2 de Febrero del 2025

• Blog de Desarrollo de Actividades Mecánica Clásica

1) Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10m de altura, tienen 5m de profundidad.

a. Primero se calcula la velocidad a la que un clavadista entra al agua saltando desde una altura de 10m.

Se desprecia la altura conseguida al saltar de la plataforma y se asumen la altura y el peso de Orlando Duque, clavadista Colombiano, estos corresponden a 1.75m y 72kg.

$U = mgh = (72)(10)(9.81) = 7063.2N$ al inicio del movimiento.

Asumiendo que no hay perdidas de energía por rozamiento:

$\frac{1}{2}mV_f^2 = mgh \Rightarrow V_f = \sqrt{2gh} = \sqrt{196.2} = 14{,}007 \approx \underline{14\,m/s}$

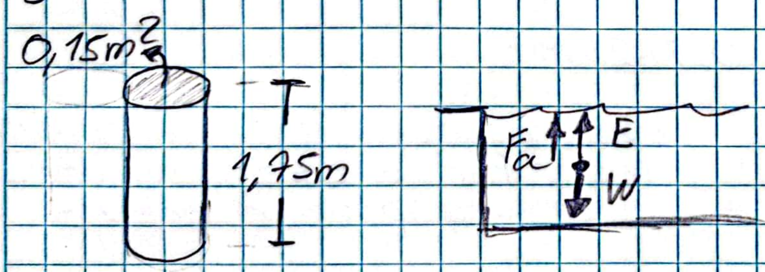
Ahora usamos la ecuación de caída libre para calcular el tiempo que le tomo llegar al agua:

$y = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$0 = 10 + 0 - \frac{1}{2}(9.81)t^2$

$t = \sqrt{\frac{20}{9.81}} = \sqrt{2.039} = \underline{1.43\ seg}$

Al entrar en el agua se plantea una sumatoria de fuerzas modelando al atleta como un cilindro de 1.75m de altura y $0.15m^2$ de area transversal.



Donde W es el peso, E es la fuerza de empuje y Fa es la fuerza de arrastre de un medio viscoso.

$\Sigma F_y = W - E - F_a = ma$

$F_a = \frac{1}{2}C\rho A V^2$ Donde C es el coeficiente de arrastre, ρ es la densidad del medio, A es el area transversal, m la masa

Se calcula el número de Raynolds para saber si el fluido es de flujo laminar o turbulento

• $Re = \frac{\rho_{H_2O} V D}{\mu}$ Donde ρ es la densidad del agua
V la velocidad
D es el diametro
μ es la viscosidad del agua.

$A = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$r = \sqrt{\frac{0.15}{\pi}} = \sqrt{0.0477} \approx 0.2186m$ © $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)\left(\frac{m}{S^2}\right)(m)\left(\frac{m S^2}{Kg}\right) = //$

$D = 2r = 0.437m$

Reemplazando en el calculo del número de Raynolds:

$$Re = \frac{(1000\ Kg/m^3)(14\ m/s)(0.44m)}{0.001} = 6.16 \times 10^6$$

Dado que $Re > 2.3 \times 10^3$; indica un flujo turbulento, para cilindros lisos en flujo axial, el coeficiente de arrastre oscila entre $Ca \approx 0.7 - 1.2$. Se decide tomar 0.8 como Ca.

→ La fuerza de arrastre crece con el cuadrado de la velocidad mientras que la fuerza de empuje depende del volumen, si calculamos el efecto de ambas fuerzas en su punto máximo, obtenemos:

$$*F_a = \frac{1}{2} \rho\, Ca\, A v^2 = \frac{1}{2}(1000\ kg/m^3)(0.8)(0.15m^2)(14m/s)^2$$

$$F_a = 11760\ Kg \cdot m/s^2 = 11760 N$$

$$*F_E = \rho g V_{sum} = (1000\ Kg/m^3)(9.81\ m/s^2)(0.2625m^3) \approx 2575 N$$

$$V_{sum} = A \cdot h = 0.15m^2 \cdot 1.75m = 0.2625m^3$$

© La fuerza de arrastre es 4.5 veces mayor que la de empuje es su punto de influencia máxima. Por lo tanto, se decide despreciar el efecto de la fuerza de empuje para el calculo de la profundidad alcanzada

• Ecuación de Movimiento

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_a = mg - \frac{1}{2}\rho Ca A v^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho Ca A v^2}{2m}$$

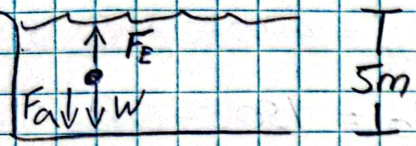
$$\frac{\rho Ca A}{2m} = K = 0.833\ \frac{Kg}{m} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = g - KV^2 \Rightarrow \int_{V_0}^{0} \frac{dV}{g - KV^2} = \int_0^t dt$$

$$\int_{V_0}^{0} \frac{dV}{g - KV^2} = \int_0^t dt \qquad S(t) = \int V(t)\,dt$$

$$V(t) = \sqrt{\frac{g}{K}} \tanh\left(\sqrt{gK}\, t\right) \qquad S(t) = \int \sqrt{\frac{g}{K}} \tanh\left(\sqrt{gK}\, t\right) dt$$

$V_{terminal} = 3.43\ m/s$ $\qquad S(t) = 3.53m$

Inciso B



$\Sigma F_y = F_E - W - F_a = m\ddot{x}$ $\qquad h = 5m$

$D = 5cm = 0.05m \qquad r = 0.025m$

Hallamos las fuerzas que actuan sobre el corcho:

La fuerza de empuje es constante porque el objeto se encuentra sumergido en todo momento.

$* F_E = \rho g V_{sum} \qquad V_{sum} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0.025)^3 \approx 6.54 \times 10^{-5} m^3$

$F_E = (1000\ Kg/m^3)(9.81\ m/s^2)(6.54 \times 10^{-5} m^3)$

$F_E = 0.642N$ $\qquad$ Asumiendo una densidad de $250\ Kg/m^3$

$* W = mg \qquad m = \rho \cdot V = 250\ Kg/m^3 \cdot 6.54 \times 10^{-5} m^3$

$W = 0.01635 Kg \cdot 9.81 m/s^2 \qquad m = 0.01635\ Kg$

$W = 0.160\ N$ $\qquad$ @ La densidad del corcho es un cuarto de la densidad del agua.

Se halla la fuerza neta con la que asciende el corcho para eventualmente igualarlo con la fuerza de arrastre y así hallar la velocidad terminal a la que e corcho llegará a la superficia.

$F_{neta} = F_E - W = 0.642N - 0.160N = 0.482N$

$F_a = \frac{1}{2} \rho_{agua} C_a A V^2$ $\quad$ Donde C_a es 0.47

$A = \pi r^2 = \pi(0.025)^2$

$F_a = \frac{1}{2}(1000\ Kg/m^3)(0.47)(0.00196m^2) V_t^2 \qquad A = 0.00196m^2$

$V_t = \sqrt{\frac{2(0.482)}{0.9212}} \approx \underline{1.023\ m/s} \qquad \sqrt{\frac{m}{Kg} \cdot Kg\ m/s^2} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = m$

Inciso C

La burbuja al ser de un gas ideal aumenta su volumen a medida que asciende dado que la presión es menor, como lo indica la ley de los gases ideales.

$V = \frac{nRT}{P}$ → Asumiendo que la temperatura se mantiene constante

$*P_{H_2O} = \rho_{agua} g h$ $\quad *P_{atm} = 101325\ Pa$ $\quad *P_{fondo} = 49050 + 101325$

$P_{H_2O} = (1000\ kg/m^3)(9.81\ m/s^2)(5m)$ $\quad P_{fondo} = 150375\ Pa$

$P_{H_2O} = 49050\ Pa$

Se halla el volumen que alcanza la burbuja una vez que llega a la superficie aplicando la ley de Boyle.

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 = \frac{4}{3}\pi(0.025)^3 = 6.545\times10^{-5}\ m^3$$

$$\rightarrow V_f P_f = V_0 P_0$$

$$V_f = V_0 \frac{P_0}{P_{atm}} = (6.545\times10^{-5} m^3)\left(\frac{150375\ Pa}{101325\ Pa}\right) = 9.71\times10^{-5} m^3$$

En general el volumen de la burbuja cambia de la forma:

$$V(y) = V_0 \frac{P_0}{P(y)}$$

*De esta forma se puede calcular la fuerza de empuje en todo momento $\quad F_E(y) = \rho \cdot g V(y)$

En este punto se asume que al tratarse de un gas ideal, su masa es despreciable y que su densidad es muy pequeña en comparación con la densidad del agua, esto implica que se desprecia el peso de la burbuja y que la fuerza de empuje es tan alta que alcanza su velocidad terminal en cada cambio de volumen.

$$F_a = \frac{1}{2}\rho_{agua} C_a A V^2$$

donde el area cambia a medida que aumenta el volumen a razón de:

$$V(y) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$r(y) = \sqrt[3]{\frac{3V(y)}{4\pi}}$$

$$\Rightarrow F_E(y) - F_a(v,y) = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow F_E(y) = F_a(v,y)$$

$F_E(y) = F_a(v, y)$

• Asumimos el coeficiente de la esfera como 0.5

$\cancel{\rho_{agua}} \cdot g \cdot V(y) = \frac{1}{2} \cancel{\rho_{agua}} C_a A(y) v^2$

$v = \sqrt{\frac{2 g V(y)}{C_a A(y)}}$ Donde $A(y) = \pi r^2(y)$ y $V(y) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A(y) = \pi \left(\frac{3 V(y)}{4\pi}\right)^{2/3}$

$r(y) = \sqrt[3]{\frac{3 V(y)}{4\pi}}$

$r_f = \sqrt[3]{\frac{3 V_f}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3(9.71 \times 10^{-5})}{4\pi}} = 0.0285\, m$

$A_f = \pi r_f^2 = \pi (0.0285)^2 = 2.554 \times 10^{-3}\, m^2$

Reemplazando en la velocidad terminal:

$v_t = \sqrt{\frac{2 g V_f}{C_a A_f}} = \sqrt{\frac{2(9.81)(9.71 \times 10^{-5})}{0.5(2.554 \times 10^{-3})}} = 1.22\, m/s$

Replanteamiento del inciso C

La burbuja aumenta su volumen a medida que ascienda dado que la presión es menor, según la ley de los gases ideales.

$V = \frac{nRT}{P}$ → Se asume una temperatura constante a lo largo del recorrido.

• $P_{atm} = 101325\, Pa$

• $P_{H_2O} = P_{atm} + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot y$

$P_{H_2O} = (101325) + (1000)(9.81)\, y$

$P_{H_2O} = 101325 + 9810 y$

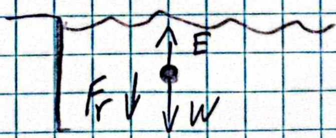
En el fondo la presión es de:

$P_{fondo} = 101325 + 9810 (5m)$

$= 150375\, Pa$

$* PV = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot y \cdot \frac{3}{4}\pi r^3 = \rho_{H_2O} \cdot g \cdot y_0 \cdot \frac{3}{4}\pi R^3$

$r = \sqrt[3]{\frac{y_0}{y}}\, R$



$\Sigma F_y = -m \cdot g - F_r + E = m \cdot a$

→ Analisis de Fuerzas

Se supone un flujo laminar dado que la velocidad de la burbuja no es suficiente para generar turbulencias en el agua.

Por lo tanto la fuerza que experimenta corresponde a una fuerza de rozamiento que se opone al desplazamiento

$F_r = 6\pi r u v$

Se ausume también que la masa de la burbuja es despreciable y que su densidad es mucho menor comparada con la densidad del agua, esto implica que se desprecia el peso de la burbuja y que la fuerza de empuje es tan alta que alcanza su velocidad terminal en cada momento.

Por lo tanto: $\sum F_y = E - F_r = 0$.

$\Rightarrow \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{sum} + 6\pi r u v = 0$

$\Rightarrow \rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{sum} + 6\pi r u \frac{dy}{dt} = 0$

→ Se asume que la burbuja esta completamente sumergida en todo momento

→ $V_{sum} = \frac{4}{3}\pi r^3 [m^3]$ donde $r = \sqrt[3]{\frac{y_0}{y}}\, R$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-\rho_{H_2O} \cdot g \cdot V_{sum}}{6\pi r u}$

→ $\rho_{H_2O} = 1000 [Kg/m^3]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-(1000)(9{,}81)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{6\pi r u}$

→ $u_{H_2O} = 0{,}001 [Pa \cdot S]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-(1000)(9.81)(4\pi r^3)}{18\pi r u}$

$R = 0{,}025$

$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2}{9} \cdot \frac{(1000)(9.81) r^2}{u} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{9810}{0{,}001} \left(\frac{y_0}{y}\right)^{2/3} R^2$

$K = \frac{2 \cdot 9810}{0{,}009}$

$K = 218 \times 10^4$

$\Rightarrow \int_0^y y^{2/3}\, dy = K y_0^{2/3} R^2$ → $\frac{dy}{dt} = \frac{K y_0^{2/3} R^2}{y^{2/3}}$

$K = 2{,}18 \times 10^6$

$K = 138.89$

$\frac{\cancel{Kg}}{\cancel{m^3}} \cdot \frac{m}{\cancel{s^2}} \cdot \cancel{m^3} \cdot \frac{\cdot}{\cancel{m}} \cdot \frac{m \cancel{s^2}}{\cancel{Kg}} = m$

Punto 2

a) $F = \frac{e}{c} V \times B$

Si el campo magnetico es uniforme y se orienta a dirección del eje z

$B = B\hat{k}$

$V = v\hat{\imath}$ → Partícula que entra perpendicularmente

$V \times B = v\hat{\imath} \times B\hat{k} = vB\hat{\jmath}$

$\therefore \quad F = \frac{e}{C} vB\hat{\jmath} \quad (1)$

Comparando (1) y (2)

$m\frac{dV}{dt} = \frac{e}{C} vB\hat{\jmath} \quad (5)$

Reemplazando (3) en (5)

$m\frac{v^2}{r} = \frac{e}{C} vB\hat{\jmath}$

Despejamos r

$r = \frac{mcv}{eB} \quad (6)$

Usando la segunda ley de Newton

$m\frac{dV}{dt} = F \quad (2)$

La aceleración centripeda está dada por

$\frac{dV}{dt} = \frac{v^2}{r} \quad (3)$

La frecuencia angular está dada por

$w = \frac{v}{r} \quad (4)$

Sustituyendo (6) en (4)

$w = \frac{v}{\frac{mcv}{eB}} = \frac{eB}{mc}$

Definimos

$w_c \equiv \frac{eB}{mc} \quad (7)$

$\therefore \quad r = \frac{mcv}{eB} = \frac{v}{w_c}$

b) $m \frac{dV}{dt} = eE + \frac{e}{c} V \times B$

donde

$B = B\hat{e}_z$

$E = E_y\,\hat{e}_y + E_z\,\hat{e}_z$

Si realizamos $V \times B$ y solo analizamos la componente $\hat{e}_z$

$V \times B = (V_x B_y - V_y B_x)\hat{e}_z$

Por lo tanto

$F_z = eE_z + \frac{e}{c}(V_x B_y - V_y B_x)$

Pero como B solo tiene componente en $\hat{e}_z$ el campo electrico no genera una fuerza en esta dirección, por tanto

$$m \frac{dV_z}{dt} = eE_z \quad (1)$$

Realizamos separación de variables y integramos

$$V_z(t) = V_z(0) + \frac{e}{m} E_z\, t \quad (2)$$

donde $V_z(0) = \dot{z}_0 \wedge V_z(t) = \dot{z}(t)$

Integrando nuevamente

$$z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2$$

Reemplazando $t = 0$

$$z(0) = z_0$$

c) Las ecuaciones de Newton para cada dirección son

$$m\frac{dV_x}{dt} = eE_y + \frac{e}{c}(V_y B_z) \quad (1)$$

$$m\frac{dV_y}{dt} = -\frac{e}{c}(V_x B_z) \quad (2)$$

La frecuencia está definida como

$$W_c = \frac{eB}{mc} \quad (*)$$

Reemplazando (*) en (1) y (2).

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{eE_y}{m} + W_c V_y \quad (3)$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -W_c V_x \quad (4)$$

Derivamos (3) respecto a t

$$\frac{d^2V_x}{dt^2} = W_c\frac{dV_y}{dt} + \frac{e}{m}\underbrace{\cancel{\frac{dE_y}{dt}}}_{\to 0}$$

$$\frac{d^2V_x}{dt^2} = -W_c^2 V_x$$

Las ecuaciones de un movimiento armonico simple son

$$V_x = A\cos(W_c t) + B\operatorname{Sen}(W_c t) + \frac{eE_y}{mW_c}. \quad (5)$$

$$V_y = -A\sin(W_c t) + B\cos(W_c t) \quad (6)$$

Integramos para optener $x(t)$ y $Y(t)$

$$x(t) = X_0 + \frac{e E_y}{m \omega_c} t + \frac{A}{\omega_c} \operatorname{Sen}(\omega_c t) - \frac{B}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \quad (7)$$

$$y(t) = Y_0 - \frac{A}{\omega_c} \cos(\omega_c t) - \frac{B}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t) \quad (8)$$

Para calcular el periodo del movimiento

$$T = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (**)$$

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt \quad (***)$$

Aplicamos $(***)$ en ⑤ y ⑥

$$\langle V_x \rangle = \frac{e E_y}{m \omega_c} = \frac{c E_y}{B} \quad (V)$$

$$\langle V_y \rangle = 0 \quad (VV)$$

de (V) se puede concluir que la partícula se desplaza en dirección x con una velocidad proporcional a E_y.

de (VV) podemos concluir que el movimiento es solo oscilatorio.