

# SISTEMA DE DOS PÉNDULOS ATADOS POR UN RESORTE

DAMIAN STEVEN OSPINA - 2201296  
JESUS LEONARDO QUINTERO - 2142071

# CONTENIDO

- 01** ECUACIONES DE MOVIMIENTO
- 02** INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y SIMULACIÓN
- 03** VARIACIONES DEL MONTAJE
- 04** SISTEMA CAÓTICO
- 05** ANÁLISIS DE LA SEÑAL

Universidad  
Industrial de  
Santander



# 1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

- **Posiciones**

$$x_1 = l \sin \theta_1$$

$$y_1 = l (1 - \cos \theta_1)$$

$$x_2 = l \sin \theta_2$$

$$y_2 = l (1 - \cos \theta_2)$$

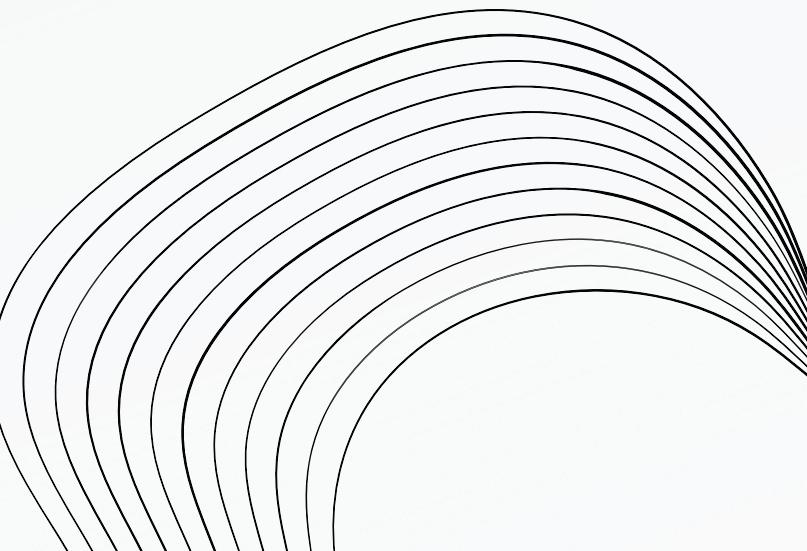
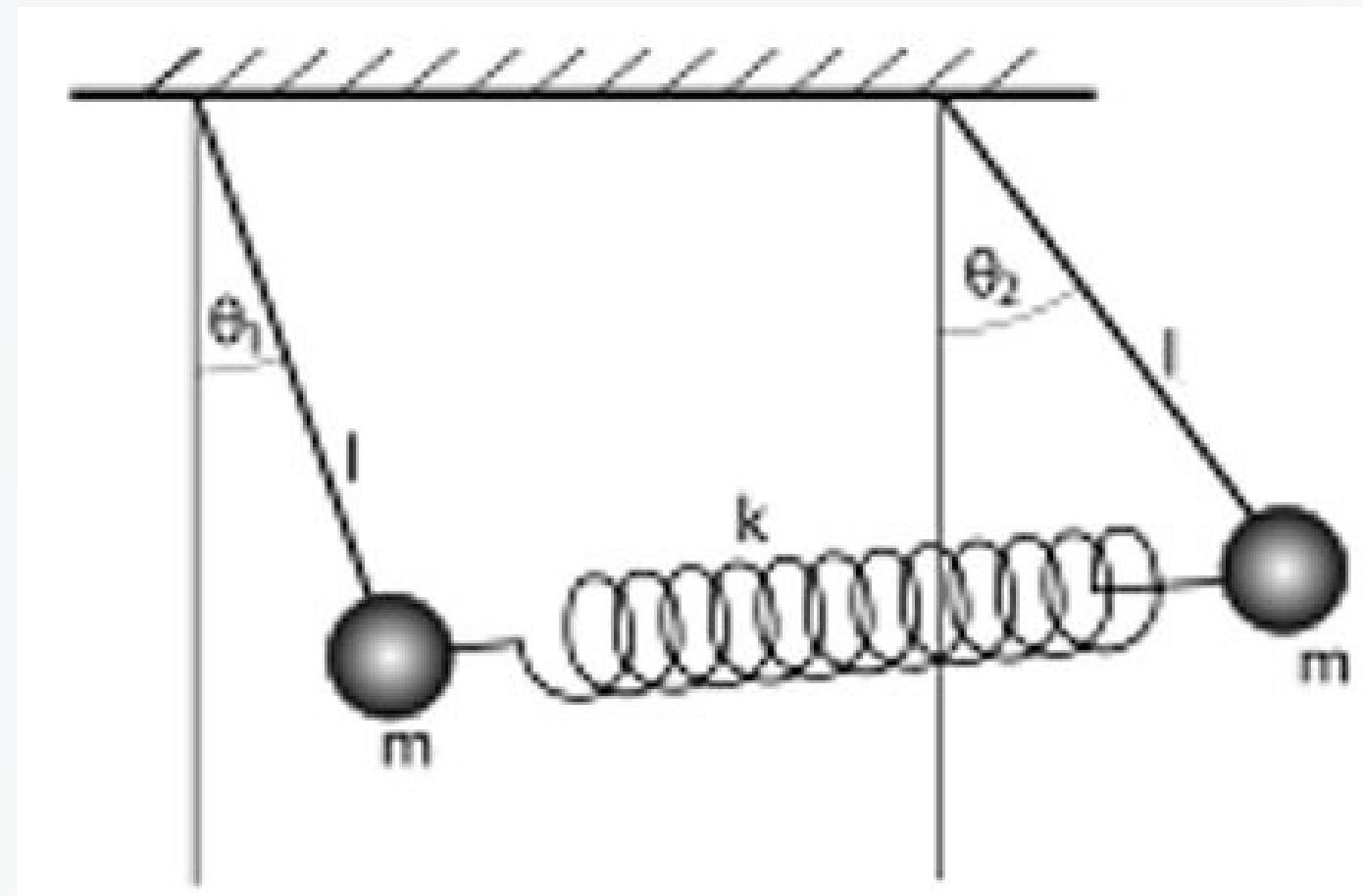
- **Velocidades**

$$\dot{x}_1 = l \dot{\theta}_1 \cos \theta_1$$

$$\dot{y}_1 = l \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$$

$$\dot{x}_2 = l \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$\dot{y}_2 = l \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$



# 1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

- Energía Cinética

$$T = \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2}m \left( l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \right)$$

- Energía Potencial

$$V = mgl (1 - \cos \theta_1 + 1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k[l(\sin \theta_2 - \sin \theta_1)]^2$$

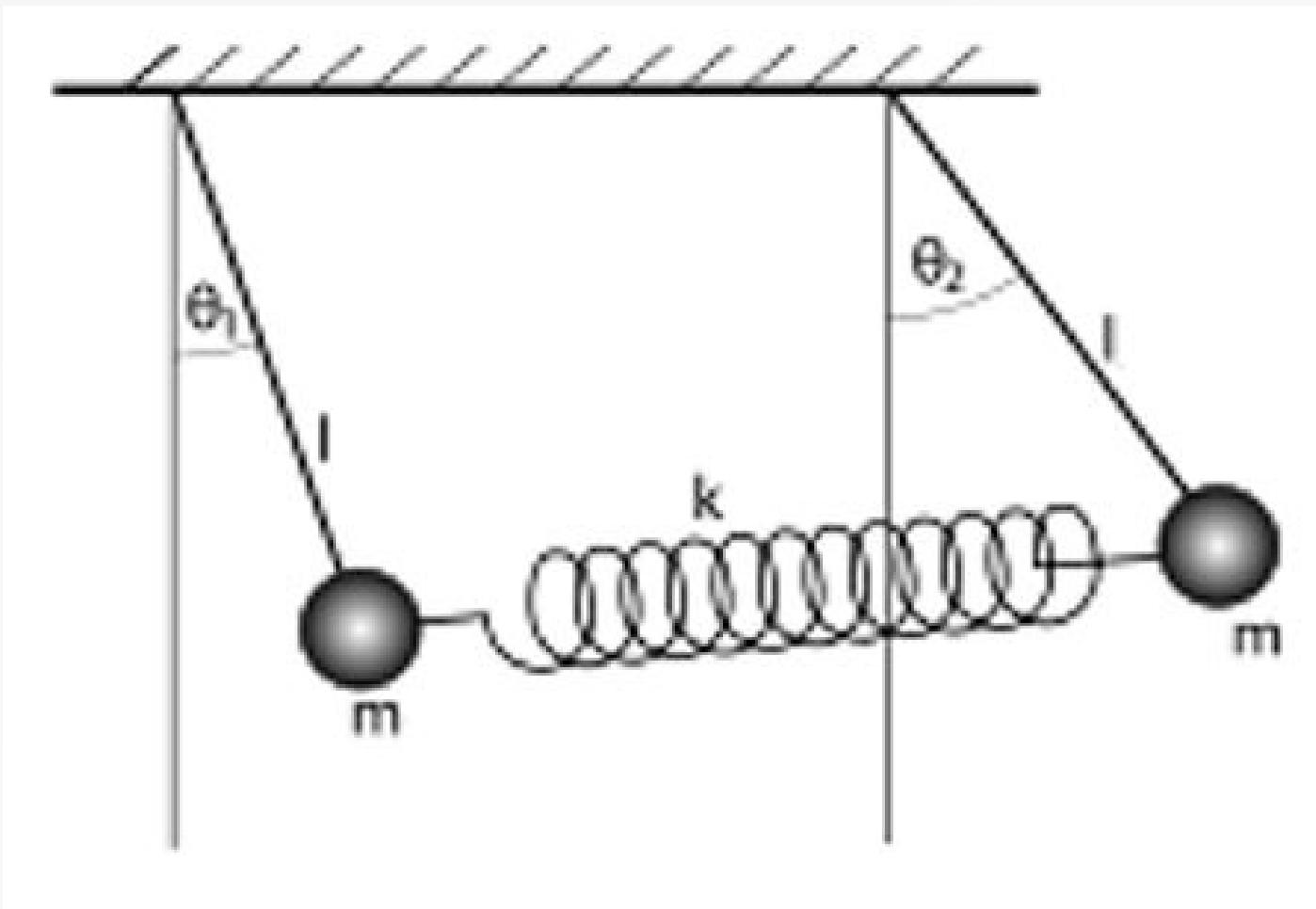
$$V = mgl (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}kl^2 (\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 - 2\sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

# 1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

- Por tanto, el Lagrangiano será:

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m \left( l^2\dot{\theta}_1^2 + l^2\dot{\theta}_2^2 \right) - mgl (2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) - \frac{1}{2}kl^2 (\sin^2\theta_2 + \sin^2\theta_1 - 2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$



# 1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO

- **Aplicando Euler-Lagrange para Theta 1**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

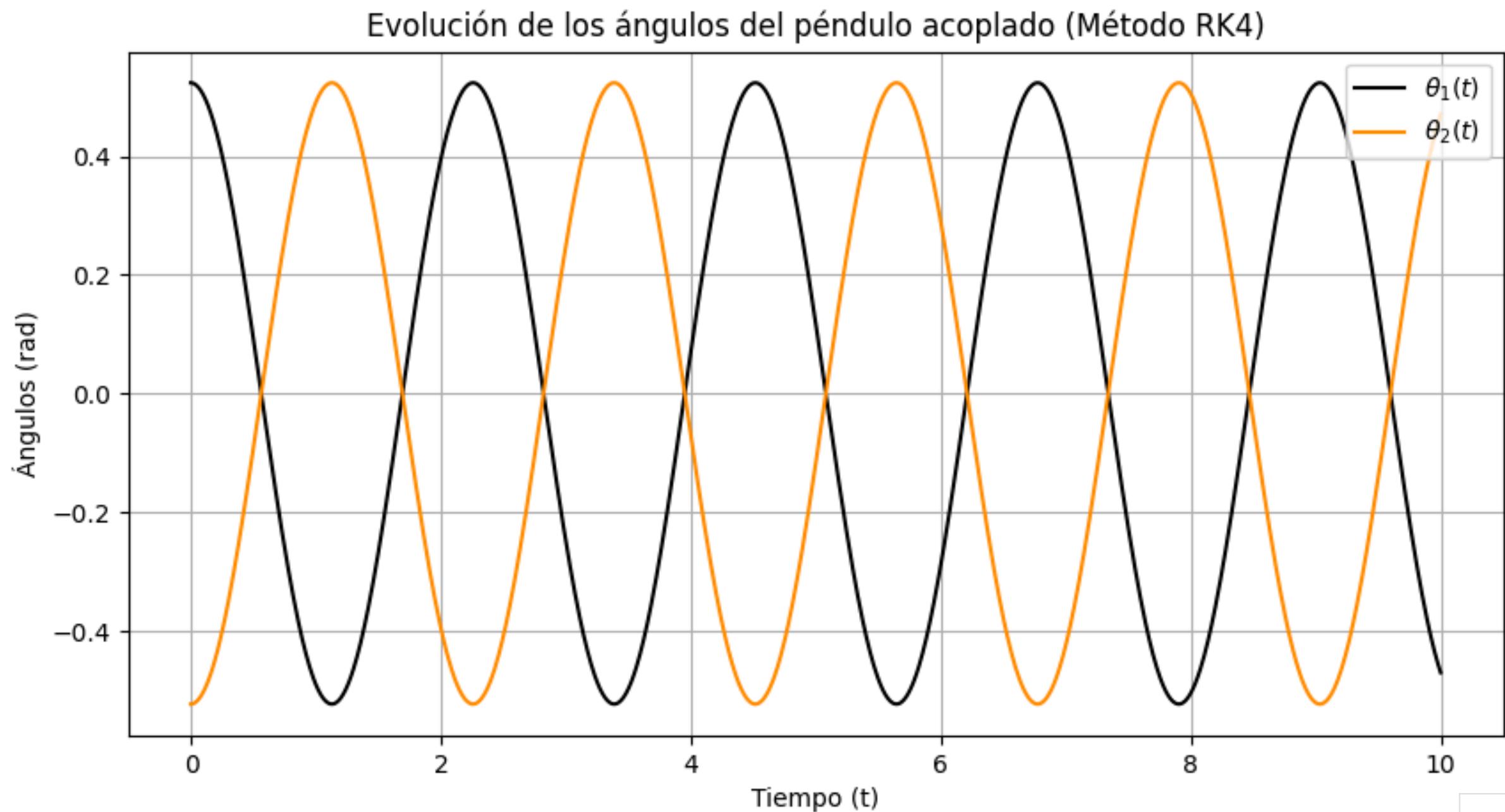
$$\ddot{\theta}_1 - \frac{g}{l} \sin \theta_1 - \frac{k}{m} \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0$$

- **Aplicando Euler-Lagrange para Theta 2**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{g}{l} \sin \theta_2 - \frac{k}{m} \cos \theta_2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0$$

# 2. INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y SIMULACIÓN



$$\theta_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{6}$$



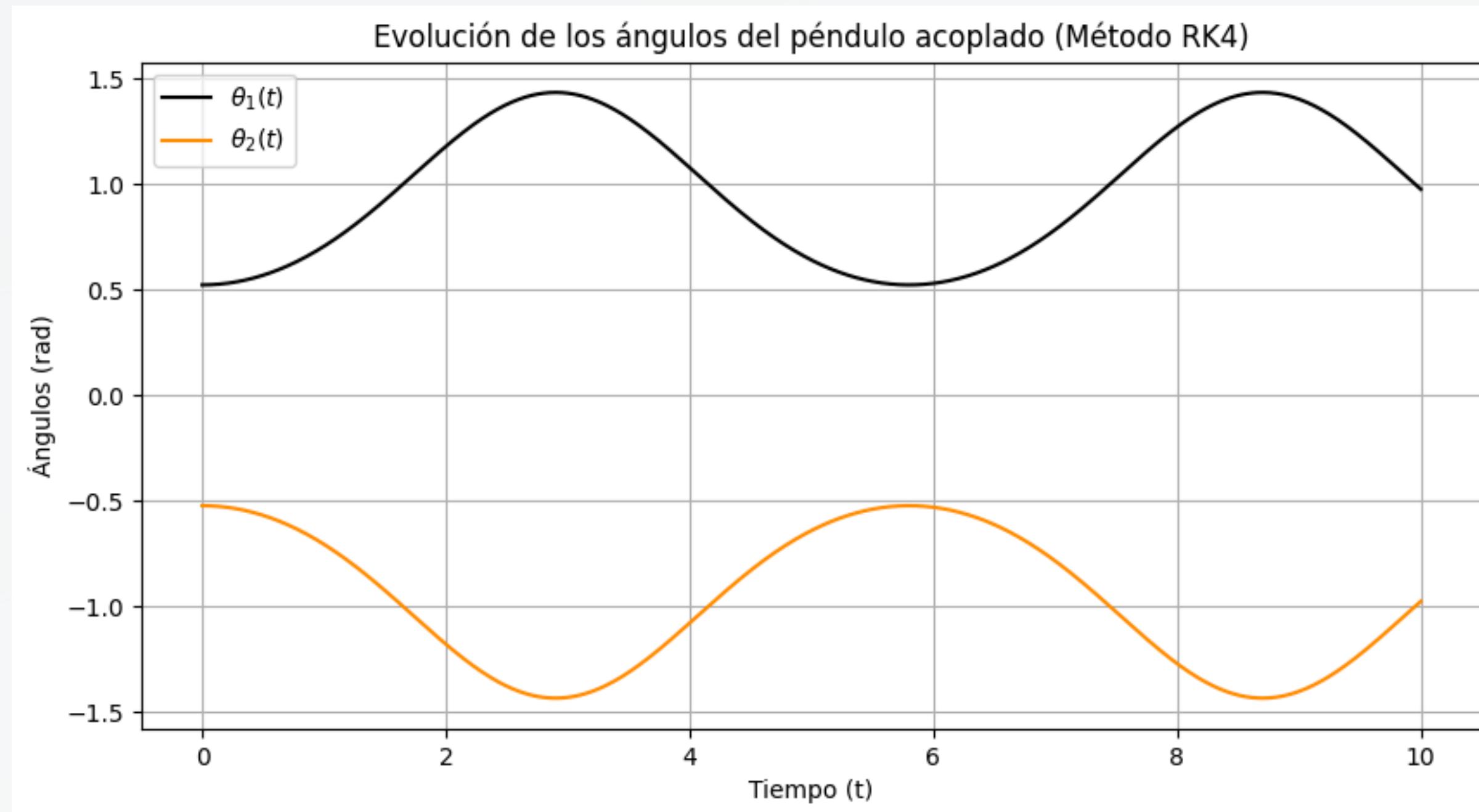
Google Colab  
[google.com](https://google.com)

## 2. INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y SIMULACIÓN

Universidad  
Industrial de  
Santander



Relación entre la gravedad y la longitud = 1

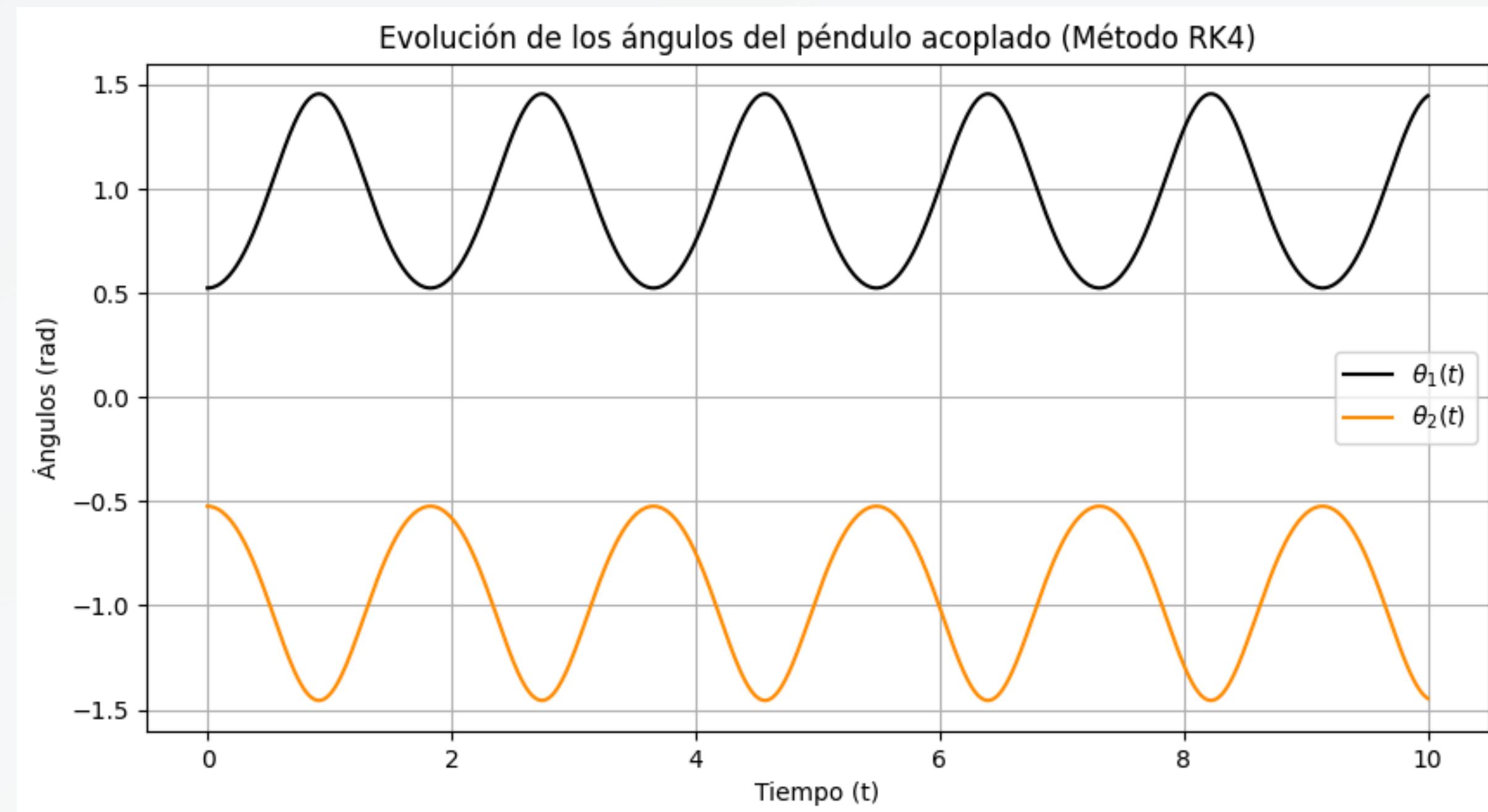


## 2. INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y SIMULACIÓN

Universidad  
Industrial de  
Santander



Relación entre la constante y la masa = 10



## 2. INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y SIMULACIÓN

Universidad  
Industrial de  
Santander



Relación entre la constante y la masa = 1/10



### 3. VARIACIONES DEL MONTAJE

- ¿HACE DIFERENCIA SI EL RESORTE CONECTA A LAS MASAS O SI SE ENCUENTRA ATADO A MEDIA ALTURA DE LAS VARILLAS?

$$\sum T_A = rF_k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - mgr \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = rF_k \cos \theta - rmg \cos \theta$$

$$\sum T_B = \frac{r}{2}F_k \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - mgr \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{r}{2}F_k \cos \theta - rmg \cos \theta$$

$$T_A \neq T_B$$

### 3. VARIACIONES DEL MONTAJE

- ¿CÓMO INFLUYE LA RELACIÓN M1/M2 SI  
CONSIDERAMOS QUE LAS MASAS SON DIFERENTES?

- **Energía Cinética**

$$T = \frac{1}{2}m_1 \left( l^2\dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l^2\dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2}m_2 \left( l^2\dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + l^2\dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \left( \frac{m_1}{m_2} l^2 \dot{\theta}_1^2 + l^2 \dot{\theta}_2^2 \right)$$

- **Energía Potencial**

$$V = m_1 gl (1 - \cos \theta_1) + m_2 gl (1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2} k [l (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)]^2$$

$$V = \frac{m_1}{m_2} gl (1 - \cos \theta_1) + gl (1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2} \frac{k}{m_2} l^2 (\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_1 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

### 3. VARIACIONES DEL MONTAJE

- Aplicando Euler-Lagrange para Theta 1

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

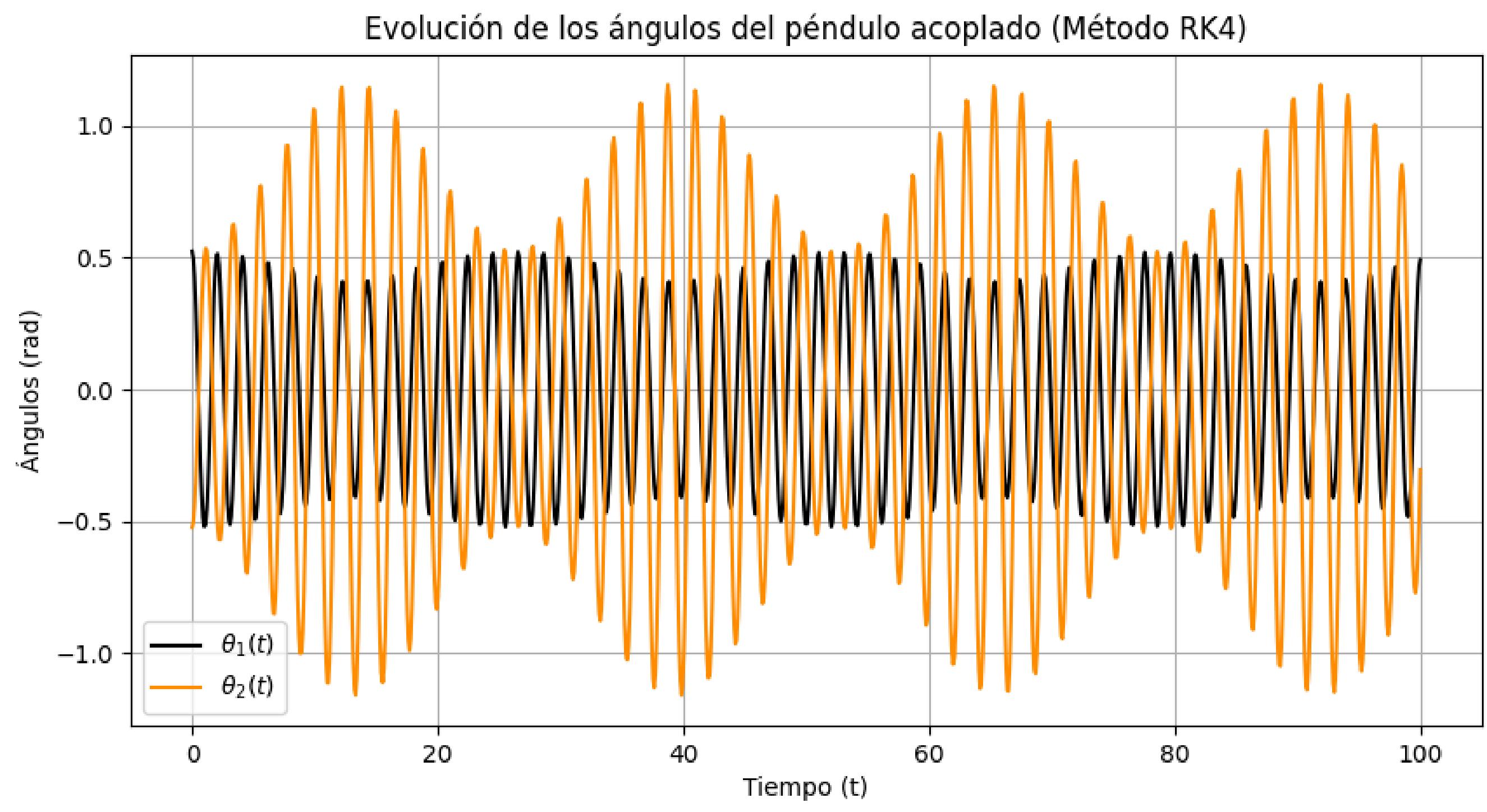
$$\ddot{\theta}_1 - \frac{g}{l} \sin \theta_1 - \frac{k}{m_1} \cos \theta_1 (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = 0$$

- Aplicando Euler-Lagrange para Theta 2

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{g}{l} \sin \theta_2 - \frac{k}{m_2} \cos \theta_2 (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0$$

# 3. VARIACIONES DEL MONTAJE



$$\frac{m_1}{m_2} = 10$$

### 3. VARIACIONES DEL MONTAJE

- ¿CÓMO INFLUYE LA RELACIÓN L1/L2 SI CONSIDERAMOS QUE EL LARGO DE LAS VARILLAS ES DIFERENTE?

- **Energía Cinética**

$$T = \frac{1}{2}m \left( l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2 \theta_1 \right) + \frac{1}{2}m \left( l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2 \theta_2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2 \theta_2 \right)$$

$$T = \frac{1}{2}m \left( l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right)$$

- **Energía Potencial**

$$V = mgl_1 (1 - \cos \theta_1) + mgl_2 (1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k(l_2 \sin \theta_2 - l_1 \sin \theta_1)^2$$

$$V = mgl_1 (1 - \cos \theta_1) + mgl_2 (1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}k \left( l_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \right)$$

### 3. VARIACIONES DEL MONTAJE

- Aplicando Euler-Lagrange para Theta 1

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_1} \right) = 0$$

$$\frac{l_1^2}{l_2^2} \ddot{\theta}_1 + \frac{l_1}{l_2^2} g \sin \theta_1 - \frac{k}{m} \cos \theta_1 \left( \frac{l_1}{l_2} \sin \theta_2 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin \theta_1 \right) = 0$$

- Aplicando Euler-Lagrange para Theta 2

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \right) = 0$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l_2} \sin \theta_2 + \frac{k}{m} \cos \theta_2 \left( \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin \theta_2 - \frac{l_1}{l_2} \sin \theta_1 \right) = 0$$

# 4. Sistema Caótico

Cuadro 1: Condiciones iniciales para un sistema caótico

Ángulo Inicial [rad]	Velocidad Angular [rad/s]	Relación $g/l$	Relación $k/m$
0	6,3	9.81	1
$\pi/6$	6.0	9.81	1
$\pi/4$	5,8	9.81	1
$\pi/3$	5,2	9.81	1
$\pi/2$	4,1	9.81	1
$\pi/2 < \theta < \pi$	$1 \times 10^{-16}$	9.81	1
$\pi$	$1 \times 10^{-18}$	9.81	1

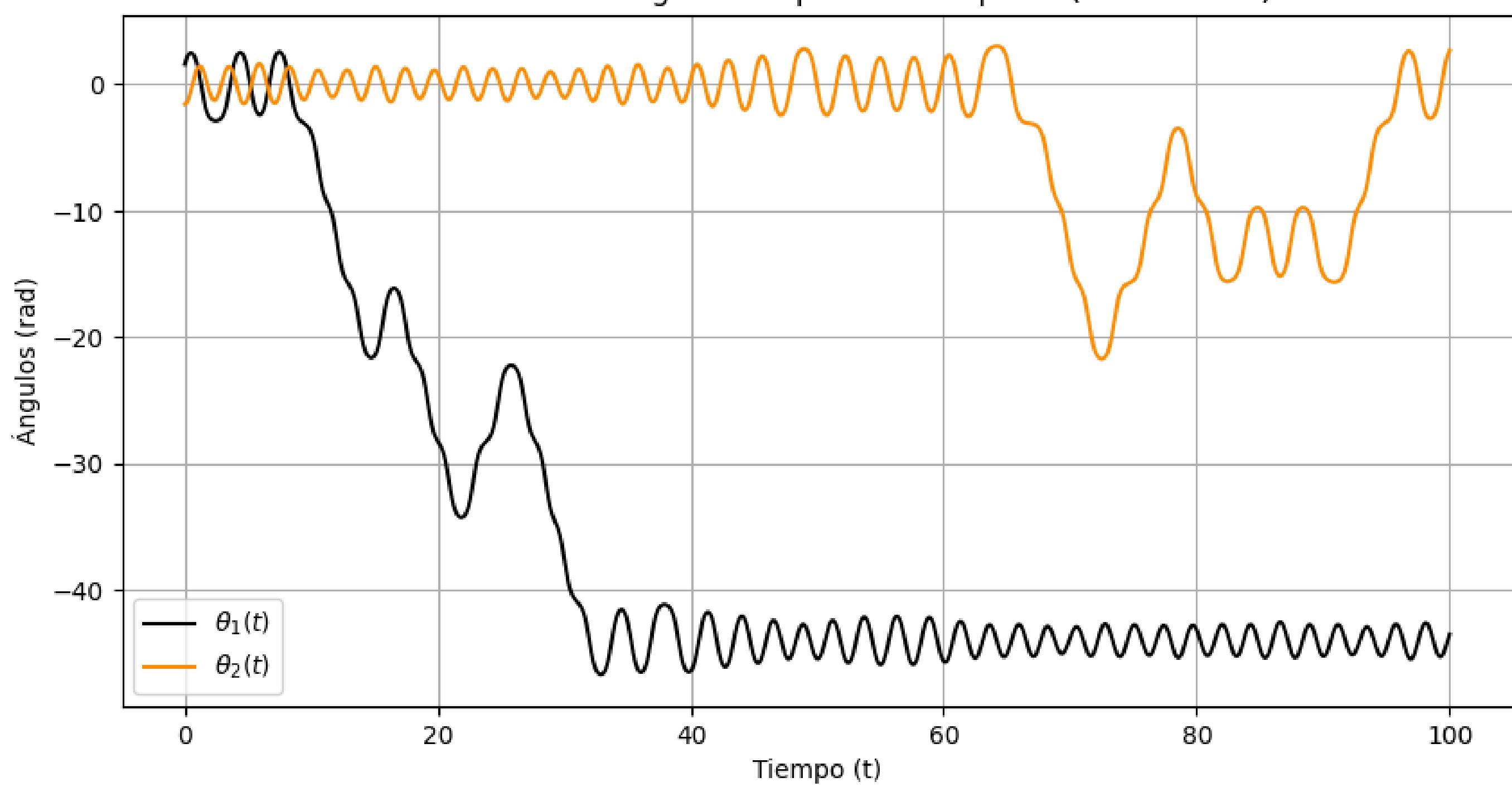
# 4. Sistema Caótico

$$\frac{\pi}{6}$$

Universidad  
Industrial de  
Santander



Evolución de los ángulos del péndulo acoplado (Método RK4)



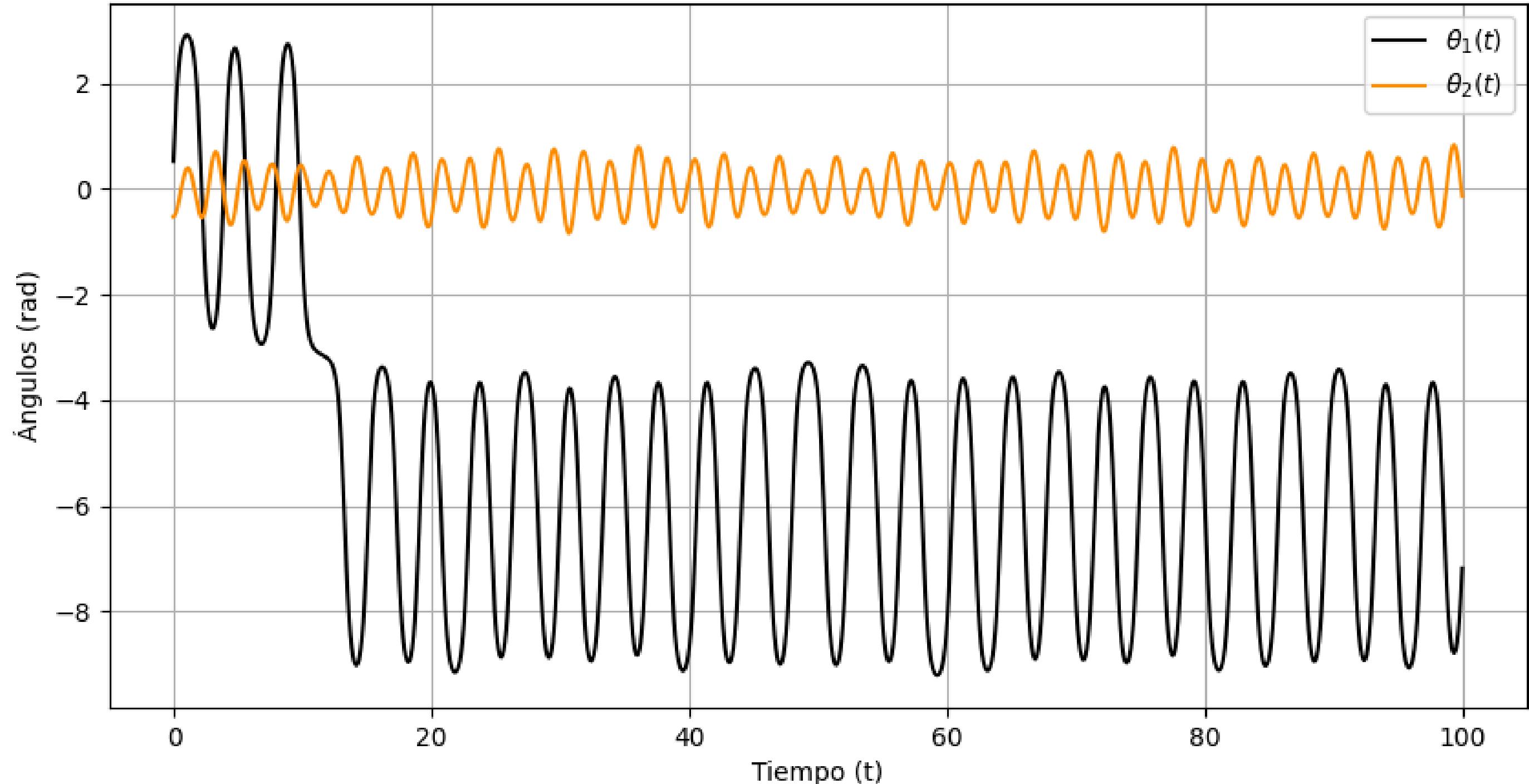
# 4. Sistema Caótico

$$\frac{\pi}{2}$$

Universidad  
Industrial de  
Santander

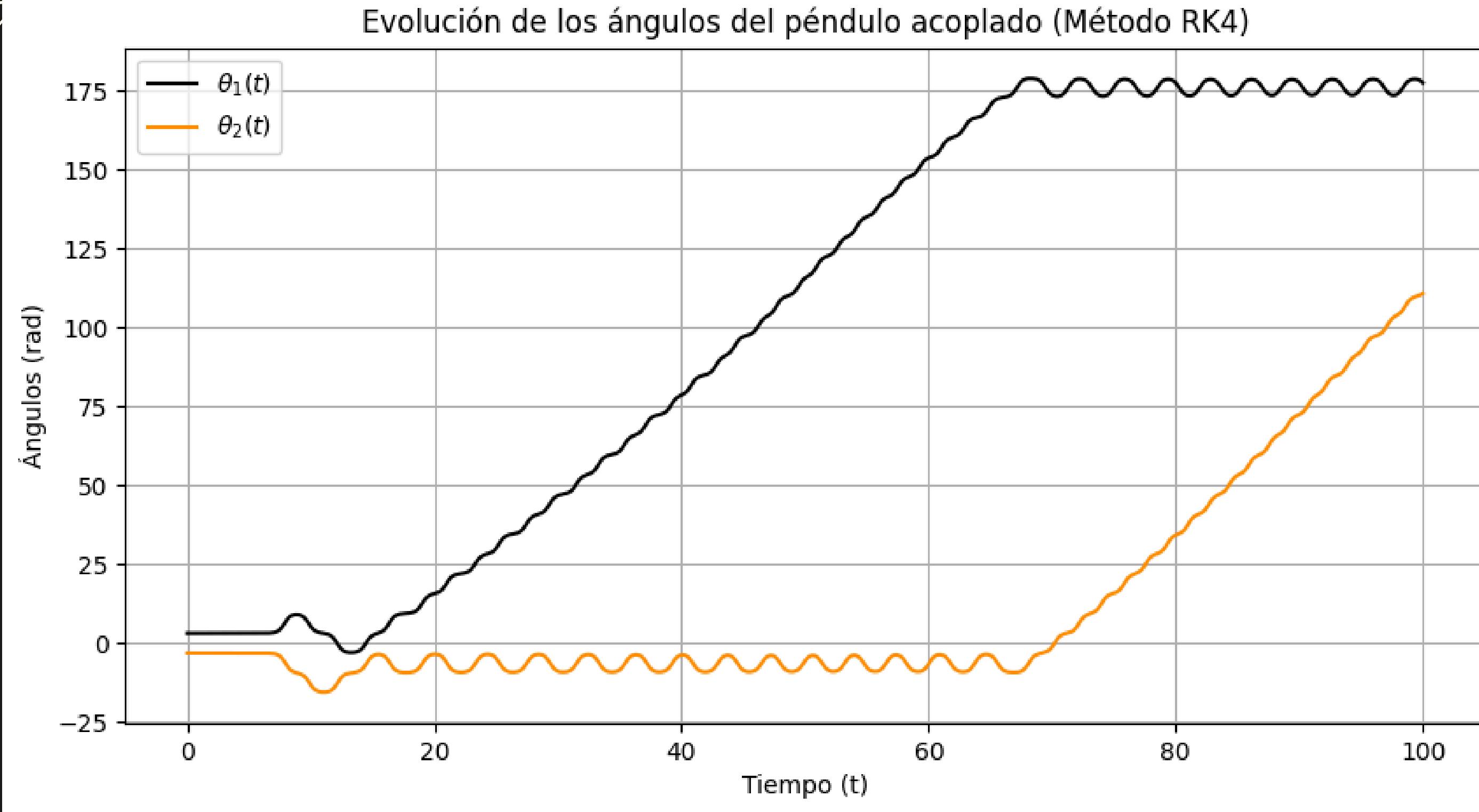


Evolución de los ángulos del péndulo acoplado (Método RK4)



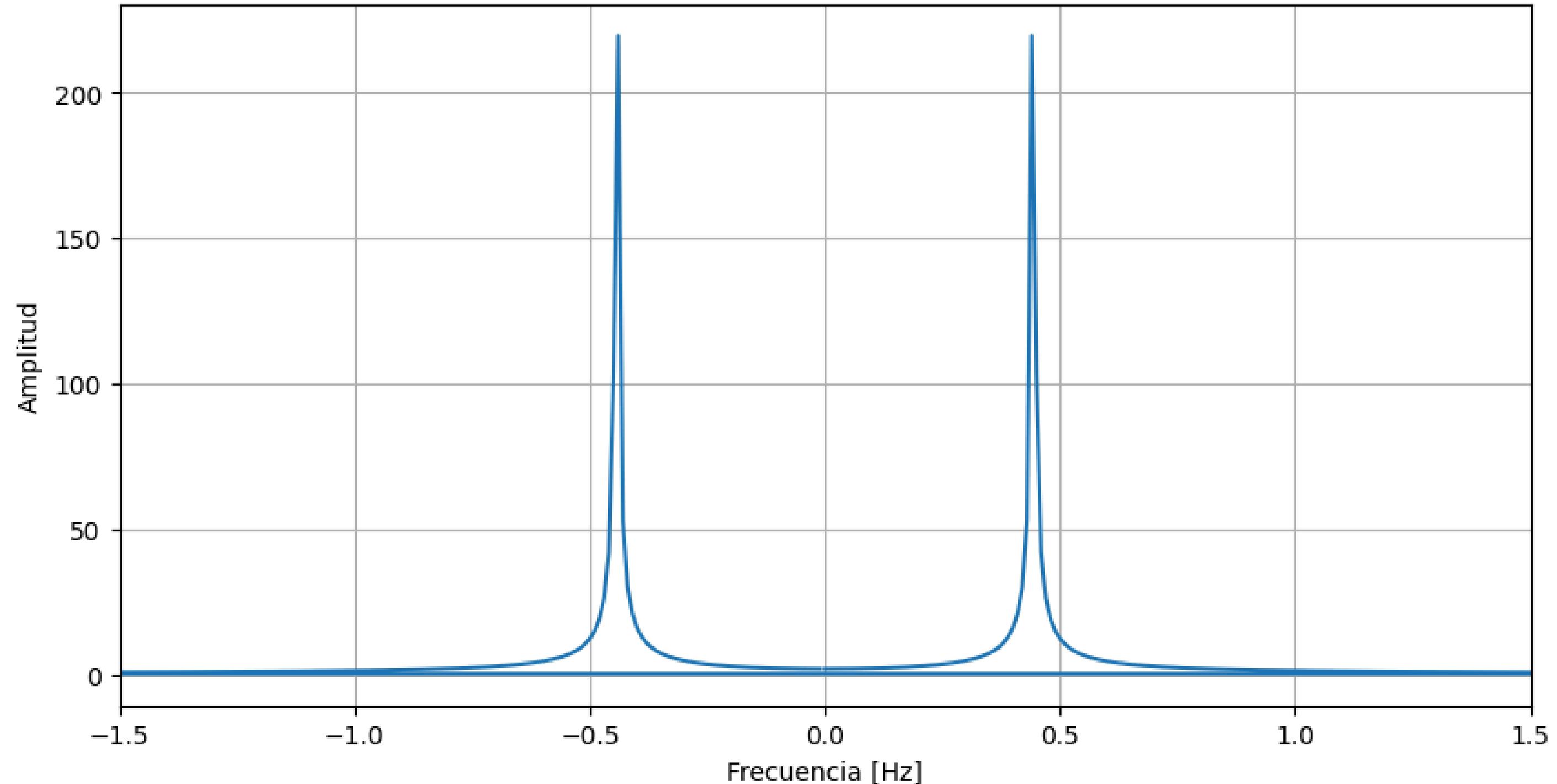
# 4. Sistema Caótico $\pi$

Universidad  
Industrial de  
Santander

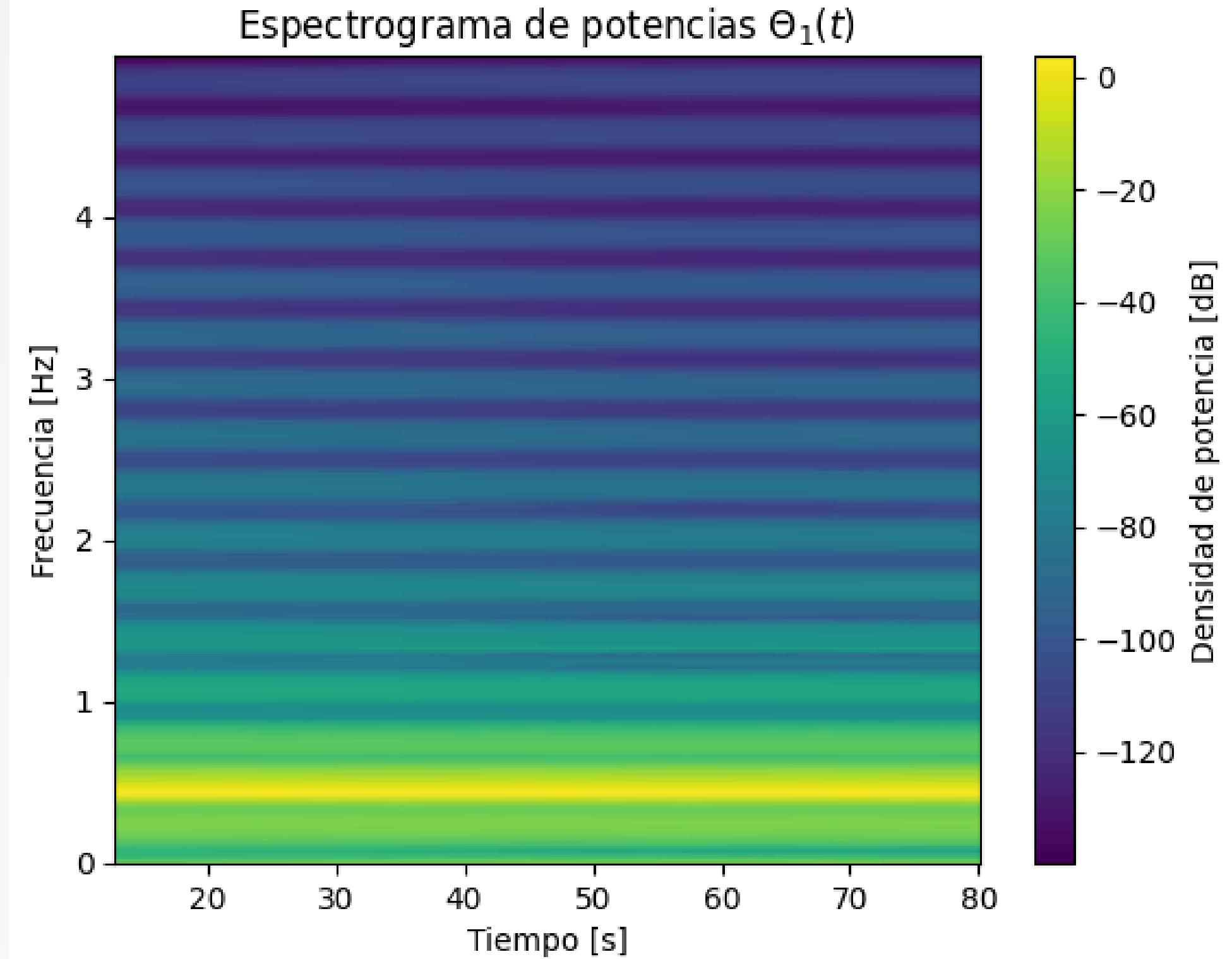
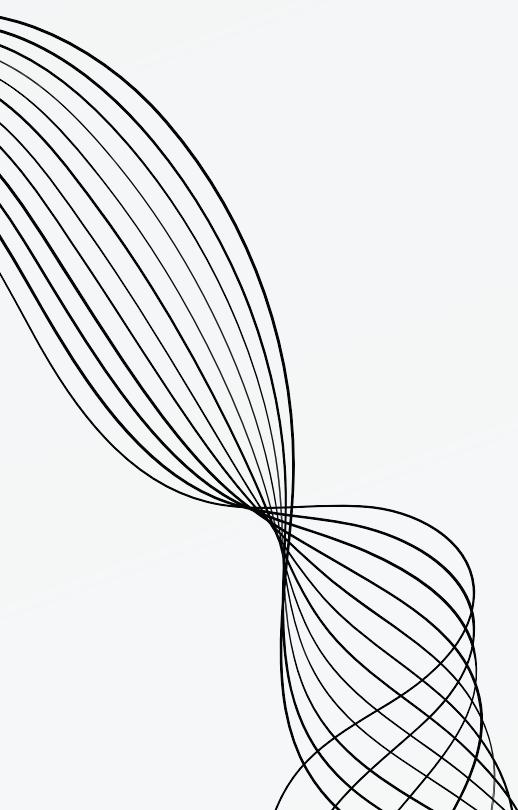


# 5. ANÁLISIS DE LA SEÑAL PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS

Espectro de potencias de Fourier de  $\Theta_1(t)$

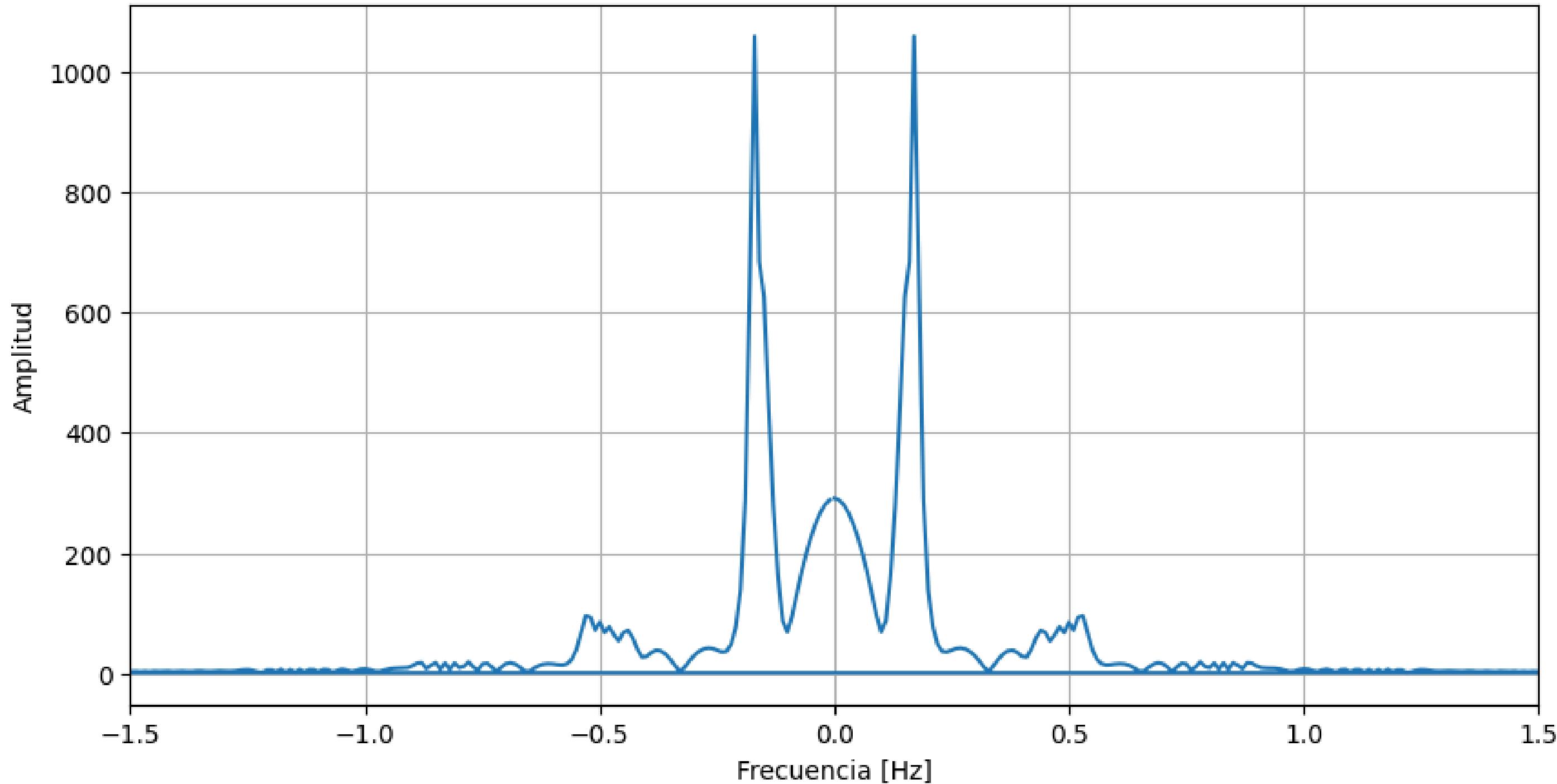


# 5. ANÁLISIS DE LA SEÑAL PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS

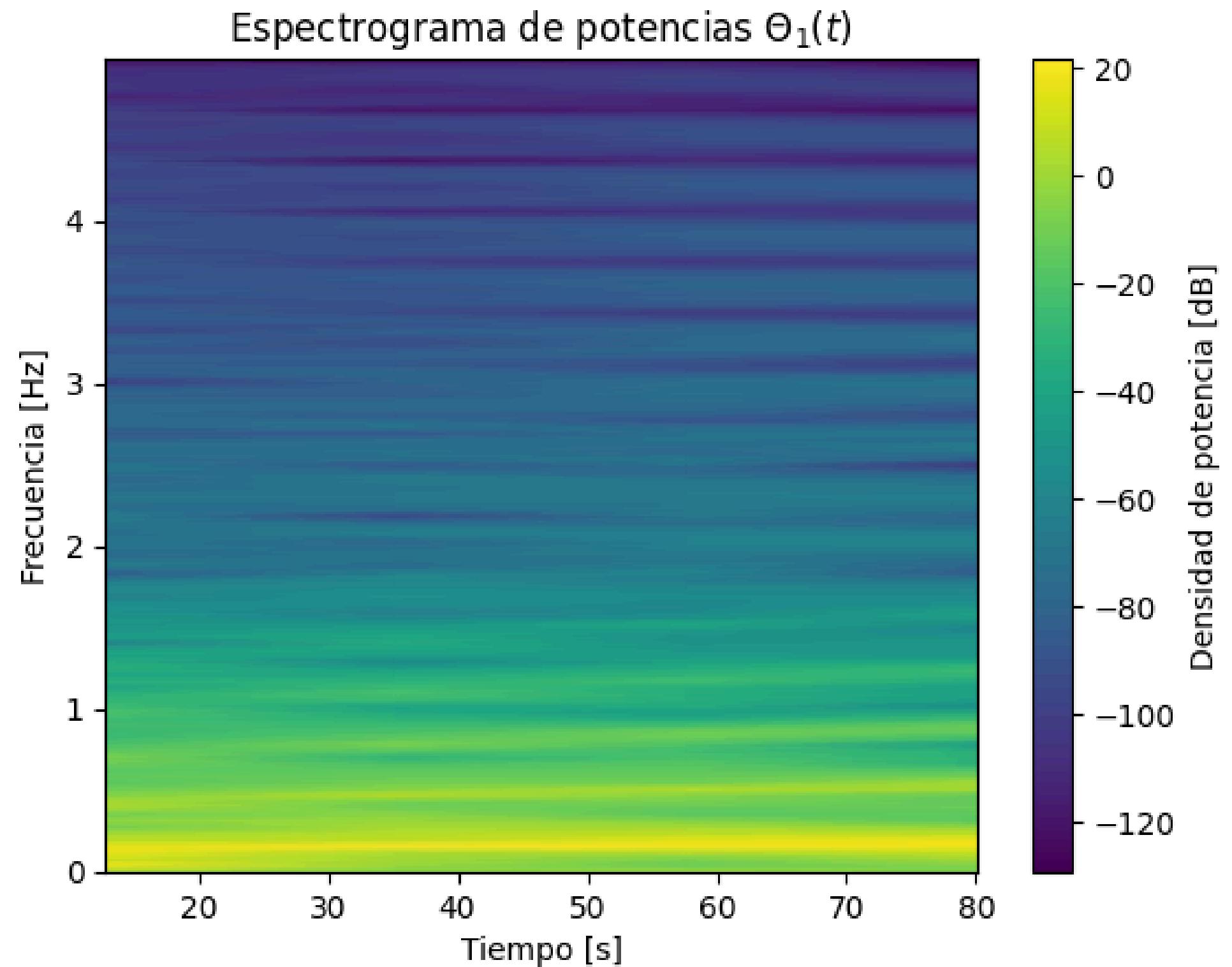


# 5. ANÁLISIS DE LA SEÑAL PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS

Espectro de potencias de Fourier de  $\Theta_1(t)$



# 5. ANÁLISIS DE LA SEÑAL PARA ÁNGULOS PEQUEÑOS



**MUCHAS  
GRACIAS**



Universidad  
Industrial de  
Santander