Hinatori8

2026 年 1 月 1 日

2. QR Factorization and Least Squares

2.1 Projectors

2.2 QR Factorization

Reduced and Full QR Factorizations

Full QR Factorization では行列 R の下側の行は 0 となるが、その行にかけられる $m-n$ 列の q は 0 であっていいわけではない。Reduced QR Factorization での q は行列 A の列空間を張る基底となっているが、0 がかけられる q は range(A) の直交補空間 range$(A)^{\perp}$ を張る基底となる。つまり、Full QR Factorization での q は $\mathbb{R}^m$ 全体の基底を張ることになる。

$$\mathrm{range}(A)^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^T y = 0,\ \forall y \in \mathrm{range}(A)\}$$

$$\mathbb{R}^m = \mathrm{range}(A) \oplus \mathrm{range}(A)^{\perp}$$

Gram-Schmidt Orthogonalization

$$\|x\|_2 = \sqrt{x^* x}$$

より、

$$\begin{aligned}|r_{jj}| = \sqrt{r_{jj}^* r_{jj}} = \|r_{jj}\|_2& \\ &= \left\| \frac{a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i}{q_j} \right\|_2 \quad (\text{式 (7.6) より}) \\ &= \left\| a_j - \sum_{i=1}^{j-1} r_{ij} q_i \right\|_2\end{aligned}$$

この時、q は式 (7.6) より正規化しているので、$\|q_j\|_2 = 1$ を満たす。

When Vectors Become Continuous Functions

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} q_0(x) & q_1(x) & \cdots & q_{n-1}(x) \end{array}\right] \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}$$

より、

$$x^k = \sum_{j=0}^{k} r_{jk} q_j(x)$$

q_j は次数 j の多項式となる。これらの多項式は **Legendre polynomials**(ルジャンドル多項式)P_j のスカラー倍となる。P は互いに直交しているので、数値計算で利点がある。ルジャンドル多項式は行列 A(a continuous analogue of the Vandermonde matrix) に対して QR 分解した際に、導かれた物である。教科書では $P_j(1) = 1$ になるように正規化している。

例えば、3 次で検証すると、

$$\begin{aligned} A = QR &= \begin{bmatrix} q_0(x) & q_1(x) & q_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle q_0, 1\rangle & \langle q_0, x\rangle & \langle q_0, x^2\rangle \\ 0 & \langle q_1, x\rangle & \langle q_1, x^2\rangle \\ 0 & 0 & \langle q_2, x^2\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}}x & \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{45}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}P_0(x) & \sqrt{\frac{3}{2}}P_1(x) & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{45}{8}}P_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{8}{45}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で確かに、P_j のスカラー倍となっていることがわかる。

Solution of $Ax = b$ by QR Factorization

$Rx = Q^*b$ で前進消去を終えた形と同じになる。しかし、QR 分解は標準的な手法ではなく、ガウスの消去法の方が実務では使われる。