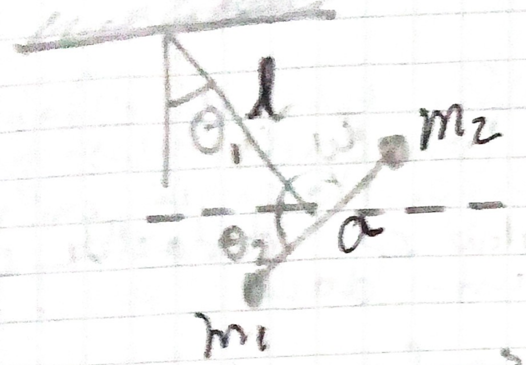
Taller 2 de los problemas de los exámenes:

1. Un péndulo compuesto está formado por una varilla de masa despreciable y longitud l, con un extremo fijo y el otro conectado al punto medio de una segunda varilla sin masa de longitud a $(a<l)$, en cuyos extremos hay dos masas m_1 y m_2. Las varillas pueden rotar sin fricción en un mismo plano vertical. Encuentre las ecuaciones de movimiento de este sistema.



Restricciones:

$z_1 = 0 \wedge z_2 = 0$

$$\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\right]^{1/2} - a = 0$$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2 - l^2 = 0$$

$$\rightarrow S = 3(2) - 4 = 2$$

→ las coordenadas generalizadas serán θ_1 y θ_2, y las ecuaciones del movimiento son:

$$x_1 = l\sin\theta_1 - \frac{a}{2}\cos\theta_2 \qquad x_2 = l\sin\theta_1 + \frac{a}{2}\cos\theta_2$$

$$y_1 = -l\cos\theta_1 - \frac{a}{2}\sin\theta_2; \quad y_2 = -l\cos\theta_1 + \frac{a}{2}\sin\theta_2$$

y las velocidades son:

$$\dot{x}_1 = l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \frac{a}{2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

$$\dot{y}_1 = l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - \frac{a}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

$$\dot{x}_2 = l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 - \frac{a}{2}\dot{\theta}_2\sin\theta_2$$

$$\dot{y}_2 = l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \frac{a}{2}\dot{\theta}_2\cos\theta_2$$

→ la energía cinética es:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2) +$$

$$+ \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left[\left(l\dot\theta_1 \cos\theta_1 + \frac{a}{2}\dot\theta_2 \sin\theta_2 \right)^2 + \left(l\dot\theta_1 \sin\theta_1 - \frac{a}{2}\dot\theta_2 \cos\theta_2 \right)^2 \right.$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left[\left(l\dot\theta_1 \cos\theta_1 - \frac{a}{2}\dot\theta_2 \sin\theta_2 \right)^2 + \left(l\dot\theta_1 \sin\theta_1 + \frac{a}{2}\dot\theta_2 \cos\theta_2 \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left(l^2\dot\theta_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2 + al\dot\theta_1\dot\theta_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + \right.$$

$$\left. - al\dot\theta_1\dot\theta_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot\theta_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2 - al\dot\theta_1\dot\theta_2 \cos\theta_1 \sin\theta_2 + al\dot\theta_1\dot\theta_2 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \left[l^2\dot\theta_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2 + al\dot\theta_1\dot\theta_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left[l^2\dot\theta_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2 + al\dot\theta_1\dot\theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

$$= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(l^2\dot\theta_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2 \right) +$$

$$+ al\dot\theta_1\dot\theta_2 \left[\frac{1}{2} m_1 \sin(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$$

Pero como $\sin(-x) = \sin x$, tendremos fin:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(l^2\dot\theta_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot\theta_2^2 \right) +$$

$$+ al\dot\theta_1\dot\theta_2 \left[\frac{1}{2}(m_1 - m_2) \sin(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

y la energía potencial es:

$$V = V_1 + V_2 = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 =$$

$$= -m_1 g \left(l\cos\theta_1 + \frac{a}{2}\sin\theta_2 \right) - m_2 g \left(l\cos\theta_1 - \frac{a}{2}\sin\theta_2 \right)$$

ie, el lagrangiano del sistema será:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\left(l^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{a^2}{4}\dot{\theta}_2^2\right) +$$
$$+ \frac{a}{2} l \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \left[(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1)\right] +$$
$$-(m_1+m_2) g l \cos\theta_1 + (m_2-m_1) g \frac{a}{2}\sin\theta_2$$

Por lo que de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0$$

tenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt}\left\{(m_1+m_2) l^2 \dot{\theta}_1 +\right.$$
$$\left. + \frac{a}{2} l \dot{\theta}_2 \left[(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1)\right]\right\} +$$
$$+ \frac{a}{2} l \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2) g l \sin\theta_1$$
$$= 0$$

$$\rightarrow (m_1+m_2) l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{a}{2} l \ddot{\theta}_2 \left[(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1)\right]$$
$$+ \frac{a}{2} l \dot{\theta}_2^2 (m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) -$$
$$\cancel{- \frac{a}{2} l \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 (m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) +}$$
$$\cancel{+ \frac{a}{2} l \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1)} - (m_1+m_2) g l \sin\theta_1$$

$$= (m_1+m_2) l^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{a}{2} l \ddot{\theta}_2 \left[(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1)\right]$$
$$+ \frac{a}{2} l \dot{\theta}_2^2 (m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2) g l \sin\theta_1 = 0$$

Y las ecuaciones de Euler-Lagrange para θ_2:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8}a^2(m_1+m_2)\dot{\theta}_2 + \frac{a}{2}l\dot{\theta}_1(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1)\right]$$
$$-\frac{a}{2}l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_2-m_1)g\frac{a}{2}\cos\theta_2 = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}a^2(m_1+m_2)\ddot{\theta}_2 + \frac{a}{2}l\ddot{\theta}_1(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1) +$$
$$+\cancel{\frac{a}{2}l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1)} - \frac{a}{2}l\dot{\theta}_1^2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1)$$
$$-\cancel{\frac{a}{2}l\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1)} - (m_2-m_1)g\frac{a}{2}\cos\theta_2 = 0$$

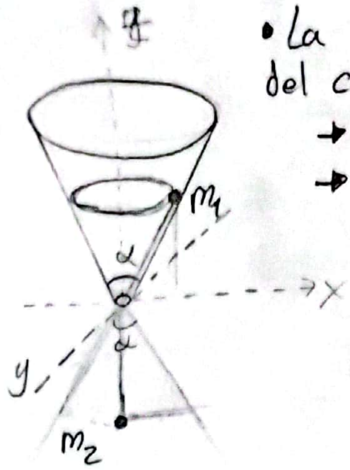
$$\rightarrow \frac{1}{8}a^2(m_1+m_2)\ddot{\theta}_2 + \frac{a}{2}l\ddot{\theta}_1(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1) -$$
$$-\frac{a}{2}l\dot{\theta}_1^2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_2-m_1)g\frac{a}{2}\cos\theta_2 = 0$$

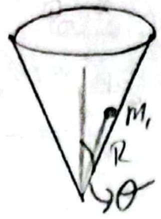
i.e., las ecuaciones del movimiento son:

- $(m_1+m_2)l^2\ddot{\theta}_1 + \frac{a}{2}l\ddot{\theta}_2(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1) +$
  $+\frac{a}{2}l\dot{\theta}_2^2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_1+m_2)gl\sin\theta_1 = 0$
- $\frac{1}{8}a^2(m_1+m_2)\ddot{\theta}_2 + \frac{a}{2}l\ddot{\theta}_1(m_1-m_2)\sin(\theta_2-\theta_1) -$
  $-\frac{a}{2}l\dot{\theta}_1^2(m_1-m_2)\cos(\theta_2-\theta_1) - (m_2-m_1)g\frac{a}{2}\cos\theta_2 = 0$

– Hagamos que $m_1+m_2 = A$, $m_1-m_2 = B$, $\theta_1 = x$, $\theta_2 = y$ e implementemos el método de Runge-Kutta en Python:

- La masa m_1 se mueve sobre la superficie interior del cono y m_2 cuelga verticalmente
  - → Determine las ecuaciones de movimiento del sistema
  - → Calcule el radio de equilibrio de m_1





$x_1 = r\cos\theta \qquad x_2 = 0$

$y_1 = r\,\text{Sen}\,\theta \qquad y_2 = 0$

$z_1 = -r\,\text{Cot}\,\alpha \qquad z_2 = z$

$\dot{x}_1 = \dot{r}\cos\theta - r\,\text{Sen}\,\theta\,\dot{\theta} \qquad \dot{x}_2 = 0$

$\dot{y}_1 = \dot{r}\,\text{Sen}\,\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta} \qquad \dot{y}_2 = 0$

$\dot{z}_1 = -\dot{r}\,\text{Cot}\,\alpha \qquad \dot{z}_2 = \dot{z}$

$V_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + z_1^2$

$\rightarrow V_1^2 = (\dot{r}\cos\theta - r\,\text{Sen}\,\theta\,\dot{\theta})^2 + (\dot{r}\,\text{Sen}\,\theta + r\cos\theta\,\dot{\theta})^2 + \dot{r}^2\text{Cot}^2\alpha$

$V_1^2 = \dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\text{Sen}^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2\dot{r}r\cos\theta\,\text{Sen}\,\theta\,\dot{\theta} + \dot{r}^2\text{Sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 +$
$2\dot{r}\,\text{Sen}\,\theta\cos\theta\, r\dot{\theta} + r^2\text{Cot}^2\alpha$

$V_1^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\text{Cot}^2\alpha$

$V_1^2 = \dot{r}^2(1+\text{Cot}^2\alpha) + r^2\dot{\theta}^2$

- Hallamos las energías

$T_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2(1+\text{Cot}^2\alpha) + r^2\dot{\theta}^2)$

$T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2$

$T = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2(1+\text{Cot}^2\alpha) + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2$

$V = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 = m_1 g(-\dot{r}\,\text{Cot}\,\alpha) + m_2 g z_2$

$L = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2(1+\text{Cot}^2\alpha) + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}^2 - mg(-r\,\text{Cot}\,\alpha) - mgz$

- Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange

Para r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{r}}\right) - \frac{dL}{dr} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\dot{r}(1+\text{Cot}^2\alpha)\right) - rm_1\dot{\theta}^2 + m_1 g\,\text{Cot}\,\alpha = 0$$

$$m_1\ddot{r}(1+\text{Cot}^2\alpha) - rm_1\dot{\theta}^2 + mg\,\text{Cot}\,\alpha = 0$$

$$\ddot{r} = \frac{r\dot{\theta}^2 + g\,\text{Cot}\,\alpha}{1+\text{Cot}^2\alpha}$$

Para θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_1 r^2 \dot{\theta}\right) - 0 = 0$$

$$m_1 r^2 \dot{\theta} = \text{Constante}$$

Para z

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2 \dot{z}\right) + m_2 g = 0$$

$$m_2 \ddot{z} + m_2 g = 0$$

$$\ddot{z} = -g$$

- Condición de equilibrio m_1

$$\ddot{r} = \frac{r\dot{\theta}^2 - g\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

Para que m_1 este en equilibrio, la aceleración radial debe ser 0.

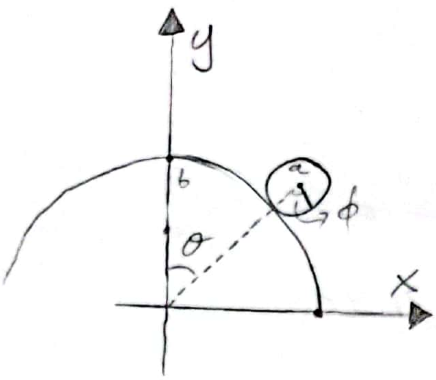
$$0 = \frac{r\dot{\theta}^2 - g\cot\alpha}{1+\cot^2\alpha}$$

$$r\dot{\theta}^2 = \cancel{1+\cot^2\alpha}\left(\frac{g\cot\alpha}{\cancel{1+\cot^2\alpha}}\right)$$

$$r\dot{\theta}^2 = g\cot\alpha$$

$$r = \frac{g\cot\alpha}{\dot{\theta}^2}$$

3. Determine las fuerzas de ligadura y la posición en la que ambos cilindros se separan.

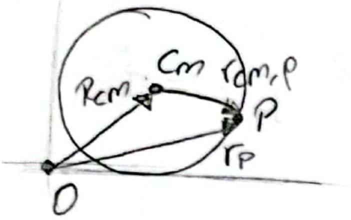


- $R_b + R_a = C$ donde C es cte

$x = C \operatorname{Sen}\theta$ $\qquad \dot{x} = C \operatorname{Cos}\theta \, \dot{\theta}$

$y = C \operatorname{Cos}\theta$ $\qquad \dot{y} = -C \operatorname{Sen}\theta \, \dot{\theta}$

- Condición de Rodadura



$r_p = R_{cm} + r_{cm,p}$ $\qquad V_p = V_{cm} + V_{cm,p}$

$r_{cm,p} = r_p - R_{cm}$ $\qquad V_{cm,p} = V_p - V_{cm}$

* $S = R\phi$

$\Delta S = R \Delta\phi$

$\Delta S = R\, W_{cm} \Delta t$

Eje de referencia en el cm

* $X_{cm} = V_{cm} t$

$\Delta X = V \Delta t$

Eje de referencia en un punto anclado al suelo

Para que cumpla la condición de rodar sin deslizar:

- $\Delta S = \Delta X_{cm}$

$R_a \omega = V_{cm}$

→ Por tanto mis ligaduras son:

$R_a + R_b = C$ Radio al centro de masa constante

$V_{cm} = R_a \dot{\phi}$ Condición de rodadura. (no holonoma)

$z = 0$ Movimiento restringido al plano

Las fuerzas de ligadura son la fuerza normal que ejerce el cilindro B sobre el a y la fuerza de fricción.

• Concíderando que el silindro a sigue una trayectoria circular con respecto al eje del cilindro b, se deduce:

$$(R_a+R_b)\theta = R_a\phi$$

$$\theta = \frac{R_a\phi}{R_a+R_b}$$

$$\dot{\theta} = \frac{R_a}{R_a+R_b}\dot{\phi} \qquad \dot{\phi} = \frac{(R_a+R_b)}{R_a}\dot{\theta} = \frac{c\dot{\theta}}{R_a}$$

donde $R_a+R_b=c$

• Hallamos las energias

$$T = T_{traslacional} + T_{rotacional}$$

$$T = \frac{1}{2}m_a(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_a\omega^2 \qquad \text{donde } I_a=\frac{1}{2}m_aR_a^2 \text{ y } \omega=\dot{\phi}$$

$$U = mgh = mgc\cos\theta$$

• Hallamos el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m(c^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2+c^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_aR_a^2\right)\dot{\phi}^2 - mgc\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{4}m_aR_a^2\dot{\phi}^2 - mgc\cos\theta$$

• Reemplazando $\dot{\phi}$

$$L = \frac{1}{2}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{4}m_aR_a^2\left(\frac{c^2}{R_a^2}\dot{\theta}^2\right) - mgc\cos\theta$$

$$L = \frac{1}{2}mc^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{4}m_ac^2\dot{\theta}^2 - mgc\cos\theta$$

$$L = \frac{3}{4}mc^2\dot{\theta}^2 - mgc\cos\theta$$

• Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{4}mc^2(2\dot{\theta})\right)+mgc\sin\theta=0$$

$$\frac{3}{2}mc^2\ddot{\theta}+mgc\sin\theta=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{2}{3c}g\sin\theta=0 \rightarrow \text{Ecuación Diferencial no lineal}$$

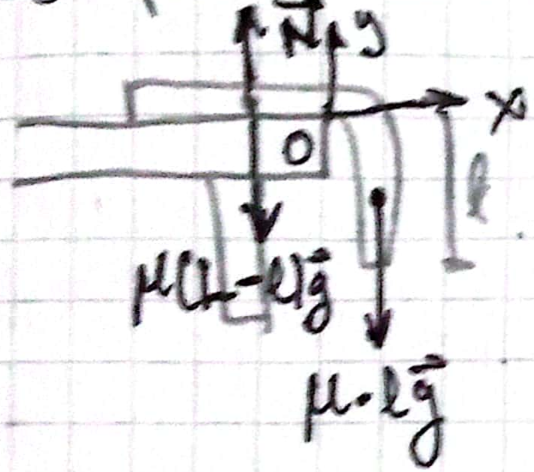
→ La separación de los cilindros ocurre cuando la fuerza normal entre ellos se anula. Esto ocurre cuando las componentes radiales de la fuerza centrifuga es igual al peso:

$$\cancel{m_a}\ddot{\theta} = \cancel{m_a}g\cos\theta \qquad \ddot{\theta} = -\frac{2}{3c}g\sin\theta=0$$

$$-\frac{2}{3c}\cancel{g}\sin\theta = \cancel{g}\cos\theta\left[\frac{1}{\sin\theta}\right]$$

$$\tan\theta = \frac{-2}{3c} \longrightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\frac{-2}{3c}\right)$$

4. Una ~~varilla~~ uniforme de masa M y longitud L se encuentra sobre una mesa sin fricción. La cuerda se suelta desde el reposo cuando una sección de longitud l está colgando. Encuentre la trayectoria de la cuerda en función del tiempo.



$x=0$
$z=0$ $\rightarrow s=1 \rightarrow y=-l(t)$

$\rightarrow \dot{y}=-\dot{l}$

$\mu=\frac{M}{L}$ $\quad dT=\frac{1}{2}\frac{M}{L}dl\,\dot{l}^2 \rightarrow T=\int_0^l \frac{1}{2}\frac{M}{L}\dot{l}^2 dl$

$\rightarrow T=\frac{1}{2}\frac{M}{L}l\dot{l}^2$

$$dV = \frac{M}{L} l g \, dl \rightarrow V = \frac{M}{L} g \int_0^l l \, dl = \frac{1}{2}\frac{M}{L} g l^2$$

$$\rightarrow L = T - V = \frac{1}{2}\frac{M}{L} l \dot{l}^2 - \frac{1}{2}\frac{M}{L} g l^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{l}}\right) - \frac{\partial L}{\partial l} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{M}{L} l \dot{l}\right) - \frac{1}{2}\frac{M}{L}\dot{l}^2 - \frac{M}{L} g l = 0$$

$$\rightarrow \frac{M}{L}\dot{l}^2 + \frac{M}{L} l \ddot{l} - \frac{1}{2}\frac{M}{L}\dot{l}^2 - \frac{M}{L} g l = 0$$

i.e. $l\ddot{l} + \dot{l}^2 - \frac{1}{2}\dot{l}^2 - g l = 0$

$$\rightarrow \ddot{l} + \frac{1}{2}\frac{\dot{l}^2}{l} - g = 0 \quad , (l \neq 0)$$

La cual es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden, que puede ser resuelta por medio de series de Taylor:

Sea $l(0) = l$, $\dot{l}(0) = 0$,

$$\ddot{l} = g - \frac{1}{2}\frac{\dot{l}^2}{l} \rightarrow \ddot{l}(0) = g$$

$$\dddot{l} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\dot{l}\ddot{l}l - \dot{l}^2\dot{l}}{l^2}\right) \rightarrow \dddot{l}(0) = -\frac{1}{2}\left(\frac{0-0}{l^2}\right) = 0$$

$$l^{(4)} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\ddot{l}^2 l^3 + 2\dot{l}\dddot{l} l^3 + 2\dot{l}^2\ddot{l} l^2 - 4\dot{l}^2\ddot{l} l^2}{l^4}\right) - \left(\frac{2\dot{l}\ddot{l} l^3 + \dot{l}^3 l^2 - 2\dot{l}^3 l^2}{l^4}\right)\right]$$

$$\rightarrow l^{(4)}(0) = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{2g^2 l^3 + 2(0) + 2(0) - 4(0)}{l^4}\right) - \left(\frac{2(0) + 0 - 0}{l^4}\right)\right] = -g^2\frac{l^3}{l^4} = -\frac{g^2}{l}$$

$$\rightarrow l(t) = l + t\dot{l}(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{l}(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} l^{(n)}_{(0)}$$

$$= l + \frac{g}{2}t^2 - \frac{g^2}{6l}t^4 + \dots \frac{t^n}{n!} l^{(n)}_{(0)}.$$

la cual es la expansión de Taylor de $l(t)$ alrededor de $t=0$.

Nota: Si consideramos solo los dos primeros términos vemos que

$$l(t) = l + \frac{g}{2}t^2.$$

es decir, que la longitud de la cuerda en el aire crece de manera cuadrática en el tiempo. Tal como en el caso simple de caída libre, $y(t) = -l(t) = -l - \frac{1}{2}g t^2$, es la ecuación de la trayectoria de la cuerda para tiempos pequeños. Aunque, no así para t grandes, ya que, en dicho caso, la trayectoria tiene un comportamiento no lineal.

° ...