



原子物理学
聂嘉会

目录

1 绪论	2
2 Rutherford 散射	3
2.1 Thompson 模型	3
2.2 Rutherford 模型	4
3 Bohr 模型	6
3.1 Rydberg-Bohr-Sommerfeld	6
3.2 Frank-Hertz 实验	8
3.3 光谱分析	8
4 附录	9
4.1 一些常见的数值	9

摘要

此笔记是我本学期 (2021 秋季) 的原子物理学笔记. 主讲老师为中国科学院高能物理研究所的李海波研究员, 参考教材为杨福家的《原子物理学》.

1 绪论

原子物理学是一门研究物质基本结构和相互作用的导论课程. 作为一门处于经典力学和量子力学交界处的普通物理学科, 原子物理学应当以旧量子论的历史沿革为线, 以实验为主并以构造唯象理论为目标讲清楚如何从经典物理学过渡到量子力学, 同时给予学习者一个关于物质微观结构和相互作用的粗略图像. 原子物理学既可以按照高能物理的风格衔接核物理和粒子物理, 也可以按照凝聚态物理的风格衔接冷原子和固体物理, 是一门非常有必要且可以灵活处理的实验唯象学科.

在原子物理学中, 尺度扮演着异常重要的角色. 对于物质的组成, 我们有这样的尺度规律:

$$\text{原子 } (10^{-10} \text{ m} = 1 \text{ \AA}) \sim \text{核子 } (10^{-14} \text{ m} = 10^{-4} \text{ \AA}) \sim \text{电子、夸克 } (10^{-18} \text{ m} = 10^{-8} \text{ \AA}).$$

而对于物质之间的相互作用, 我们有这样的尺度规律:

	强相互作用	弱相互作用	电磁相互作用	引力相互作用
源	色荷	弱超荷	电荷	质量
耦合常数	$\alpha_s \approx 1 \sim 10$	$\alpha_w \approx 1 \times 10^{-15}$	$\alpha \approx \frac{1}{137}$	$m \approx 5 \times 10^{-40}$
传递子	胶子	中间玻色子	光子	引力子?
作用时间	10^{-23} s	10^{-10} s	10^{-16} s	?
力程	1 fm	$\frac{1}{400} \text{ fm}$	∞	∞

表 1: 相互作用规律

正因为原子物理学是后续高能物理和凝聚态物理的一个预备课程, 它并不会受限于后二者分别给各自规定的尺度范围. 换言之, 原子物理学研究的内容可以粗略地囊括整个物理学研究的尺度和能标. 它既可以以核物理的形式研究各种高能粒子在 GeV 能标下的散射行为, 也可以以固体物理的形式研究各种低能粒子在 E_F 能标下的凝聚行为.

当然, 原子物理学还肩负着如何从经典物理学到初等量子力学过渡的任务. 因为无论是高能还是低能, 对微观粒子之间的相互作用和及其组合物质结构的研究必须要运用量子力学的技术来研究, 经典物理在这里无所适从.

2 Rutherford 散射

Rutherford 散射给出了如何运用宏观经典的实验手段来探测实验样品的物质结构,同时也适用于对高能粒子的研究. 这一研究范式就是散射 (scattering). 在低能情况下, 通过向样品发射一束较高能粒子, 样品对其的散射就给予了我们样品内部的结构信息, 同时也附着着组成样品的基本粒子的相互作用信息. 这一信息既可以通过在不同方向进行粒子统计观测到, 也可以通过衍射图案观测到. 而在高能情况下, 靶粒子和入射粒子进行高能对撞, 通过观测对撞后粒子在云室或加速器内的轨迹, 我们可以得到靶粒子的信息. 因此, Rutherford 散射作为开辟原子物理规范研究的实验, 将在第一章中率先出线, 继而引入对原子结构的初步模型——核式模型.

基本原子论一直是物理学还原论哲学对微观世界构造模型的核心. Einstein 的 Brown 运动模型及后续 Jean Perrin 通过显微镜的实验观测证实了原子的存在, 而 Thompson 的阴极射线实验则证实了原子中电子的存在. 基于之前的实验基础, Thompson 首先提出了原子的 Thompson 模型. 但该模型很快就被证实是错误的. 1903 年 Lenard 通过铝窗实验证明 “原子内部是很空虚的, 刚性物质大约只占全空间的 10^{-9} ”. 后来 Rutherford 成功进行了第一个人工核反应, 发现了原子内部的质子. Rutherford 继续做了著名的 Rutherford 散射实验, 由此建立了 Rutherford 模型.

2.1 Thompson 模型

Thompson 通过阴极射线发现电子后, 立即建立了关于原子的 Thompson 模型. 该模型认为原子是一个 “表面上均匀镶嵌着电子的均匀带正电球体” .

通过简单的计算, 就可以证实 Thompson 模型存在很严重的问题. 根据 Thompson 模型, 正电荷均与地分布在原子中, 而电子则以点粒子的形式 “播撒” 在正电背景上. 首先可以证明, 电子对粒子的散射几乎可以忽略不计. 以最坏的情况考虑, 假设一个 α 粒子和电子发生弹性正碰, 我们来估算 α 粒子被散射的角度.

根据弹性正碰, 我们有

$$\begin{cases} m_{\alpha}v_0 = m_{\alpha}v_{\alpha} + m_e v_e, \\ \frac{1}{2}m_{\alpha}v_0^2 = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_e v_e^2. \end{cases} \quad (1)$$

解得 $v_e = \frac{2m_{\alpha}v_0}{m_{\alpha}+m_e} \approx 2v_0$, 从而

$$\Delta p_{\alpha} = m_{\alpha}(v_{\alpha} - v_0) = m_e v_e \approx 2m_e v_0, \quad (2)$$

得到偏转角度的正切值约为

$$\tan \theta = \frac{\Delta p_{\alpha}}{p_{\alpha}} = \frac{2m_e v_0}{m_{\alpha} v_0} \approx \frac{1}{4000} \sim 10^{-4}. \quad (3)$$

其次来计算正电荷对 α 粒子的散射. 在 Thompson 模型中, 由于正电荷均匀地分布在球形原子中, 根据电磁学的知识我们立马直到整个原子所产生电场的分布是

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{R^3}, & 0 < r \leq R \\ \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}, & R < r \end{cases}. \quad (4)$$

从而在 $r = R$ 处, α 粒子受到最大的排斥力 $F_m = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. 为了求得最大偏转角, 就考虑掠入射情形, 我们有动量定理

$$F_m \Delta t = \Delta p_\alpha. \quad (5)$$

其中我们取 $\Delta t = \frac{2R}{v_0}$ 为 α 粒子飞越原子直径的时间. 得到偏转角正切值

$$\tan \theta = \frac{\Delta p_\alpha}{p_\alpha} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2R}{v_0} \frac{1}{m_\alpha v_0} \approx 3 \times 10^{-5} \frac{Z}{E_\alpha}. \quad (6)$$

若以 5 MeV 能量的 α 粒子轰击金箔, 就算算上电子最强的散射, 我们也依旧有 $\theta_M < 0.09^\circ$, 这显然与 Rutherford 散射实验的观测结果不一致. 大角度散射不可能在 Thompson 模型中发生.

2.2 Rutherford 模型

Rutherford 模型假设, 原子核局域在原子中心很小的范围内, 电子则围绕着原子核外部空间做中向心运动. Rutherford 还有三个近似假设: 1. 忽略核外电子对 α 粒子的吸引; 2. 只考虑一次散射; 3. 靶原子核近似静止, 也即实验室参考系近似为质心参考系.

在散射过程中, α 粒子始终受保守 Coulomb 排斥力 $\mathbf{F} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$. 由于整个散射是一个保守过程, 故 α 粒子能量守恒:

$$\frac{1}{2} M |v_i|^2 = \frac{1}{2} M |v_f|^2 = \frac{1}{2} M v_0^2. \quad (7)$$

同时还有角动量守恒:

$$M v_0 b = -M r^2 \frac{d\varphi}{dt}. \quad (8)$$

我们考虑 z 方向速度的变化, 有 Newton 方程

$$M \frac{dv_z}{dt} = F \sin \varphi = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \varphi. \quad (9)$$

联立得到

$$-dv_z = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 M v_0 b} \sin \varphi d\varphi. \quad (10)$$

设最终散射角为 θ , 积分:

$$-\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_z = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 M v_0 b} \int_\pi^\theta \sin \varphi d\varphi. \quad (11)$$

最终得到 Rutherford Coulomb 散射公式:

$$\cot \frac{\theta}{2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{E_\alpha b}{Ze^2}. \quad (12)$$

对于一般的 Rutherford 散射, 我们有

$$b = \frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2}, \quad (13)$$

其中 $a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 E}$ 为 Coulomb 散射因子.

但是, 散射参数 b 在实验室中一般无法被精确控制, 也并不是一个好的可观测量. 通过改造 Rutherford 散射公式, 可以得到空间立体角与散射截面之间的关系.

$$d\sigma = |2\pi b db| = \frac{\pi a^2}{4} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\theta. \quad (14)$$

又空间立体角被写为

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta = 4\pi \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2} d\theta, \quad (15)$$

从而得到

$$d\sigma = \frac{a^2}{16} \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}}. \quad (16)$$

它反映了入射粒子被散射到 θ 角方向 $d\Omega$ 立体角之内的概率. 假设靶材料原子核密度为 n , 靶厚为 t , 入射粒子共 N 个, 则易知在该立体角内可以测到

$$dN(\theta) = Nntd\sigma \quad (17)$$

个散射粒子. 而这就是一个好的可观测量.

定义微分散射截面

$$\sigma_c(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a^2}{16 \sin^4\frac{\theta}{2}}. \quad (18)$$

它的物理含义是: 入射粒子被散射到 θ 角方向单位立体角内每个靶原子的有效面积. 通常取微分散射截面的单位为 $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$. 事实上, 微分散射截面是相互作用系统真正的、唯一的可观测量.

Rutherford 公式后被 Geiger 和 Marsden 的实验所验证. Rutherford 公式给出以下信息:

- $dN \sin^4\frac{\theta}{2} = \text{const.}$
- $dNE^2 = \text{const.}$
- $dN \propto t.$
- $dN \propto Z^2.$

同时, 对 Rutherford 散射实验还有如下分析:

- 运用 Geiger 计数器计数.
- 通过薄云母片来改变入射粒子的速度.
- 散射角度越大结果越精确, 这是因为小角度散射会出现多次散射和电子屏蔽. 由于小角度散射需要较大的瞄准距离, 电子屏蔽效应就开始重要, 这时需要用有效电荷量取代原公式中的 Z .
- 接近 180° 度散射时又会出现增强现象.
- 入射粒子能量过高 (α 粒子能量 $> 27.5 \text{ MeV}$), 高能粒子会进入原子核的强相互作用力程范围内, 对散射产生偏差.
- 利用 Rutherford 散射公式可以通过对心散射估算原子核半径: $r_m = \frac{a}{2}(1 + \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}).$

3 Bohr 模型

3.1 Rydberg-Bohr-Sommerfeld

Rutherford 模型有几个致命的问题: 1. 原子的稳定性问题. 在 Rutherford 原子的核式结构中, 电子始终绕着原子核做向心运动, 这势必会不断向外辐射电磁波而损失能量, 于是电子的运动半径将不断缩小, 最终坠毁在原子核上. 但在我们的自然界中原子却能够稳定的存在; 2. 原子的全同性问题. 任何原子都是全同的, 而这是 Rutherford 模型无法解释的; 3. 原子的再生性问题. 原子和其他粒子相互作用后, 原子可以恢复到原来的状态, 这也是 Rutherford 模型无法解释的.

关于原子内部结构的实验信息其实不止 Thompson 一支. 早年对氢原子的光谱分析已经给出了原子内部结构的一些信息, 而这些信息大多不能被经典物理所解释. 其中最主要的就是由 Balmer 给出的氢原子光谱 Balmer 系公式:

$$\lambda = B \frac{n^2}{n^2 - 2^2}. \quad (19)$$

其中 $B = 346.56 \text{ nm}$. 后来又有了 Rydberg 公式:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad m < n \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

其中 R 为 Rydberg 常数. 也就是说, 光谱分析给出, 氢原子光谱谱线成分立状, 其中一部分线系的谱线存在上面的公式. 关于氢原子光谱谱线系的总结如下:

线系	规律	波段
Layman	$R(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2})$	紫外
Balmer	$R(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2})$	可见光
Paschen 以后	$R(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}), m \leq 3$	红外

表 2: 氢原子光谱线系

Rutherford 模型的最大的困难就是原子稳定性问题, 而后者紧密地和线状光谱联系在一起. 如果按照 Rutherford 模型, 原子核外电子将近似做频率为 $f = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$ 的圆周运动, 从而不断向外释放同频的电磁波. 这将导致电子的运动半径不断减小, 从而使得 f 连续变大, 那么我们观测到的谱线应当是一个连续谱.

Bohr 考虑在经典的 Rutherford 模型基础上进行量子化修订. 首先, Rutherford 模型的原子拥有能量

$$E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (21)$$

核外电子以频率 $f = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}}$ 绕原子核做周期性圆周运动.

Borh 首先引入了定态假设, 核外电子总是稳定地处于一个确定轨道上, 并且满足跃迁规则:

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m. \quad (22)$$

这表示从第 n 条轨道向第 m 条轨道进行跃迁要发出频率为 ν_{nm} 的光子. 这样, 与 Rydberg 公式对比, 就有能量量子化

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2}, \quad (23)$$

和与之伴随的轨道量子化

$$r_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2Rhc} n^2. \quad (24)$$

Bohr 还引入了第二条假设：角动量量子化假设. 由此我们有

$$L = \sqrt{\frac{m_e e^2 r_n}{4\pi\epsilon_0}} = n\hbar, \quad (25)$$

解出

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} n^2. \quad (26)$$

与之前的公式对比, 可反解出 Rydberg 常数的表达式

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m_e}{(4\pi\epsilon_0)^2 c h^3} = \frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{hc} = \frac{E_\infty}{hc}. \quad (27)$$

以及能级公式

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{n^2}, \quad (28)$$

这里 $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} \approx \frac{1}{137}$ 为精细结构常数. 我们还得到 Bohr 速度

$$v_n = \frac{\alpha c}{n}. \quad (29)$$

Bohr 第一速度就是光速的 $\frac{1}{137}$.

下面考虑对 Bohr 模型的一些修正.

首先是二体修正. 我们将公式中出现的所有 m_e 修正为二体折合质量 $m_\mu = \frac{m_A m_e}{m_A + m_e}$, 而这相当于对原来的 m_e 乘以了系数 $\frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_A}}$. 一些比较明显地改变是

$$R_A = R \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_A}}; \quad (30)$$

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \frac{m_e}{m_A}}; \quad (31)$$

$$r_n = \frac{\hbar}{\alpha m_e c} n^2 \frac{m_e + m_A}{m_A}. \quad (32)$$

其次是类氢修正. 对于类氢离子, 我们做一阶修正, 只需将公式中出现的所有 e^2 乘以 Z . 也就是说, 所有出现 α 的都要变成 $Z\alpha$, 那么显然有类氢离子的光谱波数公式

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)_A = R_A \left[\frac{1}{(m/Z)^2} - \frac{1}{(n/Z)^2} \right]. \quad (33)$$

第三, 椭圆修正. Sommerfeld 引入椭圆修正, 主要为了解释氢原子轨道的精细结构. 事实上, 他推广了 Bohr 的角动量量子化假设, 认为对一个一般的量子系统, 对其正则广义动量和广义坐标都有

$$\oint p dq = nh, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (34)$$

他对每一条量子数为 n 的能级引入了 n 个角量子数 $l = 0, 1, \dots, n-1$. 如果将轨道椭圆化, 实际上我们有对应 $n_\phi = l + 1$, $n = n_r + n_\phi$ 且 $\frac{n_\phi}{n} = \frac{b}{a}$. 角量子数越小, 椭圆越扁; 角量子数为 $n-1$ 的轨道, 就是原先 Bohr 模型中的圆形轨道.

最后, 相对论修正. 对于第 n 条轨道, 电子以第 n Bohr 速度 $v_n = \frac{\alpha c}{n}$ 绕核运动, 我们有修正后的 Coulomb 势:

$$U = -\frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}}(\alpha c)^2 \frac{1}{n^2}, \quad (35)$$

和动能项

$$E_k = \left(\frac{m_e}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_e \right) c^2, \quad (36)$$

其中 $\beta = \frac{\alpha}{n}$. 从而能级公式被修改为

$$E_n = m_e c^2 (\sqrt{1-\beta^2} - 1), \quad (37)$$

保留到 β^2 的二阶项, 就有

$$E_n \approx -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{1}{4} \beta^2 \right). \quad (38)$$

然而, 需要意识到: 当我们将椭圆修正和相对论修正放在一起考虑时, 并不是简单地将修正线性叠加, 因为对于不同角量子数 (角动量) 的椭圆轨道, 相对论效应会产生不同的进动频率, 总体上使得所有椭圆轨道不再闭合, 并且每一个轨道的情况不尽相同. 事实上, 相对论效应的椭圆轨道是非简并的. 我们有合并修正后的能级公式

$$E_n = -\frac{1}{2} m_e (\alpha c)^2 \frac{1}{n^2} \left[1 + \beta^2 \left(\frac{n}{n_\phi} - \frac{3}{4} \right) \right]. \quad (39)$$

但是, Sommerfeld 模型依旧没有修正完全, 这是因为当时还没有发现自旋自由度, 需要使用 Dirac 方程才可以真正的考虑清楚相对论效应对氢原子能级的影响, 那时谱线观测上的超精细结构才可以被完全解释.

3.2 Frank-Hertz 实验

3.3 光谱分析

选择定则: 只有角量子数相差 ± 1 的轨道之间可以发生跃迁.

碱金属原子光谱和氢原子光谱呈现不同的结构. 首先, 碱金属是一种类氢金属, 这是因为我们总可以将碱金属原子看成一个较大的内层原子实 + 一个外层价电子. 而不同处主要在于: 第一, 碱金属原子的基态不同, 这主要是原子实逐级增大 (或价电子轨道逐级升高), 例如 Li、Na、K 的基态分别是 2s、3s 和 4s; 第二, 能级公式不同, 一方面由于原子实核电荷数逐级升高, 每一能级的能量都在降低, 其次由于原子实不再是纯实的, 而外层主要是一个较空的电子云, 对于较小角量子数的轨道 (较扁的椭圆轨道), 它有可能进入原子实内部, 从而感受到一个大于 1 的等效电荷, 因此碱金属同一能级的简并会因此解除, 呈现出对于越低角量子数能量越低的结构, 这在光谱公式上一般体现为量子数亏损. 另外, 价电子还会造成原子实部分极化, 进一步降低体系能量, 对于角量子数越低的轨道, 其极化效应越强, 从而能量越低.

由于选择定则, 我们对碱金属原子谱线做出如下主要的线系划分:

线系	跃迁	频率	系限
主线系	np-ms	$\tilde{\nu} = \frac{R}{(m-\Delta s)^2} - \frac{R}{(n-\Delta p)^2}$	$\lambda_s^{-1} = T_{\Delta s} = \frac{R}{(m-\Delta s)^2}$
漫线系 (第一辅线系)	nd-mp	$\tilde{\nu} = \frac{R}{(m-\Delta p)^2} - \frac{R}{(n-\Delta d)^2}$	$\lambda_p^{-1} = T_{\Delta p} = \frac{R}{(m-\Delta p)^2}$
锐线系 (第二辅线系)	ns-mp	$\tilde{\nu} = \frac{R}{(m-\Delta p)^2} - \frac{R}{(n-\Delta s)^2}$	$\lambda_p^{-1} = T_{\Delta p} = \frac{R}{(m-\Delta p)^2}$
基线系 (Bergman 系)	nf-md	$\tilde{\nu} = \frac{R}{(m-\Delta d)^2} - \frac{R}{(n-\Delta f)^2}$	$\lambda_d^{-1} = T_{\Delta d} = \frac{R}{(m-\Delta d)^2}$

表 3: 碱金属光谱主要线系

4 附录

4.1 一些常见的数值

常数	数值
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$
$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$	1.44 fm KeV
hc	1240 nm eV
α	$\frac{1}{137}$
m_p	1u
m_e	0.511 MeV/c ²
m_e/m_p	$\frac{1}{1800}$
u	938 MeV

表 4: 常用数值

References