第四章 电磁场方程.

§4.1 麦克斯韦方程的张量化.

Landau 推麦克斯韦方程用了两步.

(1) 由 $\vec B$ 与 $\vec E$ 的定义结合 ∇ 算符的性质直接地给出三维形式的"第一对麦克斯韦方程"

$$\begin{cases} \vec B = \nabla\times\vec A \xrightarrow{\quad\nabla\cdot\quad} \nabla\cdot\vec B = 0 \\ \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t} - \nabla\varphi \xrightarrow[\text{②}\ \vec B\ \to]{\text{①}\ \nabla\times} \nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec B}{\partial t} \end{cases}$$

再利用电磁场张量 $F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i$ 将之四维化.

因为 F_{ik} 显然满足: $\partial_l F_{ik} + \partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} = 0 \Longleftrightarrow$ 缩并指标 $e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0$

可以逐指标地验证 $e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0$ 等价于 $\begin{cases} \nabla\cdot\vec B = 0 \\ \nabla\times\vec E = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial \vec B}{\partial t} \end{cases}$.

取 $i=0$, 则有: $e^{0klm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = \frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} - \frac{\partial F_{32}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{13}}{\partial x^2}$

$(F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k)$ $\qquad = 2\left(\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2}\right) = 2\,\partial_i B_i = 2\nabla\cdot B = 0$

取 $i=1$ 则有同理: $Ans = \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial F_{32}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} - \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} + \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} - \frac{\partial F_{03}}{\partial x^2}$

$$= 2\left(-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x^2} - \frac{\partial E_2}{\partial x^3}\right)$$

$$= 2\left[-\frac{1}{c}\cdot\partial_t B_1 - (\nabla\times E)_1\right].$$ $i=2,3$ 同理, 即证成立.

当然, 朗道在第2小节中提到本方程 $e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0$ 与 $\delta(S_m + S_{mf}) = 0$ 等价.

这也是可以证明的。因为 $\delta(S_m + S_{mf}) = 0$ 已是我们得出 $\vec B = \nabla\times\vec A$ 与 $\vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t} - \nabla\varphi$ 的途径

本质而言, $e^{iklm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = 0$ 仅仅是 $\begin{cases} B = \nabla\times\vec A \\ \vec E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec A}{\partial t} - \nabla\varphi \end{cases}$ 的数学变换, 却可以推出两个麦氏方程的根本原因在于: $\vec B$ 与 $\vec E$ 的定义本身已然包含这形式了。

(iii) 从作用量出发，把场本身的性质考虑在内，推出"第二对麦克斯韦方程"的四维形式.

① 首先考虑 $S_{field}=S_f$. 我们依靠一个实验事实：电磁场满足叠加原理.

- ① 叠加原理要求场方程必须线性，即变分后为一次式. 故作用量应为二次式.
- ② S_f 中也不能包含势. 因为势 A 没有完全确定. 因此必须是 F_{ik} 的函数.
- ③ S_f 中不能包含 F_{ik} 的导数. 因为 Lagrangian 中至多含有坐标对时间的一阶导.
- ④ 作用量必定是一个四维标量.

于是，容易知道： $S_f=\int F_{ik}F^{ik}$ 或 $\int e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$.

然而 P72 的脚注告诉我们： $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}=4\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m\right)$

故 $\int e^{iklm}F_{ik}F_{lm}\Rightarrow$，有效的只有 $F_{ik}F^{ik}$.

故 $S_f=a\iint F_{ik}F^{ik}dVdt$. $dV=dx\cdot dy\cdot dz$.

继续分析. 由 $F_{ik}F^{ik}\equiv 2(H^2-E^2)$ 知，若 $a>0$. 则 S_f 总能成为任意大的负值

$\therefore a<0$. 依赖于单位制. 在高斯单位制中 $\underline{S_f=-\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}d\Omega}$

② 引入四维电流矢量. 此处朗道使用 $de\cdot dx^i=\rho dV\cdot dx^i$ 定义.

有: $de\cdot dx^i=\underbrace{\rho\cdot dV\cdot dt}_{}\cdot\frac{dx^i}{dt}\rightarrow$ 四速度. 取出 $\rho\frac{dx^i}{dt}=j^i$. 则 $\vec{j}=(c\rho,\vec{j})$

（$dV\cdot dt$：四维体元）

引入电流的目的在于把"e"消了. 不然不好考虑. 于是 $S_{mf}=-\sum\int\frac{e}{c}A_kdx^k$

变成了: $-\frac{1}{c}\int\rho A_idx^idV=-\frac{1}{c}\int\rho\frac{dx^i}{dt}A_idVdt=-\frac{1}{c^2}\int A_ij^id\Omega$. 成功扔掉 Σ.

③ 变分作用量，求出第二对麦氏方程.

定义了 $\vec{j}$ 之后，我们有新的 S 写作 $S = S_m + S_{mf} + S_f = -\sum\int mc\,ds - \frac{1}{c^2}\int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik} d\Omega$

则 $\delta S = 0 - \frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right)d\Omega = 0$ 、代入 $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$

有 $\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\left(\partial_i\delta A_k - \partial_k\delta A_i\right)\right]d\Omega$.

而考虑到 $F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k = F^{ki}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i = -F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i$

$\therefore \delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right)d\Omega$.

分部积分：$\frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\partial_k\delta A_i d\Omega = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i dS_k$.

[高斯定理：$\int F^{ik}\delta A_i dS_k = \int\left(\partial_k F^{ik}\delta A_i + F^{ik}\partial_k\delta A_i\right)d\Omega$]

则 $\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\partial_k F^{ik}\right)\delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i dS_k$.

第二项考虑空间积分限，从∞到∞，故应为零、时间积分，初末给定，变分为零.

故 $\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\partial_k F^{ik}\right)\delta A_i d\Omega = 0$

即有：$\boxed{\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c}j^i}$ （三维形式用 $i=0$ 及 $i=1,2,3$ 代即有.）

自此，我们完成了麦克斯韦方程组的导出.

(iv) 一些附注:

① 四维电流密度矢量其实是受诺特定理保证的一个量。

考虑一个对称操作(连续), 让 $q(t)\to\tilde{q}(t)=q(t)+\varepsilon F(q(t))$

其中 $F(q(t))$ 为 $q(t)$ 的某个函数. ε 是小量.

则 $\delta S=S[\tilde{q}(t)]-S[q(t)]=0$ 才叫做对称. 现在我们把 ε 看成 $\varepsilon(t)$.

它满足 $\varepsilon(t_i)=\varepsilon(t_f)=0$. 则 $q(t)\to\tilde{q}(t)=q(t)+\varepsilon(t)F(q(t))$

那么 $\delta S=\int_{t_i}^{t_f}dt\left(L(\tilde{q},\dot{\tilde{q}})-L(q,\dot{q})\right)=\int_{t_i}^{t_f}dt\left(P(q,\dot{q})\varepsilon(t)+Q(q,\dot{q})\dot{\varepsilon}(t)\right)$

其中的 $P(q,\dot{q})\varepsilon(t)$, 我们想到把 $\varepsilon(t)=\varepsilon(t_i)=\varepsilon(t_f)=0$. 则它不会出现。

(更重要的理由是 $\varepsilon(t)$ 项若出现, 我们再把 $\varepsilon(t)$ 变回常数来看待时, 它仍不掉)

总之, 一个对称(全局)操作 $\delta q(t)=\varepsilon F(q(t))$ 必导致 $\delta S=\int_{t_i}^{t_f}dt\left[Q(\dot{q},q)\dot{\varepsilon}(t)\right.$

分部积分: $\delta S=Q\varepsilon\Big|_{t_i}^{t_f}-\int_{t_i}^{t_f}\dot{Q}\varepsilon=0\Rightarrow\dot{Q}=0$ ∴ Q 守恒.

更改到电磁场的语言中, $t\to x^{0,1,2,3}$. 故有 $\delta S=-\int d^4x\,\partial_\mu J^\mu\varepsilon=0$

∴ $\partial_\mu J^\mu=0$. 其中 $J^\mu(x)$ 是一个守恒流.

$\partial_\mu J^\mu$ 恰对应 $\nabla\cdot\rho+\dot{J}=0$

只要有(连续)对称, 就会有守恒流。而 Q 守恒对应守恒荷.

②针对①再作出补充：在①中考虑的其实是 ε 不依赖 x 的情况，这意味着对称性是全局的。

如果我们的变换是局域的呢？则 $\delta S = -\int d^4x\, J^\mu \partial_\mu \varepsilon(x)$，不再处处相消。

这说明我们需要在原来的作用量上添加一些项，让它在 ε 变换后把 δS 消了。

↓

规范操作。

我们引入一个矢量场 A_μ，让它耦合上 J^μ，则 S 多出一项 $\int d^4x\, J^\mu A_\mu$

只要 $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)$ 被满足，就有多出 $\int d^4x\, \partial_\mu \varepsilon(x)$ 把 δS 抵消。

但这边 J^μ 也必须修改成满足 $\varepsilon(x)$ 下不变的形式。

所以最终我们要做的就是：考虑一个对称性，把 J^μ 修改成协变形式，再构造一个满足 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)$ 的矢量场就行。

（通过一些其它的手段我们知道电磁场的规范对称性对应 $U(1)$ 对称性。
冗余的自由度对应波函数相位的转动，故是 $U(1)$。）

一般 Lagrangian 为 $\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi^2)$，若是复标量场，则 $\mathcal{L} = -(\partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + V(\phi^2))$

对于 $\phi(x) \to e^{i\theta}\phi(x)$ 的 $U(1)$ 变换，考虑 $\theta = \varepsilon$ 小量。

则 $\delta\phi = i\varepsilon\phi$，$\delta\phi^\dagger = -i\varepsilon\phi^\dagger$，则 $\delta S = -\int d^4x \left[\partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu(\delta\phi) + \partial_\mu(\delta\phi^\dagger)\partial^\mu\phi\right]$

$\delta S = -\int d^4x \left[\partial^\mu\phi^\dagger \partial_\mu(i\varepsilon\phi) - i\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger \partial^\mu\phi\right] = -\int d^4x\, (\phi\partial^\mu\phi^\dagger - \phi^\dagger\partial^\mu\phi)\partial_\mu\varepsilon$

则可见守恒流 $J^\mu = \phi\partial^\mu\phi^\dagger - \phi^\dagger\partial^\mu\phi$，而此处依然不是协变的。

要在 $\begin{cases} \phi(x) \to e^{i\varepsilon(x)}\phi(x) \\ A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \varepsilon(x) \end{cases}$ 下协变，观察得出 $(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi \to e^{i\varepsilon(x)}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$

$(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^\dagger \to e^{i\varepsilon(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^\dagger$.

于是引入协变导数 D_μ 满足 $D_\mu\phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi$，$\overline{D_\mu\phi} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\bar\phi$

那么 $J^\mu_A = ie(\overline{D^\mu\phi}\,\phi - \bar\phi D^\mu\phi)$，参数 e 为 A_μ 与 ϕ 的耦合常数.

如何确定 J^μ_A？这里我们修改的是 d，不是 J，故 $J^\mu = C(\varphi, \bar\varphi)$ 依然成立.

规范

这样有什么用？可以说明 $U(1)$ 对称性直接给出了电磁场.

考虑复标量场 ϕ 的作用量 $S = -\int d^4x\,(\overline{D_\mu\phi}\,D^\mu\phi + V(\bar\phi\phi))$，对 A_μ 变分为 $\int d^4x\, J^\mu_A\,\delta A_\mu$

规范场的作用量 $S = -\int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ 相加做变分：$\delta S = \int d^4x(\underbrace{\partial_\mu F^{\mu\nu} + J^\nu_A}) \delta A_\nu$

而第一组直接对 $F_{\mu\nu}$ 做数学变换即可得。

② 以上注释概括一下：

对于局域的 $U(1)$ 规范变换，我们需要把 Lagrangian 从 $\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^+\partial^\mu\phi - V(\phi^+\phi)$

修改成：$\mathcal{L} = D_\mu\phi^+ D^\mu\phi - V(\phi^+\phi)$，这样 J^μ 就成为了协变形式，整个的方程

就在 local 程度上也满足 $U(1)$ 的对称性了.

"$U(1)$ 局域规范性引入了规范场，而 $U(1)$ 全局规范性对应于电荷守恒"

对应②

对应①

§4.2. 能动张量.

(1). 能量密度与能流：已知 $\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \vec{v}\cdot\vec{p} = e\vec{E}\cdot\vec{v}$.

可以对 $\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ 与 $\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$ 两边分别乘以 $\vec{B}$、$\vec{E}$.

有：$\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}\cdot\vec{E} - [\vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})]$

而 $\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}\cdot(\nabla\times\vec{b})$

∴ $\partial_t\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right) = -\vec{j}\cdot\vec{E} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})$. 记 $\vec{S} = \frac{\vec{E}\times\vec{H}}{4\pi/c}$ 为坡印亭矢量.

积分：$\partial_t\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV = -\underbrace{\int\vec{j}\cdot\vec{E}\,dV}_{e\vec{v}\cdot\vec{E} = \frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt}} - \underbrace{\oint\vec{S}\cdot d\vec{f}}_{\text{积分遍及整个空间时,此项应为0.}}$

$\Rightarrow \partial_t\left(\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}dV + \sum\mathcal{E}_{kin}\right) = 0$ 则可知 $W = \frac{E^2+H^2}{8\pi}$ 为能量密度.

若不对整个空间积分,而是对有限的体积积分,则多出右边一项为 $-\oint\vec{S}\cdot d\vec{f}$.

故 $\vec{S}$ 为流出体积的能量. 这是显然的.

(2). 能动张量的一般形式 (记广义坐标为 q, 对于电磁场而言 q 就是四维势分量 A^k)

拉氏方程：$\partial_i\frac{\partial L}{\partial(\partial_i q)} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$. 而 $\frac{\partial L}{\partial x^i} = \partial_i L = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial(\partial_k q)}\cdot\frac{\partial(\partial_k q)}{\partial x^i}$

$$\therefore \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial q/\partial x^k)}\right)\frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial L}{\partial(\partial q/\partial x^k)}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial q}{\partial x^i}\right)}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\partial_i q\,\frac{\partial L}{\partial(\partial q/\partial x^k)}\right)$$

$$= \delta_i^k\frac{\partial L}{\partial x^k}$$

引入 $\Rightarrow$ $T_i^k = \frac{\partial q}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial L}{\partial(\partial q/\partial x^k)} - \delta_i^k L = q_{,i}\frac{\partial L}{\partial q_{,k}} - \delta_i^k L$

(其中 $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x^i}$)

则上面关系式可以写成 $\underline{\partial T_i^k / \partial x^k = 0}$. 当 q 有多个时. $T_i^k = \sum_l q_{,i}^{(l)} \frac{\partial L}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k L$

$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0 \Leftrightarrow$ T_i^k 在一个超曲面上的积分 $\int T_i^k dS_k$ 是守恒的.

定义 $P_i = \text{const.} \int T_i^k dS_k$. 或 $P^i = \text{const.} \int T^{ik} dS_k$.

确定const的方法: 在 $x^0 = \text{const}$ 上进行积分. 则 $P^0 = \text{const.} \int T^{00} dV$.

而 $T^{00} = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = \dot{q} \cdot p - L = H$ $\therefore \int T^{00} dV = E_\Sigma$.

$\therefore$ $P^i = \frac{1}{c} \int \underbrace{T^{ik}}_{\text{能量动量张量}} dS_k$ [Gauss单位制].

首先. 能动张量的定义上并不保证其唯一性: $\underline{T^{ik} + \frac{\partial}{\partial x^l} \psi^{ikl},\ \psi^{ikl} = -\psi^{ilk}}$ 均满足.

但是考虑到 $\int \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} dS_k = \frac{1}{2}\int \left(dS_k \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l \cdot \frac{\partial \psi^{ikl}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \oint \psi^{ikl} df_{kl}^*$.

[这是利用了反对称张量的积分 $\oint A^{ik} df_{ik}^* = 2\int dS_i \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^k}$ 的公式. df_{ik}^* 是积分元].

右边在无穷远处做环路积分必定为0. 故此变动不影响四维动量.

如何唯一确定能动张量? 利用角动量守恒。$M^{ik} = \sum (x^i p^k - x^k p^i)$

写成积分形式: $M^{ik} = \int (x^i dP^k - x^k dP^i) = \frac{1}{c} \int (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) dS_l$.

M^{ik} 守恒 $\Leftrightarrow$ $\nabla \cdot (x^i T^{kl} - x^k T^{il}) = 0$

$\Rightarrow$ $T^{ki} = T^{ik}$. 能动张量必对称!

如此便可唯一确定 T^{ik}.

再说一些 T^{ik} 的性质：守恒方程有 $\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}=0$，拆成 0 与 1、2、3 两部分。

已知 T^{00} 是能量密度，对 1、2、3，可以有：$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial t}+\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}=0$

对 0 可以有：$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial T^{00}}{\partial t}+\frac{\partial T^{0\beta}}{\partial x^\beta}=0$.

(1) 第一个~~方程~~方程在某 V 上积分：$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}dV+\int\frac{\partial T^{0\alpha}}{\partial x^\alpha}dV=0$

其中第二个式子用高斯定理变换 $\underbrace{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}dV}_{\text{能量改变率}} = -\int\frac{\partial T}{\partial x^\alpha}dV = -\oint \underbrace{T^{0\alpha}}_{\text{能流密度}} df_\alpha$

∴ 能流密度 = 动量密度 × c^2.

(2) 第二个方程同理：$\underbrace{\partial_t\int\frac{1}{c}T^{\alpha 0}dV}_{\text{动量改变率}} = -\oint T^{\alpha\beta}df_\beta$

$T^{\alpha\beta}$ 动量流，记为 $-\sigma^{\alpha\beta}$，称作应力张量。

综上：
$$T^{ik}=\begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y/c & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z/c & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

T^{00} $T^{0\alpha}$ $T^{\alpha\beta}$

(3) 电磁场的能动张量（无源）

之前我们知道，拉氏量密度 $\mathcal{L}=-\frac{1}{16\pi}F_{kl}F^{kl}$，且 q 替换成 A_k.

于是 $T_i^{\ k}=\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^k}\right)}-\delta_i^k\mathcal{L}$，而 $\delta\mathcal{L}=-\frac{1}{4\pi}F^{kl}\delta\frac{\partial A_l}{\partial x^k}$.

$$\therefore\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial A_l/\partial x^k)}=-\frac{1}{4\pi}F^{kl}$$

$\therefore\ T_i^{\ k}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A_l}{\partial x^i}\cdot F^{kl}+\frac{1}{16\pi}\cdot\delta_i^k F_{lm}F^{lm}$，或 $T^{ik}=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial A^l}{\partial x_i}F^k{}_l+\frac{1}{16\pi}g^{ik}F_{lm}F^{lm}$

显然这个张量不满足 $T^{ik}=T^{ki}$，要把第一项对称化，可加一项 $\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial A^i}{\partial x_l}F^k{}_l$.

因为无电荷时 $j^i=0$，故 $\partial F^{kl}/\partial x_l=0$ 则 $\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial A^i}{\partial x_l}F^k{}_l=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_l}(A^iF^k{}_l)$ 可见加一个散度项

最终得到电磁场的能动张量：

$$\boxed{T^{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(-F^{il}F^k{}_l+\frac{1}{4}g^{ik}F_{lm}F^{lm}\right)}$$

特别地，把0分量扔了，只看1,2,3，可知电磁场应力张量 $\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}\left[E_\alpha E_\beta+B_\alpha B_\beta-\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(E^2+B^2)\right]$

考虑如何选取一个参考系，使得 T^{ik} 对角化？~~即 $\sigma_{\alpha\beta}$ —— $\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$~~.

~~当 $\alpha\neq\beta$ 时 $\sigma_{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi}(E_\alpha E_\beta+B_\alpha B_\beta)$~~

只要 $\vec{E}\parallel\vec{B}$，则取 x 轴沿 $\vec{E}\parallel\vec{B}$ 的方向，就有 $E_y=E_z=B_y=B_z=0$，易知只有对角元。

或（$\vec{E}=0$ 或 $\vec{B}=0$）也可以做到这一点。

当 $\vec{E}\perp\vec{B}$ 且 $|\vec{E}|=|\vec{B}|$，可知仅有 $T^{00}=T^{33}=T^{30}=W$（取 $\vec{E}$ 为 x，$\vec{B}$ 为 y），它不可能对角化。

(4) 电磁场的能动张量（含源）.

在有带电粒子的情况下，整个系统的能量动量张量 = 电磁场 + 粒子.

对于粒子的能动张量，可以写质量密度为 $\mu=\sum_a m_a\delta(\vec{r}-\vec{r}_a)$，动量密度即：$T^{0\alpha}=\mu c^2u^\alpha$.

∴ 结合 μ 是 $(\mu/c,\ \frac{\mu\vec{v}}{c})$ 的0分量［相当于四维质量流矢量］

可知：$T^{ik}=\mu c\cdot\frac{dx^i}{ds}\cdot\frac{dx^k}{dt}=\mu c u^i u^k\, ds/dt$

接下来验证系统总的能动量是守恒的。即：$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(T_{(field)}{}_i^k+T_{(particle)}{}_i^k\right)=0$

先算 field：$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i}-F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k}-F_{il}\frac{\partial F^{kl}}{\partial x^k}\right)$

利用 $\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^i}=\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l}-\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}$，$\partial_k F^{kl}=\frac{4\pi}{c}j^l$ 可以求出：

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=\frac{1}{4\pi}\Big(\underbrace{-\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{mi}}{\partial x^l}-\frac{1}{2}F^{lm}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^m}-F^{kl}\frac{\partial F_{il}}{\partial x^k}}_{\text{交换指标全消掉}}-\frac{4\pi}{c}F_{il}j^l\Big)\Rightarrow\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k}=-\frac{1}{c}F_{il}j^l$$

再算 particle. $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = c u_i \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu \frac{dx^k}{dt}\right) + \mu c \frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x^k}$.

由于非相互作用粒子质量守恒，则 $\mu \frac{dx^k}{dt}$ 是质流矢量. 其散度 $\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\mu\frac{dx^k}{dt}\right)=0$

于是 $\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = \mu c\cdot\frac{dx^k}{dt}\cdot\frac{\partial u_i}{\partial x^k} = \mu c\cdot\frac{du_i}{dt}$. 而 $\boxed{mc\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k}$.

利用 $\mu/m = \rho/e \Rightarrow \mu c\frac{du_i}{ds} = \frac{\rho}{c}F_{ik}u^k$ 或 $\mu c\frac{du_i}{dt} = \frac{1}{c}F_{ik}\rho u^k\frac{ds}{dt} = \frac{1}{c}F_{ik}j^k$.

于是. $\frac{\partial T_{(field)}{}_i^k}{\partial x^k} = -\frac{1}{c}F_{ik}j^k$. $\frac{\partial T_{(particle)}{}_i^k}{\partial x^k} = \frac{1}{c}F_{ik}j^k$. 相加即证毕.

(5) 宏观物体的能动张量. 注意：固有体积

① 先考虑如下的一个参考系：物体的一个指定体元在其中~~面元上的力~~是静止的。

那么 $\sigma_{\alpha\beta}\, df_\beta = -p\, df_\alpha$. $\sigma_{\alpha\beta} = -p\,\delta_{\alpha\beta}$ (这对应帕斯卡定律).

动量密度 $T^{0\alpha}$ 显然为零，而分量 T^{00} 依然是能量密度. 记为 ε. ($\varepsilon/c^2=\mu$).

于是有 $T^{ik} = \begin{pmatrix}\varepsilon & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p\end{pmatrix}$ (静系)

② 变到动系：考虑四速度 u^i. 在静系 $u^i=(1,0)$. 动系中有 $\boxed{T^{ik} = (p+\varepsilon)u^iu^k - pg^{ik}}$

分量：$W = \frac{\varepsilon + p\beta^2}{1-\beta^2}$. $\vec{S} = \frac{(p+\varepsilon)\vec{v}}{1-\beta^2}$. $\sigma_{\alpha\beta} = -\frac{(p+\varepsilon)v_\alpha v_\beta}{c^2(1-\beta^2)} - p\,\delta_{\alpha\beta}$. $[\beta = v/c]$

若 $v\ll c$. 则 $\vec{S} \approx (p+\varepsilon)\vec{v}$. 可见 $(p+\varepsilon)/c^2$ 为质量密度.

③ 假如我们的对象是低速的，那么 T^{ik} 可以简化. ε 中只保留静能. $\varepsilon = \mu_0 c^2$

那么 $T^{ik} = \mu_0 c^2 u^i u^k$ (因为 p 也很小)

④ 又由 T^{ik} 知 $T_i^i = \varepsilon - 3p$ ∴ 一个宏观物体压强 $p < \frac{\varepsilon}{3}$.

而 $T_i^i = \sum_a m_a c^2\sqrt{1-\beta^2}\,\delta(\vec{r} - \vec{r}_a) = \varepsilon - 3p \Rightarrow \varepsilon - 3p = \sum m_a c^2\sqrt{1-v_a^2/c^2}$

极端相对论($v\sim c$)下. 右边为零，$\varepsilon=3p$ 或 $p = \frac{\varepsilon}{3}$. 此即光压.

考虑理想气体：$T^{ik} = nmc\left\langle \frac{dx^i}{dt} \cdot \frac{dx^k}{ds} \right\rangle \Rightarrow \varepsilon = nm \cdot \langle \gamma c^2 \rangle$，$p = \frac{nm}{3} \langle \gamma v^2 \rangle$

$\therefore \quad p = nm\overline{v^2}/3$.

(6) 一些附注：理当注意到，能动张量的存在与电磁场张量的存在一样，受诺特定理保证。可以从诺特定理出发，运用类似的操作，取时空平移变换，由其对称性推出必定有一个守恒的张量 T^{ik}，它就是能动张量。