

Asignación sobre las aplicaciones de los espacios tensoriales

Damian Steven Ospina ^{*}
Jose Mario Castillo Muñoz ^{**}
Universidad Industrial de Santander
Calle - 9 Cra. 27, Bucaramanga, Santander

23 de Mayo 2025

Índice

1. Introducción	2
2. Marco teórico	2
3. Tratamiento de datos	3
3.1. Descripción general del sistema	3
3.2. Momento centrado de orden 0	4
3.3. Momento centrado de orden 1	4
3.4. Momento centrado de orden 2	5
3.5. Modelo 2D	6
3.6. Modelo 3D	6
3.7. Obtención de autovalores y autovectores	7
4. Resultados finales	8
4.1. Sistema bidimensional	8
4.2. Sistema tridimensional	8
5. Conclusiones	9
5.1. Preguntas propuestas	9

*email:damian2201296@correo.uis.edu.co

**email:jose2210705@correo.uis.edu.co

Resumen

En este trabajo, se explora la versatilidad y eficacia de los espacios tensoriales en el análisis de dos conjuntos de datos distintos: la posición de un grupo de partículas con masa dentro de un volumen determinado y los registros del Banco Mundial sobre el gasto porcentual del Producto Interno Bruto (PIB) de Colombia en diversos sectores económicos, como la defensa, la ciencia y tecnología, la salud y la educación. En el caso del sistema de partículas con masa, se investigará la determinación de momentos centrados y su relación con la representación física del sistema. Para los datos económicos, se examinará cómo los tensores pueden ayudar a identificar patrones y relaciones que no son fácilmente detectables mediante técnicas convencionales.

1. Introducción

En el estudio de sistemas físicos con múltiples variables, especialmente aquellos que presentan simetrías o distribuciones espaciales complejas, los tensores emergen como herramientas fundamentales. En particular, el análisis del momento de inercia a través del tensor de inercia permite caracterizar de manera precisa cómo un sistema responde ante rotaciones en distintas direcciones.

Este proyecto se centra en el análisis de un sistema discreto de masas mediante el cálculo y diagonalización del tensor de inercia. La estructura del tensor contiene la información necesaria para describir cómo varía la inercia rotacional del sistema según el eje de rotación considerado. Al obtener los autovalores y autovectores del tensor, es posible identificar los momentos principales de inercia y los ejes principales correspondientes, simplificando el análisis dinámico del sistema.

Más allá de su relevancia en la física clásica, los tensores también son ampliamente utilizados en otras áreas como la inteligencia artificial y el procesamiento de datos de alta dimensionalidad. Su capacidad para representar relaciones complejas entre variables y su aplicabilidad en descomposiciones estructurales los convierte en herramientas versátiles para interpretar y simplificar datos con estructuras profundas.

En lo que sigue se detalla la metodología utilizada para construir el tensor a partir de datos experimentales, se muestra el procedimiento de diagonalización utilizando herramientas simbólicas, y se interpretan los resultados obtenidos, resaltando tanto su significado físico como la utilidad del sistema de referencia principal en el estudio de cuerpos extendidos.

2. Marco teórico

En el contexto de la física y el análisis matemático, los tensores permiten representar relaciones multilineales entre conjuntos de vectores, escalas y funciones. Estos objetos generalizan los conceptos de escalares, vectores y matrices, y son fundamentales para describir leyes físicas independiente del sistema de coordenadas utilizado.

Un aspecto central de los tensores es su comportamiento bajo transformaciones de coordenadas. Las componentes de un tensor cambian de forma específica cuando se pasa de un sistema de

referencia a otro, manteniendo la invariancia de las leyes físicas que representan. Esta propiedad resulta especialmente útil en mecánica clásica, donde los sistemas pueden describirse desde distintos marcos de referencia, pero las ecuaciones que gobiernan su evolución deben seguir siendo válidas en todos ellos.

En particular, el tensor de inercia describe cómo la masa de un sistema está distribuida en el espacio respecto a los distintos ejes. Al trabajar con sistemas discretos, se construye este tensor sumando las contribuciones individuales de cada masa. La diagonalización del tensor permite hallar los ejes principales de inercia, es decir, aquellos en los que la matriz de inercia se vuelve diagonal y el análisis del movimiento rotacional se simplifica.

El análisis tensorial se complementa con el uso de autovalores y autovectores, que indican las direcciones privilegiadas del sistema y los valores de inercia asociados a cada una y así entender el comportamiento de un sistema rotacional en su base principal no solo simplifica los cálculos, sino que proporciona una visión más clara de su estructura física y simétrica.

3. Tratamiento de datos

3.1. Descripción general del sistema

El sistema consiste en un conjunto discreto de masas distribuidas en el espacio tridimensional. Estas masas están especificadas por sus coordenadas cartesianas y se encuentran almacenadas en un archivo de datos en formato `.csv`. Cada fila del archivo contiene la posición de una masa y su valor correspondiente en unidades arbitrarias. El objetivo principal es analizar cómo está distribuida la inercia de este sistema respecto a diferentes ejes de rotación, a través del cálculo del tensor de inercia y su diagonalización.

Para llevar a cabo el análisis se desarrolló un script en `Python`, apoyado en bibliotecas como `NumPy`, `Pandas` y `SymPy`. Estas herramientas permitieron cargar y procesar los datos, calcular el tensor de inercia a partir de las posiciones y masas, y realizar operaciones simbólicas para encontrar autovalores y autovectores. A partir de estos se determinó el sistema de ejes principales de inercia y se analizó el comportamiento del sistema rotacional en ese marco natural.

La metodología se divide en varias etapas: carga y visualización inicial de los datos, construcción del tensor de inercia, cálculo de autovalores y autovectores, y finalmente la interpretación geométrica de los resultados mediante rotaciones del sistema de referencia.

3.2. Momento centrado de orden 0

El momento centrado de orden cero representa la masa total del sistema. Para un conjunto discreto de puntos, se define como la suma directa de las masas individuales:

$$\mu_0(m) = \sum_{i=1}^n m_i$$

Este escalar cuantifica la cantidad total de materia del sistema, y sirve como base para el cálculo de los momentos superiores. En nuestro análisis, el valor de M se obtiene directamente del archivo de datos, donde se registra el valor de cada masa. Este resultado sirve como punto de partida para la determinación del centro de masa y de los momentos de inercia centrados de orden superior.

En este caso, se verificó que la suma de las masas coincide con la esperada según el archivo original, permitiendo asegurar que el conjunto de datos está completo y que no hubo pérdidas o inconsistencias durante su carga y procesamiento.

3.3. Momento centrado de orden 1

El momento centrado de primer orden describe cómo se distribuyen las masas en torno a su centroide, y está relacionado directamente con la definición del centro de masa. Para un sistema discreto de partículas con masas m_i ubicadas en posiciones $|x\rangle_i$, este momento puede expresarse como:

$$\mu_1(m) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot (|x\rangle_i - |\tilde{x}\rangle)$$

donde $|\tilde{x}\rangle$ representa la posición promedio por masa, es decir, el centro de masa. Esta expresión equivale a trasladar el sistema al centroide y analizar la suma de las desviaciones respecto a él.

Por otro lado, si se desea calcular directamente la posición del centro de masa, se emplea la siguiente fórmula:

$$|\tilde{x}\rangle = \frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^n m_i \cdot |x\rangle_i$$

Esto nos permite expresar las coordenadas centradas de cada punto y facilita el cálculo de los momentos de orden superior. En este trabajo, este procedimiento fue aplicado al conjunto de datos cargado, lo que permitió recentrar el sistema antes de evaluar los momentos de segundo orden.

3.4. Momento centrado de orden 2

El momento centrado de segundo orden, también conocido como momento de inercia, permite describir cómo está distribuida la masa de un sistema con respecto a un punto de referencia, generalmente el centro de masa. Este momento es fundamental para analizar la resistencia del sistema a rotar en torno a distintos ejes y se expresa mediante una matriz simétrica de segundo orden.

Para sistemas continuos, el tensor de inercia se define como:

$$I_{ij} = \int_V \rho(r) (\delta_{ij} \|r\|^2 - r_i r_j) dV$$

donde $(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ y $\rho(r)$ es la densidad volumétrica. Sin embargo, para el caso discreto de N partículas puntuales, esta expresión se aproxima mediante una suma:

$$\mu_2(m) = \sum_{i=1}^N m_i (|x\rangle_i - |\tilde{x}\rangle)(|x\rangle_i - |\tilde{x}\rangle)^2$$

Este tensor encapsula la forma de la distribución de masas respecto al centroide y describe tanto la orientación como la elongación del sistema en el espacio tridimensional. Este procedimiento genera una matriz simétrica 3×3 , que encapsula la resistencia del sistema ante rotaciones en torno a cada uno de los ejes, el cual será diagonalizado más adelante para obtener los autovalores y autovectores asociados a los ejes principales de inercia.

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Este enfoque permite simplificar el análisis dinámico de cuerpos extensos, en especial cuando se desea estudiar su comportamiento bajo rotación.

3.5. Modelo 2D

Como primer paso en el análisis geométrico de la distribución de masas, se representó gráficamente el sistema proyectado en el plano XY. En esta visualización se muestran todas las partículas una vez centradas respecto al centro de masa, permitiendo identificar patrones de simetría o agrupamientos relevantes.

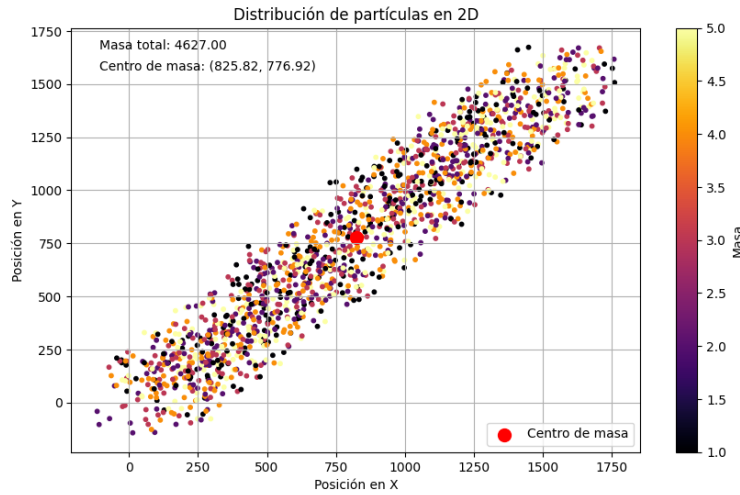


Figura 1: Distribución de masas proyectada en el plano XY, centrada respecto al centro de masa.

Esta representación resulta útil para tener una primera idea de la orientación general del sistema antes de realizar el análisis completo en tres dimensiones.

3.6. Modelo 3D

Para tener una visión completa de la distribución espacial de las masas, se generó una visualización tridimensional del sistema centrado en su centro de masa. Esta representación permite observar con mayor claridad la geometría del conjunto de partículas, así como su simetría y posibles alineamientos en el espacio.

Este modelo 3D sirve de base para interpretar los resultados posteriores del análisis tensorial, en particular para relacionar visualmente los autovectores obtenidos con la orientación principal del sistema.

Distribución de partículas en 3D

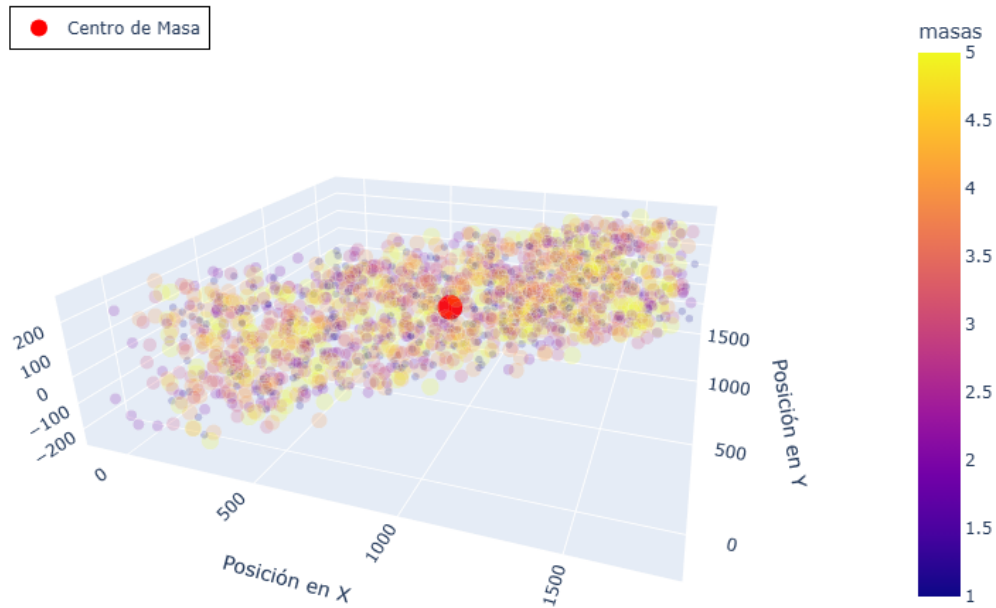


Figura 2: Distribución tridimensional de las masas centradas con respecto al centro de masa.

3.7. Obtención de autovalores y autovectores

Una vez construido el tensor de inercia a partir de la matriz de momentos centrados de orden dos, se procedió a calcular sus autovalores y autovectores. Este paso es fundamental porque permite identificar los ejes principales de inercia del sistema, es decir, las direcciones en las que el tensor se vuelve diagonal y las componentes están desacopladas.

Los autovalores representan los momentos principales de inercia respecto a cada eje propio, mientras que los autovectores definen la orientación de esos ejes con respecto al sistema de coordenadas original.

El cálculo fue realizado utilizando álgebra simbólica con ayuda de la biblioteca `SymPy`, obteniendo expresiones exactas para los autovalores y las direcciones asociadas. La verificación de la ortogonalidad de los autovectores permitió confirmar que el tensor es simétrico y, por lo tanto, diagonalizable mediante una matriz ortonormal.

4. Resultados finales

4.1. Sistema bidimensional

En el caso bidimensional, se analizaron las posiciones centradas de las masas proyectadas sobre el plano XY. A partir de estas se calcularon los siguientes resultados:

- Masa total del sistema: $\mu_0 = 4627$

- Centro de masa: $\vec{r}_c = (825,82, 776,92)$

- Tensor de inercia bidimensional:

$$\mathbb{I}_{2D} = \begin{bmatrix} 9,637 \cdot 10^8 & -9,117 \cdot 10^8 \\ -9,117 \cdot 10^8 & 9,585 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

- Autovalores:

$$I_1 = 4,935 \cdot 10^7, \quad I_2 = 1,873 \cdot 10^9$$

- Autovectores:

$$V = \begin{bmatrix} -0,706 & -0,708 \\ -0,708 & 0,706 \end{bmatrix}$$

4.2. Sistema tridimensional

A continuación se presentan los resultados obtenidos tras aplicar el modelo tridimensional al sistema de masas:

- Masa total del sistema: $\mu_0 = 4627$

- Centro de masa: $\vec{r}_c = (825,82, 776,92, 15,5)$

- Tensor de inercia (respecto al centro de masa):

$$\mathbb{I}_{3D} = \begin{bmatrix} 1,0655 \cdot 10^9 & -9,1175 \cdot 10^8 & 7,1420 \cdot 10^6 \\ -9,1175 \cdot 10^8 & 1,0604 \cdot 10^9 & 1,9296 \cdot 10^6 \\ 7,1420 \cdot 10^6 & 1,9296 \cdot 10^6 & 1,9222 \cdot 10^9 \end{bmatrix}$$

- Autovalores (momentos principales de inercia):

$$I_1 = 1,5117 \cdot 10^8, \quad I_2 = 1,9219 \cdot 10^9, \quad I_3 = 1,9749 \cdot 10^9$$

- Autovectores (ejes principales):

$$V = \begin{bmatrix} -0,7061 & 0,0469 & 0,7065 \\ -0,7088 & -0,0511 & -0,7042 \\ 0,0036 & -0,9975 & 0,0699 \end{bmatrix}$$

5. Conclusiones

5.1. Preguntas propuestas

1. **¿Los vectores base del sistema cartesiano constituyen una base propia para esta distribución de masa? Esto es: ¿Los vectores cartesianos son autovectores del tensor momento de inercia?**

No, los vectores base del sistema cartesiano no son autovectores del tensor momento de inercia. Esto se confirma al observar que los autovectores obtenidos no coinciden con las direcciones canónicas $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$, lo que indica que los ejes principales del sistema están rotados con respecto a la base cartesiana.

2. **Encuentre los ejes principales de inercia para esta distribución de masas. Esto es aquellos vectores propios del tensor de inercia, que forma una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma más simple.**

Los ejes principales corresponden a los autovectores del tensor de inercia, que forman una base ortogonal en la que el sistema presenta sus momentos principales de inercia. Estos autovectores están representados por las columnas de la matriz V presentada en la sección de resultados.

3. **Encuentre la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales.**

La matriz de transformación entre la base cartesiana y la base formada por los autovectores es precisamente la matriz V cuyos vectores columna son los autovectores ortonormales del tensor de inercia. Esta matriz permite cambiar de coordenadas a un sistema en el que la distribución de masa está diagonalizada.

Referencias

- [1] HERNÁNDEZ, H. Y NUÑES, L., *Matematicas avanzadas de los espacios lineales al análisis vectorial, con aplicaiones en Maxima*, Colombia 2021.
- [2] ROMAN, P., (1968) *Some modern mathematics for physicists and other outsiders: An introduction to algebra, topology, and functional analysis*. Pergamon Press.
- [3] GOLDSTEIN, H., POOLE, C., SAFKO, J., *Classical Mechanics*, 3rd ed., Addison-Wesley, 2002.
- [4] SymPy Development Team, *SymPy: Python library for symbolic mathematics*, <https://www.sympy.org>