

$$\Rightarrow G=G(g_{ik},\Gamma^i_{kl})$$

可是只从 g_{ik} 与 Γ^i_{kl} 不可能构造出一个不变量，因为 Γ^i_{kl} 总可以变成零，所以只能再考虑标量 R 了。

虽然R含有 g_{ik} 的二阶导，但是R是 g_{ik} 二阶导的线性函数。

于是 $\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\text{const}$ 可以化为：$\boxed{\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\int G\sqrt{-g}\,d\Omega+\int\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}d\Omega}$.

其中G仅仅包含张量 g_{ik} 与其一阶导数，而 $\frac{\partial(\sqrt{-g}\,w^i)}{\partial x^i}$ 具有某一个量的散度的形式（散度意味着积分结束后变分为零）

所以有：$\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega=\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega$.

只是系数，与我们对质量的定义有关.

写出作用量的变分：$\delta S_g=-\boxed{\frac{c^3}{16\pi k}}\delta\int G\sqrt{-g}\,d\Omega=-\boxed{\frac{c^3}{16\pi k}}\delta\int R\sqrt{-g}\,d\Omega$.

下面展开 $\boxed{R=g^{ik}R_{ik}=g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}-g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}+g^{ik}\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}-g^{ik}\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}}$.

乘以$\sqrt{-g}$，有：$\sqrt{-g}\cdot g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{ik}}{\partial x^l}=\boxed{\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik}\Gamma^l_{ik})}-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik})$、$\sqrt{-g}\cdot g^{ik}\frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k}=\boxed{\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik}\Gamma^l_{il})}-\Gamma^l_{il}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik})$

全导没用啊.

$$\Rightarrow\boxed{\sqrt{-g}\,G=\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik})-(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})g^{ik}\sqrt{-g}}$$

利用：$\Gamma^l_{kl}=\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^k}=\frac{\partial\ln\sqrt{-g}}{\partial x^k}$，$g^{kl}\Gamma^i_{kl}=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(\sqrt{-g}\cdot g^{ik})}{\partial x^k}$，$g_{il}\frac{\partial g^{lk}}{\partial x^m}=-g^{lk}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}$，$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}=-\Gamma^i_{ml}g^{mk}-\Gamma^k_{ml}g^{im}$

可以得知：$\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik})=-\sqrt{-g}\,g^{kl}\Gamma^i_{kl}\Gamma^m_{im}-\boxed{\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g})\,g^{ik}}-\boxed{\Gamma^l_{ik}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\sqrt{-g}}$

$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g})=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial g}{\partial x^l}=\frac{-g\cdot g_{ik}}{2\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}$

$\boxed{\frac{-g\cdot g_{ik}}{2\sqrt{-g}}\left(-\Gamma^i_{ml}g^{mk}-\Gamma^k_{ml}g^{im}\right)\Gamma^l_{ik}g^{ik}}$

不知道2怎么消去

$\boxed{2\sqrt{-g}\left(-\Gamma^i_{ml}g^{mk}-\Gamma^k_{ml}g^{im}\right)\Gamma^l_{ik}}$

$\boxed{\Gamma^l_{ik}\left(-\Gamma^i_{ml}g^{mk}-\Gamma^k_{ml}g^{im}\right)}$

$\boxed{-\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{ml}g^{mk}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{ml}g^{im}}$

此处利用 $g^{ik}g_{ik}=4$，不成立.

整理可得：$\Gamma^m_{im}\frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}\,g^{ik})-\Gamma^l_{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{-g}\cdot g^{ik})=2\Gamma^l_{ik}\Gamma^i_{lm}g^{mk}-\Gamma^m_{im}\Gamma^i_{kl}g^{kl}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm}g^{ik}$

$$=g^{ik}(2\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li}-\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})=2g^{ik}(\Gamma^l_{mk}\Gamma^m_{li}-\Gamma^m_{lm}\Gamma^l_{ik}).$$

$$\therefore\ \boxed{G=g^{ik}(\Gamma^m_{il}\Gamma^l_{km}-\Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lm})}$$

度规张量的分量是决定引力场的量，因此，在对于引力场的$\delta S=0$中，变分对象为g^{ik}.

但必须提及：不能确定在一个实际可能实现的场中，作用量积分对于g_{ik}所有可能的变分有极小值.

因为不是g_{ik}的任意变化都会影响到引力场，比如仅仅从一个坐标系变换到另一个坐标系，g_{ik}就要变化.

一般而言，每个这样的坐标变换是四个独立变换的集合。为了除去g_{ik}那些与度规变化无关的变化，可以用四个限制条件压住.

由此可以断言：对引力场使用$\delta S=0$时，能够加四个辅助条件在g_{ik}上，使对δg_{ik}有S取最小值.

然后证明引力常数$k>0$：四个辅助条件为$g_{0\alpha}=0$，$|g_{\alpha\beta}|=\text{const}$，则$g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}=0$

关于g_{ik}对x^0的导数，有$-\frac{1}{4}g^{00}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^0}$负数，给一个笛卡尔坐标系$g_{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}=-\delta_{\alpha\beta}$

此时有$-\frac{1}{4}g^{00}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)^2<0$，故若$k<0$，则G任意大，S可以无限↓，故k只能>0

§11.4. 能量动量张量

任意体系的作用量为 $S=\frac{1}{c}\int\Lambda(q,\frac{\partial q}{\partial x})\sqrt{-g}\,d\Omega$.

但若仅用该方程做变分得出的能动张量 $T_i^{\ k}=\sum_l\frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial q^{(l)}}{\partial x^k}\right)}-\delta_i^k\Lambda$. 一般而言不是对称的.

为了让 $T_i^{\ k}$ 对称要加上 $\frac{\partial\psi_{ikl}}{\partial x^l}$ 形式的适当项. 且 $\psi_{ikl}=-\psi_{ilk}$.

下面用另一个计算能动张量的方法, 可以直接导出对称的表达式.

考虑: $S=\frac{1}{c}\int\Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega$. 中我们进行了 x^i 到 $x'^i=x^i+\xi^i$ 的变换. 此处 ξ^i 为小量.

$$\text{则}\quad g'^{ik}(x'^l)=g^{lm}(x^l)\frac{\partial x'^i}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial x'^k}{\partial x^m}=g^{lm}\left(\delta_l^i+\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}\right)\left(\delta_m^k+\frac{\partial\xi^k}{\partial x^m}\right)\approx g^{ik}(x^l)+g^{im}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^m}+g^{kl}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}$$

其中张量 g'^{ik} 在这里是 x'^l 的函数. 而 g^{ik} 则是原来坐标 x^l 的函数

把 $g'^{ik}(x'^l)=g'^{ik}(x^l+\xi^l)$ 展开为 ξ^l 的级数, 略去高次项, 然后再在所有含 ξ^l 的项中用 g^{ik} 代 g'^{ik}.

$$g'^{ik}(x^l+\xi^l)=g'^{ik}(x^l)+\frac{\partial g'^{ik}}{\partial x^l}\xi^l=g^{ik}(x^l)+g^{il}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}$$

$$\Rightarrow g'^{ik}(x^l)=g^{ik}(x^l)-\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}+g^{il}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}$$

$$\text{显然}\quad -\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}+g^{il}\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+g^{kl}\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}=\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\xi^{i;k}&=g^{kl}\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial x^l}+\Gamma^i_{kl}\xi^k\right)\\ \xi^{k;i}&=g^{il}\left(\frac{\partial\xi^k}{\partial x^l}+\Gamma^k_{il}\xi^i\right)\end{aligned}}$$

$$\boxed{g^{kl}\Gamma^i_{kl}\xi^k+g^{il}\Gamma^k_{il}\xi^i}=\left(g^{kl}g^{im}+g^{il}g^{km}\right)\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\xi^k-g^{kl}g^{im}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\xi^k=-\xi^l\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\xi^k g^{kl}\Gamma^i_{kl}&=g^{kl}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right)\xi^k\\ g^{il}\Gamma^k_{il}\xi^i&=g^{il}g^{km}\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^m}\right)\xi^i\end{aligned}}$$

则 $g'^{ik}=g^{ik}+\delta g^{ik}$, $\delta g^{ik}=\xi^{i;k}+\xi^{k;i}$. 协变分量: $g'_{ik}=g_{ik}+\delta g_{ik}$, $\delta g_{ik}=-\xi_{i;k}-\xi_{k;i}$ ($g_{il}g^{kl}=\delta_i^k$ 在一阶上是成立的)

其中 $\xi_{i;k}+\xi_{k;i}=0$ 表明了一种保度规的无穷小变换. 称为基灵方程.

既然 S 是一个标量, 那么显然坐标变换时不改变

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\delta g^{ik}\right)=\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\right)\delta g^{ik}+\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\right)\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}$$

$$\text{然后考虑}\quad\delta S=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik}+\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\delta\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)\right\}d\Omega=\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega$$

注: 所谓的 $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}$ 在 $\frac{\partial F}{\partial g^{ik}}dg^{ik}$ 时有意义, 从而此处求和是有意义的(对于 ik 而言).

只考虑度规是因为其它有关系统本身的性质的量被相关的"运动方程"保证了 $\delta S=0$. 故只用考虑度规.

现在引入 $\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik}=\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}-\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}$. T_{ik} 显然是一个对称的

$$\text{此时}\quad\delta S=\frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=-\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{2c}\int\underbrace{T_{ik}\left(\xi^{i;k}+\xi^{k;i}\right)}_{T_{ik}\xi^{i;k}+T_{ki}\xi^{i;k}=2T_{ik}\xi^{i;k}.\ (T_{ik}\text{对称})}\sqrt{-g}\,d\Omega=\frac{1}{c}\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega.$$

$$\text{再变换:}\quad\delta S=\frac{1}{c}\int\underbrace{\left(T_i^k\xi^i\right)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega}_{\downarrow}-\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega.\ \Rightarrow\ \delta S=-\frac{1}{c}\int T^k_{i;k}\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega\ \Rightarrow\ T^k_{i;k}=0$$

$$\text{公式:}\ A^i_{;i}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial(\sqrt{-g}A^i)}{\partial x^i}\qquad\frac{1}{\sqrt{-g}}\cdot\frac{\partial(\sqrt{-g}\,T_i^k\xi^i)}{\partial x^k}\cdot\sqrt{-g}$$

可见 $T^k_{i;k}=0$ 这就说明 T_i^k 就是能动张量.

现在我们根据：$\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}$。取 Λ 为电磁场的拉氏量密度。

则 $\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F^{ik} = -\frac{1}{16\pi}F_{ik}F_{lm}g^{il}g^{km}$，可以直接计算出 $T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_k^{\ l} + \frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right)$

这种方法为什么能够直接推出对称形式？

老方法：$S = \frac{1}{c}\int\Lambda\, d\Omega \xrightarrow{\text{变分}} \delta S = \frac{1}{c}\int\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\cdot\delta q_{,i}\right)d\Omega = 0 \xrightarrow[\text{积分}]{\text{分部}} \frac{\partial\Lambda}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_{,i}}\right) = 0$

考虑 $\frac{\partial\Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x^k}\right)}\right) = \delta_i^k\frac{\partial\Lambda}{\partial x^k} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x^k}\right)} - \delta_i^k\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x^k}\right)} - \delta_i^k = T_i^k$

新方法：

利用 δg^{ik} 可以被无穷小变换 ξ^i 表示的性质 $\delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}$

这样的操作可以让 δg^{ik} 这个变分直接成为对称的 $\Rightarrow T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\cdot\left(\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\cdot\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right)}\right)$

考虑宏观物体，自然 $T_{ik} = (p+\varepsilon)u_iu_k - pg_{ik}$。

(vi) Einstein方程结构的特殊性：二阶偏微分方程组，但并非十个g_{ik}都在里面。$\ddot g_{\alpha\beta}$只在$R_{0\alpha0\beta}$中出现，$g_{0\alpha}$与g_{00}的二阶导一般不出现。

可见：R_{ik}以及$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$只包含六个空间分量$g_{\alpha\beta}$对时间的二阶导。

且有$R_\alpha^\beta-\frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta R=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^\beta$才有$\ddot g_{\alpha\beta}$。如$R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0$；$R_\alpha^0=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^0$都只含一阶导。

那么，R_α^0与$R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}(R_0^0-R_\alpha^\alpha)$中$R_{0\alpha0\beta}$形式的分量会都消掉了。

或把$R^l_{m;l}=\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}$写成：$\overset{\text{一阶}}{(R_i^0-\frac{1}{2}\delta_i^0R)_{;0}}=-\overset{\text{二阶}}{(R_i^\alpha-\frac{1}{2}\delta_i^\alpha R)_{;\alpha}}$ 会更容易看出这点。

不仅如此，$R_0^0-\frac{1}{2}R$、R_α^0甚至不含$\dot g_{0\alpha}$与$\dot g_{00}$。事实上也只有$\Gamma_{\alpha,00}$与$\Gamma_{0,00}$中有，但它们也只包含于$R_{0\alpha0\beta}$形式的分量里。

(vii) 考虑求解给定初始条件下的Einstein方程，则会问："能够任意给几个量的初始空间分布？"

首先，二阶方程要给定g与$\dot g$。此时只有六个$\ddot g_{\alpha\beta}$，所以不是所有的g与$\dot g$都可以任意给定，$\dot g_{00}$与$\dot g_{0\alpha}$即密度与速度不能随便给。

得先给了$g_{\alpha\beta}$与$\dot g_{\alpha\beta}$才能用$R_0^0-\frac{1}{2}R=\frac{8\pi k}{c^4}T_0^0$；$R_\alpha^0=\frac{8\pi k}{c^4}T_\alpha^0$算出$\dot g_{0\alpha}$与$\dot g_{00}$。当然，$g_{0\alpha}$与$g_{00}$依然任意。

然后这样可能给出一些与坐标选取任意相关的任意函数，但是只有那些不能被参考系扔掉的函数才有意义。

显然：物质密度(1)+物质速度(3)+真空引力场(4)=8

§11.6 引力场的能动质张量

只有物质没有场

① 无引力场时，物质有 $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}=0$． 有引力场：$T^k_{i;k}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial (T_i^k\sqrt{-g})}{\partial x^k}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl}=0$

如何考虑"物质＋引力场"四动量守恒？

选择坐标使某处 $g_{ik}'=0$．则 $\frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl}=0$ ．$\sqrt{-g}$ 可以提出去．最后有：$\frac{\partial}{\partial x^k}T_i^k=0$ 或 $\frac{\partial}{\partial x^k}T^{ik}=0$

恒满足该式的量为 $T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\eta^{ikl}$．其中 $\eta^{ikl}=-\eta^{ilk}$．我们想办法把 T^{ik} 化成这样的形式．

$T^{ik}=\frac{c^4}{8\pi k}(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R)$．而 $R^{ik}=\frac{1}{2}g^{im}g^{kp}g^{ln}\left\{\frac{\partial^2 g_{lp}}{\partial x^m\partial x^n}+\frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^l\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{ln}}{\partial x^m\partial x^p}-\frac{\partial^2 g_{mp}}{\partial x^l\partial x^n}\right\}$

$$\Rightarrow\quad T^{ik}=\frac{\partial}{\partial x^l}\left\{\frac{c^4}{16\pi k}\cdot\frac{1}{(-g)}\cdot\frac{\partial}{\partial x^m}\left((-g)(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})\right)\right\}$$

提出去，因为我们取了 $g'=0$ 的点．

引入 $\boxed{h^{ikl}=\frac{\partial}{\partial x^m}\lambda^{iklm}}$ ； $\boxed{\lambda^{iklm}=\frac{c^4}{16\pi k}(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})(-g)}$．显然 $h^{ikl}=-h^{ilk}$．

于是有 $\boxed{\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}=(-g)T^{ik}}$ $\xrightarrow{\partial g_{ik}/\partial x^l\neq 0}$ $\boxed{记\ (-g)t^{ik}=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}-(-g)T^{ik}}$

$\Rightarrow\ (-g)(T^{ik}+t^{ik})=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ 代入 Einstein 方程，用 R^{ik} 代替 T^{ik}．

$\Rightarrow\ (-g)\left\{\frac{c^4}{8\pi k}(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R)+t^{ik}\right\}=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$

$\Rightarrow$ 可以算出 $t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\left\{(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np}-\Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn}-\Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})\right.$

$+\,g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np})$

$+\,g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn}+\Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp}-\Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np})$

$\left.+\,g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp}-\Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\right\}$

或用度规张量分量的导数表示：

$\sqrt{-g}\,g^{lm}$．

$$(-g)t^{ik}=\frac{c^4}{16\pi k}\left\{\mathfrak{g}^{ik}{}_{,l}\mathfrak{g}^{lm}{}_{,m}-\mathfrak{g}^{il}{}_{,l}\mathfrak{g}^{km}{}_{,m}+\frac{1}{2}g^{ik}g_{lm}\mathfrak{g}^{ln}{}_{,p}\mathfrak{g}^{pm}{}_{,n}-\right.$$
$$-(g^{il}g_{mn}\mathfrak{g}^{kn}{}_{,p}\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l}+g^{kl}g_{mn}\mathfrak{g}^{in}{}_{,p}\mathfrak{g}^{mp}{}_{,l})+g_{lm}g^{np}\mathfrak{g}^{il}{}_{,n}\mathfrak{g}^{km}{}_{,p}+$$
$$\left.+\frac{1}{8}(2g^{il}g^{km}-g^{ik}g^{lm})(2g_{np}g_{qr}-g_{pq}g_{nr})\mathfrak{g}^{nr}{}_{,l}\mathfrak{g}^{pq}{}_{,m}\right\},$$

A,l 普通微分．

t^{ik} 不是张量，但在坐标的线性变换下与张量表现一样．

由定义：$\frac{\partial}{\partial x^k}(-g)(T^{ik}+t^{ik})=0$．则 $P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{ik}+t^{ik})\,dS_k$ 守恒．

物质　　引力场，能动质张量．

积分面如果考虑在 $x^0=\mathrm{const}$ 上，则 $P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{i0}+t^{i0})\,dV$

② 我们发现 $(-g)(T^{ik}+t^{ik})$ 对于 ik 是对称的

这说明 $M^{ik}=\int(x^i dp^k + x^k dp^i) = \frac{1}{c}\int\left(x^i(T^{kl}+t^{kl})-x^k(T^{il}+t^{il})\right)(-g)\,dS_l$ 是满足守恒律的。

同时也可以给出匀速运动的惯性中心定义：$x^0\int(T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0})(-g)\,dV-\int x^\alpha(T^{00}+t^{00})(-g)\,dV=\text{constant}$.

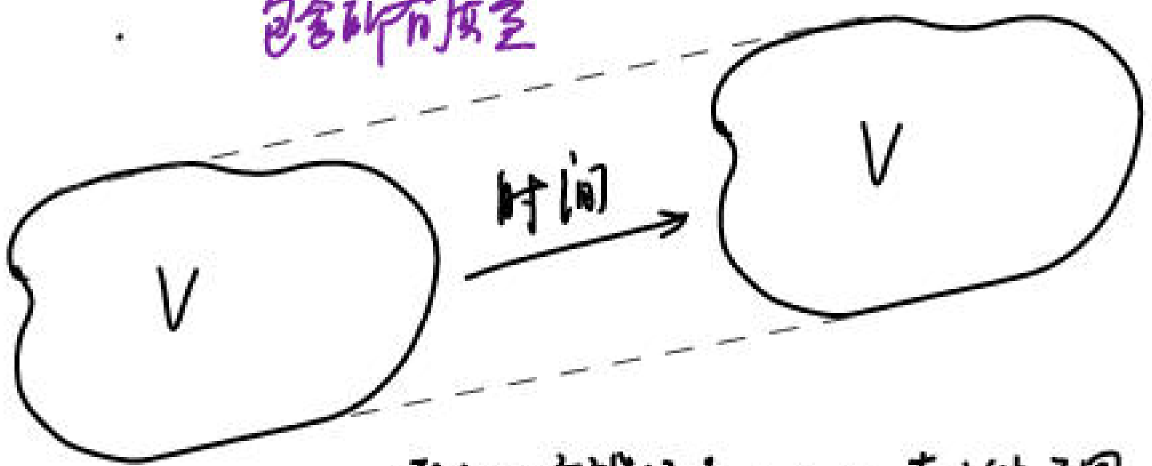
$$\Rightarrow X^\alpha=\frac{\int x^\alpha(T^{00}+t^{00})(-g)\,dV}{\int(T^{\alpha 0}+t^{\alpha 0})(-g)\,dV}$$

考虑取一坐标系，使其在指定的体元内为惯性系，则可以使所有的 t^{ik} 在时空的任意一点为零（因为所有的 $\Gamma^i_{kl}=0$）

同时我们考虑到，没有引力场的时候，只要用曲线坐标代替笛卡尔坐标，就能得到 t^{ik}，所以在任何情形下讨论引力场能量局域化是毫无意义的。对于真张量 $T^{ik}=0$，则恒为0，而 t^{ik} 是赝张量，它没有这个性质。当然，P^i 是有完全确定的意义的。

③ 现在考虑一块空间在时间流逝下划出的通道。

包含所有质量



它以外是没有质量的，因此无穷远处应有 $t^{ik}=0$，即无穷远处平直。
如此之后，"通道"内部如何对参考系而言就无所谓了，但对于 P^i 不行。

引入三个坐标系：1. 2. 在 V 中不同，V 外远方变成一个伽利略系。3. 在 x^0 时与 1 重合，在 x'^0 与 2 重合，通道外即伽利略系

则由于 $dP^i/dx^0=0$ 在 3 中成立，故 1. 2. 也成立，故 $P^i=P'^i$.

④ 四维动量同时可以表示为沿着远处的三维曲面积分。

把 $(-g)(T^{ik}+t^{ik})=\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}$ 代入 $P^i=\frac{1}{c}\int(-g)(T^{ik}+t^{ik})\,dS_k$ 有 $P^i=\frac{1}{c}\int\frac{\partial h^{ikl}}{\partial x^l}\,dS_k$

则利用 Stokes 定理：$P^i=\frac{1}{2c}\oint h^{ikl}\,df^*_{kl}$。若考虑 $x^0=\text{const}$，则 $P^i=\frac{1}{c}\oint h^{i0\alpha}\,df_\alpha$，它在 ∞ 处是有限的。

对角动量，有：

定义：$h^{ikl}=\frac{\partial}{\partial x^m}\lambda^{iklm}$

$$M^{ik}=\frac{1}{c}\int\left(x^i\frac{\partial^2\lambda^{klmn}}{\partial x^m\partial x^n}-x^k\frac{\partial^2\lambda^{ilmn}}{\partial x^m\partial x^n}\right)dS_l=$$

$$=\frac{1}{2c}\oint\left(x^i\frac{\partial\lambda^{klmn}}{\partial x^n}-x^k\frac{\partial\lambda^{ilmn}}{\partial x^n}\right)df^*_{lm}-\frac{1}{c}\int\left(\delta^i_m\frac{\partial\lambda^{klmn}}{\partial x^n}-\delta^k_m\frac{\partial\lambda^{ilmn}}{\partial x^n}\right)dS_l=$$ （分部积分）

$$=\frac{1}{2c}\oint(x^ih^{klm}-x^kh^{ilm})\,df^*_{lm}-\boxed{\frac{1}{c}\int\frac{\partial}{\partial x^n}\underbrace{(\lambda^{klin}-\lambda^{ilkn})}_{=\lambda^{ilnk}}\,dS_l.}$$

$$=\frac{1}{c}\int\frac{\partial\lambda^{ilnk}}{\partial x^n}\,dS_l=\frac{1}{2c}\oint\lambda^{ilnk}\,df^*_{ln}$$

$$\therefore\ M^{ik}=\frac{1}{c}\oint(x^ih^{k0\alpha}-x^kh^{i0\alpha}+\lambda^{i0\alpha k})\,df_\alpha.$$

§11.7 同步参考系.

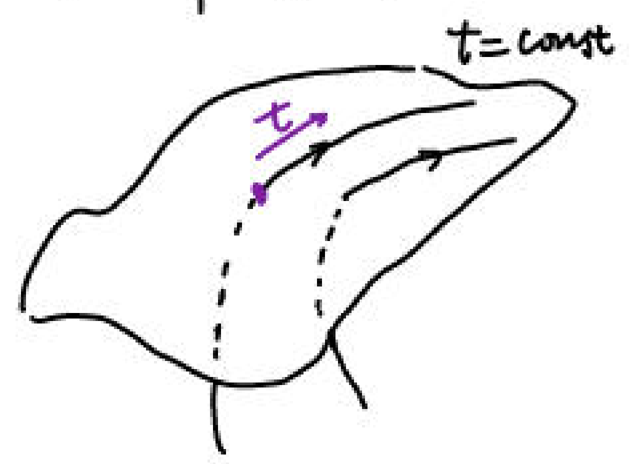
① 要将空间中不同的点同步成一个时钟，需 $\boxed{g_{0\alpha}=0 \text{ 且 } g_{00}=1}$. 此时 $x^0=t$ 为固有时.

定义满足之即为同步参考系、其中间隔元 $\boxed{ds^2=dt^2-\gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta}$. $\gamma_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}$

同步参考系中的时间线就是测地线. 与 $x^1,x^2,x^3=\text{const}$ 相切的矢量 $u^i=\frac{dx^i}{ds}$.有 $u^\alpha=0$. $u^0=1$. 且自动满足 $\frac{du^i}{ds}+\Gamma^i_{kl}u^ku^l=0$

同样这些测地线垂直于 $t=\text{const}$ 、而与 $t=\text{const}$ 垂直的 $n_i=\frac{\partial t}{\partial x^i}$ 具有 $n_\alpha=0$. $n_0=1$. 逆变 $n^\alpha=0$. $n^0=1$. 均平行于 u^i .

反过来这样的性质可以用于任意时空内部的几何构建。可以取某一 $t=\text{const}$ 曲面(空间超曲面)为起点



则它上面每一点的法线都是类时的. 其上所有间隔都是类空的.

建立垂直于该面的测地线，取之为时间坐标线，同步参考系就形成了.

显然，这样的构建总是可能的，并且不是唯一的.

② 如何解析地过渡到同步系中？利用粒子在引力场里沿测地线运动.

三个参数　　任意函数.

质量为1粒子的 Hamilton-Jacobi 方程: $g^{ik}\frac{\partial\tau}{\partial x^i}\frac{\partial\tau}{\partial x^k}=1$ 　(τ 为作用量. $\tau=f(\xi^\alpha,x^i)+A(\xi^\alpha)$)

令 $\frac{\partial\tau}{\partial\xi^\alpha}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}=-\frac{\partial A}{\partial\xi^\alpha}}$. 只要给定 ξ^α . $-\frac{\partial A}{\partial\xi^\alpha}$ 就是固定的. 且该方程给出的世界线是粒子可能的轨迹之一.

那么要选沿着轨迹具有恒定值的量 ξ^α 作为新的空间坐标. τ 为新的时间坐标. 即得同步系

即 $\tau=f(\xi^\alpha,x^i)+A(\xi^\alpha)$ 、 $\frac{\partial f}{\partial\xi^\alpha}=-\frac{\partial A}{\partial\xi^\alpha}$ 为坐标变换关系.(因为时间线的测地性是自动保证的. 而时间线垂直于 $\tau=\text{const}$ 来自于力学关系)

③ 在同步系中写出 Einstein 方程、分离时、空微运算.

引入 $\boxed{\varkappa_{\alpha\beta}=\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}}$ 表示三维度规张量的时间导数. 它也是一个张量. 且有 $\varkappa^\alpha_\alpha=\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\gamma_{\alpha\beta}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\ln\gamma)$

对 Christoffel 符号: $\boxed{\Gamma^0_{00}=\Gamma^\alpha_{00}=\Gamma^0_{0\alpha}=0}$. $\boxed{\Gamma^0_{\alpha\beta}=\frac12\varkappa_{\alpha\beta}}$. $\boxed{\Gamma^\alpha_{0\beta}=\frac12\varkappa^\alpha_\beta}$. $\boxed{\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\lambda^\alpha_{\beta\gamma}}$ 　$\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ 只是符号上替换 $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$. 表示由 $\gamma_{\alpha\beta}$ 构成的三维 Christoffel 符号.

对 R_{ik} : $\boxed{R_{00}=-\frac12\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^\alpha_\alpha-\frac14\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta}$. $\boxed{R_{0\alpha}=\frac12(\varkappa^\beta_{\alpha;\beta}-\varkappa^\beta_{\beta;\alpha})}$. $\boxed{R_{\alpha\beta}=P_{\alpha\beta}+\frac12\frac{\partial}{\partial t}\varkappa_{\alpha\beta}+\frac14(\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa^\gamma_\gamma-2\varkappa^\gamma_\alpha\varkappa_{\beta\gamma})}$ 　$P_{\alpha\beta}$ 与 $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ 同理

于是 Einstein 方程可以用混合分量写出:

$$\boxed{R^0_0=-\frac12\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^\alpha_\alpha-\frac14\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta=8\pi k(T^0_0-\frac12T)} . \boxed{R^0_\alpha=\frac12(\varkappa^\beta_{\alpha;\beta}-\varkappa^\beta_{\beta;\alpha})=8\pi kT^0_\alpha} . \boxed{R^\beta_\alpha=-P^\beta_\alpha-\frac{1}{2\sqrt\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt\gamma\varkappa^\beta_\alpha)=8\pi k(T^\beta_\alpha-\frac12\delta^\beta_\alpha T)}$$

④ 同步系的特征是它们的非稳定性.

引力场若恒定, $\varkappa_{\alpha\beta}=0$. 但这意味着 $R^0_0=0=8\pi k(T^0_0-\frac12T)$. 只要有物质这个式就不成立.

同时若真空, $T=0$, 则 $P^\beta_\alpha=0\Rightarrow R_{\alpha\beta\gamma\delta}=0\Rightarrow$ 就是不存在场.

⑤ 再考虑"尘埃"状物质($p=0$).

一般而言填满空间的物质相对于同步系不静止. 因为内部有压强作用的粒子不沿测地线运动. 静止粒子世界线是时间线.

$p=0$ 时. 它们沿测地线运动. 但此时参考系同步性条件与它同物质共动的条件不矛盾. 对于 $p\neq0$. 则只有当某些方向上无压强梯度.

① 方程 $R^0_0=-\frac12\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^\alpha_\alpha-\frac14\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta=8\pi k(T^0_0-\frac12T)$ 表明 $-g=\gamma$ 必定得在有限时间内 $=0$.

首先 $T^0_0-\frac12T=\frac12(\varepsilon+3p)+\frac{(p+\varepsilon)v^2}{1-v^2}>0$ 　故 $-R^0_0=\frac12\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^\alpha_\alpha+\frac14\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta\le0$. 而 $\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta\ge\frac13(\varkappa^\alpha_\alpha)^2\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\varkappa^\alpha_\alpha+\frac16(\varkappa^\alpha_\alpha)^2\le0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\varkappa^\alpha_\alpha}\ge\frac16$

而 $\varkappa^\alpha_\alpha=\frac{\partial\ln\gamma}{\partial t}$. 则最终 $\gamma\to0$. 即 $\varkappa^\alpha_\alpha\to\infty$

注意: 这里只是看似有奇点. 但这是虚拟的. 只是同步参考系的一些几何因素导致的. 换系即无.