

Hinatori8

2026 年 1 月 2 日

## 1. Fundamentals

### 1.2 Orthogonal Vectors and Matrices

#### Adjoint

hermitian conjugate もしくは adjoint はエルミート転置もしくは共役転置を意味する。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{31} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{32} \end{bmatrix}$$

もし、 $A = A^*$  であるなら行列  $A$  は hermitian matrix (エルミート行列) であると言う。行列の要素が複素数であった場合は、転置と同時に共役な要素に変わることの意味するが、実数のみの行列であるならば、単純に行列が転置しただけと変わらない。実対称行列もエルミート行列の仲間である。今まで使ってきた  $A^T$  は実行列の中では transpose となるが、複素数まで拡大するとエルミート転置を意味していると考えられる。つまり、実行列に対する転置を意味する記号として、hermitian conjugate を意味する  $*$  を使うことができる。

#### Inner Product

$x, y \in \mathbb{C}^m$  に対して、内積は

$$x^* y = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i y_i$$

と定義される。今までは実数ベクトルに対しての内積を考えていたため、転置するだけであったが、複素数まで対応させた内積はエルミート転置を使う必要がある。前述の通り、実数であったために共役を考える必要がなかった。

#### Orthogonal Vectors

- A set of nonzero vectors  $S$  is **orthogonal**(直交) if its elements are pairwise orthogonal, i.e., if for  $x, y \in S$ ,  $x \neq y \Rightarrow x^* y = 0$ .
- A set of nonzero vectors  $S$  is **orthonormal**(正規直交) if it is orthogonal and if for all  $x \in S$ ,  $\|x\| = 1$ .

## Components of a Vector

任意のベクトルは内積を用いて orthogonal decomposition できる。 $q_1, \dots, q_n$  (全て) に対して直交する、

$$r = v - (q_1^* v)q_1 - \dots - (q_n^* v)q_n$$

となる  $r$  を見つけてみる。 $q_i^* q_j = 0$  ( $i \neq j$ ) より、

$$\begin{aligned} q_i^* r &= q_i^* v - (q_1^* v)(q_i^* q_1) - \dots - (q_n^* v)(q_i^* q_n) \\ &= q_i^* v - (q_i^* v)(q_i^* q_i) \\ &= q_i^* v - q_i^* v \\ &= 0 \end{aligned}$$

$r$  は任意の  $q$  に対して直交していることがわかる。「If  $\{q_i\}$  is a basis for  $\mathbb{C}^m$ 」は、

$$\text{span}\{q_1, \dots, q_m\} = \mathbb{C}^m$$

という意味である。 $q$  は空間全体の基底である。空間全体に直交するベクトルはゼロベクトルしか存在しない。なぜなら自分自身とも直交しなければならないからである。

$$\langle r, r \rangle = 0 \quad \therefore r = 0$$

つまり、

$$v = \sum_{i=1}^m (q_i^* v)q_i = \sum_{i=1}^m (q_i q_i^*)v$$

この2つは等価だが、後ろの式は **Projectors** で教わる。

## Unitary Matrices

$Q^* = Q^{-1}$ ,  $Q^* Q = I$  を満たす正方行列  $Q$  を **unitary** という。また、 $Q$  が実行列であるなら、Orthogonal となる。つまり、実行列は大きく言えば unitary であり、同じく条件を満たす。

## 1.3 Norms

### Vector Norms

norm はそれぞれのベクトルに対して実数値の長さを割り当てる関数  $\|\cdot\| : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}$  である。そして、次の3つの条件を満たす必要がある。

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \text{ for all } x \in \mathbb{C}^m, \text{ and } \|x\| = 0 \iff x = 0, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| \text{ for all } x, y \in \mathbb{C}^m, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \text{ for all } x \in \mathbb{C}^m, \alpha \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

### Matrix Norms Induced by Vector Norms

■ **p-norm** The most important class of vector norms are the **p-norms** are defined below. The closed unit ball  $\{x \in \mathbb{C}^m : \|x\|_p = 1\}$  corresponding to each norm is illustrated to the right for the case  $m = 2$ .

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^m |x_i|, & \text{◇} \\
\|x\|_2 &= \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x^* x}, & \text{○} \\
\|x\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|, & \text{□} \\
\|x\|_p &= \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty). & \text{○}
\end{aligned}$$

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , respectively, the induced matrix norm  $\|A\|_{mn}$  is the smallest number  $C$  for which the following inequality holds for all  $x \in \mathbb{C}^n$ :

$$\|Ax\|_m \leq C\|x\|_n$$

In other words,  $\|A\|_{mn}$  is the supremum(上限) of the ratio  $\|Ax\|_m / \|x\|_n$  over vectors  $x \neq 0$  in  $\mathbb{C}^n$  – the maximum factor by which  $A$  can "stretch" a vector  $x$ . 上限とは最大値のようなものである。たとえば、 $x < 5$  は 5 は含まれないが、5 より小さい値であればどんなに 5 に近くても良い。つまり、5 は上限である。比率であり、上限であるから  $A$  が作用したことによって、 $x$  がどれだけ伸びるかを表しており、誤差に対して重要な役割を果たす。

$$\|A\|_{mn} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_m}{\|x\|_n} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ \|x\|_n = 1}} \|Ax\|_m \quad (1.2)$$

行列ノルムは  $A$  によって誤差の最大何倍ベクトルを増幅させるかを表している。行列ノルムはを基準とし、どの  $p$ -norm を使うかで行列ノルムの値が変わる。

■ **1-norm** 1 ノルムは以下のように定義される。

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$$

行列ではないので、要素の絶対値の和となる。 $Ax$  は行単位でシグマを用いると、

$$Ax = \begin{bmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \sum_j a_{2j} x_j \\ \dots \\ \sum_j a_{mj} x_j \end{bmatrix}$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right|$$

これは絶対値の和であるから、三角不等式より、

$$\sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |x_j|$$

$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$  であるから、

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max_{1 \leq j \leq n} \|a_j\|_1 \quad (1.3)$$

つまり行列  $A$  の 1-norm は各列ベクトルの要素和における最大値となる。

■  **$\infty$ -norm**  $\infty$  ノルムは以下のように定義される。

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq m} |x_j|$$

これは要素の絶対値の中での最大値となる。同様に、行列  $Ax$  では

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) |x_j| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|x\|_\infty \\ \sup_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i^*\|_1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

つまり行列  $A$  の 1-norm は各行ベクトルの要素和における最大値となる。

■ **Cauchy–Schwarz and Hölder Inequalities** Computing matrix p-norm with  $p \neq 1, \infty$  is more difficult, and to approach this problem, we note that inner products can be bounded using p-norms. Let  $p$  and  $q$  satisfy  $1/p + 1/q = 1$ , with  $1 \leq p, q \leq \infty$ . Then the **Hölder inequality** states that, for any vectors  $x$  and  $y$ ,

$$|x^* y| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

The Cauchy–Schwarz inequality is the special case of Hölder inequality with  $p = q = 2$ :

$$|x^* y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

■ **The 2-Norm of a Row Vector** Consider a matrix  $A$  containing a single row. The matrix can be written as  $A = x^*$ , where  $a$  is a column vector. The Cauchy–Schwarz inequality allows us to obtain the induced matrix 2-norm. For any  $x$ , we have  $\|Ax\|_2 = |a^* x| \leq \|a\|_2 \|x\|_2$ .

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|a\|_2.$$

■ **The 2-Norm of an Outer Product** if  $A = uv^*$ , we can bound  $\|Ax\|_2$  as follows:

$$\|Ax\|_2 = \|uv^* x\|_2 = \|u\|_2 |v^* x| \leq \|u\|_2 \|v\|_2 \|x\|_2$$

Therefore,  $\|A\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$ . Again, this inequality is equality: consider the case  $x = v$ .

## General Matrix Norms

行列も式 (??) に従う。

$$\begin{aligned}\|A\| &\leq 0, \text{ and } \|A\| = 0 \text{ only if } A = 0, \\ \|A + B\| &\leq \|A\| + \|B\|, \\ \|\alpha A\| &= |\alpha| \|A\|.\end{aligned}\tag{1.5}$$

The most important matrix norm which is **not induced** by a vector norm is the **Frobenius norm** or **Frobenius norm**, defined by

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

2-norm とトレースを用いても表すことができる。

$$\|A\|_F = \left( \sum_{j=1}^n \|a_j\|_2^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} = \sqrt{\text{tr}(A A^*)}$$

Listing 1.1: Frobenius norm の検証コード

```
1 import numpy as np
2
3 A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
4 sum1 = np.sqrt(np.sum(A**2))
5 sum2 = np.sqrt(np.trace(A.T*A))
6 sum3 = np.sqrt(np.trace(A*A.T))
7 print(sum1) # 5.477225575051661
8 print(sum2) # 5.477225575051661
9 print(sum3) # 5.477225575051661
```

また、Unitary 行列  $Q$  に対して、Frobenius norm は不変である。

$$\|QA\|_F = \|A\|_F, \quad \|AQ\|_F = \|A\|_F$$

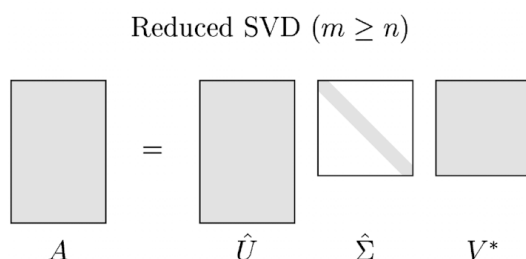
## 1.4 The Singular Value Decomposition

### Reduced SVD

A は full rank  $n$  で  $V$  は unitary であるため、 $V^{-1} = V^*$ 、 $\hat{U}$  は  $m \times n$  の直交行列、 $\hat{\Sigma}$  は正方形列とする。

$$A = \hat{U} \hat{\Sigma} V^*$$

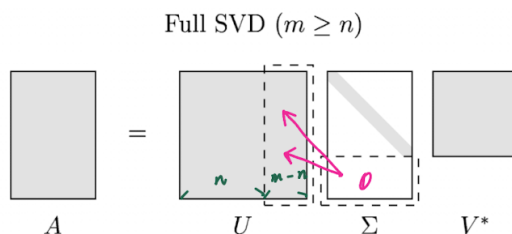
This factorization of  $A$  is called a **reduced singular value decomposition**, or **reduced SVD**, of  $A$ . Schematically, it looks like this:



### Full SVD

$\hat{U}$  is not unitary. However, by adjoining an additional  $m - n$  orthonormal columns to  $\hat{U}$  can be extended to a unitary matrix  $U$ .

If  $\hat{U}$  is replaced by  $U$ , then  $\hat{\Sigma}$  will have to change too. the last  $m - n$  columns of  $U$  should be multiplied by zero.



$U$  と  $V$  はユニタリー行列となるから、

$$A = U \Sigma V^* \tag{1.6}$$

より、

$$A^{-1} = V \Sigma^{-1} U^*$$

と逆行列演算が高速で安定する利点がある。

Having described the full SVD, we can now discard the simplifying assumption that  $A$  has full rank. if  $A$  is rank-deficient, the factorization (1.6) is still appropriate. 行列  $A$  が横長でも式 (1.6) は成り立つ。

## 1.5 More on the SVD

全部大事