Направление: ПМИ-Классика, ПМИ-РЭШ

Экзамен. Экзамен устный. В программе экзамена могут встречаться как теоретические вопросы, так и типовые задачи (умения). Для получения оценки 3 - 8 (за экзамен) достаточно знать всё в пределах этих вопросов. На оценку 9 и 10 (за экзамен) нужно будет решать дополнительные задачи.

Рейтинг в семестре влияет на две вещи. Во-первых, от него зависит набор вопросов на экзамене. Студентам с низким рейтингом нужно будет сначала рассказывать вопросы на "удовл", при успешном ответе - вопросы на "хор", и.т.д. В то время как студенты с высоким рейтингом получат сразу более сложные вопросы.

Во-вторых, рейтинг "сдвигает" полученную оценку на экзамене к значению рейтинга на 1-2 балла внутри оценок "удовл." (3-4), "хор."(5-7) и "отл."(8-10). Двойка на экзамене — это и итоговая двойка.

Формула для итоговой оценки. Формула такая: если оценка за семестр S, и оценка за экзамен E, то итоговая оценка I равна

$$I = \begin{cases} 2, & \text{если } E = 2 \\ \min(\max([0.5 \cdot S + 0.5 \cdot E], 3), 4), & \text{если } E = 3, 4 \\ \min(\max([0.5 \cdot S + 0.5 \cdot E], 5), 7), & \text{если } E = 5, 6, 7 \\ \min(\max([0.5 \cdot S + 0.5 \cdot E], 8), 10), & \text{если } E = 8, 9, 10. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ — это ближайшее целое число к x (половина округляется в большую сторону).

Список вопросов.

Вопросы на удовл.

1. Задание множества перечислением и определяющим свойством. Отношение подмножества и его свойства: рефлексивность, антисимметричность, транзитивность. Равенство множеств. Парадокс Рассела.

2. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение. Тождества: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, законы де Моргана. Доказательства при помощи диаграмм Эйлера и непосредственные.

3. Упорядоченные пары и кортежи. Декартово произведение и декартова степень. Их свойства. (Задачи 1.9а)б) и 1.11а)б))

4. Понятие соответствия. Обозначения. Инъективные и сюръективные соответствия. Обратные соответствия. Определяющие свойства соответствий, обратных к инъективным и к сюръективным (Задача 2.2.).

5. Понятие соответствия. Понятие отображения. Обозначения. Инъективные и сюръективные соответствия. Пример соответствия, которые обладает двумя из следующих трёх свойств, но не обладают третьим (инъективность, сюръективность, отображение) (Задача 2.1).

6. Понятие отображения. Инъекции и сюръекции. Биекции. Взаимно однозначные отображения. Утверждение о том, что соответствие является биекцией тогда и только тогда, когда оно само и обратное к нему являются отображениями.

7. Понятия образа и прообраза множества при соответствии. Критерий равенства образа пересечения и пересечения образов. Аналогичные критерии с объединением и разностью.

8. Область определения и область значений соответствия. Сужение и продолжение соответствия. Композиция соответствий, её ассоциативность.

9. Равномощность множеств. Счётные множества. Свойства счётных множеств (Задача 3.4). Счётное объединение счётных множеств счётно. Если A бесконечно, а B не более чем счётно, то $A \cup B \cong A$.

10. Докажите, что если A бесконечно, а B не более чем счётно, то $A \cup B \cong A$. Континуальные множества. Доказательство того, что отрезок, полуинтервал, интервал континуальны.

11. Теорема Кантора для счётных множеств.

12. Отношения на множествах. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности, теорема о классах эквивалентности. Примеры (Задача 4.8) Доказательство того, что требования в определения отношения эквивалентности не зависят друг от друга (Задача 4.9).

13. Отношения на множествах. Свойства бинарных отношений. Отношения частичного и линейного порядка. Примеры отношений (задача 5.1). Любое счётное упорядоченное множество можно доупорядочить линейно (задача 5.2).

14. Частично упорядоченные множества. Диаграмма Хассе. Изоморфизм. Описание попарно неизоморфных ч.у.м. для 3-х элементов. Минимальные, максимальные, наибольшие и наименьшие элементы. Их свойства (на примере задачи 5.4).

15. Предпорядки: определение и примеры (задача 6.6).
16. Разбиение элементов множества с предпорядком на классы эквивалентности (задача 6.8). Полный предпорядок. Равносильность полноты предпорядка и линейности индуцированного порядка (задача 6.10).
17. Правило сложения. Правило умножения. Примеры: автомобильные номера, количество шестизначных чисел с различными условиями на цифры (задача 7.8). Принцип Дирихле. Пример на принцип Дирихле с квадратом.
18. Размещения, перестановки и сочетания. Доказательство формул для чисел размещения и сочетания с повторениями и без повторений. Типовые задачи (аналогичные 7.9-7.12).
19. Бином Ньютона. Полиномиальный коэффициент и полиномиальная формула. Типовые задачи (аналогичные задачам 7.15, 8.5).
20. Комбинаторные тождества (6 штук).
21. Формула включений и исключений (формулировка и док-во для $n = 3$). Формула для количества беспорядков на n элементах (Задача 9.4 про перестановки книг).
22. Формула включений и исключений (формулировка и док-во для $n = 3$). Формула для количества сюръекций из k-элементного множества в m-элементное (Задача 9.5 про домики).
23. Функция Мёбиуса. Сумма значений функции Мёбиуса по делителям числа, а также по делителям числа, содержащим в разложении чётное количество простых сомножителей (Задача 10.1).
24. Операция циклического сдвига на линейных последовательностях. Период линейной последовательности. Свойства периода. Общий вид последовательности периода d и длины n.
25. Функция Мёбиуса на ч.у.м.е: определение, умение вычислять её для конечных ч.у.м.ов (на примере задачи 11.1).
26. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные и неупорядоченные разбиения. Рекуррентные формулы. (Задача 12.2 а)б)).
27. Задачи о разбиениях чисел на слагаемые. Упорядоченные разбиения. Количество всех упорядоченных разбиений на произвольные слагаемые. (Задача 12.1 а)б)).
28. Диаграммы Юнга. Теоремы Эйлера о равенстве количеств неупорядоченных разбиений числа n на k или не более, чем k слагаемых (3 штуки) .
29. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общая формула для соотношения n-го порядка (формулировка, частный случай $n = 2$ — б/д). Формула для чисел Фибоначчи.
30. Формальные степенные ряды, операции над ними. Пример вычисления суммы и произведения (Задача 14.3).
31. Формальные степенные ряды. Определение обратного ряда. Пример деления в столбик. Примеры нахождения обратных рядов (задача 14.6).
32. Числа Фибоначчи и их производящая функция. Радиус сходимости, значение $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$.
33. Числа Каталана. Производящая функция для чисел Каталана.

Вопросы на хор.

34. Возведение множества в степень. Возведение множества в степень другого множества. Булеан. Свойства возведения множества в степень: $A^B \times A^C \cong A^{B \cup C}$ (для непересекающихся B и C);
$A^C \times B^C \cong (A \times B)^C$; $(A^B)^C \cong A^{B \times C}$ (для произвольных A, B, C).
35. Континуальные множества. Равномощность множества вещественных чисел и множества $2^{\mathbb{N}}$.
36. Континуальные множества. Доказательство того, что плоскость, пространство, $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ являются континуальными. Формулировка континуум-гипотезы.
37. Теорема Кантора для произвольных множеств.
38. Плотный порядок. Изоморфизм счётных плотных линейно упорядоченных множеств без наибольшего и наименьшего элементов.
39. Частично упорядоченные множества. Сумма, произведение и декартово произведение множеств. Может ли линейно упорядоченное множество A, в котором больше одного элемента, быть изоморфным **а)** $A + A$? **б)** $A \cdot A$? Какие из следующих множеств изоморфны: $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$? Теоремой об изоморфизме можно пользоваться без доказательства.
40. Задача о раскраске множества в два цвета.
41. Сумма степеней натуральных чисел.
42. Знакопеременные тождества (2 штуки): сумма биномиальных коэффициентов и количество сюръекций.

43. Формула включений и исключений.
44. Формула включений и исключений (формулировка и док-во для $n = 3$). Формула для функции Эйлера через произведение по простым сомножителям (док-во через формулу вкл-искл.) (Задача 9.1в.)
45. Формула обращения Мёбиуса.
46. Функция Эйлера. Формула с произведением по простым числам: доказательство при помощи формулы обращения Мёбиуса (Задача 10.6в).
47. Операция циклического сдвига на линейных последовательностях. Период линейной последовательности. Свойства периода (б/д). Явная формула для числа циклических последовательностей для частных случаев ($n = 3, 4, 5, 6$) (задача 10.7).
48. Функция Мёбиуса на ч.у.м.е $\langle \mathbb{N}, \leqslant \rangle$ (Задача 11.5). Общая формула обращения Мёбиуса для частично упорядоченных множеств (б/д), её применение к задаче 11.5.
49. Функция Мёбиуса на ч.у.м. Совпадение функции Мёбиуса $\mu(1, n)$ на ч.у.м. $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ и обычной функции Мёбиуса $\mu(n)$ на $\mathbb{N}$ (для всех n). Общая формула обращения Мёбиуса для частично упорядоченных множеств (б/д).
50. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общая формула для соотношения 2-го порядка с одинаковыми корнями характеристического уравнения.
51. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общая формула для соотношения 2-го порядка с различными корнями характеристического уравнения.
52. Формальный степенной ряд $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$. Теорема Эйлера о коэффициентах этого ряда (формулировка). Проверка верности теоремы Эйлера для $k = 1, 2$. Теорема о количестве разбиений на чётное и нечётное количество различных слагаемых (формулировка).
53. Формальные степенные ряды. Строгое формальное определение через последовательности. Пример вычисления суммы и произведения рядов (Задача 14.3)
54. Формальные степенные ряды, операции над ними. Определение обратного ряда. Пример деления в столбик. Комбинаторное тождество, получаемое с использованием формального степенного ряда $\frac{1}{(1-x^2)^2}$.
55. Формальные степенные ряды, операции над ними. Определение обратного ряда. Критерий обратимости ряда (задача 14.5).
56. Вычисление суммы $\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k \left(\frac{1}{17}\right)^k$.
57. Определение радиуса сходимости формального степенного ряда. Теорема Коши-Адамара о сходимости степенных рядов (формулировка). Примеры, иллюстрирующие теорему (3 примера, показывающие, что на границе может быть сходимость/расходимость, задача 15.2).
58. Проблема Эрдеша–Гинзбурга–Зива (общая формулировка). Контрпримеры при $d = 1, 2$. Тождества с биномиальными коэффициентами ($C_{2p-1}^{p} \equiv 1 \pmod p$, $C_{2p-1-q}^{p-q} \equiv 0 \pmod p$, если $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$).

Вопросы на отл.

59. Теорема Кантора–Бернштейна.
60. Принцип Дирихле. Оценки мощности множества попарно неортогональных $(-1, 0, 1)$-векторов: верхняя оценка величиной 140 и нижняя оценка величиной 70.
61. Применение формулы обращения Мёбиуса для подсчета числа циклических последовательностей.
62. Формула Мёбиуса на ч.у.м. Вывод формулы $\sum_{a \leqslant z \leqslant b} \mu(z, b) = \begin{cases} 1, a = b; \\ 0, \text{ если } a < b. \end{cases}$.
63. Формула Мёбиуса на ч.у.м. Обобщёная формула обращения Мёбиуса (леммой про сумму $\mu(z, b)$ по $a \leqslant z \leqslant b$ можно пользоваться б/д).
64. Передоказательство формулы включений и исключений при помощи формулы обращения Мёбиуса на ч.у.м. Определение множества X, порядка $\preceq$. Вычисление функции Мёбиуса на данном ч.у.м.
65. Передоказательство формулы включений и исключений при помощи формулы обращения Мёбиуса на ч.у.м. Определение множества X, порядка $\preceq$, функции f, g. Формула для вычисления функции Мёбиуса на данном ч.у.м.(б/д). Вывод формулы включений и исключений.
66. Числа Каталана. Формула для коэффициентов ряда $\sqrt{1+x}$. (Задача 14.9)
67. Числа Каталана. Формула для коэффициентов ряда $\sqrt{1+x}$ (б/д). Вывод из неё формулы для чисел Каталана.

68. Производящая функция для количества неупорядоченных разбиений в общем виде и для разбиений специального вида (задача 15.10). Доказательство того, что количества разбиений на попарно различные слагаемые и на нечётные слагаемые совпадают.
69. Решение проблемы Эрдеша–Гинзбурга–Зива для $d = 1$, $n = p$. Формулами $C^{p}_{2p-1} \equiv 1 \pmod p$, $C^{p-q}_{2p-1-q} \equiv 0 \pmod p$, если $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, можно пользоваться без доказательства.
70. Проблема Эрдеша–Гинзбурга–Зива (формулировка для $d = 2$). Контрпример. История проблемы. Теорема Шевалле (формулировка). Обобщенная теорема Варнинга (формулировка)
71. Вспомогательное утверждение про многочлен $2(1 - x_1)...(1 - x_m)$.
72. Проблема Эрдеша–Гинзбурга–Зива при $d = 2$ и $n = p$: нижняя и верхние оценки (формулировка). Обобщённая теорема Варнинга (формулировка). Доказательство основной леммы.
73. Проблема Эрдеша–Гинзбурга–Зива при $d = 2$ и $n = p$: нижняя и верхние оценки (формулировка). Формулировка основной леммы. Вывод из неё теоремы Роньяи.

Вопросы на «двойку»

Если преподаватель почувствует, что у вас проблемы вопросами на удовл.(3), он может воспользоваться списком ниже для понимания, можно ли поставить вам неуд.(2). Для того, чтобы получить на экзамене удовл.(3), необходимо продемонстрировать умение давать формулировки и понимание всех определений из курса, а также доказательство основных и простейших фактов из курса. В частности, за незнание хотя бы двух пунктов из следующего списка студент будет отправлен на пересдачу.

Все утверждения, про которые не указано «(формулировка)», необходимо уметь и формулировать, и доказывать.

- Отношение «быть подмножеством» и его свойства: рефлексивность, антисимметричность, транзитивность.
- Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение.
- Тождества: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, законы де Моргана.
- Умение иллюстрировать/доказывать тождества при помощи диаграмм Эйлера/непосредственным способом.
- Определение упорядоченных пар и кортежей, декартова произведения и декартовой степени.
- Определение соответствия, отображения, инъективных и сюръективных соответствий, инъекции, сюръекции, биекции.
- Понятия равномощности множеств.
- Понятие счётного множества (определение, и примеры: чётные числа, целые числа).
- Счётное объединение счётных множеств счётно.
- Счётность множества рациональных чисел.
- Теорема Кантора для счётных множеств.
- Утверждение о том, что если A бесконечно, а B не более чем счётно, то $A \cup B \cong A$.
- Определение отношения эквивалентности.
- Определение классов эквивалентности.
- Определения отношений нестрогого частичного порядка, линейного порядка, плотного порядка.
- Определение изоморфизма упорядоченных множеств.
- Минимальные/максимальные и наименьшие/наибольшие элементы в упорядоченном множестве.
- Правила сложения и умножения в комбинаторике.
- Принцип Дирихле.
- Теорема о раскраске множества в два цвета (формулировка проблемы).
- Размещения, перестановки и сочетания (определения и умение решать задачи вроде: *Скольками способами из 4 разных школьников можно выбрать двоих для дежурства?*).
- Формулы для чисел размещений и сочетаний с повторениями и без повторений.
- Бином Ньютона.
- Полиномиальная формула.

- Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдите суммы:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n,$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

- Формула включений и исключений (формулировка и доказательство для $n = 3$).
- Определение функции Мёбиуса.
- Формула для суммы функции Мёбиуса по делителям.
- Формула обращения Мёбиуса(формулировка).
- Операция циклического сдвига на линейных последовательностях.
- Определение периода линейной последовательности. Утверждение о том, что период последовательности делит его длину.
- Формула для подсчёта числа циклических последовательностей (формулировка).
- Упорядоченные и неупорядоченные разбиения.
- Количество всех упорядоченных разбиений на произвольные слагаемые.
- Диаграммы Юнга.
- Три теоремы Эйлера о равенстве количеств неупорядоченных разбиений.
- Определение функции Мёбиуса на ч.у.м.
- Определения формального степенного ряда, сложения и умножения рядов.
- Определение чисел Фибоначчи. Формула для чисел Фибоначчи через сумму двух геометрических прогрессий.
- Определение линейного рекуррентного соотношения и его характеристического уравнения.
- Теоремы о формуле для последовательностей, заданных рекуррентным соотношением 2-го порядка (формулировка).
- Определение радиуса сходимости формального степенного ряда. Теорема о сходимости степенных рядов (формулировка). Радиус сходимости производящей функции чисел Фибоначчи.
- Определение производящей функции последовательности.
- Производящая функция для чисел Фибоначчи, Каталана (вид без бесконечной суммы).
- Определение чисел Каталана.