Problemas Tercera Semana - 21 de Febrero

1) Considere un sistema con el lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 Sen^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}Cos y + \dot{z})^2$$

$$\frac{1}{2}b(\dot{x}^2 Cos^2 y + 2\dot{x}Cos y\,\dot{z} + \dot{z}^2)$$

donde a y b son constantes.

a. Derive las ecuaciones de movimiento del sistema.

Las variables del sistema son x, y, z:

→ Para x, la ecuación de movimiento es:

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}Sen^2 y + b\dot{x}Cos^2 y + bCos y\,\dot{z}$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = a[(\ddot{x})(Sen^2 y) + (\dot{x})(2Sen(y)Cos(y)\dot{y})] + b[(\ddot{x})(Cos^2 y) + (\dot{x})(-2Cos(y)Sen(y)\dot{y}) + (-Sen y)(\dot{z})\dot{y} + (Cos y)(\ddot{z})]$

- $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}a(\dot{x}^2 Sen^2 y + \dot{y}) + \frac{1}{2}b(\dot{x}Cos y + \dot{z})^2\right] = 0$

Por tanto, la ecuación de Euler-Lagrange queda de la forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = a\ddot{x}Sen^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}Sen(y)Cos(y) + b\ddot{x}Cos^2 y - 2b\dot{x}\dot{y}Cos(y)Sen(y) - b\dot{z}Sen y\,\dot{y} + bCos y\,\ddot{z}$$

→ Para y, la ecuación de movimiento es:

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = a\dot{y}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = a\ddot{y}$

- $\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}a\dot{x}^2 Sen^2 y + \frac{1}{2}b\dot{x}^2 Cos^2 y + b\dot{x}Cos y\,\dot{z}\right)$

$= \frac{1}{2}a\dot{x}^2(2Sen y\,Cos y) + \frac{1}{2}b\dot{x}^2(-2Cos y\,Sen y) + b\dot{x}\dot{z}(-Sen y)$

$= a\dot{x}^2 Sen y\,Cos y - b\dot{x}^2 Cos y\,Sen y - b\dot{x}\dot{z}Sen y$

$= \dot{x}^2 Sen y\,Cos y(a-b) - b\dot{x}\dot{z}Sen y$

Por tanto, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = a\ddot{y} - \dot{x}^2 Sen y\,Cos y(a-b) + b\dot{x}\dot{z}Sen y$$

→ Para z, la ecuación de movimiento es:

• $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = b\dot{x}\cos y + b\dot{z}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = b\left[(\ddot{x})(\cos y) + (\dot{x})(-\operatorname{Sen} y)\dot{y} + \ddot{z}\right]$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = b\ddot{x}\cos y - b\dot{x}\dot{y}\operatorname{Sen} y + b\ddot{z}$

• $\frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}a(\dot{x}^2\operatorname{Sen}^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2\right] = 0$

Por tanto, la ecuación de Euler-Lagrange queda de la forma:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = b\ddot{x}\cos y - b\dot{x}\dot{y}\operatorname{Sen} y + b\ddot{z} - 0 = 0$

→ En general, las ecuaciones de movimiento quedan de la forma:

• $0 = \ddot{x}(a\operatorname{Sen}^2 y + b\cos^2 y) + 2\dot{x}\dot{y}(a\operatorname{Sen} y\cos y - b\cos y\operatorname{Sen} y) + b\dot{z}(\dot{z}\cos y - \operatorname{Sen} y)$

• $0 = a\ddot{y} - a\dot{x}^2\operatorname{Sen} y\cos y + b\dot{x}\operatorname{Sen} y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$

• $0 = b\ddot{x}\cos y - b\dot{x}\dot{y}\operatorname{Sen} y + b\ddot{z}$

b) Calcule e identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable este sistema?

A partir del lagrangiano se puede observar la dependencia explícita de las coordenadas $\dot{x}$, $\dot{y}$, y, $\dot{z}$.

Se puede concluir que el lagrangiano depende de $\dot{x}$ pero no de x, depende de $\dot{y}$ y de y, depende de $\dot{z}$ pero no de z.

A partir de esto, se puede concluir que el momento conjugado de x y de z se conservan:

$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\operatorname{Sen}^2 y + b\dot{x}\cos^2 y + b\cos y\,\dot{z}$; $\frac{d}{dt}P_x = 0 \Rightarrow P_x = Cte$

$P_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = b\dot{x}\cos y + b\dot{z}$; $\frac{d}{dt}P_z = 0 \Rightarrow P_z = Cte$

Volviendo al Lagrangiano, se puede observar que no tiene una dependencia explícita de tiempo, la función de energía se conserva:

$$E=(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L$$

$$E= \dot{x}(a\dot{x}\,Sen^2y + b\dot{x}Cos^2y + bCosy\,\dot{z}) + \dot{y}(a\dot{y}) + \dot{z}(b\dot{x}Cosy + b\dot{z})$$
$$- \frac{1}{2}a(\dot{x}^2Sen^2y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}Cosy + \dot{z})^2 = Cte$$

$$E = a\dot{x}^2Sen^2y + b\dot{x}^2Cos^2y + b\dot{x}\dot{z}Cosy + a\dot{y}^2 + b\dot{z}\dot{x}Cosy + b\dot{z}^2$$
$$-\left(\frac{1}{2}a\dot{x}^2Sen^2y + \frac{1}{2}a\dot{y}^2 + \frac{1}{2}b\dot{x}^2Cos^2y + b\dot{x}\dot{z}Cosy + \frac{1}{2}b\dot{z}^2\right) =$$

$$E = \frac{1}{2}a(\dot{x}Sen^2y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}^2Cos^2y + \dot{x}\dot{z}Cosy + \dot{z}\dot{x}Cosy + \dot{z}^2)$$

$$E = \frac{1}{2}a(\dot{x}Sen^2y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}^2Cos^2y + 2\dot{x}\dot{z}Cosy + \dot{z}^2)$$

$$E = \frac{1}{2}a(\dot{x}Sen^2y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}Cosy + \dot{z})^2$$

- En conclución, a partir del lagrangiano es posible deducir tres cantidades conservadas, el momento conjugado de x, de z y la energía. Dado que el sistema cuenta con tres grados de libertad, lo que deriva en tres ecuaciones de movimiento, y tres cantidades conservadas, se puede concluir que el sistema es integrable.

c) Calcule la energía del sistema:

$$E=(q_j, \dot{q}_j, t) \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = \frac{1}{2}a(\dot{x}Sen^2y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}Cosy + \dot{z})^2$$

d) Suponga que $y(t) = y_0 = Cte.$ es una solución. ¿Cuáles son $x(t)$ y $z(t)$ en este caso?

Del nuevo lagrangiano con $y(t) = y_0$ obtenemos:

$$P_x = a\dot{x}\,\mathrm{Sen}^2 y + b\dot{x}\,\mathrm{Cos}^2 y + b\,\mathrm{Cos}\,y\,\dot{z} = C_1$$

$$P_z = b\dot{x}\,\mathrm{Cos}\,y + b\dot{z} = C_2 \Rightarrow \dot{z} = \frac{C_2}{b} - \dot{x}\,\mathrm{Cos}\,y$$

Reemplazando en P_x:

$$P_x = a\dot{x}\,\mathrm{Sen}^2 y + b\dot{x}\,\mathrm{Cos}\,y + b\,\mathrm{Cos}\,y\left(\frac{C_2}{b} - \dot{x}\,\mathrm{Cos}\,y\right) = C_1$$

$$= a\dot{x}\,\mathrm{Sen}^2 y + b\dot{x}\,\mathrm{Cos}\,y + C_2\,\mathrm{Cos}\,y - b\dot{x}\,\mathrm{Cos}^2 y = C_1$$

$$= \dot{x}(a\,\mathrm{Sen}^2 y + b\,\mathrm{Cos}\,y - b\,\mathrm{Cos}^2 y) + C_2\,\mathrm{Cos}\,y = C_1$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{C_1 - C_2\,\mathrm{Cos}\,y}{a\,\mathrm{Sen}^2 y + b\,\mathrm{Cos}\,y - b\,\mathrm{Cos}^2 y}$$ Reemplazando en $\dot{z}$:

$$\Rightarrow \dot{z} = \frac{C_2}{b} - \left(\frac{C_1 - C_2\,\mathrm{Cos}\,y}{a\,\mathrm{Sen}^2 y + b\,\mathrm{Cos}\,y - b\,\mathrm{Cos}^2 y}\right)\mathrm{Cos}\,y$$

$$= \dot{z} = \frac{C_2}{b} - \frac{C_1\,\mathrm{Cos}\,y - C_2\,\mathrm{Cos}^2 y}{a\,\mathrm{Sen}^2 y + b\,\mathrm{Cos}\,y - b\,\mathrm{Cos}^2 y}$$

Cuando $y = \frac{\pi n}{2}$; $\mathrm{Cos}\,y = \mathrm{Cos}^2 y = 0$

$$\dot{x} = \frac{C_1 - C_2\,\mathrm{Cos}(\frac{\pi n}{2})}{a\,\mathrm{Sen}^2(\pi n/2) + b\,\mathrm{Cos}(\frac{\pi n}{2}) - b\,\mathrm{Cos}^2(\frac{\pi n}{2})} = \frac{C_1}{a}$$

$$\dot{z} = \frac{C_2}{b} - \dot{x}\,\mathrm{Cos}\,y = \frac{C_2}{b}$$

Cuando $y = n\pi$; $\mathrm{Sen}\,y = \mathrm{Sen}^2 y = 0$

$$\dot{x} = \frac{C_1 - C_2\,\mathrm{Cos}(n\pi)}{a\,\mathrm{Sen}^2(n\pi) + b\,\mathrm{Cos}(n\pi) - b\,\mathrm{Cos}^2(n\pi)} = \frac{C_1 + C_2}{-2}$$

$$\dot{z} = \frac{C_2}{b} - \left(\frac{C_1 + C_2}{-2}\right)\mathrm{Cos}\,y = \frac{C_2}{b} - \frac{C_1 + C_2}{2} = \frac{2C_2 - bC_1 + bC_2}{2b}$$

2) Una partícula de masa m se mueve en el potencial unidimencional.

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$

- $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{2\alpha V_0 \operatorname{Senh} \alpha x}{\cosh^3 \alpha x}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - \frac{2\alpha V_0 \operatorname{Senh} \alpha x}{\cosh^3 \alpha x}$

Dado que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, la energía se conserva:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

3) El Langragiano de un sistema se puede ~~e~~expresar como:

$$L = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

donde a, b y c son constantes, pero sujetas a la condición $b^2 - ac \neq 0$.

→ Hallando la ecuación de movimiento para la coordenada x:

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = ma\dot{x} + mb\dot{y}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = ma\ddot{x} + mb\ddot{y}$

- $\frac{\partial L}{\partial x} = -kax - kby$

La ecuación de movimiento para x es:

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = ma\ddot{x} + mb\ddot{y} + kax + kby = 0$

→ Hallando la ecuación de movimiento para la coordenada y:

- $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = mb\dot{x} + mc\dot{y}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = mb\ddot{x} + mc\ddot{y}$

- $\frac{\partial L}{\partial y} = -kbx - kcy$

La ecuación de movimiento para y es:

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = mb\ddot{x} + mc\ddot{y} + kbx + kcy = 0$

b) Calcule e identifique las cantidades conservadas:

Dado que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, podemos concluir que la función de la energía se conserva:

$$E = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = (ma\dot{x} + mb\dot{y})\dot{x} + (mb\dot{x} + mc\dot{y})\dot{y}$$
$$- \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$$

$E = max^2 + mb\dot{y}\dot{x} + mb\dot{y}\dot{x} + mc\dot{y}^2 - \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2)$
$+ \frac{k}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2)$

$E = \frac{m}{2}(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) + \frac{k}{2}(ax^2 + bxy + cy^2)$

Partiendo de las ecuaciones de movimiento obtenidas, se observa que son lineales, y por tanto, diagonalizables:

$m(a\ddot{x} + b\ddot{y}) = -k(ax + by)$

$m(b\ddot{x} + c\ddot{y}) = -k(bx + cy)$

Escrito de forma matricial:

$m\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -k\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

Si hallamos el determinante de la matriz M:

$\det(M) = ac - b^2$ donde $b^2 - ac = -\det(M) \neq 0$
$\Rightarrow \det(M) \neq 0$

Este resultado nos garantiza que M es diagonalizable:

$\det(M - \lambda I) = 0$

$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$

$\Rightarrow ac - \lambda a - \lambda c - \lambda^2 - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a+c) + (ac - b^2) = 0$

$\Rightarrow \lambda = (a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(1)(ac - b^2)}\,/2(1)$

$\Rightarrow \lambda = a + c \pm \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2}\,/2$

$\lambda = (a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\,/2$

Donde $\lambda_1 = (a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\,/2$

$\lambda_2 = (a+C) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}\,/2$

Una vez hallados los autovalores, calculamos los autovectores de la forma:

$$M v_1 = \lambda_1 v_1 \quad \wedge \quad M v_2 = \lambda_2 v_2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} v_1 = \lambda_1 v_1 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} v_2 = \lambda_2 v_2$$

Construimos una matriz ortogonal O con los autovectores:

$$O = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow O^T M O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Punto 4

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial U}{\partial r} \quad , \quad U(r, \dot{r}) \qquad (1)$$

El ejercicio nos dice que la fuerza está dada por

$$F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right]$$

$$F = \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2} + \frac{2\ddot{r}}{c^2 r} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{r}} = U_{\dot{r}} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial r} = U_r \text{ , entonces}$$

$$\frac{d}{dt}(U_{\dot{r}}) = U_{r\dot{r}}\,\dot{r} + U_{\dot{r}\dot{r}}\,\ddot{r}$$

↳ regla de la cadena

Por lo tanto (1) quedaría de la siguiente manera

$$F = U_{r\dot{r}}\,\dot{r} + U_{\dot{r}\dot{r}}\,\ddot{r} - U_r \qquad (3)$$

Comparamos (2) y (3)

$$U_{\dot{r}\dot{r}} = \frac{2}{c^2 r} \quad (*) \quad , \quad U_{r\dot{r}}\,\dot{r} - U_r = \frac{1}{r^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2} \quad (**)$$

Integramos $(*)$ respecto a $\dot{r}$

$$U_{\dot{r}} = \int \frac{2}{c^2 r}\, d\dot{r} = \frac{2\dot{r}}{c^2 r} + A(r) \qquad (4)$$

Volvemos a derivar respecto a $\dot{r}$ para obtener $U(r, \dot{r})$

Primero La Vida · Empatía · Enfoque a Resultados · Trabajo en equipo con Responsabilidad Individual · Integridad

$$U = \int \frac{2\dot{r}}{c^2 r} + A(r)\, d\dot{r} = \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + A(r)\dot{r} + B(r) \quad (5)$$

Derivamos (5) respecto a r para hallar U_r

$$U_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + A(r)\dot{r} + B(r)\right)$$

$$= -\frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2} + A'(r)\dot{r} + B'(r) \quad (6)$$

Derivamos (4) respecto a r para hallar $U_{r\dot{r}}$

$$U_{r\dot{r}} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\dot{r}}{c^2 r} + A(r)\right)$$

$$= -\frac{2\dot{r}}{c^2 r^2} + A'(r) \quad (7)$$

Sustituimos (6) y (7) en (**)

$$-\cancel{\frac{2\dot{r}^2}{c^2 r^2}} + \cancel{A'(r)\dot{r}} + \cancel{\frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2}} - \cancel{A'(r)\dot{r}} - B'(r) = \frac{1}{r^2} - \cancel{\frac{\dot{r}^2}{c^2 r^2}}$$

Despejamos $B'(r)$

$$B'(r) = -\frac{1}{r^2}$$

Integramos respecto a r

$$B(r) = -\int \frac{1}{r^2}\, dr = \frac{1}{r} + c^{=0}$$

A(r) es un termino lineal en $\dot{r}$ que depende solo de r, al realizar, d/dt este termino desaparece por lo que podemos tomar por conveniencia

A(r) = 0 y reemplazamos estos resultados en (5)

Por lo tanto el potencial generalizado es:

$$U(r,\dot{r}) = \frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + \frac{1}{r}$$

Usando coordenadas polares la energía cinética sería

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}\right)$$

Por lo tanto el Lagrangiano $\mathcal{L} = T - U$ del sistema es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m\left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - \left(\frac{\dot{r}^2}{c^2 r} + \frac{1}{r}\right)$$