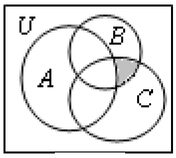
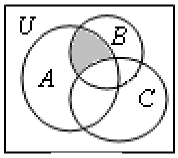
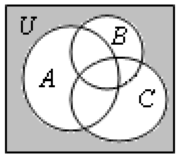
1. 用集合表达式表示下图中各阴影部分。



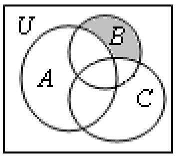
（1）



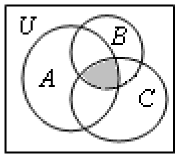
（2）



（3）



（4）



（5）

解：（1）$(B\cap C)-(A\cap B\cap C)$；

（2）$(A\cap B)-(A\cap B\cap C)$；

（3）$\sim(A\cup B\cup C)$；

（4）$(B-A)-C$；

（5）$A\cap B\cap C$　　　（答案不唯一）

2. 某班有 25 个学生，其中 14 人会打篮球，12 人会打排球，6 人会打篮球和排球，5 人会打篮球和网球，还有 2 人会打这三种球。已知 6 个会打网球的人都会打篮球或排球，求该班同学中不会打球的人数。

解：设集合 A 表示会打篮球的同学集合，集合 B 表示会打排球的同学集合，集合 C 表示会打网球的同学集合。

已知 $|U|=25$，$|A|=14$，$|B|=12$，$|A\cap B|=6$，$|A\cap C|=5$，$|A\cap B\cap C|=2$，$|C|=6$，$|(A\cap C)\cup(B\cap C)|=6$，

而 $|(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|=5+|B\cap C|-2=6$，

所以 $|B\cap C|=3$。

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$=14+12+6-6-5-3+2=20$

所以 $|\sim(A\cup B\cup C)|=|U|-|A\cup B\cup C|=25-20=5$

故该班同学中不会打篮球的人数共有 5 人。

3. 设集合 $A=\{a, b\}$，求笛卡尔积 $P(A)\times A$。

解：$P(A)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$P(A)\times A$

$=\{\langle\phi,a\rangle,\langle\{a\},a\rangle,\langle\{b\},a\rangle,\langle\{a,b\},a\rangle,\langle\phi,b\rangle,\langle\{a\},b\rangle,\langle\{b\},b\rangle,\langle\{a,b\},b\rangle\}$

4．设集合 $A = \{1, 2, 3\}$、$B = \{1, 3, 5\}$和 $C = \{a, b\}$，求如下笛卡尔积

① $(A\cap B)\times C$；　　　②$(A\times C)\cap(B\times C)$ 。

解：① $(A\cap B)\times C=\{1,3\}\times\{a,b\}=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

②$(A\times C)\cap(B\times C)= =\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}\cap$

$\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 5,a\rangle,\langle 5,b\rangle\}$

$=\{\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 3,a\rangle,\langle 3,b\rangle\}$

5．对于集合 A,B,C，证明： $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$。

证明：（1）对于任意$\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times C$，则有 $x\in A\cap B$ 且 $y\in C$，由交集的定义知，$x\in A$ 且 $x\in B$，故有 $x\in A$ 且 $y\in C$ 且 $x\in B$ 且 $y\in C$，所以，$\langle x,y\rangle\in A\times C$ 且$\langle x,y\rangle\in B\times C$，即$\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times C)$。

（2）对于任意$\langle x,y\rangle\in((A\times C)\cap(B\times C)$，则有$\langle x,y\rangle\in A\times C$ 且$\langle x,y\rangle\in B\times C$，由笛卡儿积的定义知，$x\in A$ 且 $y\in C$，且 $x\in B$ 且 $y\in C$，故有 $x\in A$ 且 $x\in B$ 且 $y\in C$，即 $x\in A\cap B$ 且 $y\in C$，故$\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times C$。

由（1）（2）知，$(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$。

6. 设集合 $A = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a,b, c\}\}$，求 A 上的包含于关系及其关系矩阵。

解：$R=\{\langle\{a\},\{a\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a\},\{a,c\}\rangle,\langle\{a\},\{a,b,c\}\rangle,$
$\langle\{a,b\},\{a,b\}\rangle,\langle\{a,b\},\{a,b,c\}\rangle,\langle\{a,c\},\{a,c\}\rangle,\langle\{a,c\},\{a,b,c\}\rangle,$
$\langle\{a,b,c\},\{a,b,c\}\rangle\}$

关系矩阵 $M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

7. 设 $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$，其中 a、b、c 、d 、e 、f 和 g 分别表示 7 个人，且 a、b 和 c 都是 18 岁，d 和 e 都是 21 岁，f 和 g 都是 23 岁。试给出 A 上的同龄关系，并用关系矩阵和关系图表示。

解：A 上的同龄关系

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,$
$\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle,\langle f,f\rangle,\langle f,g\rangle,\langle g,f\rangle,\langle g,g\rangle\}$

关系矩阵：$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}$

关系图：