

一. 用谓词公式表示下列命题。

- ① 任何实数都有比他小的后继实数。
- ② 不存在最大的自然数。
- ③ 空集是任何集合的子集合。

二. 对于解释 I :

个体域 $D = \{1, 2\}$, 个体常元 $a = 1$, $b = 2$;

函词 $f(x)$: $f(1)=2$, $f(2)=1$;

谓词 $P(x,y)$: $P(1,1)=1$, $P(1,2)=1$, $P(2,1)=0$, $P(2,2)=1$ 。

给出下列谓词公式在 I 下的真值。

- ① $(\exists x)(\forall y)P(x, f(y))$
- ② $(\exists x)P(x, x) \wedge (\forall x)P(x, f(x))$

三. 设个体域为 $D = \{a, b\}$, 消去如下谓词公式中的量词。

- ① $(\forall x)(\forall y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)A(x)$
- ② $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

四. 证明如下谓词公式的等值式。

- ① $(\exists x)A(x) \wedge \neg(\forall x)\neg B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x) \wedge B(y))$
- ② $(\exists x)(\neg A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$

五. 求下列谓词公式的前束范式。

- ① $(\exists x)(\forall y)(A(x) \rightarrow B(x)) \vee (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

六. 如果一个人怕困难, 那么他就不会获得成功。每个人或者获得成功或者失败过。有些人未曾失败过。所以, 有些人不怕困难。符号化表示该命题, 并给出推理的证明。