第 3 章 函数

3.1 函数的概念

函数概念是最基本的数学概念之一，也是最重要的数学工具。连续变量函数或实函数在微积分学中的地位是众所周知的，而离散对象之间的函数关系在计算机科学研究中有着极其重要的意义。

定义 3.1: 设 f 是集合 A 到 B 的关系，如果对每个 $x\in A$，都存在唯一的 $y\in B$ 使得 $\langle x, y\rangle\in f$，则称关系 f 为集合 A 到 B 的函数（function）或映射（mapping），记为 f: $A\to B$ 或 $y = f(x)$。并称 x 为函数 f 的自变量（argument）或源点，y 为 x 在函数 f 下的函数值（value）或像点（individual image）。集合 A 称为函数 f 的定义域（domain），记为 dom $f = A$。所有像点组成的集合称为函数 f 的值域（range）或函数 f 的像（image），记为 ran f 或 $f(A)$。

由定义 3.1 可知，函数是一种特殊的关系，它要求 A 中每一个元素都与 B 中元素相关。同时，也可以通过集合 A 上的关系，定义出集合 A 到 A 的函数。

例 3.1: 设集合 A={1, 2, 3, 4}和 B={a, b, c, d}，判断下列 A 到 B 的关系哪些是函数，并写出函数的值域。

① $f1$={⟨1, a⟩, ⟨2, a⟩, ⟨3, d⟩, ⟨4, c⟩}

② $f2$={⟨1, a⟩, ⟨2, a⟩, ⟨2, d⟩, ⟨4, c⟩}

③ $f3$={⟨1, a⟩, ⟨2, b⟩, ⟨3, d⟩, ⟨4, c⟩}

④ $f4$={⟨1, a⟩, ⟨2, b⟩, ⟨2, c⟩, ⟨3, d⟩, ⟨4, c⟩}

⑤ $f5$={⟨2, a⟩, ⟨2, b⟩, ⟨2, c⟩, ⟨2, d⟩, ⟨3, b⟩, ⟨4, c⟩}

⑥ $f6$ = {⟨1, a⟩, ⟨2, b⟩, ⟨3, a⟩, ⟨4, b⟩}

解 ① f_1 是函数，值域为 $f_1(A)= \{a, c, d\}$；

② f_2 不是函数，因为元素 3 没有像点，且元素 2 与元素 a 和 d 对应，即不存在惟一的像点；

③ f_3 是函数，值域为 $f_3(A)= \{a, b, c, d\}$；

④ f_4 不是函数，因为元素 2 与元素 c 和 d 对应，即不存在惟一的像点；

⑤ f_5 不是函数，因为元素 1 没有像点，且元素 2 与元素 a、b、c 和 d 对应，即不存在惟一的像点；

⑥ f_6 是函数，值域为 $f_6(A)= \{a, b\}$。

例 3.2: 设集合:A={‘www.edu.cn’，‘peking university’，‘Guilin’， ‘discrete structure’， ‘function’， ‘range’}，f 是 A 到整数集的关系，表示对每个字符串返回其长度。显然 f 是 A 到整数集的函数，即 f：$A \to Z$。该函数的定义域为 dom $f = A$，值域为 ran f 或 $f(A) = \{10，17，6，18，8，5\}$。

例 3.3:判断下列关系哪些是函数?

① $f1 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in N，y \in N，x + y < 10\}$

② $f2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in R，y \in R，|x| = y\}$

③ $f3 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in R，y \in R，x = |y|\}$

④ $f4 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in Z，y \in Z，$ y 是 x 的 2 倍}

⑤ $f5 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in R，y \in R，|x| = |y|\}$

⑥ $f6 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in R，y \in R，x^2 = y\}$

解　根据函数的定义知，f_2、f_4 和 f_6 是函数。f_1 不是函数，因为 f_1 既不满足定义域为 **N**，又不满足惟一像点条件；f_3 不是函数，因为 f_3 既不满足定义域为 **R**，又不满足惟一像点条件；f_5 不是函数，因为 f_5 不满足惟一像点条件。■

由上面例子，可以总结出函数的如下几个特点：

① 定义域是集合 A，而不能是集合 A 的任意一个真子集；

② 对于定义域中的任意一个元素都有惟一的值和其对应，也就是说只能是多对一，而不能是一对多，称之为像点的**单值性**；

③ 集合 A 到 B 的函数 f 的值域 $f(A)$ 是集合 B 的子集，即 $f(A) \subseteq B$；

④ 集合 A 到 B 的函数 f 的基数等于其定义域的基数，即 $|f| = |A|$；

⑤ $f(x)$ 表示一个函数值，而 f 是一个序偶的集合，因此 $f(x) \neq f$。

例 3.4:对于集合 A={1, 2, 3}和 B={a, b}，试列写出 A 到 B 的所有函数？B 到 A 的所有函数？

解:设函数 f：A→B，根据函数的定义，f(1)可以取 a 或者 b 两个值；f(1)取定一个值时，f(2)可以取 a 或者 b 两个值；而，f(2)取定一个值时，f(3)可以取 a 或者 b 两个值。因此，集合 A 到 B 可以定义出如下 2^3 种不同的函数。

同理，函数 g：B→A，可以定义出如下 3^2 种不同的函数。

特殊符号：

设 A,B 为两个集合。用 B^A 表示 A 到 B 的全体函数的集合，即 $B^A = \{f \mid f: A \to B\}$

对于有限集合 A 和 B，如果$|A| = m$和$|B| = n$，那么，集合 A 到 B 可以定义出n^m种不同的函数，即$|B^A| = |B|^{|A|}$。

例 3.5:对于集合$A=\{1, 2, 3\}$到$B=\{a, b, c\}$的关系$f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$和$g = \{\langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$，判断$f$、$g$、$f\cup g$、$f\cap g$、$f-g$、$\sim f$和$f\oplus g$是否为$A$到$B$的函数。

解： 根据函数的定义，f和g都是集合A到B的函数。

$f\cup g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$不是集合$A$到$B$的函数，因为元素 1 和 3 都不满足唯一像点条件。

$f\cap g= \{\langle 2, b\rangle\}$不是集合$A$到$B$的函数，因为元素 1 和 3 都没有像点。

$f-g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$不是集合$A$到$B$的函数，因为元素 2 没有像点

$\sim f = \{\langle 1, b\rangle, \langle 1, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$不是集合$A$到$B$的函数，因为元素 1、2 和 3 都不满足唯一像点条件。

$f\oplus g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$不是集合$A$到$B$的函数，因为元素 1 和 3 都不满足唯一像点条件，且元素 2 没有像点。

例 3.6:对于集合$A=\{1, 2, 3\}$上的关系$f = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$和$g = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 1\rangle\}$，判断$f$、$g$、$f\cup g$、$f\cap g$、$f-g$、$\sim f$和$f\oplus g$是否为$A$到$A$的函数。

解略。

通过例 3.5 和例 3.6 可以看出，函数是一种特殊的关系，可以进行关系的基本运算，但是，函数的并、交、差、补和对称差运算结果，并不一定是函数。

3.1.2 特殊函数

函数描述了集合 A 中元素和集合 B 中元素之间的特殊对应关系。这种对应关系可以是一对一的或多对一的。同时，函数的值域可以是集合 B 的一个真子集，也可以是集合 B 自身。这些不同的情形，形成了下面一些特殊函数。

定义 3.2:设f是集合A到B的函数，对于A中任意两个元素x和y，如果$x\neq y$时，都有$f(x) \neq f(y)$，则称f是集合A到B的单射函数（injection）或一对一的映射。

例如:集合$A=\{1, 2, 3\}$到$B=\{a, b, c, d\}$的函数$f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$，

对于 A 中任意两个元素 x 和 y，如果 $x \neq y$ 时，都有 $f(x) \neq f(y)$。所以，f 是集合 A 到 B 的单射函数。

定义 3.3: 设 f 是集合 A 到 B 的函数，如果函数 f 的值域恰好是集合 B，即 $f(A) = B$，则称 f 是集合 A 到 B 的满射函数（surjection）或 A 到 B 上的映射。

例如:集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 到 $B=\{a, b\}$ 的函数 $f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$，函数的值域 $f(A) = \{a, b\} = B$。所以，f 是集合 A 到 B 的满射函数。

定义 3.4: 设 f 是集合 A 到 B 的函数，如果函数 f 既是集合 A 到 B 的单射函数又是集合 A 到 B 的满射函数，则称 f 是集合 A 到 B 的双射函数（bijection）或一一对应的映射。

例如:集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 到 $B=\{a, b, c\}$ 的函数 $f = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$，对于 A 中任意两个元素 x 和 y，如果 $x \neq y$ 时，都有 $f(x) \neq f(y)$。并且，函数的值域 $f(A) = \{a, b, c\} = B$。所以，f 既是集合 A 到 B 的单射函数又是集合 A 到 B 的满射函数。因此，f 是集合 A 到 B 的双射函数。

例 3.7: 判断下列 A 到 B 的关系哪些是函数，并说明是否为单射函数、满射函数、双射函数？

① 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{a, b, c, d\}$，关系 $f1 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle\}$；
② 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{a, b\}$，关系 $f2 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$；
③ 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{a, b\}$，关系 $f3 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, a\rangle\}$；
④ 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{a, b, c\}$，关系 $f4 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, c\rangle\}$；
⑤ 集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ 和 $B=\{a, b, c\}$，关系 $f5 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle, \langle 4, c\rangle\}$；
⑥ 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 和 $B=\{a, b\}$，关系 $f6 = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

解：
① $f1$ 是函数，且是单射函数；
② $f2$ 是函数，且是满射函数
③ $f3$ 是函数，既不是单射函数，也不是满射函数；
④ $f4$ 是函数，且是单射函数、满射函数、双射函数；
⑤ $f5$ 是函数，且是满射函数；
⑥ $f6$ 不是函数。

例 3.8:判断下列函数是否为单射函数、满射函数、双射函数？

① f：$\mathrm{R}\to\mathrm{R}$，$f(x) = -x^2 + 2x - 1$；

② f：$\mathrm{Z}\to\mathrm{Z}$，$f(x) = |x|$；

③ f：$\mathrm{Z}\to\mathrm{Z}$，$f(x) = x - 1$；

④ f：$\mathrm{N}\to\mathrm{N}\times\mathrm{N}$，$f(x) = \langle x, x+1\rangle$；

⑤ f：$\mathrm{R}^+\to\mathrm{R}^+$，$f(x) = (x^2+1)/x$，$\mathrm{R}^+$为正实数集；

⑥ f：$\mathrm{Z}^+\to\mathrm{R}$，$f(x) = \ln x$，$\mathrm{Z}^+$为正整数集。

解:

① $f(0) = f(2) = -1$，因此不是单射函数；f在 $x = 1$ 取得极大值 0，因此不是满射函数。

② $f(1) = f(-1) = 1$，因此不是单射函数；f 的像点都非负，因此不是满射函数；

③ f是单射函数、满射函数、双射函数；

④ f是单射函数；$\langle 0, 0\rangle\notin \mathrm{ran}f$，因此不是满射函数；

⑤ 当 $x\to 0$ 和 $x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，因此不是单射函数；f有极小值 2，因此不是满射函数；

⑥ f是单射函数；f的像点都非负，因此不是满射函数

从上面几个例子可以看出，若 f是有限集 A到有限集 B的函数，则有

① f是单射函数的必要条件是$|A| \le |B|$；

② f是满射函数的必要条件是$|B| \le |A|$；

③ f是双射函数的必要条件是$|A| = |B|$。

例 3.9:试证明如下论断：若 f是有限集 A到有限集 B的函数，且$|A| = |B|$，那么，f是单射函数当且仅当 f是满射函数。

证明 :

（必要性）设 f是单射函数。显然，f是 A到 $f(A)$的满射函数，故 f是 A到 $f(A)$的双射函数，因此 $|A| = |f(A)|$。从而，由$|A| = |B|$知，$|f(A)| = |B|$。进而，由$|f(A)| = |B|$且 $f(A)\subseteq B$可得 $f(A) = B$。所以，f是有限集 A到有限集 B的满射函数。

（充分性）设 f是满射函数。对于集合 A中任意元素 $x\ne y$，假设 $f(x) = f(y)$。由于 f是 A到 B的满射函数，所以 f也是$(A-\{x\})$到 B的满射函数，故$|A-\{x\}| \ge |\mathrm{B}|$，即$|A|-1 \ge |\mathrm{B}|$，这与$|A| = |B|$矛盾。因此，$f$是有限集 A到有限集 B

的单射函数。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　证毕。

例 3.10: 对于有限集 A 和有限集 B，设 $|A| = 3$、 $|B| = 4$，计算可定义多少种不同的 A 到 B 的单射函数。

解:

A 到 B 的单射函数数目为 4 个元素中取 3 个的排列，即

$P(4,3) = 4!/(4-3)! = 24$。

例 3.11: 对于有限集 A 和有限集 B，设 $|A| = 4$、 $|B| = 3$，计算可定义多少种不同的 A 到 B 的满射函数。

解:

如果把 A 中元素的两个元素“合并”成 1 个元素，即把 A 看做由 3 个元素组成的集合，由于由 3 个元素的集合到 3 个元素的集合可定义的双射函数为 3！=6 个，而 4 个元素“合并”成 3 个元素共有 $C(4, 3) = 6$ 种方案，所以，根据乘法原理，A 到 B 的满射函数数目为共有 $6\times 6 = 36$ 种。

例 3.12: 对于集合 $A=\{a, b, c, d\}$，计算可定义多少种不同的 A 到 A 的双射函数。

解: a、b、c 和 d 的一种排列就确定了 A 到 A 的一个双射函数，所以，A 到 A 可定义的双射函数数目是 4 个元素的全排列，即 4！=24。

3.2 函数的运算

3.2.1 复合运算

函数是一种特殊的关系，也应该能够进行关系的复合运算。那么，复合运算的结果是不是像基本运算那样，不一定是函数呢？回答是否定的。函数经复合运算后仍然是函数。

定理 3.1　对于集合 A、B 和 C，f 是 A 到 B 的关系，g 是 B 到 C 的关系，如果 f 和 g 分别是 A 到 B 和 B 到 C 的函数，那么，复合关系 $f\circ g$ 是 A 到 C 的函数。

证明:　首先证明 $\mathrm{dom}(f\circ g) = A$。对于任意 $x\in A$，由函数 $f: A\to B$ 知，必有存在 $y\in B$ 使得 $\langle x, y\rangle \in f$；由函数 $g: B\to C$ 知，对于 $y\in B$ 必有存在 $z\in C$ 使得 $\langle y, z\rangle \in g$；因此 $\langle x, z\rangle \in f\circ g$，即 $x\in \mathrm{dom}(f\circ g)$。

再证 $f\circ g$ 的单值性。设任意 $x\in A$ 有 $z1\in C$ 和 $z2\in C$ 使得 $\langle x, z1\rangle \in f\circ g$ 和 $\langle x, z2\rangle \in f\circ g$，那么有 $y1\in B$ 和 $y2\in B$，使得 $\langle x, y1\rangle \in f$、$\langle y1, z1\rangle \in g$、$\langle x, y2\rangle \in f$ 和 $\langle y2, z2\rangle \in g$。由 f 为函数知 $y1 = y2$；又 g 为函数知 $z1 = z2$。所以，$f\circ g$ 为

A 到 C 的函数。　　　　　　　　　　　　　证毕。

定义 3.5：对于集合 A 到 B 的函数 f 和集合 B 到 C 的函数 g，复合关系 $f\circ g$ 称为函数 f 和函数 g 的复合函数（composition function），记为 $f\circ g: A\to C$。并称“∘”为函数的复合运算（composition operation）。

注意：$\langle x, z\rangle \in f\circ g$ 是指存在 y 使得 $\langle x, y\rangle \in f$ 和 $\langle y, z\rangle \in g$，即 $y = f(x)$，$z = g(y) = g(f(x))$，因而 $f\circ g(x) = g(f(x))$。这说明，当 f 和 g 为函数时，它们的复合作用于自变量的次序刚好与复合原始记号的次序相反。我们约定，函数复合时，只有当两个函数中一个的定义域与另一个的值域相同时，它们的复合才有意义。

例 3.13：设集合 $A = \{a, b, c, d\}$、$B = \{b, c, d\}$ 和 $C = \{a, b, d\}$，集合 A 到集合 B 的函数 $f =\{\langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, d\rangle\}$，集合 B 到集合 C 的函数 $g =\{\langle b, a\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$，求复合函数 $f\circ g$。

解 ： 依据复合函数的定义可以得到：

$f\circ g =\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle d, b\rangle\}$。

例 3.14：对于 R 到 R 的函数 $f(x) = 2x+1$ 和 $g(x) = x^2+1$，求 $f\circ g$、$g\circ f$、$f\circ f$ 和 $g\circ g$。

解： 依据复合函数的定义可以得到：

$f\circ g(x) = g(f(x)) = (2x + 1)^2 + 1= 4x^2+4x +2$

$g\circ f(x) = f(g(x)) = 2(x^2 + 1)+1= 2x^2+3$

$f\circ f(x) = f(f(x)) = 2(2x + 1)+1= 4x +3$

$g\circ g(x) = g(g(x)) = (x^2 + 1)^2+1= x^4+2x^2 +2$。

例 3.15　　设 $f: A\to B$, $g: B \to C$,

(1)若 f 和 g 都是单射，则 $f\circ g$ 也是单射；

(2)若 f 和 g 都是满射，则 $f\circ g$ 也是满射；

(3)若 f 和 g 都是双射，则 $f\circ g$ 也是双射。

证:

(1)设 f 和 g 是单射函数。对于任意 $x1\in A$ 和 $x2\in A$，$x1 \neq x2$，由 f 是单射函数知，必有 $y1\in B$ 和 $y2\in B$，$y1 \neq y2$ 且 $y1= f(x1) \neq y2= f(x2)$。又由 g 是单射函数知，$z1\in C$ 和 $z2\in C$，$z1 \neq z2$ 且 $z1= g(y1) \neq z2= g(y2)$。所以，$g(f(x1)) \neq$

$g(f(x2))$，即 $f \circ g(x1) \neq f \circ g(x2)$。因此，$f \circ g$ 是单射函数

(2)设 f 和 g 是满射函数。对于任意 $z \in C$，由 g 是满射函数知，必有 $y \in B$ 使得 $g(y) = z$。又由 f 是满射函数知，必有 $x \in A$ 使得 $y = f(x)$。所以，必有 $g(f(x)) = z$，即 $f \circ g(x) = z$。因此，$f \circ g$ 是满射函数。

(3)同理，可证得：如果 f 和 g 是双射函数，则 $f \circ g$ 是双射函数

例 3.15 设 f: A→B, g: B →C,

(1)若 f o g 是单射，则 f 是单射；

(2)若 f o g 是满射，则 g 是满射；

(3) 若 f o g 是双射，则 f 是单射，g 是满射。

证明：(1)设 $f \circ g$ 是单射函数，而 f 不是单射函数。那么，有 $x1 \in A$ 和 $x2 \in A$，$x1 \neq x2$，使得 $f(x1) = f(x2)$。从而 $g(f(x1)) = g(f(x2))$，即 $f \circ g(x1) = f \circ g(x2)$。与 $f \circ g$ 是单射函数矛盾。故 f 是单射函数

(2)设 $f \circ g$ 是满射函数，那么，对于任意 $z \in C$，必有 $x \in A$ 使得 $f \circ g(x) = z$。因此，必有 $y \in B$，$y = f(x)$ 且 $g(y) = z$。故 g 是满射函数；

(3)设 $f \circ g$ 是双射函数，由(2)知 f 是单射函数，由(3)知 g 是满射函数。证毕。

设 f: A→B, g: B →C, 若 f o g 是单射，则 f 是单射；**但 g 不一定是单射！**

例 3.16:对于 $A = \{a1, a2, a3\}$、$B = \{b1, b2, b3, b4\}$ 和 $C = \{c1, c2, c3, c4\}$，$f = \{\langle a1, b1\rangle, \langle a2, b2\rangle, \langle a3, b3\rangle\}$，$g = \{\langle b1, c1\rangle, \langle b2, c2\rangle, \langle b3, c3\rangle, \langle b4, c3\rangle\}$，可求得 $f \circ g = \{\langle a1, c1\rangle, \langle a2, c2\rangle, \langle a3, c3\rangle\}$。$f \circ g$ 是单射函数，但是，g 不是单射函数。

设 f: A→B, g: B →C, 若 f o g 是满射，则 g 是满射；**但 f 不一定是满射！**

例 3.17:对于 $A = \{a1, a2, a3\}$、$B = \{b1, b2, b3\}$ 和 $C = \{c1, c2\}$，$f = \{\langle a1, b1\rangle, \langle a2, b2\rangle, \langle a3, b2\rangle\}$，$g = \{\langle b1, c1\rangle, \langle b2, c2\rangle, \langle b3, c2\rangle\}$，可求得 $f \circ g = \{\langle a1, c1\rangle, \langle a2, c2\rangle, \langle a3, c2\rangle\}$。$f \circ g$ 是满射函数，但是，f 不是满射函数。

若 f o g 是双射，则 f 是单射，g 是满射；**但 f 不一定是满射！g 不一定是单射！**

例 3.18:对于 $A=\{a1, a2, a3\}$、$B=\{b1, b2, b3, b4\}$ 和 $C = \{c1, c2, c3\}$，$f = \{\langle a1, b2\rangle, \langle a2, b1\rangle, \langle a3, b3\rangle\}$，$g=\{\langle b1, c1\rangle, \langle b2, c2\rangle, \langle b3, c3\rangle, \langle b4, c3\rangle\}$，可求得 $f \circ g = \{\langle a1, c2\rangle, \langle a2, c1\rangle, \langle a3, c3\rangle\}$。$f \circ g$ 是双射函数，但是，g 不是单射函数，f 不是满射函数。

3.2.2 逆运算

任意关系都可以进行逆运算得到其逆关系。但是，对函数而言，就略有不同。由于在函数中一定要求 dom $f = A$ 和 A 中每一个元素有唯一的像点。所以，在对一个函数进行逆运算时，为了保证逆运算的结果仍是一个函数，就有相应的特殊要求。

定义 3.6: 对于集合 A 到 B 的关系 g，如果关系 g 是 A 到 B 函数且其逆关系 g^{-1} 是 B 到 A 函数，那么称 g^{-1} 是函数 g 的逆函数（inverse function）或反函数，记为 g^{-1}：$B\to A$。并称"-1"为函数的逆运算（inverse operation）

例 3.19: 判断下列函数哪些存在逆函数？并计算逆函数。

① 集合 $A=\{1,2,3\}$ 到 $B=\{a, b, c\}$ 的函数 $s=\{\langle 1, c\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, a\rangle\}$

② 集合 $A=\{1,2,3\}$ 到 $B=\{a, b, c, d\}$ 的函数 $f=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 3, d\rangle\}$

③ $h = \{\langle x, x+1\rangle \mid x \in Z\}$；

④ g：$Z\to Z$，$g(x) = x + 4$；

⑤ f：$Z\to Z$，$g(x) = 2x + 1$；

⑥ 集合 $A=\{1, 2, 3\}$ 到 $B=\{a, b\}$ 的函数 $g=\{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle\}$

解：①$s^{-1}=\{\langle c, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle a, 3\rangle\}$ 是 B 到 A 的函数，所以 s 有逆函数。

② $f^{-1} = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle d, 3\rangle\}$ 不是集合 $B=\{a, b, c, d\}$ 到 $A=\{1, 2, 3\}$ 的函数，所以，函数 f 不存在逆函数；

③ 逆函数 $h^{-1} = \{\langle x+1, x\rangle \mid x \in Z\}$。

④ 对于 $\langle x, x+4\rangle \in g$，应有 $\langle x+4, x\rangle \in g^{-1}$。令 $x + 4 = y$，可得 $x = y - 4$。所以，逆函数 $g^{-1}(x) = x - 4$；

⑤ 对于 $\langle x, 2x+1\rangle \in f$，应有 $\langle 2x+1, x\rangle \in f^{-1}$。令 $2x+1 = y$，可得 $x = (y-1)/2$。f^{-1} 不是 Z 到 Z 的函数。所以，函数 f 不存在逆函数；

⑥ $g^{-1} = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 3\rangle\}$ 不是集合 $B=\{a, b\}$ 到 $A=\{1, 2, 3\}$ 的函数，所以，函数 g 不存在逆函数。

定理 3.2: 如果 g 是集合 A 到 B 的双射函数，则 g 的逆关系 g^{-1} 是集合 B 到 A 的函数。

证明: 由于 g 为双射函数，那么 g 为满射函数，因此对于任意 $y\in B$，必有 $x\in A$ 使得 $g(x) = y$，从而 $\langle y, x\rangle \in g^{-1}$，这表明 dom $(g^{-1}) = B$。

对于任意 $y\in B$，设 $\langle y, x1\rangle \in g^{-1}$ 和 $\langle y, x2\rangle \in g^{-1}$，那么 $g(x1) = g(x2) = y$。由于 g 是双射函数，那么，g 是单射函数，必有 $x1= x2$，从而，g^{-1} 具有单值性。所以，g^{-1} 是集合 B 到 A 的函数。证毕。

例如:例 3.19 中①、③和④列出的都是双射函数，它们的逆关系都是函数；②和⑤中的函数都是单射函数，但都不是满射函数，它们的逆关系都不是函数；⑥中的函数是满射函数，但不是单射函数，它的逆关系不是函数。