Hinatori8

2026 年 1 月 1 日

2. QR Factorization and Least Squares

2.1 Projectors

Projectors

$v \in \mathrm{range}(P)$ の場合、v は自分自身の影の上にあることになる。Mathematically,... は、$v \in \mathrm{range}(P)(v = Px)$ であるならば、もう一度射影しても何も変わらない $(Pv = P^2x = v)$

Complementary Projectors

$$(I - P)^2 = I - P$$

は projector P が満たす、$P^2 = P$ を満たすため、$I - P$ も射影である。

Given v, find vectors $v_1 \in S_1$ and $v_2 \in S_2$ such that $v_1 + v_2 = v$ で、

$$(Pv + v_3) + ((I - P)v - v_3) = v$$

を考える。$v_1 + v_2 = v$ との比較より、

$$Pv + v_3 \in S_1, \qquad (I - P)v - v_3 \in S_2$$

を満たす。つまり、v を分解したベクトル v_1, v_2 から v_3 だけズレた場合を考えている。しかし、

$$\mathrm{range}(P) = S_1,\ \mathrm{null}(P) = S_2 \implies \mathrm{range(P)} \cap \mathrm{null}(P) = \{0\}$$

であるから、$v_3 = 0$ に違いない。これは、

$$v = v_1 + v_2$$

は一意に定まるという意味である。

Orthogonal Projectors

2.2 QR Factorization

Reduced and Full QR Factorizations

Full QR Factorization では行列 R の下側の行は 0 となるが、その行にかけられる $m - n$ 列の q は 0 であっていいわけではない。Reduced QR Factorization での q は行列 A の列空間を張る基底

となっているが、0 がかけられる q は range(A) の直交補空間 range$(A)^\perp$ を張る基底となる。つまり、Full QR Factorization での q は $\mathbb{R}^m$ 全体の基底を張ることになる。

$$\text{range}(A)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^T y = 0,\ \forall y \in \text{range}(A)\}$$
$$\mathbb{R}^m = \text{range}(A) \oplus \text{range}(A)^\perp$$

Gram-Schmidt Orthogonalization

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^* x}$$

より、

$$\begin{aligned} |r_{jj}| = \sqrt{r_{jj}^* r_{jj}} &= \|r_{jj}\|_2 \\ &= \left\| \frac{a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i}{q_j} \right\|_2 \quad (\text{式 (7.6) より}) \\ &= \left\| a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i \right\|_2 \end{aligned}$$

この時、q は式 (7.6) より正規化しているので、$\|q_j\|_2 = 1$ を満たす。

When Vectors Become Continuous Functions

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} q_0(x) & q_1(x) & \cdots & q_{n-1}(x) \end{array} \right] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

より、

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} r_{jk} q_j(x)$$

q_j は次数 j の多項式となる。これらの多項式は **Legendre polynomials**(ルジャンドル多項式)P_j のスカラー倍となる。P は互いに直交しているので、数値計算で利点がある。ルジャンドル多項式は行列 A(a continuous analogue of the Vandermonde matrix) に対して QR 分解した際に、導かれた物である。教科書では $P_j(1) = 1$ になるように正規化している。

例えば、3 次で検証すると、

$$
\begin{aligned}
A = QR &= \begin{bmatrix} q_0(x) & q_1(x) & q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle q_0, 1\rangle & \langle q_0, x\rangle & \langle q_0, x^2\rangle \\ 0 & \langle q_1, x\rangle & \langle q_1, x^2\rangle \\ 0 & 0 & \langle q_2, x^2\rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\dfrac{3}{2}}x & \sqrt{\dfrac{45}{8}}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{8}{45}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}}P_0(x) & \sqrt{\dfrac{3}{2}}P_1(x) & \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{45}{8}}P_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \sqrt{\dfrac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{8}{45}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

で確かに、P_j のスカラー倍となっていることがわかる。

Solution of $Ax = b$ by QR Factorization

$Rx = Q^*b$ で前進消去を終えた形と同じになる。しかし、QR 分解は標準的な手法ではなく、ガウスの消去法の方が実務では使われる。