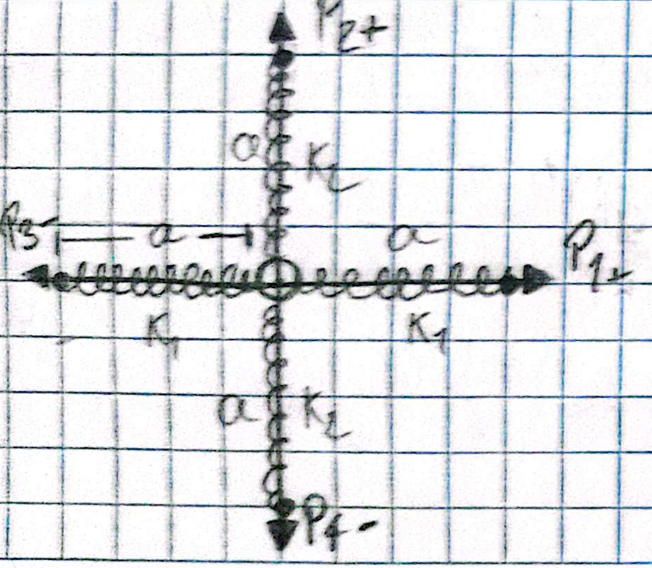
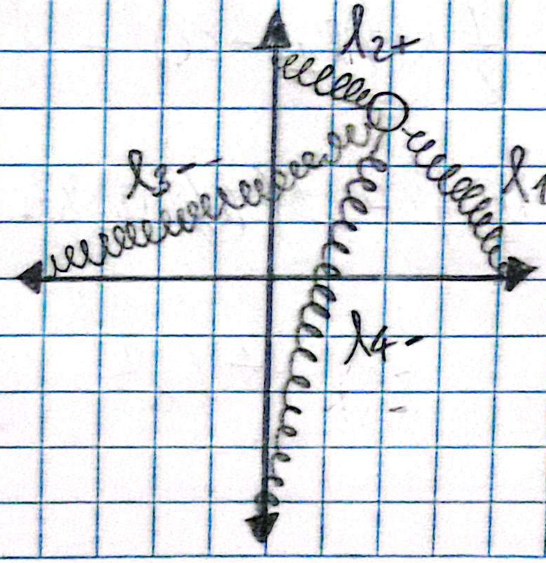




Dada la complejidad del sistema, se utilizará la formulación lagrangiana para describir el movimiento de la partícula:

Donde la energía cinetica de una masa que se mueve en xy es:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Mientras que para la energía potencial debemos considerar el siguiente análisis:

Donde P es el punto en el que esta anclado el resorte y L es su longitud inicial:

$* P_{1+} = L_1 \hat{\imath} \quad * P_{2+} = L_2 \hat{\jmath} \quad * P_{1-} = L_3(-\hat{\imath}) = -L_3 \hat{\imath} \quad * P_{2-} = L_4(-\hat{\jmath}) = -L_4 \hat{\jmath}$

Entonces la distancia entre la posición de la partícula y el punto de anclaje es:

$l_{i+} = \| \mathbb{r} - \mathbb{P}_{n+} \| \quad \wedge \quad l_{i-} = \| \mathbb{r} - \mathbb{P}_{n-} \|$

$\Rightarrow l_{1+}^2 = (x - L_1)^2 \hat{\imath} + y^2 \hat{\jmath} \qquad \Rightarrow l_{2+}^2 = x^2 \hat{\imath} + (y - L_2)^2 \hat{\jmath}$

$\Rightarrow l_{3-}^2 = (x + L_3)^2 \hat{\imath} + y^2 \hat{\jmath} \qquad \Rightarrow l_{4-}^2 = x^2 \hat{\imath} + (y + L_4)^2 \hat{\jmath}$

La elongación del resorte será: $\eta = l - a$

$$V = \frac{1}{2} k_1 \eta_{1+}^2 + \frac{1}{2} k_1 \eta_{2+}^2 + \frac{1}{2} k_2 \eta_{3-}^2 + \frac{1}{2} k_2 \eta_{4-}^2$$

Finalmente obtenemos el Lagrangiano del sistema:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} k_1 \eta_{1+}^2 - \frac{1}{2} k_1 \eta_{3-}^2 - \frac{1}{2} k_2 \eta_{2+}^2 - \frac{1}{2} k_2 \eta_{4-}^2$$

Aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para llegar a la ecuaciones de movimiento:

• $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$ • $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$ • $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$

• $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2} k_1 (l_{1+} - a)^2 - \frac{1}{2} k_1 (l_{3-} - a)^2 - \frac{1}{2} k_2 (l_{2+} - a)^2 - \frac{1}{2} k_2 (l_{4-} - a)^2\right)$

• $\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{2} k_1 \left[\left((x - L_1)^2 + y^2\right)^{1/2} + \left((x + L_3)^2 + y^2\right)^{1/2}\right] - \frac{1}{2} k_2 \left[\left(x^2 + (y - L_2)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(x^2 + (y + L_4)^4\right)^{1/2}\right]\right\}$

$$\bullet \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{2}k_1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[(x-L_1)^2+y^2\right]^{1/2}\right\} - \frac{1}{2}k_1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[(x+L_3)^2+y^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}k_2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[x^2+(y-L_2)^2\right]^{1/2}\right\} - \frac{1}{2}k_2\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[x^2+(y+L_4)^2\right]^{1/2}\right\}$$

$$\frac{\partial_1 L}{\partial x_1} = -\frac{1}{2}k_1\frac{1}{2}\cdot\left[(x-L_1)^2+y^2\right]^{-1/2}\cdot 2(x-L_1)(1)$$

$$= -\frac{1}{2}k_1\frac{(x-L_1)}{((x-L_1)^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial_2 L}{\partial x_2} = -\frac{1}{2}k_1\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+L_3)(1)}{((x+L_3)^2+y^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2}k_1\frac{(x+L_3)}{((x+L_3)^2+y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial_3 L}{\partial x_3} = -\frac{1}{2}k_2\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{((x^2+(y-L_2)^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2}k_2\frac{x}{((x^2+(y-L_2)^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial_4 L}{\partial x_4} = -\frac{1}{2}k_2\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+(y+L_4)^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2}k_2\frac{x}{(x^2+(y+L_3)^2)^{1/2}}$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento respecto a X es:

$$\bullet \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{1}{2}k_1\frac{(x-L_1)}{((x-L_1)^2+y^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}k_1\frac{(x+L_3)}{((x+L_3)^2+y^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{2}k_2\frac{x}{(x^2+(y-L_2)^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}k_2\frac{x}{(x^2+(y+L_4)^2)^{1/2}}$$

Mientras que la ecuación de movimiento respecto a y es:

$$\bullet \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{1}{2}k_1\frac{y}{((x-L_1)^2+y^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}k_1\frac{y}{((x+L_3)^2+y^2)^{1/2}}$$

$$+\frac{1}{2}k_2\frac{(y-L_2)}{(x^2+(y-L_2)^2)^{1/2}} + \frac{1}{2}k_2\frac{(y+L_4)}{(x^2+(y+L_4)^2)^{1/2}}$$

b. Encuentre las ecuaciones de movimiento para pequeñas oscilaciones.

Cuando el sistema realiza pequeñas oscilaciones su movimiento se realiza al rededor del punto de equilibrio, el sistema estará en equilibrio cuando la masa está en el origen $(0,0)$

$$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0 \Rightarrow r_i = l_i - a = 0$$

Para analizar el comportamiento del sistema cerca del equilibrio, se realiza una expansión en serie de Taylor de la energía potencial al rededor del punto de equilibrio:

x, y son pequeños al rededor de $(0,0)$.

Para l_1:

$$l_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}$$

$$l_3 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + 2ax + x^2 + y^2}$$

$$l_2 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} = \sqrt{a^2 - 2ay + x^2 + y^2}$$

$$l_4 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2} = \sqrt{a^2 + 2ay + x^2 + y^2}$$

Factorizamos a^2

$$l_1 = a\sqrt{1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}} \qquad l_3 = a\sqrt{1 + \frac{2x}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}}$$

$$l_2 = a\sqrt{1 - \frac{2y}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}} \qquad l_4 = a\sqrt{1 + \frac{2y}{a} + \frac{x^2+y^2}{a^2}}$$

Expandimos en Taylor usando la aproximación:

$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$ para $|\epsilon| \ll 1$ lo cual se cumple para x, y cercanos a 0

$$l_1 = a\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) \qquad l_3 = a\left(1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right)$$

$$l_2 = a\left(1 - \frac{y}{a} + \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right) \qquad l_4 = a\left(1 + \frac{y}{a} + \frac{x^2+y^2}{2a^2}\right)$$

$$l_1 = a - x + \frac{x^2+y^2}{2a} \qquad l_3 = a + x + \frac{x^2+y^2}{2a}$$

$$l_2 = a - y + \frac{x^2+y^2}{2a} \qquad l_4 = a + y + \frac{x^2+y^2}{2a}$$

Reemplazando en $\eta_i = l_i - a$ obtenemos:

$$\eta_1 = -x + \frac{x^2+y^2}{2a} \quad \eta_3 = x + \frac{x^2+y^2}{2a} \quad \eta_2 = -y + \frac{x^2+y^2}{2a}$$

$$\eta_4 = y + (x^2+y^2)/2$$

Finalmente reemplazamos estos resultados en el potencial del sistema:

$$V = \frac{1}{2}k_1(R_1 + R_3) + \frac{1}{2}k_2(R_2 + R_4) \quad \text{Reemplazamos}$$

$$V = \frac{1}{2}k_1\left(-x + \frac{x^2+y^2}{2a} + x + \frac{x^2+y^2}{2a}\right) + \frac{1}{2}k_2\left(-y + \frac{x^2+y^2}{2a} + y + \frac{x^2+y^2}{2a}\right)$$

$$V = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right) + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{x^2+y^2}{2a}\right)$$

El lagrangiano, por consiguiente se transforma:

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k_1\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right) - \frac{1}{2}k_2\left(\frac{x^2+y^2}{a}\right)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \left(\frac{k_1+k_2}{2a}\right)(x^2+y^2)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrage obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{a}x = \ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{am}x = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{k_1+k_2}{a}y = \ddot{y} + \frac{k_1+k_2}{am}y = 0$$

Donde podemos reconocer las ecuaciones de un oscilador armónico simple para las dos coordenadas x y y:

Donde su frecuencia angular es: $\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{am}}$

Llegamos de esta forma a las ecuaciones de movimiento de un sistema que se comporta como un oscilador armónico bidimensional.

Asumiremos la elongación natural como $|a| = 1$ para facilitar calculos.

c. ¿Qué diferencias puede apreciar entre el caso isótropo $K_1 = K_2$ y el anisótropo $K_1 \neq K_2$? Para cada uno de los casos anteriormente expuestos.

• Caso Isótropo $(K_1 = K_2 = K)$.

Las frecuencias de oscilación en ambas direcciones son iguales:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \ddot{u} + \frac{K}{m}u = 0 \quad \wedge \quad \ddot{v} + \frac{K}{m}v = 0$$

El hecho de que ambas frecuencias sean iguales ocaciona una simetría rotacional en el plano xy, donde el sistema formará trayectorias circulares en caso de que la amplitud sea la misma en x e y. Si las amplitudes son diferentes, la trayectoria será una elipse con ejes alineados en x e y.

• Caso Anisotrópico $(K_1 \neq K_2)$

Las frecuencias de oscilación son diferentes en cada dirección:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{m}} \quad \wedge \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{m}} \Rightarrow \ddot{u} + \frac{K_1}{m}u = 0 \quad \wedge \quad \ddot{v} + \frac{K}{m}K = 0$$

En este caso no hay simetría rotacional y los ejes serán direcciones preferenciales, donde el sistema formará trayectorias cerradas, curvas de Lissajous, en caso de que la relación entre las frecuencias sea un número racional y trayectorias no cerradas en caso de que dicha relación sea un número no racional.

d. Muestre si las siguientes cantidades son conservadas

• Energías en x y y: $E_x = p_x^2/2m$ y $E_y = p_y^2/2m$

$\rightarrow E_x = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{K_1 x^2}{2}$ donde $P_x = m\dot{x}$ el momento lineal en x.

Si la energía en el eje x se conserva, entonces la derivada de dicha energía será 0.

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{K_1 x^2}{2}\right) = 0$$

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{(2P_x)\dot{P}_x}{2m} + \frac{K_1(2x)\dot{x}}{2} = \frac{P_x \dot{P}_x}{m} + K_1 x\dot{x}$$

Donde $\dot{x} = \frac{P_x}{m} = \frac{m\dot{x}}{m}$ ^ $\dot{P_x} = -K_1 x$ es la ecuación de movimiento.

Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{P_x(-K_1 x)}{m} + K_1 x\left(\frac{P_x}{m}\right) = -\frac{P_x K_1 x}{m} + \frac{P_x K_1 x}{m} = 0$$

→ $E_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{K_2 x^2}{2}$ donde $P_y = m\dot{y}$ es el momento lineal en y.

Realizando el mismo procedimiento se obtiene:

$$\frac{dE_y}{dt} = \frac{P_y \dot{P_y}}{m} + K_2 x\dot{x} = -\frac{K_2 P_y y}{m} + \frac{K_2 P_y y}{m} = 0$$

* Se concluye que las energías en el eje x e y se conservan.

• La cantidad de movimiento angular $L_z = yP_x - xP_y$

Hallamos la derivada total para verificar si esta cantidad se conserva:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(yP_x - xP_y) = (\dot{y}P_x + y\dot{P_x}) - (\dot{x}P_y + x\dot{P_y})$$

Realizamos nuevamente las sustituciones para $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{P_x}$ y $\dot{P_y}$:

$$\frac{dL_z}{dt} = \left[\left(\frac{P_y}{m}\right)P_x + (-K_1 x)y\right] - \left[\left(\frac{P_x}{m}\right)P_y + (-K_2 y)x\right]$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{P_y P_x}{m} - K_1 xy - \frac{P_y P_x}{m} + K_2 yx = (K_2 - K_1)xy$$

* Se concluye que en el caso isótropico ($K_1 = K_2$) entonces la cantidad de movimiento angular se conserva, pero si estamos en presencia del caso anisotrópico entonces no se conserva.

• La cizalladura $K = \omega_1 x \omega_2 y + P_x P_y$, con $\omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{m}}$; $i = 1, 2, 3, \ldots$

Nuevamente repetimos el proceso de derivar la cantidad:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 x \omega_2 y + P_x P_y) = \omega_1\omega_2(\dot{x}y + x\dot{y}) + (\dot{P_x}P_y + P_x\dot{P_y})$$

Reemplazamos nuevamente las cantidades derivadas:

$$\frac{dK}{dt} = \omega_1\omega_2(\dot{x}y + x\dot{y}) + (\dot{P_x}P_y + P_x\dot{P_y})$$

Usando nuevamente $\dot{P_i} = -K_j i$ y $\dot{i} = \frac{P_i}{m}$; $j = 1,2 \wedge i = x,y$

$$\frac{dK}{dt} = \omega_1\omega_2\left(\frac{P_x y}{m} + \frac{x P_y}{m}\right) + (-K_1 x P_y - K_2 y P_x)$$

$$\frac{dK}{dt} = \omega_1\omega_2\left(\frac{y P_x + x P_y}{m}\right) - (K_1 x P_y + K_2 y P_x)$$

Asumiendo el caso isótropo $K_1 = K_2 = K$ obtenemos:

$$\frac{dK}{dt} = \omega^2\left(\frac{y P_x + x P_y}{m}\right) - K(x P_y + y P_x)$$

Donde $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$;

$$\frac{dK}{dt} = \frac{K}{m}\left(\frac{y P_x + x P_y}{m}\right) - K(x P_y + y P_x)$$

Factorizando K, obtenemos:

$$\frac{dK}{dt} = K\left(\frac{y P_x + x P_y}{m^2} - y P_x - x P_y\right)$$

Asumiendo que $m = 1$ llegamos a la conclusión:

$$\frac{dK}{dt} = K\left[(y P_x + x P_y) - (y P_x + x P_y)\right] = 0$$

Por tanto, concluimos que la cantidad de cizalladura es conservada solo cuando se considera un caso isotrópico y ciertas condiciones como una masa unitaria. En caso de estar en una anisótropia, la cantidad no necesariamente se conserva.

e. Muestre que estas cantidades conservadas no son independientes ya que se cumple que $L^2 + K^2 = 4 E_x E_y$

En el inciso anterior mostramos como ambas cantidades se conservan solo cuando el movimiento es isótropo, es decir, cuando $k_1 = k_2 = k$ y por consecuencia $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Esto esta directamente relacionado con el movimiento de la masa en cada eje y por tanto de las energías.

$L^2 + K^2 = 4 E_x E_y$ donde $E_x = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}$ 1 $E_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{k_2 y^2}{2}$

$L = yP_x - xP_y \Rightarrow L^2 = y^2 P_x^2 + x^2 P_y^2 - 2xy P_x P_y$

$K = \omega_1 \omega_2 xy + P_x P_y \Rightarrow K^2 = \omega_1^2 \omega_2^2 x^2 y^2 + P_x^2 P_y^2 + 2xy P_x P_y \omega_1 \omega_2$

$L^2 + K^2 = y^2 P_x^2 + x^2 P_y^2 - 2xy P_x P_y + \omega_1^2 \omega_2^2 x^2 y^2 + P_x^2 P_y^2 + 2xy P_x P_y \omega_1 \omega_2$

$L^2 + K^2 = x^2 P_y^2 + y^2 P_x^2 + xy P_x P_y (2\omega_1 \omega_2 - 2) + (\omega_1 \omega_2 xy)^2 + (P_x P_y)^2$

Ahora desarrollamos el otro lado de la igualdad:

$4 E_x E_y = 4\left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{k_1 x^2}{2}\right)\left(\frac{P_y^2}{2m} + \frac{k_2 y^2}{2}\right)$

$= \frac{4 P_x^2 P_y^2}{4m^2} + \frac{4 k_1 k_2 x^2 y^2}{4} + \frac{P_x^2 y^2 k_2 4}{4m} + \frac{P_y^2 x^2 k_1 4}{4m}$

$= \frac{P_x^2 P_y^2}{m^2} + k_1 k_2 x^2 y^2 + \frac{P_x^2 y^2 k_2}{m} + \frac{P_y^2 x^2 k_1}{m}$

Simplifiamos $L^2 + K^2$ usando la siguiente igualdad:

$xy P_x P_y (2\omega_1 \omega_2 - 2) = 0 \Rightarrow 2\omega_1 \omega_2 - 2 = 0$
$\omega_1 \omega_2 = 1$ $\quad * \, \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$

$\omega_1 \omega_2 = \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{m} = 1 \Rightarrow k_1 k_2 = m^2$ $\quad * \, k_i = \omega_i^2 m$

$L^2 + K^2 = x^2 P_y^2 + y^2 P_x^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 x^2 y^2 + P_x^2 P_y^2$

$\omega_1^2 \omega_2^2 x^2 y^2 = \frac{k_1 k_2}{m^2} x^2 y^2 = \frac{m^2}{m^2} x^2 y^2 = x^2 y^2$

$L^2 + K^2 = x^2 P_y^2 + y^2 P_x^2 + x^2 y^2 + P_x^2 P_y^2$

Finalmente, usando la igualdad $K_1 K_2 = m^2$ en $4E_x E_y$ llegamos:

$L_z^2 + K^2 = 4E_x E_y$ se cumple cuando $K_1 = K_2 = 1 \rightarrow$ Caso Isótropo

$$x^2y^2 + P_x^2 P_y^2 + x^2 P_y^2 + y^2 P_x^2 = x^2y^2(K_1K_2) + P_x^2 P_y^2\left(\frac{1}{K_1K_2}\right) + x^2 P_y^2\left(\frac{K_1}{\sqrt{K_1K_2}}\right) \ldots$$

$$\ldots + y^2 P_x^2\left(\frac{K_2}{\sqrt{K_1K_2}}\right)$$

f) Otra vez, ¿Qué direrencias puede apreciar entre el caso isótropo y anisótropo?

Tras realizar los incisos d y e sabemos que en el caso isótropo no solo hay simetrías rotacionales en las diferentes trayectorias que la partícula pueda tener sino que también sabemos que esto ocurre por la conservación del momento angular y la conservación de la cizalladura, cantidades que solo se conservan cuando las constantes del resorte en los dos ejes son iguales, por tanto, sus frecuencias angulares también son iguales.

En el caso anisótropo, por el contrario, las frecuencias agulares son diferentes y esto provoca que no se conserve ni la cantidad de movimiento angular ni la cizalladura, esto ocaciona las trayectorias no sean cerradas o sean curvas de Lissajous. Por último, que estemos en un caso isótropo o anisótropo repercute en que se cumpla o no la igualdad $L_z^2 + K^2 = 4E_x E_y$.

2) Dos masas m_1 y m_2 ($m_1 + m_2 = M$), están separadas una distancia r_0 y se atraen gravitacionalmente entre ellas. Demostrar que si se sueltan del reposo, cuando la distancia sea $r (< r_0)$, las velocidades serán:

$$V_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \; ; \quad V_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

El enunciado indica que las masas se sueltan del reposo, a partir de lo cual puedo inferir que su velocidad inicial es cero, y por lo tanto, su energía cinética es cero:

$$V_1(r_0) = 0 \;\wedge\; V_2(r_0) = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1 = 0 \;\wedge\; T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_2 = 0$$

La energía potencial del sistema será únicamente la atracción gravitacional entre los dos cuerpo:

$$V = -\frac{G m_1 m_2}{r_0}$$ → Es un potencial que no depende del tiempo ni de las velocidades

$$L(V_1, V_2, r_0) = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \frac{G m_1 m_2}{r_0} = V(r_0) \Rightarrow L(r_0)$$

Entonces la energía mecánica total se conserva:

$$E_0 = T_0 + V_0 = V_0 = -\frac{G m_1 m_2}{r_0} \qquad E_f = T_f + V_f = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r_0}$$

$$E_0 = E_f \Rightarrow -\frac{G m_1 m_2}{r_0} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{G m_1 m_2}{r} - \frac{G m_1 m_2}{r_0} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

$$G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad (*)$$

• Acudiendo a la definición de posición del centro de masa desde un observador inercial:

$$R = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \ddot{R} = \frac{m_1 \ddot{r}_1 + m_2 \ddot{r}_2}{m_1 + m_2}$$ Donde $m_1 \ddot{r}_1 = F_{12}$, $m_2 \ddot{r}_2 = F_{21}$

$$\Rightarrow \ddot{R}(m_1 + m_2) = F_{12} + F_{21} = 0 \Rightarrow \ddot{R} = 0$$ $F_{12} = -F_{21}$

Dado que la aceleración es cero, se concluye que el centro de masa se mueve con velocidad constante, entonces se cumple que:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow m_1 V_1 = m_2 V_2 \longrightarrow V_1 = \frac{m_2 V_2}{m_1} \wedge V_2 = \frac{m_1 V_1}{m_2}$$

Reemplazando en la ecuación (*):

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1 V_1}{m_2}\right)^2 = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1^2 V_1^2}{m_2} = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad \bullet\ \frac{m_1 m_2 + m_1^2}{m_2} = \frac{m_1 (m_2 + m_1)}{m_2}$$

$$\frac{1}{2} V_1^2 \cdot \frac{\cancel{m_1}(m_1 + m_2)}{m_2} = G \cancel{m_1} m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$V_1^2 = m^2 \frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow V_1 = m_2 \sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Reemplazando V_1 en la ecuación (*):

$$\frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2 V_2}{m_1}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

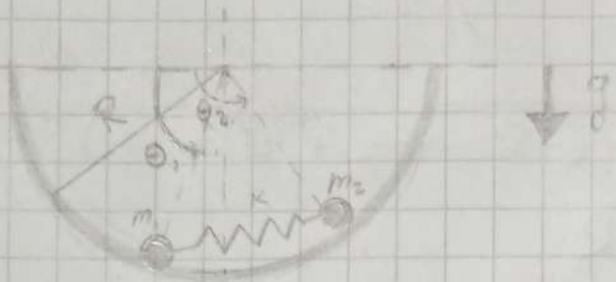
$$\frac{1}{2} V_2^2 \left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) = G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\frac{1}{2} V_2^2 \left(\frac{\cancel{m_2}(m_2 + m_1)}{m_1}\right) = G m_1 \cancel{m_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$V_2 = m_1 \sqrt{\frac{2G}{M}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Punto 3

$x_i^2 + y_i^2 = R \ , \ i = 1, 2$



$d \equiv$ distancia entre masas

$\mathcal{L} \equiv$ longitud natural del resorte

$x_i = -R\cos\theta_i$
$y_i = -R\sin\theta_i$

a) Como es un sistema en 2 Dimenciones cada masa aporta 2 grados de libertad, pero como ambas tienen la condición que $x_i^2 + y_i^2 = R$ entonces cada una aporta 1 grado de libertad, por tanto, el sistema tiene 2 grados de libertad

Tomemos θ_1 y θ_2 como nuestras coordenadas generalizadas.

b) $\mathcal{L} = T - V$

$$T = \frac{1}{2} m_1 (\cancel{\dot{r}^2} + r^2\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\cancel{\dot{r}^2} + r^2\dot{\theta}_2^2)$$

Pero como $r = R$ y es constante

$$T = \frac{1}{2} m_1 R^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 R^2\dot{\theta}_2^2$$

Para la energia potencial tenemos, potencial gravitacional y potencial elástico $V_g + V_k = V$

$$V_g = m_1 g R(1 - \sin\theta_1) + m_2 g R(1 - \sin\theta_2)$$

Sabemos que

$V_k = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow$ deformación del resorte

Podemos expresar $X = d - L$ donde

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-R\cos\theta_2 + R\cos\theta_1)^2 + (-R\sin\theta_2 + R\sin\theta_1)^2}$$

$$d = \sqrt{2(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2))}\; R$$

angulo doble

$$d = 2R\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$V_k = \frac{1}{2}k(d - L)^2 = \frac{1}{2}k\left(2R\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L\right)^2$$

Entonces el Lagrangiano queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot\theta_1, \dot\theta_2) = {} & \frac{1}{2}m_1 R^2 \dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 R^2 \dot\theta_2^2 \\ & - m_1 g R(1 - \sin\theta_1) - m_2 g R(1 - \sin\theta_2) \\ & - \frac{1}{2}k\left(2R\sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L\right)^2 \end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación de euler - Lagrange para θ_1 y θ_2

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta_i} = m_i R^2 \dot\theta_i \quad , i = 1, 2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = m_i g R \cos\theta_i \Big\} \text{ Parte gravitacional}$$

Para la parte elástica aplicamos regla de la cadena

$$V_k = \frac{1}{2} k \underbrace{\left(2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L \right)}_{F(\theta_1, \theta_2)}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{1}{2} k F^2\right) = k F \frac{\partial F}{\partial \theta_1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_1} = 2R \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = R \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$$

Por tanto

$$\frac{\partial V_k}{\partial \theta_1} = k R \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\left(2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L\right)$$

$$\frac{\partial V_k}{\partial \theta_2} = -k R \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\left(2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L\right)$$

Ecuaciones de movimiento

- $m_1 R^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g R \cos\theta_1 - kR \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\left(2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L\right)$
- $m_2 R^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g R \cos\theta_2 + kR \cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)\left(2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - L\right)$

c) Al dejar caer m_1 desde el punto A, m_1 caerá al fondo del pozo combirtiendo energía potencial gravitacional en energía cinética y al estar unida a m_2 a traves de un resorte al estirarse o comprimirse se generará una fuerza que provocará que m_2 tambien se mueva. En el sistema tambien habrá oscilaciones entre m_1 y m_2 que cambiará energía potencial tanto gravitacional como elastica en energía cinética y viseversa.

d) $\Theta_{e,1} = \frac{\pi}{2} - \delta$, $\Theta_{e,2} = \frac{\pi}{2} + \delta$

Definimos el equilibrio

$$d = 2R \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)$$

$$d_e = 2R \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \delta - \frac{\pi}{2} + \delta}{2}\right)$$

$$d_e = 2R \sin \delta$$

Para que el sistema esté en equilibrio $d_e = L$ de tal manera que

$$2R \sin\delta = L$$

$$\hookrightarrow \delta = \sin^{-1}\left(\frac{L}{2R}\right)$$

Ahora agregamos pequeñas oscilaciones al rededor del punto de equilibrio

$$\Theta_1 = \frac{\pi}{2} - \delta + \eta_1 \quad \wedge \quad \Theta_2 = \frac{\pi}{2} + \delta + \eta_2$$

Construimos el lagrangiano

$$T = \frac{1}{2} m_i R^2 \dot{\Theta}_i^2$$

$$T = \frac{1}{2} R^2 \left(m_1 \dot{\eta}_1^2 + m_2 \dot{\eta}_2^2\right)$$

Para hallar V_g toca resolver

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta + \eta_1\right) \quad y \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \delta + \eta_2\right)$$

Para ello usamos Taylor

Para η_1

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + \eta_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) - \frac{1}{2}\eta_1^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$$

$$= \cos\delta + \eta_1 \sin\delta - \frac{1}{2}\eta_1^2 \cos\delta$$

Para η_2

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) + \eta_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) - \frac{1}{2}\eta_2^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\delta\right)$$

$$= \cos\delta + \eta_2 \sin\delta - \frac{1}{2}\eta_2^2 \cos\delta$$

Sustituyendo en V_g

cte

El sistema ya está en equilibrio

$$V_g = gR\left[\cancel{(m_1+m_2)(1-\cos\delta)} - \cancel{\sin\delta\,(m_1\eta_1 + m_2\eta_2)} + \frac{1}{2}\cos\delta\,(m_1\eta_1^2 + m_2\eta_2^2)\right]$$

Por lo tanto

$$V_g = \frac{1}{2} gR\,(m_1\eta_1^2 + m_2\eta_2^2)\cos\delta$$

Para V_K necesitamos hallar d

$$d = 2R\sin\left(\delta + \frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)$$