Punto 1

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{\epsilon}{r^2}$$

$$f(r) = -\frac{1}{m}\frac{dV}{dr} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{2\epsilon}{mr^3}$$

hacemos la sustitución $u = 1/r \rightarrow r = \frac{1}{u}$

$$V(\tfrac{1}{u}) = -GMm\,u + \epsilon u^2$$

$$f(\tfrac{1}{u}) = -GMu^2 + \frac{2\epsilon}{m}u^3$$

Aplicamos la ecuación de Binet

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{L^2} - \frac{2\epsilon}{mL^2}u$$

→ momentum angular

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{2\epsilon}{mL^2}\right)u = \frac{GM}{L^2}$$

La solución del problema no perturbado de Kepler es

$$u_0(\phi) = \frac{GM}{L^2}(1 + e\cos\phi)$$

Con la perturbación, el termino u oscila con una frecuencia angular en ϕ

$$u(\phi) = \frac{GM}{L^2}\left(1 + e \cos\left(\sqrt{1 - \frac{2\epsilon}{mL^2}}\,\phi\right)\right)$$

Para ϵ muy pequeños

$$\sqrt{1 - \frac{2\epsilon}{mL^2}} \approx 1 - \frac{\epsilon}{mL^2}$$

oscilación

Por lo tanto

$$\cos\left(\left(1 - \frac{\epsilon}{mL^2}\right)\phi\right)$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{1 - \frac{\epsilon}{mL^2}} \approx 2\pi\left(1 + \frac{\epsilon}{mL^2}\right)$$

$$\chi = \Delta\phi - 2\pi$$

$$\chi = \frac{2\pi\epsilon}{mL^2}$$

Problemas Quinta Semana - Marzo 7

2) Estudiar el movimiento de una partícula en un campo de fuerzas centrales que sigue la ley de proporcionalidad a la inversa del cuadrado de la distancia y se superpone otra fuerza.

$$F(r) = -\frac{K}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3} \quad \text{con} \quad K, \lambda > 0$$

- Demuestre que el movimiento está representado por una elipse en precesión.

Primero vamos a describir la forma de la orbita en terminos de la distancia relativa r en función del ángulo θ partiendo de la ecuación de Binet para llegar a una ecuació diferencial.

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{\mu}{L^2} r^2 F(r) \quad \text{donde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

→ Hallamos y reemplazamos

$$r^2 F(r) = r^2\left(-\frac{K}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}\right) = -K - \frac{\lambda}{r} = -K - \lambda u$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-\mu}{L^2}\left(-K - \lambda u\right) = \frac{\mu K}{L^2} + \frac{\lambda \mu u}{L^2}$$

→ Agrupamos $u(\theta)$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\left(1 - \frac{\lambda\mu}{L^2}\right) = \frac{\mu K}{L^2}$$

→ Definimos $\beta^2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{L^2}$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \beta^2 u = \frac{\mu K}{L^2}$$

Llegamos de esta forma a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden e inhomogenea. Para resolverla tenemos que hallar una solución particular que será constante y una solución homogenea:

- $u_p \Rightarrow \frac{d^2u_p}{d\theta^2} + \beta^2 u_p = \frac{\mu K}{L^2} \Rightarrow 0 + \beta^2 u_p = \frac{\mu K}{L^2} \Rightarrow u_p = \frac{\mu K}{\beta^2 L^2}$

- $u_h \Rightarrow A\cos(\beta\theta) + B\cos(\beta\theta) = C\cos(\beta\theta - \theta_0)$

$* \; e = \frac{C\beta^2 L^2}{\mu K} = cte$

Finalmente, la solución será:

$$u(\theta) = u_p + u_h = \frac{\mu K}{\beta^2 L^2} + C\cos(\beta\theta - \theta_0) = \frac{\mu K}{\beta^2 L^2}\left[1 + e\cos(\beta\theta - \theta_0)\right]$$

$$u(\theta) = \frac{\mu K}{\beta^2 L^2}\left[1 + e\cos(\beta\theta - \theta_0)\right] \Rightarrow r(\theta) = \frac{\beta^2 L^2}{\mu K}\left[\frac{1}{1 + e\cos(\beta\theta - \theta_0)}\right]$$

Cuando el factor de la fuerza superpuesta λ es cero:

$$\beta^2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{L^2} = 1 - \frac{(0)\mu}{L^2} = 1 \Rightarrow \beta = 1$$

Y se obtiene el problema de Kepler clásico:

$$u(\theta) = \frac{\mu K}{L^2}\left[1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right] \Rightarrow r(\theta) = \frac{L^2}{\mu K}\left[\frac{1}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\right]$$

El parametro β determina la frecuencia de oscilación radial, dado que el argumento del cos es $\beta\theta$ y no θ, provocando que el periodo angular sea de $\frac{2\pi}{\beta}$ y no de 2π. Esto produce la precesión de la elipse en cada ciclo porque la órbita no se cierra.

- Caso $\lambda < L^2/\mu$

Si definimos $N^2 < L^2$ y $v < \mu$ donde $\lambda = N^2/v$ obtenemos:

$$\beta^2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{L^2} = 1 - \frac{N^2}{v}\cdot\frac{\mu}{L^2} \Rightarrow \frac{N^2\mu}{L^2 v} < 1 \Rightarrow 0 < \beta < 1$$

Cuando esto se cumple, tras resolver la ecuacion diferecial llegamos a:

$$r(\theta) = \frac{\beta^2 L^2}{\mu K}\left[\frac{1}{1 + e\cos(\theta\beta - \theta_0)}\right] \rightarrow \text{Que representa una Elipse en precesión}$$

- Caso $\lambda = L^2/\mu$

Reemplazando en la definición de β^2 obtenemos:

$$\beta^2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{L^2} = \beta^2 = 1 - \frac{L^2\mu}{L^2\mu} \Rightarrow \beta = 0$$

Este resultado transforma la ecuación de Binet en:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + (0)u = \frac{\mu K}{L^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\mu K}{L^2}$$

Para $u_h \rightarrow$ Sus soluciones son funcione polinómicas lineales:

$$u_h = A\theta + B$$

Esta solución homogenea nos obliga buscar una solución particular que no este contenida en la homogenea:

Para $u_p \rightarrow$ $u_p = C\theta^2 \Rightarrow \frac{d^2 u_p}{d\theta^2} = 2C \Rightarrow 2C = \frac{\mu K}{L^2}$

Por tanto, $C = \frac{\mu K}{2L^2} \wedge u_p = \frac{\mu K}{2L^2}\theta^2$

La solución general será:

$$u(\theta) = \frac{\mu K}{2L^2}\theta^2 + A\theta + B$$

Obtenemos como solución un polinomio en θ diferente a la función sinusoidal que se espera de una elipse, se llega a la conclusión de que la trayectoria no es una elipse ni ninguna otra forma con un comportamiento oscilatorio regular. La fuerza parece ser lo suficientemente grande como para anular las oscilaciones del sistema.

- Caso $\frac{L^2}{\mu} < \lambda$

Obtenemos $\beta^2 = 1 - \frac{\lambda u}{L^2} < 0 \Rightarrow \beta^2 < 0$

$\rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta} - \beta^2 = \frac{\mu K}{L^2}$ • $u_h(\theta) = A\cosh(\beta\theta) + B\operatorname{Senh}(\beta\theta)$

• $u_p = C \Rightarrow -\beta^2 C = \frac{\mu K}{L^2} \Rightarrow C = -\frac{\mu K}{\beta^2 L^2}$

La solución general será: $u(\theta) = A\cosh(\beta\theta) + B\operatorname{Senh}(\beta\theta) - \frac{\mu K}{\beta^2 L^2}$

Para este caso tampoco se presenta un comportamiento oscilatorio, por tanto, la trayectoria no es del tipo de una conica cerrada sino que diverge a causa de las funciones hiperbólicas. La fuerza superpuesta es tan grande que rompe la oscilación y conduce a una solución no acotada, equivalente a afirmar que la partícula se esta alejando indefinidamente o esta cayendo al centro que produce esa fuerza.

Punto 3

a)

$$E = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GMm}{r}$$

$\downarrow$

Energía de la sonda

$r \to \infty$

$E > 0 \to$ trayectoria hiperbólica

$$L = m v_0 b$$

$\downarrow$

momentum angular

En r_{min}, $\dot{r} = 0$ por tanto

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r_{min}^2} - \frac{GMm}{r_{min}}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v_0^2 b^2}{m r_{min}^2} - \frac{GMm}{r_{min}}$$

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 b^2}{r_{min}^2} - \frac{GM}{r_{min}}$$

$$v_0^2 r_{min}^2 = v_0^2 b^2 - 2 GM r_{min}$$

$$\to V_0^2 r_{min}^2 + 2 GM r_{min} - V_0^2 b^2 = 0$$

Como r es siempre positiva, tomamos la solución positiva de la E.D de Segundo orden.

$$r_{min} = \frac{-2GM + \sqrt{(2GM)^2 - 4(v_0^2)(-v_0^2 b^2)}}{2v_0^2}$$

$$= \frac{-2GM + \sqrt{4G^2M^2 + 4v_0^4 b^2}}{2v_0^2}$$

$$r_{min} = \frac{-GM + \sqrt{G^2M^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}$$

b) $e = \sqrt{1 + \frac{b^2 v_0^4}{G^2M^2}}$

$\downarrow$

exentricidad

$$\chi = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2 v_0^4}{G^2M^2}}}\right)$$

$$\chi = 2\tan^{-1}\left(\frac{GM}{b v_0^2}\right)$$

4) Un cometa de masa m se mueve en una trayectoria parabólica alrededor del sol y cruza la órbita terrestre. Suponga que la orbita terrestre es circular y que está en el mismo plano que la trayectoria del cometa. Encuentre el máximo número de días que el cometa puede permanecer dentro de la órbita de la Tierra.

Asumimos el lagrangiano en coordenadas polares:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) \qquad U = -\frac{GMm}{r}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \frac{GMm}{r}$$

M = masa de la tierra
m = masa del cometa

Observamos que el lagrangiano depende de $\dot\theta$ pero no de θ y que, no depende explicitamente del tiempo:

Luego se conserva el momento angular $L = mr^2\dot\theta = Cte$

Se concerva la energía total mecánica $E = Cte$

Usando $L = mr^2\dot\theta = mh \Rightarrow h = r^2\dot\theta$

Donde h es el momento angular por unidad de masa.

Aplicando Euler-Lagrange:

- $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = mr^2\dot\theta$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) = m2r\dot\theta + mr^2\ddot\theta$ • $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$

- $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r} = m\dot r$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r}\right) = m\ddot r$ • $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} = mr\dot\theta^2 - \frac{GMm}{r^2}$

Para θ: $m(2r\dot\theta + r^2\ddot\theta) = 0 \Rightarrow \ddot\theta = -2\dot\theta/r \Rightarrow -2h/r^3$

Para r: $m\ddot r = mr\dot\theta^2 - \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow \ddot r = r\left(\frac{h}{r^2}\right)^2 - \frac{GM}{r^2}$

$$\ddot r = \frac{h^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}$$

En consecuencia se conserva la energía específica y además será cero, también se conserva el momento angular específico.

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0$$

Donde $\frac{v^2}{2}$ es la energía cinética por unidad de masa y μ/r es la energía potencial por unidad de masa.

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

* $h = r v_t$ es el momento angular por unidad de masa
* $h = q v_p$ Donde q es la distancia del perihelio

Reemplazando la velocidad en el perihelio $v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{q}}$

$$\Rightarrow h = q\sqrt{\frac{2\mu}{q}} = \sqrt{2\mu q}$$

Usando la ecuación orbital de un satélite de masa m que órbita alrededor de un cuerpo central de masa M y $h = r^2\dot{\theta}$ obtenemos:

$$r(\theta) = \frac{h^2}{\mu(1+e\cos\theta)}$$

Para trayectorias parabolicas se cumple que $e=1$

$$r(\theta) = \frac{h^2}{\mu(1+e\cos\theta)}$$

Reemplazando en $\dot{\theta} = h/r^2$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h\mu^2(1+\cos\theta)^2}{h^4} = \frac{\mu^2}{h^3}(1+\cos\theta) \Rightarrow \frac{\mu^2}{h^3}dt = \frac{1}{(1+\cos\theta)}d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^2}{h^3}(t-t_p) = \int_0^{\theta}\frac{1}{1+\cos\sigma}d\sigma \Rightarrow (t-t_p) = \frac{h^3}{2\mu^2}\left[\frac{1}{2}\tan\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\vartheta}{2}\right]$$

Esta igualdad parte de usar la ecuación de Barker para $e=1$.

→ Expresando $r(\theta)$ en terminos en terminos de la anomalia verdadera y la distancia del perihelio:

$$r(\vartheta) = \frac{h^2}{\mu(1+\cos\vartheta)} = \frac{2\mu q}{\mu(1+\cos\vartheta)} = \frac{2q}{(1+\cos\vartheta)}$$

Usando la identidad $1+\cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$

$$r(\vartheta) = \frac{q}{\cos^2(\vartheta/2)}$$

El tiempo total que el cometa permanece dentro de la órbita terrestre, alcanza un máximo cuando la distancia del perihelio es la mitad del radio de la orbita terrestre:

$q = \frac{R_T}{2}$ Para $r = R_T$ obtenemos:

$r = \frac{q}{\cos^2 \vartheta/2} \Rightarrow R_T = \frac{R_T}{2} \frac{1}{\cos^2 \vartheta/2} \Rightarrow \cos^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Esto ocurre cuando $\frac{\vartheta}{2} = 45^\circ \Rightarrow \vartheta = 90^\circ$

El cometa cruza la orbita terrestre cuando $\vartheta = 90^\circ$, ahora reemplazamos en la ecuación de Barker:

$t - t_p = \frac{h^3}{2\mu^2}\left[\frac{1}{2}\tan\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\vartheta}{2}\right] = \frac{(2\mu q)^{3/2}}{2\mu^2} \cdot \frac{1}{2}\left[\tan\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\vartheta}{2}\right]$

$t - t_p = \sqrt{\frac{q^3}{2\mu}}\left[\tan\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3}\tan^3\frac{\vartheta}{2}\right]$ Expresado en terminos de la distancia q y ángulo ϑ

Donde $q = \frac{R_T}{2} \wedge \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \tan 45^\circ = 1$

$t - t_p = \sqrt{\frac{R_T^3}{16\mu}}\left[1 + \frac{1}{3} \cdot 1\right] = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{R_T^3}{\mu}}$

Este es el tiempo desde que ingresa el cometa hasta que llega al perihelio, pero como su trayectoria parabolica es simetrica, será el doble de este tiempo:

$\Delta t_{max} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{R_T^3}{\mu}}$ Relacionamos con el periodo orbital de tierra:

$T_E = 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{\mu}} \Rightarrow \sqrt{\frac{R_T^3}{\mu}} = \frac{T_E}{2\pi}$

$\Delta t_{max} = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_E}{2\pi} = \frac{T_E}{3\pi} = \frac{365 \text{ dias}}{3\pi} \approx 38.73 \text{ dias}$

Punto 5:

$r = a(1+\cos\theta)$

a) $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1+\cos\theta)}$

Usando la ecuación de Binet

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mr^2}{L^2}F(r)$$

hallamos $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{3}{a(1+\cos\theta)^2}$$

$$(1+\cos\theta) = \frac{r}{a}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{3a}{r^2}$$

$$\rightarrow \frac{3a}{r^2} = -\frac{mr^2}{L^2}F(r)$$

$$F(r) = \frac{L^2}{m}\frac{3a}{r^4}$$

Por tanto la fuerza central que produce la órbita r es:

$$\boxed{F(r) = -\frac{3L^2 a}{m r^4}}$$

b) $$L = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Despejamos $\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$$

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{m r^2}{L} d\theta$$

$$T = \frac{m a^2}{L^2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos\theta)^2 d\theta$$

$$T = \frac{m a^2}{L} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) d\theta$$

Resolvemos la integral

$$T = \frac{ma^2}{L}(2\pi + 0 + \pi)$$

$$T = \frac{3\pi\, ma^2}{L}$$

c) Para que la particula logre escapar la energia total debe ser mayor o igual a cero.

$$E \; \frac{1}{2}\mu v^2 + V(r)$$

$$v = \frac{L}{\mu r}$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{L}{\mu r}\right)^2 + V(r) \geq 0$$

De tal forma que la energia minima para que la particula logre escapar es

$$E_{min} = 0$$

Esto quiere decir que la praticula no necesita energia extra para escapar.

Punto 6

$M_T \equiv$ masa de la tierra

$v_T \equiv$ Velocidad de la tierra

$$M_c = \frac{M_T}{8} \qquad v_c = -5\, v_T$$

masa del cometa — velocidad del cometa

a)

Conservación del momento angular

$$M_T v_T - \frac{5}{8} M_T v_T = \left(M_T + \frac{M_T}{8} \right) v_F$$

velocidad despues de la colición

$$\left(1 - \frac{5}{8}\right) M_T v_T = \frac{9}{8} M_T v_F$$

$$\frac{3}{\cancel{8}} \cancel{M_T} v_T = \frac{9}{\cancel{8}} \cancel{M_T} v_F$$

$$\hookrightarrow v_F = \frac{1}{3} v_T$$

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{G M_s \mu}{r}$$

masa del sol

Energía total

masa efectiva del sistema

$r = R \rightarrow$ Distancia Tierra - Sol

Energía Inicial

$$E_{inicial} = \frac{1}{2} M_T v_T^2 - \frac{G M_S M_T}{R}$$

$$V_T^2 = \frac{G M_S}{R}$$ → ecuación de una órbita circular

$$E_{inicial} = \frac{1}{2} M_T \frac{G M_S}{R} - \frac{G M_S M_T}{R}$$

$$E_{inicial} = -\frac{G M_S M_T}{2R}$$

Energía Final

$$E_{final} = \frac{1}{2} (M_T + M_c) v_f^2 - \frac{G M_S (M_T + M_c)}{R}$$

$$V_f^2 = \frac{1}{9} V_T^2 = \frac{1}{9} \frac{G M_S}{R}$$

$$E_{final} = \frac{1}{2} \frac{9}{8} M_T \frac{1}{9} \frac{G M_S}{R} - \frac{9}{8} \frac{G M_S M_T}{R}$$

$$E_{final} = \frac{1}{16} \frac{G M_S M_T}{R} - \frac{9}{8} \frac{G M_S M_T}{R}$$

$$E_{final} = -\frac{17}{16} \frac{G M_S M_T}{R}$$

Para un cuerpo en órbita elíptica, la energía total del semieje mayor es

$$E = -\frac{G M_s M_f}{2a}$$

Comparando con la energía final

$$-\frac{G M_s \left(\frac{9}{8} M_T\right)}{2a} = -\frac{17}{16}\frac{G M_s M_T}{R}$$

$$\frac{9}{16a} = \frac{-17}{16R}$$

$$\hookrightarrow a = \frac{9}{17} R$$

- Apelio $r_a = R$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} \implies r_p = 2a - r_a$$

$$r_p = 2\left(\frac{9}{17} R\right) - R$$

$$r_p = \frac{18}{17} R - R$$

- Perihelio $r_p = \frac{R}{17}$

b) Usando la Tercera Ley de Kepler

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G M_s}}$$

Periodo antes del choque

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{G M_s}}$$

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{a^3}{R^3}} = \left(\frac{a}{R}\right)^{3/2}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{9}{17}\right)^{3/2} \simeq 0.384$$

Si suponemos que 1 año terrestre dura 365 días

$$T = (0.384) \cdot (365) = \boxed{140 \text{ Días}}$$