2007 年 12 月 应用数学与计算数学学报 第 21 卷 第 2 期
Dec., 2007 COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT. Vol.21 No.2

关于一类具有有界不确定性数据的参数估计方法的误差分析

陈玉东 [1] 施颂椒 [2] 翁正新 [2]

摘要 指出了一类具有有界不确定性数据的参数估计方法存在估计误差这一事实，分析了估计误差存在的原因，给出了估计误差的上界.

关键词 参数估计，不确定性数据，误差分析

Error Analysis of a class of Parameter Estimation Methods Based on Data with Bounded Uncertainties

Chen Yudong[1] Shi Songjiao[2] Weng Zhenxin[2]

Abstract This paper points out the fact that there is estimation error in a class of parameter estimation method based on data with bounded uncertainties, analyzes the cause for the existence of estimation error, and provides the upper bound for the estimation error.

Keywords estimation error, uncertain data, error analysis

1 引 言

参数估计理论在诸如统计、系统辨识和信号处理等领域有着广泛的应用，深入研究参数估计理论具有重要的理论意义和实用价值. 参数估计问题的核心是以尽可能高的准确度将不可观测的参数从被“污染”的观测数据中估计出来 [2]. 经过多年的发展，已经出现了多种参数估计方法. 最近，对于一类系数矩阵 A 、观测向量 b 都带有未知、有界扰动的参数估计问题， Laurent EL Ghaoui *et.al.*[1] 通过二阶凸规划极小化最坏情况下的残留误差方法解决了该问题， S. Chandrasekaran *et.al.*[2] 首先应用几何方法对该参数估计问题进行描述，然后通过求解一个相关的 regularized 问题来得到了最优的估计参数，杨智慧 [3] 等应用线性矩阵不等式 (LMI) 方法解决了该问题.

上述文献应用不同工具，从不同角度对参数估计问题进行分析，得到了一些很有价值的结论. 在上述参数估计方法中存在着这样一个共同点，即都是首先将参数估计问题表示为一个 min-max 问题，然后将其转化为一个 min 问题，最后通过求解该 min 问题来间接得到参数的估计结果. 然而，上述问题的转化过程导致了最后参数估计结果中的估计误差的产生. 本文并不是否定上述参数估计方法的正确性，也不是设法消除上述估计误差，而是首先分析估计误差产生的原因，然后给出估计误差的上界，使

本文 2001 年 7 月 6 日收到.

1. 上海三菱电梯有限公司,开发二部 200245; R&D Center, Shanghai Mitsubishi Elevator Co.Ltd, Shanghai 200245,China

2. 上海交通大学，自动化研究所，上海 200030; Research Institute of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030,China

得在应用上述方法进行参数估计的时候，能够对得到的估计结果的准确程度有一个估计.

2 误差的产生原因

设 $A \in R^{m\times n}$,$b \in R^m$ $(m \geqslant n)$ 是已知的具有不确定性的数据，并且 A 、 b 通过未知参数向量 $x \in R^n$ 构成如下线性关系

$$b = Ax + v \tag{2.1}$$

其中向量 $v \in R^m$ 表示测量噪声. 假定真实系统矩阵为 $A + \delta A$, 且 δA 满足

$$\|\delta A\|_2 \leqslant \eta \tag{2.2}$$

式中 η 是一已知正常数. 假定真实的观测向量为 $b + \delta b$, 且 δb 满足

$$\|\delta b\|_2 \leqslant \eta_b \tag{2.3}$$

则参数 x 的估计问题可表示为

$$\min_{\hat{x}} \max_{\|\delta A\|_2 \leqslant \eta,\ \|\delta b\|_2 \leqslant \eta_b} \{\|(A+\delta A)x - (b+\delta b)\|_2 : \|\delta A\|_2 \leqslant \eta,\ \|\delta b\|_2 \leqslant \eta_b\} \tag{2.4}$$

显然式 (2.4) 是一个 min-max 问题.

由文献 [1-3] 可知，式 (2.4) 中的 min-max 问题可以转化为一个 min 问题，方法如下：

由于

$$\begin{aligned}\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2 &\leqslant \|(Ax-b)\|_2 + \|\delta A\|_2 \cdot \|x\|_2 + \|\delta b\|_2 \\ &\leqslant \|(Ax-b)\|_2 + \eta \cdot \|x\|_2 + \eta_b \end{aligned} \tag{2.5}$$

并且容易验证，当其中的不确定性项 δA 和 δb 分别按下述各式取值时，

$$\delta A = \frac{(Ax-b)}{\|(Ax-b)\|_2}\frac{x^T}{\|x\|_2}\cdot\eta, \delta b = -\frac{(Ax-b)}{\|(Ax-b)\|_2}\cdot\eta_b \tag{2.6}$$

式 (2.5) 中的等号成立，也就是说，当不确定性项 δA 和 δb 按照式 (2.6) 取值时，$\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2$ 可得到其最大值，即

$$\max_{\|\delta A\|_2 \leqslant \eta,\ \|\delta b\|_2 \leqslant \eta_b} \|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2 = \|Ax-b\|_2 + \eta\cdot\|x\|_2 + \eta_b \tag{2.7}$$

由式 (2.4) 可知，问题 (2.4) 可转化为如下问题

$$\min_x \|Ax-b\|_2 + \eta\cdot\|x\|_2 + \eta_b \tag{2.8}$$

以此为基础，文献 [1-3] 分别采用了不同的方法对式 (2.8) 进行求解，最终实现了参数估计.

从上述转化过程中我们不难理解：只有当不确定性 δA 和 δb 分别按照式 (2.6) 取值时，式 (2.7) 才能成立，进而式 (2.4) 中的 min-max 问题才可以转化为式 (2.8) 中的 min 问题.

然而不确定性 δA 、 δb 是问题本身所固有的，其取值完全由问题本身所决定，而不能人为指定. 对于它们，我们只知道它们分别满足式 (2.2) 和 (2.3), 除此之外没有任何已知信息.

事实上，式 (2.6) 只有在极个别情况下才成立，在其它绝大多数情况下都不满足，因而如果直接应用上述转化方法将式 (2.4) 中的 min-max 问题转化为式 (2.8) 中的 min 问题，必然会给最终的参数估计结果带来估计误差，也就是说，式 (2.4) 中的 x 并不完全等同于式 (2.8) 中的 x.

综上所述，我们可以得到如下结论：

对于上述由式 (2.4) 中的 min-max 问题到式 (2.8) 中的 min 问题的转化，如果不确定性 δA 和 δb 不满足式 (2.6), 那么上述转化过程必然会导致最终的参数估计结果中估计误差的产生.

3　误差估计

这一部分，我们将以定理的形式给出由上述转化过程可能产生的参数估计误差的上界.

定理　对于参数估计问题

$$x = \arg\min \max_{\|\delta A\|_2 \leqslant \eta,\ \|\delta b\|_2 \leqslant \eta_b} \{\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2 : \|\delta A\|_2 \leqslant \eta,\ \|\delta b\|_2 \leqslant \eta_b\} \tag{3.1}$$

如果采用

$$\hat{x} = \arg\min \|A\hat{x}-b\|_2 + \eta\cdot\|\hat{x}\|_2 + \eta_b \tag{3.2}$$

对其进行求解，并且满足如下条件

$$\mathrm{rank}(A) = n \tag{3.3}$$

$$\eta\cdot\left\|(A^TA)^{-1}A^T\right\|_2 < 1 \tag{3.4}$$

那么最终可能产生的参数估计误差满足下述不等式

$$\|x-\hat{x}\|_2 \leqslant e_{upper} \tag{3.5}$$

式中

$$e_{upper} = \frac{\|A^+\|_2\cdot(J_1+J_2)}{1-\eta\cdot\|A^+\|_2} \tag{3.6}$$

$$J_1 = \|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2 \tag{3.7}$$

$$J_2 = \|A\hat{x}-b\|_2 + \eta\cdot\|\hat{x}\|_2 + \eta_b \tag{3.8}$$

$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$ 是矩阵 A 的 Moore-Penrose 广义逆矩阵.

证明 由式 (3.3) 可知， A 为列满秩矩阵，则有

$$(A^TA)^{-1}(A^TA) = I_n \tag{3.9}$$

成立. 那么

$$\begin{aligned}\|x-\hat{x}\|_2 &= \left\|(A^TA)^{-1}(A^TA)(x-\hat{x})\right\|_2\\ &= \left\|(A^TA)^{-1}A^T(Ax-A\hat{x})\right\|_2\\ &\leqslant \left\|(A^TA)^{-1}A^T\right\|_2\cdot\|Ax-A\hat{x}\|_2\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)-\delta Ax+(b+\delta b)-A\hat{x}\|_2\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2+\|-\delta Ax+(b+\delta b)-A\hat{x}\|_2\end{aligned}$$

将式 (3.7) 代入，得

$$\begin{aligned}\|x-\hat{x}\|_2 &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\|-\delta Ax+\delta A\hat{x}-\delta A\hat{x}+(b+\delta b)-A\hat{x}\|_2)\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\|-\delta A(x-\hat{x})-(A+\delta A)\hat{x}+(b+\delta b)\|_2)\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\|\delta A(x-\hat{x})\|_2+\|(A+\delta A)\hat{x}-(b+\delta b)\|_2)\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\|\delta A\|_2\cdot\|(x-\hat{x})\|_2+\|(A\hat{x}-b)+\delta A\cdot\hat{x}-\delta b\|_2)\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\|\delta A\|_2\cdot\|(x-\hat{x})\|_2+(\|(A\hat{x}-b)\|_2+\|\delta A\cdot\hat{x}\|_2+\|\delta b\|_2))\end{aligned}$$

将式 (3.8) 代入，得

$$\begin{aligned}\|x-\hat{x}\|_2 &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\|\delta A\|_2\cdot\|(x-\hat{x})\|_2+J_2)\\ &\leqslant \left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+\eta\cdot\|(x-\hat{x})\|_2+J_2)\end{aligned}$$

进行整理，得

$$\|(x-\hat{x})\|_2(1-\eta\cdot\left\|A^+\right\|_2)\leqslant\left\|A^+\right\|_2\cdot(J_1+J_2)$$

因而有

$$\|x-\hat{x}\|_2\leqslant e_{upper}=\frac{\|A^+\|_2\cdot(J_1+J_2)}{1-\eta\cdot\|A^+\|_2}$$

即定理结论成立.

4 计算实例

在参数估计问题 (4) 中，取 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$b=\begin{bmatrix}0.85&1.62&0.68\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 不确定性 $\delta A=\begin{bmatrix}0.1&0&0\\0&-0.1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\delta b=\begin{bmatrix}0&-0.1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, 则 $\eta=0.1$，$\eta_b=0.1$. 由式 (3.1) 可知，$x=\begin{bmatrix}0.81513118711012&0.72617786276292\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $J_1=0.08331069983012$, 由式 (3.2) 可得，$\hat{x}=\begin{bmatrix}0.84662756598240&0.69208211143695\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $J_2=0.29160308402078$. 可见，$e_{upper}=0.41657087094545$, 而 $\|x-\hat{x}\|_2=0.04641704579730$.

可见，当不确定性不满足式 (2.6) 时，采用式 (2.8) 对参数进行估计，会产生估计误差，且估计误差满足定理给出的上界.

(下转第 96 页)

显然小样本非均匀扩散的计算结果更精确. 相较于频率统计, 小样本非均匀扩散误差大大降低, 减少误差 71.031%. 且其所做的患病率曲线更加地光滑, 与给定样本的偏离度也更低.

4 结论与探索

本文主要介绍了二维非均匀扩散方法,对本文中的实际课题我们对扩散系数 $D(N) = N^{\alpha}(\alpha = 0.5, \alpha = 2$ 时) 做过, 得到的结果是相似的, 差别仅在于扩散速度的快慢. 另外, 对于更高维的情况我们也已做出了类似的结果, 相关论文将陆续发表.

参 考 文 献

[1] Huang Chongfu and Shi Yong. Towards Efficient Fuzzy Information Processing-Using the Principle of Information Diffusion [M]. Heidellberg, Physica-Verlag(Springer), 2002, 129-212.
[2] Shang Hanji Shang Lu Yuchu, Wu Xiyun and Shen Ye. The Choice of Information Diffusion Function with Optimum Parameters [C]. Proceedings of Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference, 2001.
[3] Shang Hanji, Lu Yuchu and Jin Ping. Information Diffusion Method In Risk Analysisv[C]. Proceedings of the 5th International FLINS Conference, 2002.
[4] 张晶晶, 何幼桦, 王巧兰, 忻莉莉. 改进的二维最优信息扩散方法 [J]. 上海大学学报 (自然科学版), 2006 年 4 期.
[5] Lu Yuchu Lu, Xin Lili and Yuan Shanshan. Analysis of Small-sample Information In Insurance (I)— Method for GIDM[C]. Proceedings of APRIA 10th Annual Conference, Japan, 2006.
[6] Lili Xin , Yuchu Lu , Hui Geng , Analysis of Small-sample Information In Insurance (II) —Three Methods for KerM, UIDM and GIDM [P]. Proceedings of APRIA 10th Annual Conference, Japan, 2006.
[7] 茆诗松等. 统计手册 [M]. 北京: 科学出报社, 2003.
[8] 谷超豪, 李大潜. 数学物理方程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002.
[9] 王明新. 非线性抛物型方程 [M]. 北京: 科学出版社, 1993 年 12 月.
[10] 伍卓群, 尹景学, 王春朋. 椭圆与抛物型方程引论 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.

(上接第 90 页)

5 结 论

本文针对一类具有有界不确定性数据的参数估计方法, 指出了应用这类估计方法进行参数估计会产生估计误差这一事实, 分析了估计误差的产生原因, 给出了估计误差的上界.

参 考 文 献

[1] Laurent el Ghaout and Herve Lebret, Robust solutions to least-squares problems with uncertain data, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL., 1997, **18**(4): 1035-1064.
[2] S. Chandrasekaran, G. H. Golub, M. Gu, and A. H. Sayed, Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL., 1998, **19**(1): 235-252.
[3] 杨智慧, 毛剑琴, 魏可惠, 基于 LMI 的具有一类不确定性数据的参数估计, 北京航空航天大学学报, 2000, **26**(4): 481-484.