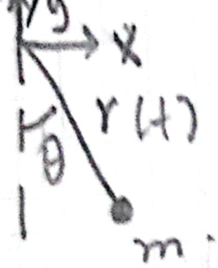
de Poisson.

los problemas de los viernes

1. Un péndulo simple posee una masa m en el extremo de una cuerda elástica de longitud r, la cual cambia a una tasa constante $\dot{r}=a$.

a) Encuentra el lagrangiano del sistema.



ligaduras: $z=0$, $\dot{r}-a=0 \rightarrow r=at+r_0$

$\longrightarrow s=3(1)-2=1$

Luego, nuestra coordenada generalizada será θ. Por ello, las ecuaciones de transformación de coordenadas son

$$x = r\sin\theta \longrightarrow \dot{x} = a\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$
$$y = -r\cos\theta \qquad \dot{y} = -a\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) =$$
$$= \frac{1}{2}m\left[(a\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-a\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}m\left[a^2\sin^2\theta + 2ar\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \right.$$
$$\left. + a^2\cos^2\theta + 2ar\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2}m\left[a^2 + 4ar\dot{\theta}\sin\theta\cos\theta + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$V = mgy = -mgr\cos\theta$$

$\therefore \mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(a^2 + r^2\dot{\theta}^2 + 4ar\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$

$+ mgr\cos\theta$

Pero $\frac{dr}{dt} = a \rightarrow r - r_0 = \int_{t_0}^{t} a\,dt = a(t - t_0) = at, \ (t_0 = 0)$

ie, $r = at + r_0$

$$\therefore \mathcal{L} = \frac{1}{2}m[a^2 + (at + r_0)^2\dot{\theta}^2 + 4a(at + r_0)\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta]$$
$$+ mg(at + r_0)\cos\theta$$

Debido a que θ no es cíclica y t también aparecen en el lagrangiano, no se conservan ni p_θ ni la energía total.

(b) Encuentra la energía del sistema.

Nuestra función energía será:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - L = [m(at + r_0)^2\dot{\theta} + 2ma(at + r_0)\operatorname{sen}\theta\cos\theta]\dot{\theta}$$
$$- \frac{1}{2}m[a^2 + (at + r_0)^2\dot{\theta}^2 + 4a(at + r_0)\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta] -$$
$$= - mg(at + r_0)\cos\theta =$$
$$= \frac{1}{2}m[(at + r_0)^2\dot{\theta}^2 - a^2] - mg(at + r_0)\cos\theta$$

2 Una partícula de masa m se mueve en una dimensión y posee el lagrangiano $L=\frac{1}{2}(m\dot{q}^2-Kq^2)e^{\frac{\alpha}{m}t}$, donde las constantes α y K son cantidades reales y positivas.

(a) ¿Qué situación física describe la ecuación de movimiento de la partícula?

$$L=\frac{1}{2}(m\dot{q}^2-Kq^2)e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

debido a que este lagrangiano depende explícitamente del tiempo, la energía no es una cantidad conservada. Tampoco se conserva el momento generalizado, p_q.

→ la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{q}e^{\frac{\alpha}{m}t}\right)+Kqe^{\frac{\alpha}{m}t}=0$$

$$\rightarrow m\ddot{q}e^{\frac{\alpha}{m}t}+\alpha\dot{q}e^{\frac{\alpha}{m}t}+Kqe^{\frac{\alpha}{m}t}=0 \qquad (1)$$

Dado que $e^{\alpha/m t}\neq 0$, entonces:

$$m\ddot{q}+\alpha\dot{q}+Kq=0$$

ie, $\ddot{q}+\frac{\alpha}{m}\dot{q}+\frac{K}{m}q=0$

la cual es la ecuación característica del movimiento armónico libre amortiguado. En particular, es la ecuación de una masa unida a un resorte de constante elástica K, masa m, y constante de amortiguamiento α.

(b) Considere la transformación de coordenadas $Q=e^{\frac{\alpha}{2m}t}q$. Encuentre el lagrangiano del sistema bajo esta transformación.

$$\rightarrow q=Qe^{-\frac{\alpha}{2m}t} \rightarrow \dot{q}=\dot{Q}e^{-\frac{\alpha}{2m}t}-\frac{\alpha}{2m}Qe^{-\frac{\alpha}{2m}t}$$

$$\therefore L=\frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}-\frac{\alpha}{2m}Q\right)^2e^{-\frac{\alpha}{m}t}-KQ^2e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right]e^{\frac{\alpha}{m}t}$$

$$=\frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}^2-\frac{\alpha}{m}Q\dot{Q}+\frac{\alpha^2}{4m^2}Q^2\right)-KQ^2\right]$$

(c) Encuentra la ecuación de movimiento correspondiente al lagrangiano transformado.

$$L = \frac{1}{2}\left[m\left(\dot{Q}^2 - \frac{\alpha}{m} Q\dot{Q} + \frac{\alpha^2}{4m^2} Q^2\right) - kQ^2\right]$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial Q} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{Q} - \frac{1}{2}\alpha Q\right) + \frac{1}{2}\alpha\dot{Q} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{m} Q + kQ = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{Q} - \cancel{\frac{1}{2}\alpha\dot{Q}} + \cancel{\frac{1}{2}\alpha\dot{Q}} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{m} Q + kQ = 0$$

$$\therefore \ddot{Q} + \left(\frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{m^2}\right) Q = 0$$

O sea, $\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0$, con $\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{m^2}$

(d) ¿Existe una cantidad conservada para este sistema?

El nuevo lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, luego la Energía se conserva

(e) Encuentra la solución $q(t)$.

Ya obtuvimos que $\ddot{q} + \frac{\alpha}{m}\dot{q} + \frac{k}{m} q = 0$

$\rightarrow r^2 + \frac{\alpha}{m} r + \frac{k}{m} = 0$ ecuación característica.

$$\rightarrow r_{1,2} = \frac{-\frac{\alpha}{m} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\omega_0^2}}{2m}$$

$$\therefore q(t) = e^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left[A\cos\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{k^2}{m}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{\alpha^2}{4m^2} - \frac{k^2}{m}}\,t\right]$$

Tercer Taller de Mecánica Clásica

3. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un potencial de la forma: $V(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r}$, donde $\vec{F}$ es un vector constante. Encontrar las transformaciones que dejan el lagrangiano invariante y las cantidades conservadas correspondientes.

$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$ donde $\vec{r} = r(x, y, z)$ y $V = -\vec{F}\cdot\vec{r}$

- Por tanto, mi lagrangiano será $L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - (-\vec{F}\cdot\vec{r})$

- Para $V = -\vec{F}\cdot\vec{r}$ donde $\quad L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \vec{F}\cdot\vec{r}$

$\vec{F} = F(x, y, z)$ y $\vec{r} = r(x, y, z)$
$\vec{F} = F_x, F_y, F_z$

Tenemos que: $\vec{F}\cdot\vec{r} = F_x x + F_y y + F_z z$ entonces, $V(r) = -(F_x x + F_y y + F_z z)$
La forma del potencial nos indica que es lineal, donde la partícula experimenta una fuerza constante en dirección $\vec{F}$.

La fuerza es de la forma: $\vec{F} = -\nabla V(\vec{r})$

Se concluye que la partícula esta en presencia de un campo conservativo.

→ El potencial y el lagrangiano son invariantes ante traslaciones perpendiculares:

Consideremos una variación en la traslación

$V(\vec{r} + \delta r) = -\vec{F}\cdot(\vec{r} + \delta\vec{r}) = -(\vec{F}\cdot\vec{r} + \vec{F}\cdot\delta\vec{r}) = -\vec{F}\cdot\vec{r} - \vec{F}\cdot\delta\vec{r}$

Si la traslación es perpendicular a la fuerza:

$V(\vec{r} + \delta r) = -\vec{F}\cdot\vec{r} - 0 = -\vec{F}\cdot\vec{r} \ \wedge \ L(\vec{r} + \delta r, \dot{\vec{r}}; t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \vec{F}\cdot\vec{r}$

Si afirmamos que la fuerza actua sobre el eje z:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_x}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_x}\right) - 0 = \frac{dP_x}{dt} = 0 \Rightarrow P_x = Cte$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_y}\right) - \frac{\partial L}{\partial r_y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_y}\right) - 0 = \frac{dP_y}{dt} = 0 \Rightarrow P_y = Cte$$

El momento conjugado en las direcciones perpendiculares a la fuerza se conserva.

• La segunda transformación que deja invariante al Lagrangiano es una transformación temporal, ya que el tiempo no se expresa de forma explícita en L.

Por lo tanto

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] + \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial t}} \quad \text{donde} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_j}$$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j \right] = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right)$$

Luego,

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L \right] = 0 \Rightarrow \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = Cte = E(q_j, \dot{q}_j)$$

Donde $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ es $p_{q_j} = m\dot{q}_j$

Reemplazando el lagrangiano en la función de energía, obtenemos:

$$E(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} \dot{r}_j - L = m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} - \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + \vec{F} \cdot \vec{r}\right)$$

$$= m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \vec{F} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \vec{F} \cdot \vec{r}$$

El lagrangian es invariante bajo transformaciones temporales porque no depende explícitamente del tiempo, en consecuencia, la energía total del sistema se conserva.

En conclusión, el lagrangiano muestra invarianzas traslacionales y temporales, en consecuencia, los momentos conjugados perpendiculares a la fuerza y la energía en el sistema se conservan.

4) Una partícula con masa m se mueve con velocidad v sujeta al potencial $V(r,v) = U(r) + \vec{n}\cdot\vec{l}$.

a. Encuentre la fuerza ejercida sobre la partícula.

Entonces $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(r) - \vec{n}\cdot\vec{l}$

Donde $l = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\dot{\vec{r}} = m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$

→ Ahora vamos a encontrar la fuerza a partir del potencial mediante la relación:

$$\vec{F} = -\nabla_{\vec{r}}V(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = -\nabla_{\vec{r}}(U(r) + n\cdot l) \qquad * \nabla_{\vec{r}}r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)$$

$$\rightarrow \nabla_{\vec{r}}U(r) = \frac{dU(r)}{dr}\nabla_{\vec{r}}r = \frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\rightarrow \nabla_{\vec{r}}(\vec{n}\cdot\vec{l}) = m(\nabla_{\vec{r}}\vec{n}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$$

Por lo tanto, la fuerza sera:

$$\vec{F} = -\frac{dU(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r} - m(\nabla_{\vec{r}}\vec{n}\cdot(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$$

Donde, el primer termino representa la fuerza central radial desde la partícula hacia el origen, el segundo termino esta asociada con la rotación del sistema, esta depende de la velocidad de la partícula por lo que la fuerza de esta componente es ficticia.

b. Obtenga las ecuaciones de movimiento de la partícula en coordenadas cartesianas.

Escribimos los vectores en terminos de las coordenadas cartecianas:

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad \vec{r} = (x,y,z), \quad \vec{l} = m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = m\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}$$

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \quad \vec{n}\cdot\vec{l} = n_x l_x + n_y l_y + n_z l_z$$

Sustituyendo l_x, l_y y l_z:

$$\vec{n}\cdot\vec{l} = m[n_x(y\dot{z} - z\dot{y}) + n_y(z\dot{x} - x\dot{z}) + n_z(x\dot{y} - y\dot{x})]$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - U(r) - \vec{n}\cdot\vec{\ell}$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - U(r) - m[n_x(y\dot{z}-z\dot{y}) + n_y(z\dot{x}-x\dot{z}) + n_z(x\dot{y}-y\dot{x})]$$

Aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad * \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - m(n_y z - n_z y)$$

$$* \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial x} - m(-n_y\dot{z} + n_z\dot{y}) \qquad * \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} - m(n_y\dot{z} - n_z\dot{y})$$

$* \frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$ donde $V(r)$ tiene la forma de un potencial atractivo:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{K}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} \qquad V(r) = -\frac{K}{r} \quad y \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{K}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{Kx}{r^3}$$

Entonces la ecuación nos queda:

$$m\ddot{x} - m(n_y\dot{z} - n_z\dot{y}) - \left(\frac{Kx}{r^3} - m(n_z\dot{y} - n_y\dot{z})\right) = 0$$

$$m\ddot{x} + \frac{Kx}{r^3} - m(n_y\dot{z} - n_z\dot{y}) - m(n_y\dot{z} + n_z\dot{y}) = 0$$

$$\rightarrow m\ddot{x} + \frac{Kx}{r^3} - 2m(n_y\dot{z} - n_z\dot{y}) = 0 \quad \text{Para la coordenada } x$$

Realizando un proceso igual, hallamos las ecuaciones de movimiento para y ^ z.

$$\rightarrow m\ddot{y} + \frac{Kx}{r^3} - 2m(n_z\dot{x} - n_x\dot{z}) = 0 \quad \text{Para } y$$

$$\rightarrow m\ddot{z} + \frac{Kx}{r^3} - 2m(n_x\dot{y} - n_y\dot{x}) = 0 \quad \text{Para } z$$

c) ¿Existe alguna cantidad constante?

• Dado que el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, se puede concluir que el sistema presenta una invariancia temporal. Igual que en el ejercicio anterior, la cantidad conservada asociada a esta simetría es la energía.

• El término $\vec{n} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$ implica que hay un acoplamiento entre el vector $\vec{n}$ y el momento angular de la partícula, lo que me indica que el sistema tiene una invariancia rotacional al rededor de $\vec{n}$

La componente del momento angular en la dirección $\vec{n}$ se conserva. $L_n = cte$