基于LMI的具有一类不确定性数据的参数估计

杨智慧 毛剑琴 魏可惠
(北京航空航天大学 理学院) (中国工程物理研究院 电子工程研究所)

摘 要: 对于系数矩阵 A 和观测向量 b 存在不确定性的情况,本文提出了一种基于线性矩阵不等式(LMI)的参数估计方法,这种方法适用于不确定性的先验界已知的情况.由此而得到的算法计算更为简单,实用并具有一般性.文中给出了计算公式的推导、解的分析,并针对几种特殊的情况进行了讨论.最后给出了仿真结果.

关 键 词: 参数估计;不确定系统;最小二乘法;线性矩阵不等式
中图分类号: O 241.1
文献标识码: A 文 章 编 号: 1001-5965(2000)04-0481-04

最小二乘方法在参数估计理论中有着广泛的应用.标准的最小二乘是假设所有的误差都集中在观测向量 b 上,往往与工程实际不符.近年来,科学家们对其进行了改进.Golub 等人在八十年代提出了总体最小二乘方法[1],[2].这种方法适用于系数矩阵 A 及观测向量 b 均具有不确定性的情况.但由此方法得到的解往往抗干扰能力差.并且当 A、b 的不确定性界已知时,这种方法是不适用的.最近几年来对于最小二乘方法的改进研究[3],[4]解决了不确定性数据的界已知时的参数估计问题.

然而这些文章只是对一两类问题进行了讨论,并没有给出一个比较普遍的形式.本文是在这些文章的基础上,讨论了一类在工程遇到的、没有被前人所考虑的问题:系数矩阵 A 的每个元素所具有的不确定性都有界,并且同一列中元素所具有的不确定性的界相同.

1 问题的数学描述

设 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$、$b \in \mathbf{R}^m$, $m \geq n$ 是已知的具有不确定性的数据, A 的不确定性矩阵 δA 为

$$\delta A = \{\delta a_{ij}\}$$

$$i = 1,2,\cdots,m \qquad j = 1,2,\cdots,n$$

考虑系数矩阵 A 的扰动矩阵 δA 的每个元素 δa_{ij} 都有界,并且同一列中元素的界相同的情况:

$$|\delta a_{ij}| \leq \eta_j$$

$$i = 1,\cdots,m \qquad j = 1,\cdots,n \tag{1}$$

为解决这个问题,对式(1)进行变换:

$$\frac{|\delta a_{ij}|}{\eta_j} \leq 1$$

$$i = 1,2,\cdots,m \qquad j = 1,2,\cdots,n \tag{2}$$

(2)式等价于对扰动矩阵 δA 右乘一个对角矩阵 Λ^{-1} ($\Lambda = \mathrm{diag}(\eta_1,\cdots,\eta_n)$) (考虑到有的列可能无扰动的情况,即存在个别 $\eta_j = 0$ 的情况,此时 Λ 的逆取其广义逆,但为方便,在本文中统一用 Λ^{-1} 表示),显然由此而得到的矩阵 $\delta A\Lambda^{-1}$ 的每个元素的绝对值均小于等于 1.这时,考虑约束 $\|\delta A\Lambda^{-1}\| \leq \eta$,对于这个约束,问题是可以求解的.为方便,令 $\eta = 1$.当 $\eta \neq 1$ 时可将其化为 $\eta = 1$ 的形式.对于 $\eta = 0$ 的情况,可直接用最小二乘方法求解.

这样,本文提出的问题具有如下数学描述:

$$\min_x \max\{\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|:$$
$$\|\delta A\Lambda^{-1}\| \leq 1,\quad \|\delta b\| \leq \eta_b\} \tag{3}$$

其中, A 是精确的系数矩阵而 $A+\delta A$ 是具有不确定性的系数矩阵, $\Lambda = \mathrm{diag}(\eta_1,\cdots,\eta_n)$,对于 δA 的第 i 行第 j 列的元素 δa_{ij},有 $|\delta a_{ij}| \leq \eta_j$, $j = 1,\cdots,n$,为方便将 η_j 简称为列元素界. η_b 是 δb 的上界.

2 问题的解

显然,问题(3)满足下列式子:

$$\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2 \leq$$

收稿日期: 1998-12-30
基金项目: 博士点基金资助项目(9603);中国工程物理研究院基金资助项目
作者简介: 杨智慧(1976-),女,辽宁沈阳人,硕士生,100083,北京.

$$\|(A\Lambda^{-1})(\Lambda x)-b\|_2+$$
$$\|\delta A\Lambda^{-1}\|_2\|\Lambda x\|_2+\|\delta b\|_2\le$$
$$\|Ax-b\|_2+\|\Lambda x\|_2+\eta_b \tag{4}$$

这给出了问题的一个上界.更进一步,能够证明存在$(\delta A,\delta b)$使等号成立.取

$$\left.\begin{aligned}\delta A^*&=\frac{(Ax-b)(\Lambda x)^T}{\|Ax-b\|_2\|\Lambda x\|_2}\Lambda\\ \delta b^*&=-\frac{(Ax-b)}{\|Ax-b\|_2}\eta_b\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 被称为界矩阵.

则

$$\|(A+\delta A^*)x-(b+\delta b^*)\|_2=$$
$$\|Ax-b\|_2+\|\delta A^*x\|_2+\|\delta b^*\|_2=$$
$$\|Ax-b\|_2+\|\Lambda x\|_2+\eta_b$$

即

$$\max\{\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2:$$
$$|\delta a_{ij}|\le\eta_i,\ \|\delta b\|_2\le\eta_b,$$
$$i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n\}=$$
$$\|Ax-b\|_2+\|\Lambda x\|_2+\eta_b$$

因此,min-max 问题(3)可化为一个最小化问题

$$\min_x(\|Ax-b\|_2+\|\Lambda x\|_2+\eta_b) \tag{6}$$

η_b 与求解 x 无关,为方便可以暂时忽略掉.因而,问题(3)可化为

$$\min_x(\|Ax-b\|_2+\|\Lambda x\|_2) \tag{7}$$

与文献[3]中类似,此问题可以用LMI来求解.

定理1 问题(7)可化为如下问题

Minimize λ

满足

$$\left.\begin{aligned}\|Ax-b\|_2&\le\lambda-\tau\\ \|\Lambda x\|_2&\le\tau\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

证明 类似于文献[3]中的证明.

利用Schur补,很容易得到下面的定理

定理2 问题(8)可化为

Minimize λ

满足

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\lambda-\tau & (Ax-b)^T\\ (Ax-b) & (\lambda-\tau)I_{m\times m}\end{bmatrix}\ge0\\ &\begin{bmatrix}\tau & (\Lambda x)^T\\ \Lambda x & \tau I_{n\times n}\end{bmatrix}\ge0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中 $I_{m\times m}$, $I_{n\times n}$为单位矩阵.

问题(9)是线性矩阵不等式,可用已有的LMI算法求解.

3 解及几种特殊情况的分析

3.1 解的分析

类似于文献[3],给出定理3.

定理3 问题(8)的(唯一)解由下式给出:

$$x=\begin{cases}(A^TA+\alpha\Lambda^2)^{-1}A^Tb & \alpha=\dfrac{(\lambda-\tau)}{\tau}>0\\ A^+b & \text{其它}\end{cases} \tag{10}$$

其中(λ,τ)是问题(8)的(唯一)最优解.

证明 利用文献[3]中2.1部分的结论,得到问题(3)的对偶问题

$\max\ b^Tz$

满足

$$A^Tz+\Lambda^Tu=0\quad \|z\|_2\le1\quad \|u\|_2\le1$$

因为原问题与对偶问题均是严格可行的,所以它们的最优解存在.如果在最优处 $\lambda=\tau$,则有 $Ax=b$,并且

$$\lambda=\tau=\|\Lambda x\|_2$$

在这种情况下,最优解 x 是 $Ax=b$ 的(唯一)最小范数解:$x=A^+b$.

现在假设 $\lambda>\tau$.因原问题与对偶问题均是严格可行的,所以,原、对偶问题的最优目标函数值相等:

$$\|Ax-b\|_2+\|\Lambda x\|_2=\lambda=b^Tz=$$
$$-(Ax-b)^Tz-(-x^TA^Tz)$$

又 $\|z\|_2\le1$, $\|u\|_2\le1$, $\Lambda^Tu=-A^Tz$,得到

$$z=-\frac{Ax-b}{\|Ax-b\|_2}\qquad u=-\frac{\Lambda x}{\|\Lambda x\|_2}$$

将上面的式子带入 $A^Tz+\Lambda^Tu=0$ 中得到最优解 x:

$$x=(A^TA+\alpha\Lambda^2)^{-1}A^Tb$$

其中
$$\alpha=\frac{\|Ax-b\|_2}{\|\Lambda x\|_2}$$

下面讨论几种特殊的情况及由此而得到的很有趣的结果.

3.2 $\|\delta A\|_2\le\eta_A$、$\|\delta b\|_2\le\eta_b$ 已知的情况

当约束 $\|\delta A\|_2\le\eta_A$、$\|\delta b\|_2\le\eta_b$ 已知时,要求解的问题是:

$$\min_x\Big(\max_{\|\delta A\|_2\le\eta_A,\ \|\delta b\|_2\le\eta_b}\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2\Big) \tag{11}$$

类似于第2节中的推导,知道:

$$\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2\le$$
$$\|Ax-b\|_2+\|\delta A\|_2\|x\|_2+\|\delta b\|_2\le$$

$$\|Ax-b\|_2+\eta_A\|x\|_2+\eta_b \tag{12}$$

当取 $\delta A=\frac{(Ax-b)}{\|Ax-b\|_2}\frac{x^T}{\|x\|_2}\eta_A$, $\delta b=-\frac{(Ax-b)}{\|Ax-b\|_2}\eta_b$ 时,(12) 式达到它的上界,这时有

$$\max_{\|\delta A\|_2\le\eta_A,\|\delta b\|_2\le\eta_b}\|(A+\delta A)x-(b+\delta b)\|_2=\|Ax-b\|_2+\eta_A\|x\|_2+\eta_b \tag{13}$$

所以问题(11)可化为求解下面的最小化问题

$$\min_x(\|Ax-b\|_2+\eta_A\|x\|_2+\eta_b) \tag{14}$$

由于 η_b 与 x 无关,所以(14)可化为求解问题

$$\min_x(\|Ax-b\|_2+\eta_A\|x\|_2) \tag{15}$$

这时就可以化为 LMI 问题来求解了.

类似于定理 2,给出定理 4.

定理 4　问题(11)可通过求下式的最优解 (λ,τ,x) 来解决:

Minimize λ

满足

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\lambda-\tau & (Ax-b)^T\\ (Ax-b) & (\lambda-\tau)I_{m\times m}\end{bmatrix}\ge0\\ \begin{bmatrix}\tau & (\eta_A x)^T\\ \eta_A x & \tau I_{n\times n}\end{bmatrix}\ge0\\ \lambda-\tau\ge0\\ \tau\ge0\end{array}\right\} \tag{16}$$

3.3　A 仅部分列存在误差的情况

考虑 A 中只有部分列存在误差的情况,将 A 写成分块的形式:

$$A=[A_1\quad A_2]$$

不失一般性,假设只有 A_2 中的列受扰动而 A_1 中的列是精确的.

考虑问题

$$\min_x\max_{\|\delta A_2\|_2\le\eta_{A_2},\|\delta b\|_2\le\eta_b}\|[A_1\quad A_2+\delta A_2]x-(b+\delta b)\|_2 \tag{17}$$

按照 A 的划分,将 x 也写成分块的形式:$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$,于是(17)可写为

$$\min_x\max\{\|(A_2+\delta A_2)x_2-(b-A_1x_1+\delta b)\|_2:\|\delta A_2\|_2\le\eta_{A_2},\|\delta b\|_2\le\eta_b\} \tag{18}$$

依照 3.2 中的推导方法,可知存在

$$\delta A_2=\frac{(A_2x_2-(b-A_1x_1))}{\|(A_2x_2-(b-A_1x_1)\|_2}\frac{x_2^T}{\|x_2\|_2}\eta_{A_2}$$

$$\delta b=-\frac{(A_2x_2-(b-A_1x_1))}{\|(A_2x_2-(b-A_1x_1)\|_2}\eta_b$$

使得 $\|(A_2+\delta A_2)x_2-(b-A_1x_1+\delta b)\|_2$ 达到最大值,即有

$$\max_{\|\delta A_2\|_2\le\eta_{A_2},\|\delta b\|_2\le\eta_b}\|(A_2+\delta A_2)x_2-(b-A_1x_1+\delta b)\|_2=\|A_2x_2-(b-A_1x_1)\|_2+\eta_{A_2}\|x_2\|_2+\eta_b \tag{19}$$

不考虑 η_b,问题(18)可化为最小化问题

$$\min_x(\|A_2x_2-(b-A_1x_1)\|_2+\eta_{A_2}\|x_2\|_2) \tag{20}$$

此问题同样可以化为 LMI 问题来求解:

定理 5　问题(17)可用如下的线性矩阵不等式求解:

Minimize λ

满足

$$\left.\begin{array}{l}\begin{bmatrix}\lambda-\tau & (A_2x_2-(b-A_1x_1))^T\\ (A_2x_2-(b-A_1x_1)) & (\lambda-\tau)I_{m\times m}\end{bmatrix}\ge0\\ \begin{bmatrix}\tau & (\eta_{A_2}x_2)^T\\ \eta_{A_2}x_2 & \tau I_{n\times n}\end{bmatrix}\ge0\quad \lambda-\tau\ge0\quad\tau\ge0\end{array}\right\} \tag{21}$$

证明略.

3.4　三种方法之间的联系

针对不同的误差限制,在前面分别给出了求解的方法. 从整个的求解过程可以看出,除因约束不同而带来的差异外,问题的形式及求解的方式是很相近的. 那么,它们之间会不会有什么联系呢? 下面来具体分析.

首先考虑问题(3)与(11)之间的关系. 对 $\|\delta A\|_2\le\eta_A$ 有下式成立:

$$\|\delta A_2\|\le\eta_A\Rightarrow\|\eta_A^{-1}\delta AI_{n\times n}\|_2\le1\Rightarrow$$

$$\left\|\delta A\begin{bmatrix}\eta_A & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \eta_A\end{bmatrix}^{-1}\right\|_2\le1$$

这相当于问题(3)中,$\eta_j=\eta_A$, $j=1,\cdots,n$, $\|\delta A\Lambda^{-1}\|_2\le1$ 的情况. 所以对于 $\|\delta A\|_2\le\eta_A$ 的情况,可以用定理 2 来求解,它只是这类问题的一个特殊情况.

下面再考虑(3)式与(17)式之间的关系. 由

$\|\delta A_2\|_2 \le \eta_{A_2}$可以推出

$$\|\delta A_2\|_2 \le \eta_{A_2} \Rightarrow$$

$$\left\| [\mathbf{0}_{m\times k} \quad \delta A_2] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} \\ \eta_{A_2}^{-1} I_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \right\|_2 \le 1 \Rightarrow$$

$$\left\| \delta A \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k\times k} \\ \eta_{A_2}^{-1} I_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix} \right\|_2 \le 1$$

其中$(n-k)$为δA_2的列数. 这对应问题(3)受如下约束的情况:

$$\eta_{j_1} = 0 \qquad j_1 = 1, \cdots, k \qquad \eta_{j_2} = \rho_{A_2}$$

$$j_2 = k+1, \cdots, n \qquad \|\delta A \Lambda^{-1}\| \le 1$$

此时Λ^{-1}为Λ的广义逆. 因而可以看出(17)式也是(3)式的一种特殊情况. 并且当无误差的列不相邻的时候,用定理5求解时,还须通过变换将之集中在一起,而用定理2只须令对应的$\eta_j = 0$即可. 由此可以看出在解决这类问题时,应用定理2更简便、实用.

综上所述,可知问题(3)包括了问题(11)、(17),解决问题的范围要广泛一些. 同时也给我们一个启示:无论误差的约束形式是怎样给的,只要它的等价形式与(3)式中的约束形式一致,就可用定理2来求解.

4 结论和进一步的研究

本文所提出了一类系数矩阵元素受不确定性界约束的参数估计问题并给出基于LMI的算法,与文献[3]、[4]中提出的问题相比更具一般性,具有更广泛的工程应用.

参 考 文 献

[1] Golub G H, Van Loan C F. An analysis of the total least squares problem[J]. SIAM J Numer Anal, 1980, 17:883～893.

[2] Huffel S Van, Vandewalle J. The total least squares problem: Computational aspects and analysis[M]. Philadelphia:SIAM,1991.

[3] Ghaoui L E, Lebret H. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1997, 10(4): 1035～1064.

[4] Chandrasekaran S, Golub G H, Gu M, *et al*. Parameter estimation in the presence of bounded data uncertainties[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1998, 11(4):235～252.

Parameter Estimation Based on LMI with Bounded Data Uncertainties

YANG Zhi-hui MAO Jian-qin

(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, School of Science)

WEI Ke-hui

(Academe of Engineering Physics, P. O. Box 517, Chengdu)

Abstract: A class of parameter estimation problem is put forth with bounded data uncertainties, and solved it based on linear matrix inequalities (LMI). The uncertainties are expressed by a priori bounds on perturbations of coefficient matrix and its elements, which covers some situations explored in [3] and [4] and is a more general one. Thus, the proposed method, which based on LMI, is simple, practical, and general. We analyzed the solution, and discussed several special cases, such as selected columns are subject to perturbations. Simulation results give more details of the proposed method.

Key words: parameter estimations; uncertain systems; least squares methods; linear matrix inequalities