物理学院
中国科学院大学

[RAMO]

# 高等量子力学

聂嘉会

---

## 目录

**摘要**

本系列笔记 (如果可以构成一个系列的话) 是我本学期 (2021 秋季) 旁听高等量子力学课程的笔记. 这门课由国科大 K 所的老师主讲 (张富春, Mamoru Matsuo, 姜胜寒, 彭程), 参考教材为 Sakurai 的 Modern Quantum Mechanics.

# 1 形式理论与量子动力学

## 1.1 量子力学公理系统

一切从公理系统出发.

- (states)：物理状态由 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 上的一条射线表示. Hilbert 空间是 $\mathbb{C}$ 上的完备赋范线性空间, 其上生活着所有量子态. 量子态由 Dirac 符号表示, $|\psi\rangle \sim \alpha e^{i\theta}|\psi\rangle$, 并满足归一化条件：$\langle\psi|\psi\rangle = 1$.
- (observables)：可观测量构成 Hilbert 空间上的 $C^*-$ 代数, 由 Hermitian 算符表示. Hermitian 性表示为 $\hat{\mathrm{O}} = \hat{\mathrm{O}}^\dagger$. 对于任意一个 Hermitian 算符, 都有谱分解：$\hat{\mathrm{O}} = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|, \lambda_i \in \mathbb{R}$.
- (measurement)：可观测量的本征谱构成了 Hilbert 空间的一组完备基：$\hat{\mathrm{O}}|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i \langle i|\psi\rangle|i\rangle$. 每做一次测量, 以 $p(\lambda_i) = |\langle i|\psi\rangle|^2$ 的概率得到一个本征态 $|i\rangle$ 和本征值 $i$. 当系数被赋予概率意义后, 可观测量的期望值定义为：

  $$\textstyle\sum_i p(\lambda_i)\lambda_i = \sum_i \langle\psi|i\rangle\lambda_i\langle i|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_i \lambda_i|i\rangle\langle i|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{\mathrm{O}}|\psi\rangle.$$

- (dynamics)：Hilbert 空间上量子态的动力学由 Schrodinger 方程给出：

  $$i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle.$$

  其中, Hamiltonian 是 Hermitian 的：$H = \sum_i E_i|i\rangle\langle i|$; 并生成时间演化：

  $$\begin{aligned} H|\psi(t)\rangle = \sum_i a_i(t)E_i|i\rangle;\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \sum_i i\hbar\frac{\partial a_i(t)}{\partial t}|i\rangle \\ \longrightarrow \langle j|H|\psi(t)\rangle = a_j(t)E_j;\ \langle j|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial a_j(t)}{\partial t} \\ \longrightarrow E_j a_j(t) = i\hbar\frac{\partial a_j(t)}{\partial t};\ a_j(t) = \exp(\frac{E_j t}{i\hbar})a_j(0). \end{aligned}$$

- (combination)：多体系统的 Hilbert 空间是单粒子 Hilbert 空间的张量积 $\mathbb{H}^N = \bigotimes_{i=0}^N \mathbb{H}_i$. 全体多体系统状态空间在张量积意义下构成一个张量代数 $\mathcal{F} = \bigoplus_{N=0}^\infty \mathbb{H}^N$.

### 1.2 两格点系统

考察一个最典型的量子系统：两格点系统. 这个系统通常用来表示二能级系统或自旋-1/2 系统. 系统的状态空间是 $\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathrm{Span}\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, 而算符代数是 $\mathbb{C}^4$ 的, 由以下四个基生成：

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

它们的代数性质如下：

- $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$;
- $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij},\ i, j \in \{x, y, z\}$;
- $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k,\ i, j, k \in \{x, y, z\}$;
- 任何一个 $\mathbb{C}^4$ 的可观测量算符可表示为

$$\hat{\mathcal{A}} = a_0\sigma_0 + \sum_k a_k\sigma_k = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

对于它们的物理解释也是重要的：除了平凡的 $\sigma_0$,$\sigma_x$ 表示两点跳跃, $\sigma_z$ 表示单点相位转换, 而 $\sigma_y$ 则是两点跳跃 + 相位转换. 对于三个非平凡的 Pauli 矩阵, 各自的本征值均为 $\pm 1$ , 各自的本征态分别是：

$$\begin{aligned} \mathrm{spec}\ \sigma_x &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \{|\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle\}; \\ \mathrm{spec}\ \sigma_y &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} = \{|\odot\rangle, |\otimes\rangle\}; \\ \mathrm{spec}\ \sigma_z &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}. \end{aligned} \tag{3}$$

这样一个两格点系统在实验上最经典的实现方法就是 Stern-Gerlach 实验. 该实验将加热的近理想银蒸汽通过一个具有 $z$ 方向梯度的磁场, 并在屏上观测银原子的分布. 首先, 我们可以发现电子带有一个确定的自旋, 从而产生一个经典的磁矩, 因此在非均匀磁场中受到磁场力而向上或向下偏转; 其次, 对于一个经典体系, 磁矩方向应当是随机的, 我们预测观测结果将是一条疏密均匀的线段, 但实际观测结果却是: 银原子集中在上下两个点上. 这就是一个典型的量子两格点系统. 这个实验还可以进一步改进, 请参考 Sakurai.pp 5.Fig 1.3. 简单地说, 当 $|S_z; +\rangle$ 通过 SG$\hat{\mathbf{x}}$ (或者反之) 后, 我们都有 $|\langle\leftarrow|\uparrow\rangle|^2 = |\langle\rightarrow|\uparrow\rangle|^2 = \frac{1}{2}$, 因此在实验上还会观测到一个两点分布.

下面考虑两格点系统的动力学. 我们将在两种绘景下计算. 首先是最熟悉的 Schrodinger 绘景, 也即量子态动力学绘景. 磁场耦合的 Hamiltonian 为

$$\mathcal{H} = -\vec{\mu}\vec{B} = -\frac{eB}{m_e c} S_z = -\omega S_z. \tag{4}$$

对应 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 两个本征态. 假设初态是 $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$, 代入 Schrodinger 方程

$$-\omega S_z |\rightarrow\rangle = i\hbar\tfrac{\partial}{\partial t}|\rightarrow\rangle,$$

解得 $|\rightarrow(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\omega t}{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{-i\omega t}{2}}|\downarrow\rangle$. 继而求出三个方向的自旋期望：

$$\begin{aligned}\langle S_z\rangle &= 0,\\ \langle S_x\rangle &= \frac{\hbar}{2}\cos\omega t,\\ \langle S_y\rangle &= -\frac{\hbar}{2}\sin\omega t.\end{aligned}$$

这在经典上的观测结果就是自旋进动.

下面引入 Heisenberg 绘景. 对于 S(Schrodinger) 绘景, 量子态随时演化, 而算符处于静态：$|\psi(t)\rangle_S, \hat{\mathcal{O}}_S(t) = \hat{\mathcal{O}}_S(0)$; 而对于 H(Heisenberg) 绘景, 量子态处于静态, 算符随时演化：$|\psi(t)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_H, \hat{\mathcal{O}}_H(t)$. 对于一个含时 Hamilton 系统, 引入一般的时间演化算符：

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = \mathcal{H}|\psi(t)\rangle \longrightarrow |\psi(t+\delta t)\rangle = (\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(t))\delta t\,|\psi(t)\rangle, \tag{5}$$

指数映射到任意态：

$$|\psi(t)\rangle = \lim_{N\to\infty}(\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\frac{t}{N}\mathcal{H}(t))^N|\psi(0)\rangle \equiv \mathcal{T}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\mathcal{H}(t')\right]|\psi(0)\rangle. \tag{6}$$

其中 $\mathcal{T}$ 为编时算符. 定义 $U(t,0) := \mathcal{T}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt'\mathcal{H}(t')\right]$ 为时间演化算符 (编时的), 它有以下几个性质：

- (unitary)：$U(t_f,t_i)U^\dagger(t_f,t_i) = \mathbb{I}$;
- (inversal)：$U^\dagger(t_f,t_i) = U(t_i,t_f)$;
- (transversal)：$U(t_3,t_2)U(t_2,t_1) = U(t_3,t_1)$.

在 Heisenberg 绘景下,

$${}_S\langle\psi(t)|\hat{\mathcal{O}}_S|\psi(t)\rangle_S = \langle\psi|U^\dagger(t,0)\hat{\mathcal{O}}U(t,0)|\psi\rangle = {}_H\langle\psi|\hat{\mathcal{O}}_H|\psi\rangle_H, \tag{7}$$

在展开取一阶项的过程中, 得到算符的含时演化方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\mathcal{O}}_H = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{O}}_H, \mathcal{H}]. \tag{8}$$

重新计算两格点系统，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_z}{\partial t} &= 0;\\ \frac{\partial S_x}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar}[S_x, -\omega S_z] = \frac{-\omega}{i\hbar}\frac{\hbar^2}{4}2(-i)\sigma_y(t) = \omega S_y;\\ \frac{\partial S_y}{\partial t} &= \frac{1}{i\hbar}[S_y, -\omega S_z] = \frac{-\omega}{i\hbar}\frac{\hbar^2}{4}2(i)\sigma_x(t) = -\omega S_x.\end{aligned} \tag{9}$$

联立可解得 $\begin{pmatrix}S_x\\S_y\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_x\\S_y\end{pmatrix}(0)$. 同样得到自旋进动.

### 1.3 N 格点系统

### 1.4 从 N 格点到连续空间

### 1.5 一维谐振子系统

### 1.6 电磁耦合系统

### 1.7 Landau 能级

## 2 路径积分与 Berry 相位

### 2.1 路径积分

首先简单描绘一下关于路径积分的粗浅图像. 对于一个量子系统, 其实验上的可观测量通常是

$$\langle\psi_f|U(t_f,t_N)\hat{\mathcal{O}}_N U(t_N,t_{N-1})\hat{\mathcal{O}}_{N-1}\cdots\hat{\mathcal{O}}_2 U(t_2,t_1)\hat{\mathcal{O}}_1 U(t_1,t_i)|\psi_i\rangle\,. \tag{10}$$

这个概率幅的意思是：系统从初态 $|\psi(t_i)\rangle$ 开始，演化至 $t_1$ 时刻，而后被 $\hat{\mathcal{O}}_1$ 刺激，再演化至 $t_2$ 时刻，被 $\hat{\mathcal{O}}_2$ 刺激，依此类推，直到演化至末态 $|\psi(t_f)\rangle$ 的概率幅。如何计算这一概率幅引出了路径积分的技术。我们先从最简单的情况开始：如何计算 $\langle x_f|U(t_f,t_i)|x_i\rangle$？最直接的方法是写出 $U(t_f,t_i)=\mathcal{T}\exp(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt\mathcal{H}(t))$，但很显然，对大部分 Hamiltonian 来说这一指数积分都是难以求解的。于是，将指数积分改成无穷小时间平移算符的编时累乘：

$$U(t_f,t_i)=\lim_{N\to\infty}[\mathbb{I}-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H}(t_f-\frac{T}{N})]\cdots[\mathbb{I}-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H}(t_i)]:=\lim_{N\to\infty}\prod_i U_i. \tag{11}$$

在每个 $U_i,U_{i-1}$ 之间各插入一个单位分解 $\sum_{j_{i-1}}|j_{i-1}\rangle\langle j_{i-1}|$，就将算符累乘表示为了矩阵累乘：

$$\langle j_N|\prod_i U_i|j_0\rangle=\sum_{j_1,\dots,j_{N-1}}\langle j_N|U_N|j_{N-1}\rangle\langle j_{N-1}|\cdots|j_1\rangle\langle j_1|U_1|j_0\rangle\,. \tag{12}$$

Feynman 的做法是：将每一组特定的 $\{j\}=\{j_1,\dots,j_N\}$ 视为一条**路径 (path)**，该概率幅就被改写成：

$$\langle j_N|\prod_i U_i|j_0\rangle=\sum_{\{j\}}\Big(\prod_i U_i\Big)_{j_N\cdots j_1}. \tag{13}$$

现在，采用连续的坐标表象，具体计算该概率幅：

$$\begin{aligned}
\langle x_f|U(t_f-t_i)|x_i\rangle &= \int_{\text{path}} dx_n\cdots dx_1\Big(\prod_i U_i\Big)_{\text{path}} \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} dx_n\cdots dx_1\,\langle x_f|U(\frac{T}{N})|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|\cdots|x_1\rangle\langle x_1|U(\frac{T}{N})|x_i\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]\,\langle x_f|(1-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H})|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|\cdots|x_1\rangle\langle x_1|(1-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H})|x_i\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]dp_{N-1}\cdots dp_1\,\langle x_f|p_{N-1}\rangle\langle p_{n-1}|(1-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H})|x_{N-1}\rangle\langle x_{N-1}|\cdots|x_1\rangle\langle x_1|p_1\rangle \\
&\quad\ \langle p_1|(1-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H})|x_i\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\prod_j\langle x_j|p_{j-1}\rangle\langle p_j|(\mathbb{I}-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}(\frac{\hat{p}_j^2}{2m}+V(\hat{x}_j)))|x_j\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\prod_j\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(ip_{j-1}x_j/\hbar)\Big]\Big[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(-ip_jx_j/\hbar-\frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H}(p_j,x_j))\Big] \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\exp\Big[\sum_j\frac{i}{\hbar}\Big(p_j(x_{j+1}-x_j)-\frac{T}{N}\mathcal{H}(p_j,x_j)\Big)\Big] \\
&= \int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}dt(p\dot{x}-(\frac{p^2}{2m}+V(x)))\Big] \\
&= \int_{\substack{x(t_i)=x_i\\x(t_f)=x_f}} \mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\{x\},\{p\})\Big].
\end{aligned} \tag{14}$$

现在来在准经典条件下进行鞍点近似. 在 $\hbar\to 0$ 的条件下, 对于相空间的若干条路径, 其中贡献最大的应当只有作用量鞍点处的那条路径. 理由是, 由于 $\frac{\mathcal{S}}{\hbar}$ 处于积分相位部分, 当 $\hbar\to 0$ 时, 任何偏离鞍点处的路径都会使得作用量产生一个有限大的改变 $\delta\mathcal{S}$, 从而剧烈地改变积分相位. 可以预想, 这些路径彼此的相位将会抵消, 最终只剩下符合鞍点条件的那条路径：

$$\forall t, \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta x(t)}=0, \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta p(t)}=0. \tag{15}$$

如果我们定义 $\frac{\delta}{\delta x(t)}:=\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{T/N}, \frac{\delta}{\delta p(t)}:=\frac{\partial}{\partial p_j}\frac{1}{T/N}$, 则以上连续形式的鞍点条件对应的离散形式为：

$$\forall j, \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial x_j}=0, \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial p_j}=0. \tag{16}$$

第一个鞍点条件给出：

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta x(t')}=\int dt[-\dot{p}(t)\delta(t-t')-\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}\delta(t-t')]=-\dot{p}(t')-\frac{\partial V(x(t'))}{\partial x}=0, \tag{17}$$

第二个鞍点条件给出：

$$\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta p(t')}=\int dt[\dot{x}(t)\delta(t-t')-\frac{p(t)}{2m}\delta(t-t')]=\dot{x}(t')-\frac{p(t')}{m}=0. \tag{18}$$

可见, 准经典近似下的鞍点条件给出了经典的 Newton 方程.

我们知道,Newton 方程在 Heisenberg 绘景下有与之对应的量子版本, 而从准经典近似下我们从路径积分导出了 Newton 方程. 一个自然的想法就是：在量子情形下, 如何从路径积分出发导出 Heisenberg 方程? 如果找到了这一关联, 就可以说明 Feynman 的路径积分是区别于正则量子化的另一套量子化手段.

考虑最一般的 Feynman 振幅：$\langle x_f|U(t_f,t_m)\hat{\mathcal{O}}_m\cdots\hat{\mathcal{O}}_1U(t_1,t_i)|x_i\rangle$. 通过在算符之间插入坐标和动量单位分解, 我们可以将非对易的算符换成对易的矩阵元, 并将振幅化成路径积分的形式, 从而得到

$$\langle x_f|U(t_f,t_m)\hat{\mathcal{O}}_m\cdots\hat{\mathcal{O}}_1U(t_1,t_i)|x_i\rangle=\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\{x\},\{p\})\right]\mathcal{O}_m(x(t_m),p(t_m))\cdots\mathcal{O}_1(x(t_1),p(t_1)).\tag{19}$$

考虑一般的编时算符 $\hat{\mathfrak{O}}(t')=U(t_i,t_1)\hat{\mathcal{O}}_1\cdots\hat{\mathcal{O}}_mU(t_m,t_f)$, 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\left\langle\hat{\mathfrak{O}}(t'),\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta x(t)}\right\rangle&=\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta x(t)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\{x\},\{p\})\right]\hat{\mathfrak{O}}(t')\\&=-i\hbar\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\frac{\delta}{\delta x(t)}\Big(\exp(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S})\Big)\hat{\mathfrak{O}}(t')\\&=i\hbar\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\exp(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S})\frac{\delta\hat{\mathfrak{O}}(t')}{\delta x(t)}\\&=i\hbar\left\langle\frac{\delta\hat{\mathfrak{O}}(t')}{\delta x(t)}\right\rangle,\end{aligned}\tag{20}$$

以及

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\left\langle\hat{\mathfrak{O}}(t'),\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta p(t)}\right\rangle&=\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta p(t)}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\{x\},\{p\})\right]\hat{\mathfrak{O}}(t')\\&=-i\hbar\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\frac{\delta}{\delta p(t)}\Big(\exp(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S})\Big)\hat{\mathfrak{O}}(t')\\&=i\hbar\int\mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p]\exp(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S})\frac{\delta\hat{\mathfrak{O}}(t')}{\delta p(t)}\\&=i\hbar\left\langle\frac{\delta\hat{\mathfrak{O}}(t')}{\delta p(t)}\right\rangle.\end{aligned}\tag{21}$$

方程组 $\begin{cases}\mathcal{T}\left\langle\hat{\mathfrak{O}}(t'),\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta x(t)}\right\rangle=i\hbar\left\langle\frac{\delta\hat{\mathfrak{O}}(t')}{\delta x(t)}\right\rangle\\\mathcal{T}\left\langle\hat{\mathfrak{O}}(t'),\frac{\delta\mathcal{S}}{\delta p(t)}\right\rangle=i\hbar\left\langle\frac{\delta\hat{\mathfrak{O}}(t')}{\delta p(t)}\right\rangle\end{cases}$ 就是 Shrodinger-Dyson 方程.

若令 $\hat{\mathfrak{O}}(t')=\mathbb{I}$, 则显然得到

$$\left\langle\dot{x}-\frac{p}{m}\right\rangle=0,\ \left\langle-\dot{p}-\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle=0.\tag{22}$$

由于这一期望对于任意时刻都成立, 则我们从中提升出算符方程：

$$\begin{cases}\frac{d\hat{x}}{dt}=\frac{\hat{p}}{m},\\\frac{d\hat{p}}{dt}=-\frac{\partial\hat{V}}{\partial x}.\end{cases}\tag{23}$$

这就是 Heisenberg 方程.

下面来看如何从路径积分得到正则量子化中的对易子 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar$. 事实上, 我们会看到这一坐标-动量的不对易关系在路径积分中的来源就是其积分的编时性. 在 Shrodinger-Dyson 方程中令编时算符为动量算符 $p(t')$, 则有

$$\left\langle p(t')[\dot{x}(t)-\frac{p(t)}{m}]\right\rangle=i\hbar\delta(t'-t).\tag{24}$$

为清晰起见, 我们取离散形式：$t = j\delta t, t' = j'\delta t$. 从而上式化为

$$\left\langle p_{j'}(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})\right\rangle = i\hbar\delta_{j'j}, \tag{25}$$

由于路径积分的编时性, 对期望作用编时算符给出

$$\mathcal{T}\left\langle p_{j'}(x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}})\right\rangle = \left\langle \hat{x}_{j+\frac{1}{2}}\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{x}_{j+\frac{1}{2}}\right\rangle = i\hbar. \tag{26}$$

这就对应着正则对易子 $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$.

而对于作用量 $\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} dt(p\dot{x} - (\frac{p^2}{2m} + V(x)))$, 鞍点条件同样给出了一个经典场论的要求. 将动量积掉, 我们有

$$\int \mathcal{D}[x]\mathcal{D}[p] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dt(p\dot{x} - \frac{p^2}{2m} - V(x))\right] = \int \mathcal{D}[x] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x))\right]. \tag{27}$$

在这里常数项已经被吸收到了 $\mathcal{D}[x]$ 中.

### 2.1.1 AB 效应与磁单极子

考虑一个电磁场的 Lagrangian：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{x} - e\phi. \tag{28}$$

它是规范不变的：

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\theta,\ \phi \to \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\theta, \\ &\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \frac{e}{c}\frac{d}{dt}\theta(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \tag{29}$$

代入 Euler-Lagrange 模型得到 Newton 方程：$m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{e}{x}\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B} + e\mathbf{E}$.

Legendre 变换到 Hamiltonian：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\phi. \tag{30}$$

现在考察一个局域的垂直向外的磁通 $\Phi$, 当我们在它的左侧 $x_i$ 发射两束光子, 分别沿上方路径 (above) 和下方路径 (below) 绕过它到达右侧的光屏 $x_f$. 则根据路径积分总概率幅为

$$\begin{aligned} \langle x_f|U(t_f.t_i)|x_i\rangle &= (\int_{\text{above}} + \int_{\text{below}})\mathcal{D}[x] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dt\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\right] \\ &= (\int_{\text{above}} + \int_{\text{below}})\mathcal{D}[x] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int dt(\mathcal{L}_0 + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{x}}\mathbf{A})\right] \\ &= \exp\left[i\frac{e}{\hbar c}\int_{x_i\ \text{above}}^{x_f} \mathbf{A}d\mathbf{x} - i\frac{e}{\hbar c}\int_{x_i\ \text{below}}^{x_f} \mathbf{A}d\mathbf{x}\right] \\ &= \exp\left[i\frac{e}{\hbar c}\oint \mathbf{A}d\mathbf{x}\right] \\ &= \exp\left[i\frac{e\Phi}{\hbar c}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

我们知道, 只要调整磁通为磁通量子 $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ 的整数倍, 就可以在光屏上观测到一个 $2n\pi$ 的相位差, 也即干涉亮纹. 这就是著名的 AB 效应. 同时我们也意识到, 磁矢势 $\mathbf{A}$ 是一个可观测量, 而它的可观测性实际来自于量子效应, 具体说是量子效应中的 Berry 相位 (注意到 $\frac{e}{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}$ 正对应着磁矢势的 Berry 相位!).

我们再来看一个例子——磁单极子. 它也和 Berry 相位有关, 同时我们可以一窥关于电荷量子化的事实. 考虑一个具有磁通 $\Phi = e_M$ 的磁单极子. 以它为球心的单位球面上的磁场强度沿径向分布：

$$\mathbf{B} = \frac{e_M}{4\pi}\hat{r}. \tag{32}$$

事实上, 我们有两套规范：北极规范和南极规范. 以北极规范为例, 规范矢势取为

$$\mathbf{A}_N = \frac{e_M(1-\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\phi}. \tag{33}$$

这一规范在南极点 $\theta = \pi$ 具有奇点, 同理若取南极规范

$$\mathbf{A}_S = -\frac{e_M(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\phi}, \tag{34}$$

其在北极点 $\theta = 0$ 具有奇点. 这一点将在后续有关自旋 $\frac{1}{2}$ 系统的 Berry 相位的讨论中会再次看到. 事实上, 一个 $S^2$ 流形上是不存在一个全局规范的, 我们只能局部地定义一个规范, 后者按照上下半球面分别取两套规范.

现在考察在上下半球面分别取北极规范和南极规范, 我们得到

$$\begin{aligned}\Phi_N(\theta) &= 2\pi\sin\theta A_N = 2\pi e_M(1-\cos\theta),\\ \Phi_S(\theta) &= 2\pi\sin\theta A_S = -2\pi e_M(1+\cos\theta).\end{aligned} \tag{35}$$

由于两套规范最多差一个规范变换, 因此对应到相位上必有

$$\frac{e}{\hbar c}\Phi = \Phi_N - \Phi_S = 4\pi\frac{e_M e}{\hbar c} = 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \tag{36}$$

由此, 如果磁单极子存在, 那么磁荷和电荷都是量子化的, 即[1]

$$\frac{2eMe}{\hbar c} = n \to \frac{e_M}{e} = \frac{n}{2\alpha},\ \alpha \approx \frac{1}{137}. \tag{37}$$

#### 2.1.2 几种场的路径积分

### 2.2 Berry 相位

杨振宁曾有过如下名言："量子力学中最重要的概念是相位." 而 Berry 相位可能是量子力学相位中最重要的概念. 事实上, 单纯从 Berry 相位出发, 就能够引出量子力学中众多本质性的概念. 我们在上一节的路径积分中就看到了它的身影, 下面就来仔细地对它进行研究.

#### 2.2.1 绝热定理

对于一个含时 Hamiltonian 系统, 取能量本征态, 对于任意时刻 $t$, 总有

$$\mathcal{H}(t)\left|E_0(t)\right\rangle = E_0(t)\left|E_0(t)\right\rangle. \tag{38}$$

[1]这里取 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$=1.

假设系统绝热地演化, 也即对于基态 $|E_0\rangle$, 其距离上下的能级都有一个很大的能隙 $\Delta_m$. 如果我们认为 Hamiltonian 只有势能部分, 对其做 Fourier 变换 $V(t) \cong \sum_\omega e^{i\omega t} V_\omega$, 绝热条件就是在要求总是有 $\hbar\omega \ll \Delta_m$.

绝热定理指出, 如果系统满足绝热条件, 则系统的演化将一直保持在初始能级上. 现在我们从基态 $|E_0\rangle$ 出发, 绝热演化回基态, 设 Hamiltonian 是参数 $\mathbf{R}$ 的函数, 则在 $\mathbf{R}$ 构成的参数空间上, 这一演化对应着一条闭合路径, 也即我们有映射

$$\Psi : \mathbb{H} \to \mathcal{M}(\mathbf{R}),\ \langle E_0|U(T,0)|E_0\rangle \mapsto C_{\mathbf{R}}. \tag{39}$$

由于绝热定理的保证, 路径积分仅可选取一条满足鞍点条件的绝热路线, 即

$$\begin{aligned}\langle E_0|U(T,0)|E_0\rangle &= \lim_{N\to\infty} \langle E_0|\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H}(\mathbf{R}(T-\frac{T}{N}))|E(T-\frac{T}{N})\rangle \cdots \langle E(\frac{T}{N})|\mathbb{I} - \frac{i}{\hbar}\frac{T}{N}\mathcal{H}(\mathbf{R}(0))|E_0\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty} \langle E_0|E(T-\frac{T}{N})\rangle \cdots \langle E(\frac{T}{N})|E_0\rangle \exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt E(t)\Big].\end{aligned} \tag{40}$$

其中, 最后一项 $\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\int_0^T dt E(t)\Big]$ 显然是动力学相位, 而前一项就是 Berry 相位, 它可以进一步被改写成连续形式:

$$\lim_{N\to\infty} \langle E_0|E(T-\frac{T}{N})\rangle \cdots \langle E(\frac{T}{N})|E_0\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle E_0|(\mathbb{I} - \frac{T}{N}\frac{d}{dt})^N|E_0\rangle = \exp(-\int_0^T dt \langle E_0|\frac{d}{dt}|E_0\rangle). \tag{41}$$

由于基态也是 $\mathbf{R}$ 的函数, 从而通过映射 $\Psi$, 此路径积分生成的 Berry 相位可以转换到参数空间中一条真实的路径积分上. 设 Berry 相位具有形式 $\exp(i\gamma)$, 则:

$$\gamma = i\int_0^T dt \langle E_0|\frac{d}{dt}|E_0\rangle = i\oint_{C_{\mathbf{R}}} d\mathbf{R} \langle E_0(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|E_0(\mathbf{R})\rangle. \tag{42}$$

通过以上分析可以看到, Berry 相位是有别于动力学相位的一种量子系统的内禀相位, 它取决于绝热保护的基态参数流形的拓扑. 这一拓扑性质反映在沿基态参数流形上一条闭合路径积分会给出一个非平庸值.

### 2.2.2 Berry 几何

现在从几何学的角度审视 Berry 相位, 我们会发现一个量子系统深刻的拓扑性质. 上面已经指出, Berry 相位对应基态流形上沿闭合回路积分出的一个拓扑数, 它只和基态流形的拓扑有关. 下面, 我们将基态 $|E_0\rangle$ 改写成 $|n\rangle$.

首先, Berry 相位中的被积函数构成了基态流形的 Berry 联络, 也称为 Berry 矢势:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = i\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle. \tag{43}$$

它是一个纯实数, 这是因为 $\langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle$ 是纯虚的:

$$\langle n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = 1 \longrightarrow \nabla_{\mathbf{R}}\langle n(\mathbf{R})|n(\mathbf{R})\rangle = \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle + \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle^\dagger = 0 \longrightarrow \langle n(\mathbf{R})|\nabla_{\mathbf{R}}|n(\mathbf{R})\rangle \in i\mathbb{R}. \tag{44}$$

Berry 联络 (矢势) 的旋度给出 Berry 曲率 (磁场):

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}(\mathbf{R}) = i\langle \nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R})| \times |\nabla_{\mathbf{R}} n(\mathbf{R})\rangle. \tag{45}$$

根据 Stokes 定理, 在计算 Berry 相位 (磁通) 时对 Berry 联络的线积分可以转换为对 Berry 曲率的面积分:

$$\gamma = \oint_{C_{\mathbf{R}}} d\mathbf{R}\ \mathbf{A}(\mathbf{R}) = \oiint_{S_{\mathbf{R}}} d\mathbf{S}\ \mathbf{B}(\mathbf{R}). \tag{46}$$

Berry 荷. 陈数. 拓扑阻碍. Hilbert 纤维. 和乐群.

### 2.2.3 Hall 电导

流算符. 线性响应.

### 2.2.4 拓扑绝缘体

# 3 二次量子化

## 3.1 玻色子与费米子

对全同粒子形成的多体态

$$|i\rangle = |i_1\rangle_i \otimes \cdots \otimes |i_n\rangle_n \,, \tag{47}$$

在三维空间中的基本拓扑群保证, 对全同粒子的交换操作使得我们对其仅有对称化和反对称化两种分类.[2]对于任意的多体态 $|\psi\rangle$, 对称态

$$|\psi\rangle_b = \frac{1}{\sqrt{n_{i_1}!\cdots n_{i_n}!}} \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{i_{\sigma(1)}\le\cdots\le i_{\sigma(n)}} \psi_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}} |i_{\sigma(1)}\rangle \cdots |i_{\sigma(n)}\rangle \tag{48}$$

是一个玻色态；反对称态

$$|\psi\rangle_f = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma \sum_{i_{\sigma(1)}\le\cdots\le i_{\sigma(n)}} \psi_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}} |i_{\sigma(1)}\rangle \cdots |i_{\sigma(n)}\rangle \tag{49}$$

是一个费米态. 一般地, 我们可以将多体态表达为

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\prod_{k=1}^n n_{i_k}!}} \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\xi \sum_{i_{\sigma(1)}\le\cdots\le i_{\sigma(n)}} \psi_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(n)}} \prod_{k=1}^n |i_{\sigma(k)}\rangle \,,\ \xi = \begin{cases} 1-\sigma, & \text{bosons} \\ \sigma, & \text{fermions} \end{cases} . \tag{50}$$

我们定义粒子数表象. 对于玻色子, 有

$$|n_1, \cdots, n_k, \ldots\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_{i_1}!\cdots n_{i_n}!}} \sum_{\sigma\in S_n} |i_{\sigma(1)}\rangle \cdots |i_{\sigma(n)}\rangle \,,\ n_k = 0, \ldots, \infty. \tag{51}$$

对于费米子, 同样有

$$|n_1, \cdots, n_k, \ldots\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_{i_1}!\cdots n_{i_n}!}} \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma |i_{\sigma(1)}\rangle \cdots |i_{\sigma(n)}\rangle \,,\ n_k = 0, 1. \tag{52}$$

$n$ 粒子系统的 Hilbert 空间是每个粒子 Hilbert 空间的直积: $\mathbb{H}_n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{H}_i$. 下面我们引入 Fock 空间, 它构成了多粒子 Hilbert 空间上的张量代数. 仍分玻色系统和费米系统两种情况讨论. 对于玻色系统, 其 Fock 空间为

$$\mathcal{F}_b = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathbb{H}_n^b. \tag{53}$$

满足 $\dim \mathcal{F}_b = \infty$. 对于 $\mathbb{H}_n^b$, 我们都有相应的粒子数表象, 形成了一组正交完备基:

$$|n_1 = m_1, \ldots, n_N = m_N\rangle \,,\ \sum_{i=1}^N m_i = n. \tag{54}$$

其中 $\mathbb{H}_0^b$ 为真空空间, 只有一个真空态 $|0\rangle$. 对于费米系统, 其 Fock 空间为

$$\mathcal{F}_f = \bigoplus_{n=0}^N \mathbb{H}_n^f. \tag{55}$$

[2]三维及以上空间全同粒子构型流形的基本群为 $S_n$, 它有玻色子和费米子两个表示; 而对于二维空间, 基本群为更为复杂的辫群 $B_n$, 它的表示则是任意子; 对于一维空间, 后续的 Jordan-Wigner 变换将表明玻色子和费米子是等价的.

满足 $\dim \mathcal{F}_f = 2^N$. 对于 $\mathbb{H}_n^f$, 其粒子数表象的正交完备基为

$$|n_i = m_i\rangle\,,\ m_i = 0, 1,\ \sum_{i=1}^{N} m_i = n. \tag{56}$$

可见, 费米空间要比玻色空间小得多, 前者是有限维的, 而后者是可数无限维的.

现在考察玻色系统和费米系统二次量子化下的算符性质. 对于玻色系统, 定义相应的湮灭算符

$$b_i : \forall n \geq 1,\ \mathbb{H}_n^b \to \mathbb{H}_{n-1}^b,\ |\cdots n_i \cdots\rangle \mapsto \sqrt{n_i}\,|\cdots n_i - 1 \cdots\rangle\,. \tag{57}$$

特别地, 对于 $n = 0$ 的真空态, 有 $b_i\,|0\rangle \equiv 0$. 虽然对于态来说也是自洽的. 与之伴随的是产生算符

$$b_i^\dagger : \forall n,\ \mathbb{H}_n^b \to \mathbb{H}_{n+1}^b,\ |\cdots n_i \cdots\rangle \mapsto \sqrt{n_i + 1}\,|\cdots n_i + 1 \cdots\rangle\,. \tag{58}$$

粒子数算符

$$\hat{n}_i := b_i^\dagger b_i : \forall n,\ \mathbb{H}_n^b \to \mathbb{H}_n^b,\ b_i^\dagger b_i\,|\cdots n_i \cdots\rangle = n_i\,|\cdots n_i \cdots\rangle\,. \tag{59}$$

另外

$$b_i b_i^\dagger\,|\cdots n_i \cdots\rangle = (n_i + 1)\,|\cdots n_i \cdots\rangle\,. \tag{60}$$

以及

$$b_i b_j^\dagger\,|\cdots n_i \cdots n_j \cdots\rangle = b_j^\dagger b_i\,|\cdots n_i \cdots n_j \cdots\rangle = \sqrt{n_i(n_j + 1)}\,|\cdots n_i - 1 \cdots n_j + 1 \cdots\rangle\,, \tag{61}$$

$$b_i b_j\,|\cdots n_i \cdots n_j \cdots\rangle = b_j b_i\,|\cdots n_i \cdots n_j \cdots\rangle = \sqrt{n_i n_j}\,|\cdots n_i - 1 \cdots n_j - 1 \cdots\rangle\,. \tag{62}$$

从而, 我们得到了玻色子产生-湮灭算符的代数关系:

$$[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij},\ [b_i, b_j] = [b_i^\dagger, b_j^\dagger] = 0. \tag{63}$$

对于费米系统, 先定义产生算符是方便的:

$$\begin{aligned} f_j^\dagger :&\forall n \leq N - 1,\ \mathbb{H}_n^f \to \mathbb{H}_{n+1}^f, \\ &|n_{i_1} = 1, \cdots, n_{i_n} = 1\rangle \mapsto \begin{cases} 0,\ \ j = i_k, \forall k \\ (-1)^{\sum_{k=1}^{a-1} n_{i_k}}\,|\cdots, n_{i_{a-1}} = 1, \cdots, n_j = 1, \cdots, n_{i_a} = 1, \cdots\rangle\,,\ i_{a-1} < j < i_a, \exists\, a \end{cases}. \end{aligned} \tag{64}$$

在这里, 当 $j = i_k$ 时, 由于 Pauli 不相容原理, 在一个态上占据了大于 1 个粒子都会使得整个态被消没; 当 $\exists\, a$, s.t. $i_{a-1} < j < i_a$ 时, 额外产生这样一个相因子的原因如下.

将粒子数态转回到费米多体态, 作用上产生算符后将产生的粒子态置换到指定的位置处, 每置换一次会产生一个 $e^{i\pi}$ 的相因子:

$$\begin{aligned} &f_j^\dagger \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma\,|i_1\rangle_1 \cdots |i_n\rangle_n \\ =&\sum_{\sigma' \in S_{n+1}} (-1)^{\sigma'}\,|j\rangle_1\,|i_1\rangle_2 \cdots |i_n\rangle_{n+1} \\ =&(-1)^{\sum_{k=1}^{a-1} n_{i_k}} \sum_{\sigma' \in S_{n+1}} (-1)^{\sigma'}\,|i_1\rangle_1 \cdots |i_{a-1}\rangle_{a-1}\,|j\rangle_a\,|i_a\rangle_{a+1} \cdots |i_n\rangle_{n+1} \\ =&(-1)^{\sum_{k=1}^{a-1} n_{i_k}}\,|\cdots, n_{i_{a-1}} = 1, \cdots, n_j = 1, \cdots, n_{i_a} = 1, \cdots\rangle\,. \end{aligned} \tag{65}$$

特别地, 当 $n=N$ 时, 由于 Fock 空间中已经没有更高的子 Hilbert 空间, 于是作用一个产生算符将会使得 $\mathbb{H}_N^f$ 中的任意态消没.

可以验证, 对于湮灭算符, 我们有

$$\begin{aligned}
&f_j:\forall n\geq 1,\ \mathbb{H}_n^f\to\mathbb{H}_{n-1}^f,\\
&\qquad|n_{i_1}=1,\cdots,n_{i_n}=1\rangle\mapsto\begin{cases}0,\ \ j\neq i_k,\forall k\\(-1)^{\sum_{k=1}^{a-1}n_{i_k}}|n_{i_1}=1,\cdots,n_{j=i_a}=0,\cdots,n_{i_n}=1\rangle,\ \ j=i_a,\exists\, a\end{cases}.
\end{aligned}\tag{66}$$

特别地, 湮灭算符使得真空态消没.

用一般的形式写出, 即为

$$\begin{aligned}
f_j^\dagger|n_{i_1}=1,\cdots,n_{i_n}=1\rangle&=(-1)^{\sum_{k=1}^{a-1}n_{i_k}}(1-\delta_{nN})(1-\delta_{ji_a})|\cdots n_j=1\cdot\rangle,\\
f_j|n_{i_1}=1.\cdots,n_{i_n}=1\rangle&=(-1)^{\sum_{k=1}^{a-1}n_{i_k}}\delta_{n0}\delta_{ji_a}|\cdots n_{j=i_a}=0\cdots\rangle.
\end{aligned}\tag{67}$$

粒子数算符

$$\hat{n}_j:=f_j^\dagger f_j:\forall n,\ \mathbb{H}_n^f\to\mathbb{H}_n^f,\ f_j^\dagger f_j|\cdots n_j\cdots\rangle=n_j|\cdots n_j\cdots\rangle.\tag{68}$$

另外

$$f_jf_j^\dagger|\cdots n_j\cdots\rangle=(1-n_j)|\cdots n_j\cdots\rangle.\tag{69}$$

以及

$$\begin{aligned}
f_if_j^\dagger|\cdots,n_i=0,1,\cdots,n_j=1,\cdots\rangle&=f_j^\dagger f_i|\cdots,n_i=1,\cdots,n_j=1\cdots\rangle=0,\\
f_if_j^\dagger|\cdots,n_i=0,\cdots,n_j-0,1,\cdots\rangle&=f_j^\dagger f_i|\cdots,n_i=0,\cdots,n_j=0,1\cdots\rangle=0,\\
f_if_j^\dagger|\cdots,n_i=1,\cdots,n_j=0,\cdots\rangle&=(-1)^{\sum_{k=i}^{j-1}n_k}|\cdots,n_i=0,\cdots,n_j=1,\cdots\rangle,\\
f_j^\dagger f_i|\cdots,n_i=1,\cdots,n_j=0,\cdots\rangle&=(-1)^{\sum_{k=i+1}^{j-1}n_k}|\cdots,n_i=0,\cdots,n_j=1,\cdots\rangle.
\end{aligned}\tag{70}$$

和

$$\begin{aligned}
f_if_j|\cdots,n_i=1,\cdots,n_j=1,\cdots\rangle&=(-1)^{\sum_{k=i}^{j-1}n_k}|\cdots,n_i=0,\cdots,n_j=0,\cdots\rangle,\\
f_if_j|\cdots,n_i,\cdots,n_j,\cdots\rangle(n_in_j=0)&=0.
\end{aligned}\tag{71}$$

$$\begin{aligned}
f_jf_i|\cdots,n_i=1,\cdots,n_j=1,\cdots\rangle&=(-1)^{\sum_{k=i+1}^{j-1}n_k}|\cdots,n_i=0,\cdots,n_j=0,\cdots\rangle,\\
f_jf_i|\cdots,n_i,\cdots,n_j,\cdots\rangle(n_in_j=0)&=0.
\end{aligned}\tag{72}$$

从而, 我们得到了费米子产生-湮灭算符的代数关系:

$$\{f_i,f_j^\dagger\}=\delta_{ij},\ \{f_i,f_j\}=\{f_i^\dagger,f_j^\dagger\}=0.\tag{73}$$

现在我们就得到了二次量子化的形式理论. 从真空态出发, 我们可以构造出任意多体态.

对玻色子:

$$|n_1,\cdots,n_N\rangle_b=\frac{(b_1^\dagger)^{n_1}\cdots(b_N^\dagger)^{n_N}}{\sqrt{n_1!\cdots n_N!}}|0\rangle_b,\tag{74}$$

对费米子[3]:

$$|n_1=1,\cdots,n_N=1\rangle_f=(f_1^\dagger)\cdots(f_N^\dagger)|0\rangle\tag{75}$$

[3]需要注意, 由于费米子算符之间非平凡的反对易关系, 对于连乘的产生算符我们不能像玻色子产生算符那样彼此之间随意对换.

### 3.2 Jordan-Wigner 变换

虽然, 三维空间的二次量子化基本理论已经被我们在形式上写了出来 (虽然还没有写出动力学部分), 但我们依旧好奇先前提到的基本群是什么. 也即, 为什么在三维及以上空间全同粒子置换对称的对称群是 $S_n$, 而在二维时就变成了更为复杂的辫群 $B_n$, 在一维时又为什么说玻色子和费米子是某种意义上等价的? 在这里, 空间的维度——或者更进一步——基本拓扑, 到底扮演了什么样的角色?

## References