

Asignación sobre el péndulo compuesto

Damian Steven Ospina *

Jesus Leonardo Quintero **

*Universidad Industrial de Santander
Calle - 9 Cra. 27, Bucaramanga, Santander*

31 de agosto de 2024

Índice

1. Introducción	2
2. Metodología	2
2.1. Primer Punto	3
2.2. Segundo Punto	5
2.3. Tercer Punto	6
2.4. Cuarto Punto	10
2.5. Quinto Punto	12
2.6. Sexto Punto	14
2.6.1. Inciso 6.1	14
3. Conclusiones	21
4. Referencias	21

* email:damian2201296@correo.uis.edu.co

** email:jesus.quintero@correo.uis.edu.co

1. Introducción

El presente informe tiene como objetivo abordar el problema dinámico de un doble péndulo acoplado por un resorte que une las dos masas. En este sistema, tanto las masas como las longitudes de las varillas que las conectan al eje de giro son idénticas. A partir de este montaje, se desarrollarán diversas preguntas con el objetivo de complicar la resolución del sistema, lo que requerirá el uso de métodos de solución más allá de los sistemas lineales estudiados hasta este punto del recorrido académico.

El primer reto consiste en hallar las ecuaciones de movimiento que describen el sistema, sin aplicar la limitación usual de considerar únicamente pequeños ángulos. Esto genera un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, que depende de los ángulos y aceleraciones angulares, además de un par de constantes que se explorarán más adelante. El hecho de que las ecuaciones sean no lineales implica que los cálculos para resolverlas deban abordarse de manera numérica, utilizando el lenguaje de programación Python.

Luego, se solicita al estudiante realizar algunos cambios en las condiciones iniciales del montaje y analizar cómo influyen estos cambios en la trayectoria de las masas a lo largo del tiempo t . Estos cambios incluyen la reducción de la longitud del péndulo y sistemas en los que los valores varían entre las masas o las longitudes. Para resolver esta parte, se derivaron nuevamente las ecuaciones de movimiento bajo estas nuevas condiciones iniciales, lo que permitió obtener conclusiones sobre el comportamiento del nuevo sistema y compararlo con el anterior.

Se introduce también la noción de caos, característica de los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales no lineales, como en el caso del péndulo compuesto para ángulos grandes. En este apartado, se realizaron múltiples pruebas variando las condiciones iniciales del sistema, con el fin de identificar cuándo este tiende a volverse caótico. Se exploraron variaciones en los ángulos y velocidades angulares, así como en las constantes gravitacionales, la fuerza de restitución, las masas y las longitudes del sistema, encontrando interacciones interesantes entre estos parámetros.

Posteriormente, se sometió la señal obtenida a un análisis espectral y a un espectrograma de potencias de Fourier para grandes y pequeñas amplitudes. Estas herramientas permitieron determinar las diferentes tendencias del sistema en relación con sus frecuencias, energías y cómo estas varían en el tiempo, así como identificar fácilmente las frecuencias dominantes. Finalmente, se solicita repetir los puntos anteriores con la restricción de considerar ángulos pequeños, esto simplifica las ecuaciones de movimiento, volviéndolas lineales y, por lo tanto, fácilmente resolubles mediante cálculos analíticos.

2. Metodología

Considere el caso de dos péndulos de igual masa m y que cuelgan, respectivamente, de dos varillas sin masa y de longitud l . Estos péndulos están acoplados por un resorte de constante elástica k . Para

inspirarse puede consultar algunos de los enlaces de la red 1, ver algunos de los videos disponibles 2 y mejor, algunos artículos³ que discuten este sistema.

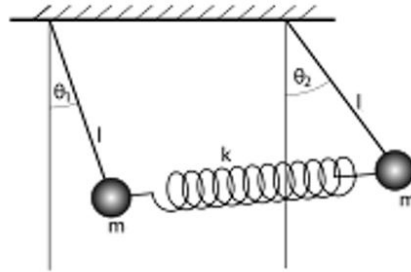


Figura 1: Montaje del sistema dinámico a estudiar

2.1. Primer Punto

Encuentre las ecuaciones de Movimiento del sistema

El primer punto de la asignación sobre el péndulo compuesto nos pide hallar las ecuaciones de movimiento del sistema, para facilidad del desarrollo de los puntos siguientes se decide realizar esta operación usando la formulación lagrangiana, empezando por encontrar las posiciones y velocidades de cada una de las masas respecto a la posición de equilibrio del péndulo.

- Se empieza por encontrar las posiciones y las velocidades de las masas del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= L \sin \theta_1 & x_2 &= L \sin \theta_2 \\ y_1 &= L(1 - \cos \theta_1) & y_2 &= L(1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= L\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 & \dot{x}_2 &= L\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ \dot{y}_1 &= L\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & \dot{y}_2 &= L\dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2)$$

- Una vez encontradas las velocidades y posiciones desde el sistema de referencia tomado, hallamos la energía cinética y potencial del sistema:

$$= \frac{1}{2}m \left(l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \right) = \frac{1}{2}m \left(l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \right) \quad (3)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2}m \left[l^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \right] + \frac{1}{2}m \left[l^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2}m \left(l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \right) \quad (6)$$

$$V = mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (7)$$

$$= mgl[1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2] + \frac{1}{2}k[l(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)]^2 \quad (8)$$

$$= mgl(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}kl^2(\sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin^2 \theta_1) \quad (9)$$

$$L = T - V \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - mgl(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (11)$$

$$- \frac{1}{2}kl^2(\sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin^2 \theta_1) \quad (12)$$

- Una vez hallado el Lagrangiano nos disponemos a aplicar la ecuación de Euler-Lagrange para las coordenadas generalizadas del sistema θ_1 y θ_2 para encontrar las ecuaciones de movimiento:

- Para θ_1 :

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (13)$$

$$0 = \frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\theta}_1] + mgl \sin \theta_1 - kl^2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 + kl^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \quad (14)$$

$$0 = \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin \theta_1 + \frac{k}{m} \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) \quad (15)$$

- Para θ_2 :

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (16)$$

$$0 = \frac{d}{dt} [ml^2 \dot{\theta}_2] + mgl \sin \theta_2 + kl^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - kl^2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (17)$$

$$0 = \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin \theta_2 + \frac{k}{m} \cos \theta_2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (18)$$

- Aplicando algunas identidades trigonométricas:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \quad (19)$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A \quad (20)$$

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B) \quad (21)$$

$$2 \sin B \cos A = \sin(A + B) - \sin(A - B) \quad (22)$$

$$A - B = \theta_2, \quad A + B = \theta_1, \quad A = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad B = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \quad (23)$$

- Finalmente obtenemos las ecuaciones de movimiento del péndulo compuesto en términos de las coordenadas generalizadas:

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin \theta_1 + \frac{k}{m} \cos \theta_1 \left[2 \sin \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right] = 0 \quad (24)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin \theta_2 + \frac{k}{m} \cos \theta_2 \left[2 \sin \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right] = 0 \quad (25)$$

2.2. Segundo Punto

Integre numéricamente el sistema de ecuaciones e identifique los parámetros que condicionan el sistema.

Para realizar los cálculos numéricos y visualizar las trayectorias del doble péndulo, se desarrolló un script en Python utilizando Google Colab. El código completo está disponible para su consulta y ejecución [aquí](#). Se utiliza Colab dado que el sistema de ecuaciones obtenido para el péndulo acoplado es no lineal. Esto significa que no tiene una solución analítica simple, lo que hace necesario emplear métodos numéricos para resolverlo. Colab nos permite escribir y ejecutar código en Python, un lenguaje de programación ideal para este tipo de simulaciones. Se toma como base del código el ejemplo 2.

Primero, se importa las bibliotecas necesarias, incluyendo Numpy para el manejo de funciones trigonométricas y cálculos con ángulos. Posteriormente, se definen las condiciones iniciales del sistema, como la longitud de la varilla, los ángulos iniciales, la aceleración debida a la interacción con el campo gravitacional terrestre, la masa de cada partícula y la constante de restitución del resorte que las conecta.

Se utiliza la biblioteca *scipy.integrate*, específicamente su función *odeint*, para llevar a cabo la integración numérica del sistema de ecuaciones. Se aplica el método de *Runge – Kutta* de cuarto orden (*RK45*), un método ampliamente reconocido por su precisión y eficiencia en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Finalmente, haciendo uso de la librería *Matplotlib.pyplot*, se realiza la gráfica del movimiento del péndulo. En la gráfica que se obtiene se puede observar la evolución de cada uno de los ángulos a

lo largo del tiempo. Además, es posible modificar las condiciones iniciales del sistema para analizar diferentes comportamientos del mismo.

■ **Identificación de parámetros que condicionan el sistema.**

Gracias al sistema de ecuaciones diferenciales es posible identificar los parámetros solicitados:

- **Relación gravedad/longitud [g/l]:** Esta relación entre valores constantes del sistema afecta la frecuencia natural de las oscilaciones del péndulo, esta relacionado con la variabilidad de los resultados al cambiar las condiciones iniciales.
- **Relación constante elástica/masa [k/m]:** Esta relación entre valores constantes describe la interacción acoplada entre los péndulos a través del resorte.

■ **Resultados de la simulación:**

Para la simulación se escogieron valores iniciales que no complicaran enormemente los cálculos con el fin de corroborar analíticamente los resultados y también para que la primera simulación sirviera de punto de referencia para los incisos posteriores en esta asignatura.

Se utilizaron los siguientes parámetros para la simulación del sistema de dos péndulos acoplados: la aceleración debido a la gravedad $g = 9,81 \text{ [m/s}^2\text{]}$, la longitud de los péndulos $l_1 = l_2 = 1 \text{ [m]}$, la constante del resorte $k = 1 \text{ [N/m]}$, y las masas de los péndulos $m_1 = m_2 = 1 \text{ [kg]}$. Los ángulos iniciales de los péndulos son $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ $\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$. La simulación fue realizada para un intervalo de tiempo de 10 segundos.

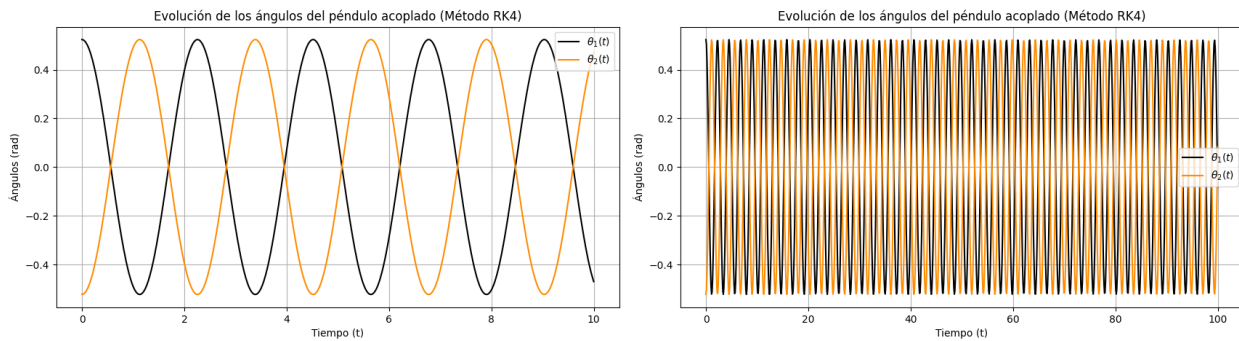


Figura 2: Resultados de la simulación para tiempos de 10 y 100 segundos respectivamente.

2.3. Tercer Punto

¿Hace diferencia si el resorte conecta a las masas o si se encuentra atado a media altura de las varillas? ¿cómo influye la relación m_1/m_2 si consideramos que las masas son diferentes? ¿cómo influye la relación l_1/l_2 si consideramos que el largo de las varillas es diferente?.

- Respondiendo a la primera pregunta:

Si, el hecho de que el resorte ahora este atado a una altura diferente modifica la dinámica del sistema, ya aunque el torque relacionado al peso de las masas sea el mismo, el torque debido a la torsión del resorte ahora ha cambiado. Para ver esto observe los gráficos de los desplazamientos y sus respectivas ecuaciones.

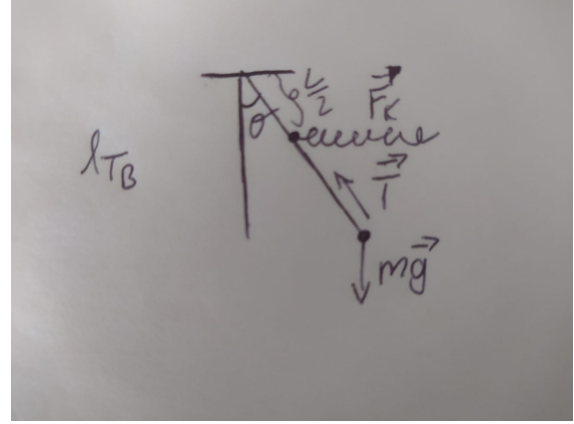
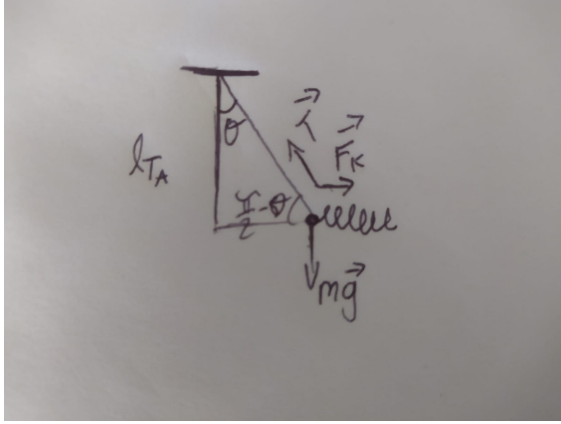


Figura 3: Resultados de la simulación para tiempos de 10 y 100 segundos respectivamente.

$$T_A = lF_k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - lmg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (26)$$

$$= lF_k \cos \theta - lmg \cos \theta \quad (27)$$

$$T_B = \frac{l}{2} F_k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - lmg \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (28)$$

$$= \frac{l}{2} F_k \cos \theta - lmg \cos \theta \quad (29)$$

Por tanto, podemos asegurar que :

$$T_A \neq T_B \quad (30)$$

En efecto, la distancia tomada desde el punto de apoyo de los péndulos hasta el punto de aplicación de las fuerzas es determinante en la capacidad que tiene dicha fuerza para generar giros.

(agregar argumentos relacionados con los parámetros que condicionan el movimiento (frecuencia natural del sistema))

- Respondiendo a la segunda pregunta:

La relación m_1/m_2 para $m_1 \neq m_2$ influye principalmente en la interacción del resorte ya que ahora hay más o menos inercia presente en el sistema (dependiendo del valor de las masas), por lo tanto, tanto la fuerza del resorte como la fuerza gravitacional modifican el estado de movimiento combinado, esto queda evidenciado en el momento de calcular las ecuaciones que describen el movimiento cuando las masas son diferentes:

$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}m_2(x_2^2 + y_2^2) \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2}m_1(l^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 + l^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1) + \frac{1}{2}m_2(l^2\dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 + l^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2) \quad (32)$$

$$= \frac{1}{2}m_1l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l^2\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2}l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}_2^2 \quad (33)$$

$$V = m_1gy_1 + m_2gy_2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (34)$$

$$= \frac{m_1}{m_2}gl(1 - \cos \theta_1) + gl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}\frac{k}{m_2}(l \sin \theta_2 - l \sin \theta_1)^2 \quad (35)$$

$$= \frac{m_1}{m_2}gl(1 - \cos \theta_1) + gl(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}\frac{k}{m_2}l^2(\sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + \sin^2 \theta_1) \quad (36)$$

$$L = \frac{1}{2}l^2\left(\frac{m_1}{m_2}\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - gl\left[\frac{m_1}{m_2}(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)\right] \quad (37)$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{k}{m_2}l^2[\sin^2 \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \sin^2 \theta_1] \quad (38)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (39)$$

$$0 = \frac{m_1}{m_2}l^2\ddot{\theta}_1 + gl\frac{m_1}{m_2}\sin \theta_1 + \frac{k}{m_2}l^2\cos \theta_1(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (40)$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (41)$$

$$0 = l^2\ddot{\theta}_2 + gl\sin \theta_2 - \frac{k}{m_2}l^2\cos \theta_2(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (42)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l} \sin \theta_1 + \frac{k}{m_1} \cos \theta_1 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0 \quad (43)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l} \sin \theta_2 - \frac{k}{m_2} \cos \theta_2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0 \quad (44)$$

Sí, si $m_1 \neq m_2$ hay diferencia en las ecuaciones del movimiento y, por tanto, en la dinámica del sistema.

- Respondiendo a la tercera pregunta

La relación l_1/l_2 para $l_1 \neq l_2$ también modifica la evolución temporal del sistema. Veámoslo:

$$T = \frac{1}{2}m \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2}m \left(l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right) \quad (45)$$

$$= \frac{1}{2}m \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right) \quad (46)$$

$$V = mgl_1(1 - \cos \theta_1) + mgl_2(1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)^2 \quad (47)$$

$$= mg[l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2)] + \frac{1}{2}k[l_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2l_1 l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + l_1^2 \sin^2 \theta_1] \quad (48)$$

$$L = \frac{1}{2}m \left(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right) - mg[l_1(1 - \cos \theta_1) + l_2(1 - \cos \theta_2)] \quad (49)$$

$$- \frac{1}{2}k[l_2^2 \sin^2 \theta_2 - 2l_1 l_2 \sin \theta_2 \sin \theta_1 + l_1^2 \sin^2 \theta_1] \quad (50)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \quad (51)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(ml_1^2 \dot{\theta}_1 \right) + mgl_1 \sin \theta_1 - k(l_1 l_2 \cos \theta_1 \sin \theta_2 - l_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1) \quad (52)$$

$$0 = \frac{l_1^2}{l_2^2} \ddot{\theta}_1 + \frac{l_1}{l_2^2} g \sin \theta_1 - \frac{k}{m} \cos \theta_1 \left(\frac{l_1}{l_2} \sin \theta_2 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin \theta_1 \right) \quad (53)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \quad (54)$$

$$0 = \frac{d}{dt} (ml_2^2 \dot{\theta}_2) + mgl_2 \sin \theta_2 + k(l_1^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 - l_1 l_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2) \quad (55)$$

$$0 = \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 + \frac{k}{m} \cos \theta_2 \left(\frac{l_1^2}{l_2^2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{l_2} \sin \theta_2 \right) \quad (56)$$

En vista del sistema de ecuaciones obtenido para cuando $l_1 \neq l_2$ es completamente diferente a cuando $l_1 = l_2 = l$ podemos concluir de que el sistema en general no se comporta de la misma forma.

2.4. Cuarto Punto

¿Cuándo y por qué el sistema muestra el comportamiento caótico? Discuta el espacio de condiciones iniciales para el cual el sistema presenta ese comportamiento caótico

Se puede considerar que un sistema dinámico, como el péndulo compuesto mencionado en este informe, es un sistema caótico cuando se vuelve extremadamente sensible a las condiciones iniciales. Esta sensibilidad puede llevar a grandes divergencias en los resultados debido a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales.

Para el desarrollo de este inciso se hace uso de la simulación realizada para el segundo punto 2.2, en esta simulación se variaron diferentes parámetros con una alta aproximación, por ejemplo, en el caso de los ángulos solo se usaron aquellos que fuesen notables en un rango de 0 a π , respecto al resto de parámetros su aproximación se hizo usando valores enteros de 1×10^{-17} en algunos casos y de 0,1 en la mayoría de casos. Esto es a razón de una dependencia entre la variabilidad del ángulo y el resto de parámetros, estos fueron los resultados:

- Variaciones en los ángulos

Se realizaron diferentes combinaciones en los grados iniciales que tomaban las partículas, se encontró que el sistema tiende a comportarse de manera óptima cuando los ángulos de ambas masas son el mismo para todo ángulo, sin importar si estas se mueven en la misma dirección o no, esto serían los casos en los que el movimiento ambos péndulos son el mismo en todo momento (ángulos iguales) y en el que el ambos péndulos se mueven con la misma frecuencia pero están desfasados por diferentes valores de fase según sus ángulos iniciales (ángulos iguales pero con sentido contrario).

Para el caso en el que los ángulos iniciales de ambas masas son diferentes, el sistema se sigue comportando de manera dinámica, excepto para cuando alguno de los ángulos tiene valor de π o $-\pi$, para estos casos el sistema se vuelve caótico.

El sistema presenta una simetría con respecto a sus ángulos, pero cuando el ángulo de alguno de los péndulos se encuentra en una posición inestable, como π , cualquier pequeña perturbación en esta posición puede provocar un desplazamiento significativo. La interacción con el otro péndulo, que se encuentra en una posición diferente a π , se convierte en una fuente de comportamiento caótico, tanto por la inestabilidad inherente de la posición π como por el desfase entre los movimientos de ambos péndulos, lo que genera un patrón de fuerzas en constante cambio.

- Variaciones en las velocidades angulares

Para este y los análisis posteriores se realizaron variaciones con múltiples parámetros iniciales simultáneamente, en este caso, se realizaron variaciones en los ángulos del sistema y después en las velocidades angulares. Se encontró que el sistema se vuelve caótico cuando la combinación entre los ángulos iniciales y velocidad angular corresponde a:

Cuadro 1: Condiciones iniciales para un sistema caótico

Ángulo Inicial [rad]	Velocidad Angular [rad/s]	Relación g/l	Relación k/m
0	6,3	9.81	1
$\pi/6$	6.0	9.81	1
$\pi/4$	5,8	9.81	1
$\pi/3$	5,2	9.81	1
$\pi/2$	4,1	9.81	1
$\pi/2 < \theta < \pi$	1×10^{-16}	9.81	1
π	1×10^{-18}	9.81	1

Por tanto se puede comprobar que el sistema dinámico es más estable cuando sus ángulos corresponden a valores cercanos a 0 rad y $\pi/4$ rad. y que se vuelve extremadamente volátil una vez supera el eje horizontal.

Una primera aproximación para explicar porque el sistema se vuelve caótico bajo las concisiones expuestas en la tabla 1 son las mismas ecuaciones de movimiento halladas a través de un análisis de las energías del sistema y la ecuación de Euler-Lagrange, estas ecuaciones que describen el sistema son no lineales, esto implica no hay una proporcionalidad entre la forma en que responde el sistema y los parámetros iniciales. Por otra parte, las combinaciones de ángulos iniciales y velocidades angulares iniciales determinan la energía total del sistema, a ciertos niveles de energía, las oscilaciones de los péndulos y su interacción con el resorte se vuelven no repetitivas y erráticas.

- Variación en las constantes del sistema.

En general las constantes del sistema no provocan que el mismo se vuelva caótico, sin embargo, como se mencionó previamente la relación entra la gravedad y la longitud del péndulo afecta la

frecuencia natural del mismo y por tanto su variabilidad al momento de cambiar las condiciones iniciales. Para el análisis anterior la relación entre estas dos constantes es 9.81, cuando esta constante se vuelve más pequeña, es decir, cuando el valor de la gravedad disminuye y/o el valor de la longitud del péndulo aumenta, el sistema se vuelve más propenso a ser caótico, esto implica que variaciones incluso más pequeñas que las expuestas anteriormente pueden inducir este estado en el sistema. Por otra parte, la relación entre la fuerza restauradora del resorte y la masa solo afectan en que tan amortiguado es el movimiento y no cambian la variabilidad del sistema.

■ Resultados

Figura 4: Sistemas caóticos cuando se cumplen las concisiones iniciales para diferentes ángulos

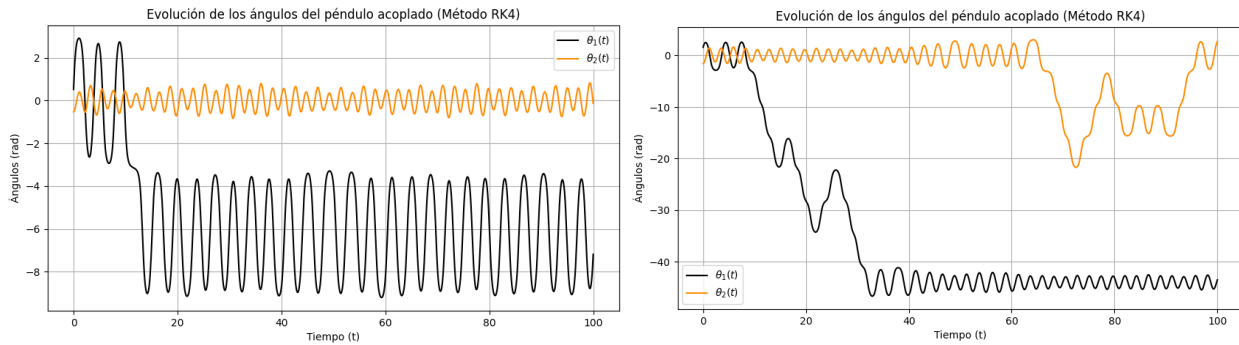


Figura 5: Para $\theta_1 = \pi/6$ y $\theta_2 = -\pi/6$

Figura 6: Para $\theta_1 = \pi/2$ y $\theta_2 = -\pi/2$

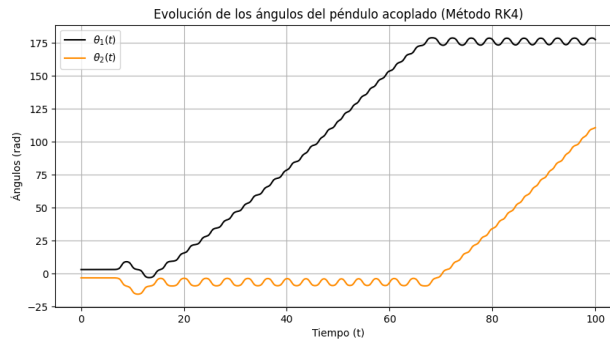


Figura 7: Para $\theta_1 = \pi$ y $\theta_2 = -\pi$

2.5. Quinto Punto

Analice el comportamiento de su señal en términos del un espectro de potencias de Fourier y de la huella en un espectrograma, para grandes y pequeñas amplitudes. ¿qué puede concluir de ambos comportamientos?

Para este punto se toma el código realizado anteriormente y se analiza su espectro de frecuencias de Fourier, se observa cómo se distribuye la energía en función de las propias frecuencias presentes. En el caso del espectrograma se realiza un análisis visual de como las frecuencias del sistema varían con el tiempo, resaltando aspectos como su intensidad, estos fueron los resultados obtenidos:

- Espectro de Fourier y espectrograma para pequeñas amplitudes.

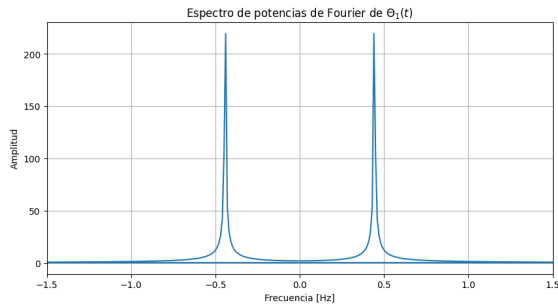


Figura 8: Espectro de Fourier para $\theta_1 = \pi/6$

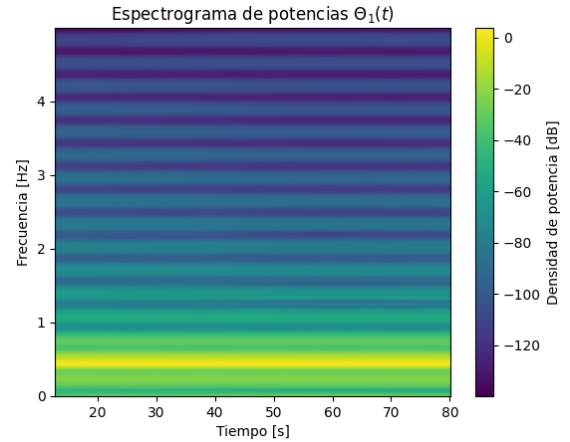


Figura 9: Espectrograma para $\theta_1 = \pi/6$

En la gráfica de las potencias de Fourier 8 se pueden apreciar dos picos alrededor de ± 0.5 Hz, esto delata la presencia de dos frecuencias principales en el movimiento oscilatorio del ángulo θ_1 , seguramente correspondientes a los modos normales del sistema, por otra parte, existe una simetría del espectro al rededor de la frecuencia 0 por la naturaleza de la transformada de Fourier, la presencia de valores de frecuencia negativos nos indica que se trata de un movimiento sinusoidal propio del péndulo.

El espectrograma 9 muestra una uniformidad en la densidad de potencia a lo largo del tiempo, indicando que las amplitudes principales de la señal $\theta_1(t)$ se mantienen constantes durante los 100 segundos de simulación, sin signos de atenuación o amplificación, lo que sugiere la ausencia de fuerzas disipativas en el sistema. Además, las frecuencias en el espectrograma también permanecen constantes, esto sugiere la presencia de frecuencias dominantes en la señal de θ_1 , características de un sistema oscilatorio con modos de vibración bien definidos.

- Espectro de Fourier y espectrograma para grandes amplitudes.

En gráfica de las potencias de Fourier 10 nuevamente se pueden llegar a conclusiones similares respecto a las frecuencias naturales y la simetría de la fusión, sin embargo, destaca la dispersión

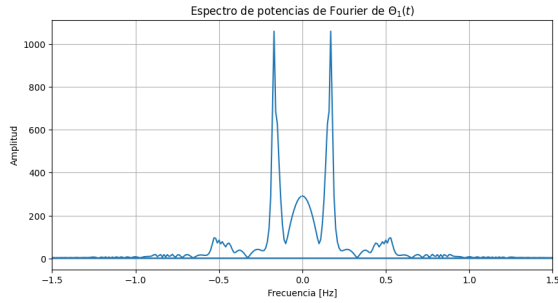


Figura 10: Espectro de Fourier para $\theta_1 = \pi/6$

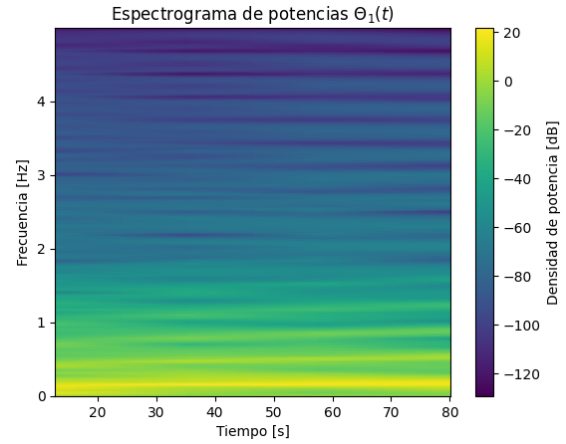


Figura 11: Espectrograma para $\theta_1 = \pi/6$

de la energía a lo largo de más frecuencias que en para ángulos pequeños, esto además provoca la aparición de armónicos diferentes al de la frecuencia dominante en el sistema, resaltando el que se encuentra en el punto central.

El espectrograma 11 igual que en el caso de amplitudes pequeñas, muestra uniformidad, pero no es tan absoluta para ángulos grandes como lo era en el caso anterior, en esta ocasión se pueden observar pequeñas variaciones para prácticamente todas las frecuencias, es posible también percibir variaciones en la densidad de potencia a lo largo del tiempo, esto puede estar relacionado con la dispersión de la energía que se comentó anteriormente, por último, se observa una pequeña disminución de la energía presente en el sistema, indicativo de un amortiguamiento natural del sistema.

2.6. Sexto Punto

2.6.1. Inciso 6.1

Simplifique las ecuaciones suponiendo pequeñas oscilaciones. Esto es: considere $\theta_1 \ll 1$, $\theta_2 \ll 1$, $\theta_1^2 \sim \theta_2^2 \sim 0$, $\sin \theta_1 \sim \theta_1$, $\sin \theta_2 \sim \theta_2$, $\cos \theta_1 \sim 1$, $\cos \theta_2 \sim 1$. Repita el análisis anterior, en los puntos 2, 3, 4 y 5.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema se decidió abordar el ejercicio en primera instancia a través de la formulación newtoniana apoyándonos de la clase de pregrado en Física del instructor Boleslaw Wyslouch del instituto de tecnología de massachusetts, la cual fue grabada y subida a YouTube [1](#), para de esta forma poder comparar los resultados obtenidos con las ecuaciones de movimiento que se hallaron usando la formulación lagrangiana.

Se empezó realizando un diagrama de cuerpo libre para las dos masas que componen el sistema, empezando con la masa 1 ubicada a la izquierda, como se puede observar en la figura 1, cuando esta se encuentra fuera de la posición de equilibrio. Esta masa en un instante t esta sujeta a diferentes fuerzas, en el eje horizontal (x) la masa esta siendo afectada por la componente de la tensión en la dirección $-\hat{x}$ y por la fuerza de elasticidad del resorte en dirección opuesta \hat{x} , mientras que en el eje vertical (y) la masa esta siendo afectada por la componente de la tensión en la dirección \hat{y} y por la gravedad en al dirección opuesta $-\hat{y}$. Por otra parte, la masa 2 esta en una situación similar a la de la masa 1, con la particularidad de que en este instante de tiempo, la componente horizontal de la tensión y la fuerza de elasticidad están actuando sobre el mismo eje $-\hat{x}$.

■ **Diagrama de fuerzas para la masa 1:**

$$\sum F_x = K_{12}(x_2 - x_1) - T \sin \theta_1 = m_1 \ddot{x} \quad (57)$$

$$\sum F_y = T \cos \theta_1 - m_1 g = m_1 \ddot{y} = 0 \quad (58)$$

- Para ángulos pequeños $\cos \theta_1 \approx 1$ y $\sin \theta_1 \approx \theta_1$, entonces:

$$\sum F_x = K_{12}(x_2 - x_1) - T(\theta_1) = m_1 \ddot{x} \quad (59)$$

$$\sum F_y = T(1) - m_1 g = m_1 \ddot{y} = 0 \Rightarrow T = m_1 g \quad (60)$$

- Se concluye que no hay movimiento en el eje vertical, por otra parte, se tiene que $x_1 = L\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = x_1/L$, entonces:

$$\sum F_x = K_{12}(x_2 - x_1) - m_1 g \frac{x_1}{L} = m_1 \ddot{x} \quad (61)$$

$$\sum F_x = -(K_{12} + \frac{m_1 g}{L})x_1 - K_{12}x_2 = m_1 \ddot{x} \quad (62)$$

■ **Diagrama de fuerzas para la masa 2:**

$$\sum F_x = -K_{21}(x_2 - x_1) - T \sin \theta_2 = m_2 \ddot{x} \quad (63)$$

$$\sum F_y = T \cos \theta_2 - m_2 g = m_2 \ddot{y} = 0 \quad (64)$$

- Se realiza un proceso análogo al de la masa 1 con $T = m_2 g$ y $\theta_2 = x_2/L$:

$$\sum F_x = Kx_1 - (K + \frac{m_2 g}{L})x_2 = m_2 \ddot{x}_2 \quad (65)$$

Tras realizar y simplificar el diagrama de fuerzas para las dos masas que componen el ejercicio se obtiene un sistema de dos ecuaciones acoplados 62 y 65.

Se decide representar el sistema de forma matricial por la utilidad que representa. (corregir) Se definen las matrices que representan las posición, la elasticidad y la masa de la siguiente forma:

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \quad \mathbb{K} = \begin{pmatrix} k + \frac{mg}{L} & -k \\ -k & k + \frac{mg}{L} \end{pmatrix}$$

Además también nos hace falta representar variaciones de las anteriores matrices como lo son la matriz de aceleración y la matriz inversa de la masa:

$$\ddot{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} \quad \mathbb{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

Una vez definidas las anteriores matrices podemos representar el sistema acoplado de movimiento de ambas masas de forma matricial como:

$$\ddot{\mathbb{X}} = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{X} \quad (66)$$

Con el fin de encontrar soluciones para este sistema de ecuaciones de movimiento que describe a dos péndulos atados por un resorte, se decide recurrir a una notación compleja, de esta forma se busca hallar modos de frecuencias fijas de tal forma que el sistema completo se mueva a una única frecuencia.

$$\mathbb{Z} = e^{i(wt+\varphi)}\mathbb{A} \quad (67)$$

Donde \mathbb{Z} se define como un vector complejo de la forma $\mathbb{Z} = x + iy$ donde x es la parte real del vector. En la ecuación 67, w representa la velocidad angular, φ es la fase y \mathbb{A} es un vector constante definido como las posiciones iniciales de ambas masas, este vector es la parte real del complejo.

$$\dot{\mathbb{Z}} = iwe^{i(wt+\varphi)}\mathbb{A} \quad (68)$$

$$\ddot{\mathbb{Z}} = i^2w^2e^{i(wt+\varphi)}\mathbb{A} = -w^2e^{i(wt+\varphi)}\mathbb{A} \quad (69)$$

Luego se igualan las ecuaciones 66 y 69:

$$\ddot{\mathbb{Z}} = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}\mathbb{Z} \quad (70)$$

$$-w^2e^{i(wt+\varphi)}\mathbb{A} = -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}(iwe^{i(wt+\varphi)}\mathbb{A}) \quad (71)$$

Simplificando la ecuación 71 se obtiene:

$$(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} - w^2\mathbb{I})\mathbb{A} = 0 \quad (72)$$

Para que la igualdad de la ecuación 72 sea cierta, se debe cumplir que la matriz 2x2 resultante de hacer las operaciones entre matrices de la cantidad $(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} - w^2\mathbb{I})$ debe ser igual a 0, por lo tanto:

$$(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} - w^2\mathbb{I}) = \begin{pmatrix} \frac{K}{m} + \frac{g}{L} - w^2 & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} + \frac{g}{L} - w^2 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$\det(\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} - w^2\mathbb{I}) = 0 \quad (74)$$

$$\left(\frac{K}{m} + \frac{g}{L} - w^2\right)^2 - \left(\frac{K}{m}\right)^2 = 0 \quad (75)$$

$$\frac{K}{m} + \frac{g}{L} - w^2 = \pm \frac{K}{m} \quad (76)$$

Al despejar se obtienen dos soluciones:

$$w^2 = \frac{g}{L} \quad \wedge \quad w^2 = \frac{g}{L} + \frac{2K}{L} \quad (77)$$

Estas dos frecuencias son los modos normales que describen el movimiento del sistema, pero aún hace falta hallar los vectores propios del sistema para cada una de estas frecuencias.

- Para $w^2 = \frac{g}{L}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{K}{m} + \frac{g}{L} - \frac{g}{L} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} + \frac{g}{L} - \frac{g}{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} \end{pmatrix} \quad (78)$$

Donde la matriz debe satisfacer la igualdad:

$$\begin{pmatrix} \frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda x_1 = \lambda x_2 = \lambda 1 \quad (79)$$

- Para $w^2 = \frac{g}{L} + \frac{2K}{m}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{K}{m} + \frac{g}{L} - \frac{g}{L} + \frac{2K}{m} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & \frac{K}{m} + \frac{g}{L} - \frac{g}{L} + \frac{2K}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \end{pmatrix} \quad (80)$$

Donde la matriz debe satisfacer la igualdad:

$$\begin{pmatrix} -\frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \\ -\frac{K}{m} & -\frac{K}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \lambda x_1 = \lambda 1 \wedge \lambda x_2 = -\lambda 1 \quad (81)$$

Por tanto, los dos modos normales son:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{para } w^2 = \frac{g}{L} \text{ y } w^2 = \frac{g}{L} + \frac{2K}{m} \text{ respectivamente.}$$

Estos dos modos corresponden cada uno a la solución para los dos tipos de oscilaciones que describen completamente el movimiento del sistema:

(insertar imágenes)

Volviendo al espacio de los números reales usando la relación:

$$\ddot{\mathbf{X}} = Re(\mathbb{Z}) = Re(\mathbb{A}e^{i(wt+\varphi)}) \quad (82)$$

Por ello, para el primer modo se tiene que:

$$x^{(1)} = C_1 \cos(w_1 t + \varphi_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (83)$$

Y para el modo 2 se tiene:

$$x^{(2)} = C_2 \cos(w_2 t + \varphi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

Por lo que las soluciones para x_1 y x_2 serán:

$$x_1 = \alpha \cos(\omega_1 t + \psi_1) + \beta \cos(\omega_2 t + \psi_2) \quad (85)$$

$$x_2 = \alpha \cos(\omega_1 t + \psi_1) - \beta \cos(\omega_2 t + \psi_2) \quad (86)$$

Las constantes α , β , ψ_1 y ψ_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales. Y esta es la descripción general del movimiento de las masas.

Derivación a partir de Lagrange

Para el sistema y para la condición de oscilaciones pequeñas (y desplazamientos pequeños) tenemos las siguientes expresiones para las energías:

$$x_1 = x_1, \quad y_1 = l - l \cos \theta_1 \quad (87)$$

$$x_2 = x_2, \quad y_2 = l - l \cos \theta_2 \quad (88)$$

Consideramos ángulos pequeños $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ y $\sin \theta \approx \theta \approx \frac{x}{l}$, por tanto:

$$x_1 = x_1, \quad y_1 = l(1 - 1 + \frac{\theta_1^2}{2}) \approx (\frac{x_1^2}{2l}) \quad (89)$$

$$x_2 = x_2, \quad y_2 = l(1 - 1 + \frac{\theta_2^2}{2}) \approx (\frac{x_2^2}{2l}) \quad (90)$$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \quad (91)$$

$$U = mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (92)$$

$$= \frac{mg}{2l}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (93)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2l}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \quad (94)$$

Ahora podemos relacionar las coordenadas y las velocidades del sistema de la siguiente forma:

$$x = x_2 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \quad (95)$$

$$X = x_2 + x_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x}_2 + \dot{x}_1 \quad (96)$$

$$x_2 = \frac{x + X}{2}, \quad x_1 = \frac{X - x}{2} \quad (97)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{\dot{x} + \dot{X}}{2}, \quad \dot{x}_1 = \frac{\dot{X} - \dot{x}}{2} \quad (98)$$

Reemplazando nuevamente en la ecuación de lagrange:

$$L = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{\dot{X} - \dot{x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\dot{x} + \dot{X}}{2} \right)^2 \right] - \frac{mg}{2l} \left[\left(\frac{X - x}{2} \right)^2 + \left(\frac{x + X}{2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2}kx^2 \quad (99)$$

$$= \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{X}^2}{2} + \frac{\dot{x}^2}{2} \right) - \frac{mg}{2l} \left(\frac{X^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{2}kx^2 \quad (100)$$

$$= \frac{1}{4}m(\dot{X}^2 + \dot{x}^2) - \frac{mg}{2l}(X^2 + x^2) - \frac{1}{2}kx^2 \quad (101)$$

El cual pudo ser expresado en solo dos coordenadas generalizadas correspondientes a nuestros dos grados de libertad. Ahora, desarrollamos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \quad (102)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x} \right) + \frac{mg}{2l} x + kx \quad (103)$$

$$0 = \ddot{x} + \left(\frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \right) x \quad (104)$$

$$\ddot{x} - \omega_1^2 x = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \quad (105)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} \right) - \frac{\partial L}{\partial X} \quad (106)$$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{X} \right) + \frac{mg}{2l} X \quad (107)$$

$$0 = \frac{1}{2} m \ddot{X} + \frac{mg}{2l} X \quad (108)$$

$$\ddot{X} + \omega_2^2 X = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} \quad (109)$$

Los cuales son iguales a las frecuencias obtenidas por el método newtoniano. Mostrando que las masas oscilaran a frecuencias que son combinaciones lineales de ω_1 y ω_2 .

$$\ddot{x} - \omega_1^2 x = 0, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \quad (110)$$

$$\ddot{X} + \omega_2^2 X = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{g}{l} \quad (111)$$

3. Conclusiones

El desarrollo de este informe marca un punto de inflexión al incorporar cálculos numéricos para resolver sistemas dinámicos descritos por ecuaciones no lineales. Esto es sumamente trascendental, ya que amplía considerablemente el abanico de problemas a los que ahora tenemos acceso y nos permite comprender sistemas más complejos, gracias a las herramientas sugeridas para resolver los problemas expuestos en este mismo informe. La introducción al caos es importante como preámbulo para entender los temas que se abordarán en futuras asignaturas, así como para analizar los sistemas de ecuaciones con el fin de identificar relaciones lógicas entre los parámetros y constantes de dichas ecuaciones, y cómo estos influyen en la variabilidad caótica del sistema.

4. Referencias

1. MIT OpenCourseWare. (2018, April 18). Beat phenomena [Video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=IOYACDaY-ww&t=1914s>
2. AdrianGuel. (2021). Progra-Algo [Repositorio en GitHub]. GitHub. <https://github.com/AdrianGuel/Progra-Algo/blob/numericalmethods/rungekutta4a.py>
3. Maianti, M., Pagliara, S., Galimberti, G., & Parmigiani, F. (2009). Mechanics of two pendulums coupled by a stressed spring. *Am. J. Phys.*, 77(9), 834-838.
4. Guzev, M., & Dmitriev, A. (2016). Stability analysis of two coupled oscillators. *Mathematics and Mechanics of Complex Systems*, 4(2), 139-152.