

1. 对于集合  $A=\{0, 1, 2, 3\}$  上的如下关系, 判定哪些关系是等价关系。若是等价关系, 求集合  $A$  中各元素的等价类和  $A$  的商集。

①  $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ ;

②  $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ ;

③  $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ ;

④  $\{\langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ 。

解: ①是等价关系, 等价类有  $[0]_R=\{0\}$ ,  $[1]_R=\{1\}$ ,  $[2]_R=\{2\}$ ,  $[3]_R=\{3\}$ ,

$A/R=\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ 。

②是等价关系, 等价类有  $[0]_R=\{0, 1\}=[1]_R$ ,  $[2]_R=\{2, 3\}=[3]_R$ ,

$A/R=\{\{0, 1\}, \{2, 3\}\}$ 。

③不是等价关系, 因为  $\langle 2, 2 \rangle \notin R$ , 不具有自反性。

④不是等价关系, 因为  $\langle 1, 3 \rangle \in R$ ,  $\langle 3, 2 \rangle \in R$ , 但是  $\langle 1, 2 \rangle \notin R$ , 不具有传递性。

2. 对于  $Z^+ \times Z^+$  集合上的关系  $R=\{\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \mid a \cdot b = c \cdot d\}$ , 证明  $R$  是等价关系。

证明: (1)对于任意  $x, y \in Z^+$ , 则有  $x \cdot y = x \cdot y$ , 由  $R$  的定义知,  $\langle \langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle \rangle \in R$ , 所以  $R$  具有自反性。

(2)对于任意  $a, b, c, d \in Z^+$ , 若  $\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in R$ , 由  $R$  的定义知  $a \cdot b = c \cdot d$ , 即  $c \cdot d = a \cdot b$ , 故由  $R$  的定义知  $\langle \langle c, d \rangle, \langle a, b \rangle \rangle \in R$ , 所以  $R$  具有对称性。

(3)对于任意  $a, b, c, d, e, f \in Z^+$ , 若  $\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \in R$ , 且  $\langle \langle c, d \rangle, \langle e, f \rangle \rangle \in R$ , 由  $R$  的定义知  $a \cdot b = c \cdot d$ , 且  $c \cdot d = e \cdot f$ , 即  $a \cdot b = e \cdot f$ , 故由  $R$  的定义知  $\langle \langle a, b \rangle, \langle e, f \rangle \rangle \in R$ , 所以  $R$  具有传递性。

综上(1)(2)(3)知  $R$  是等价关系。

3. 设  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系, 判定下列各式中哪些是等价关系。

①  $R \cup S$ ;

②  $R \cap S$ ;

③  $R - S$ 。

①  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系,  $R \cup S$  具有自反性和对称性, 但没有传递性, 所以  $R \cup S$  不是  $A$  上的等价关系。

例: 设  $A=\{1, 2, 3\}$ ,  $R=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ ,  $S=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle,$

$\langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$ , 则  $R$  和  $S$  是  $A$  上到的等价关系, 而

$R \cup S=\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$  没有传递性, 所以不是等价关系。

②  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系,  $R \cap S$  具有自反性、对称性和传递性, 所以  $R \cap S$  是  $A$  上的等价关系。

证明：(1)对于任意  $x \in A$ ，因为  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系，则  $R$  和  $S$  都是  $A$  上自反关系，所以  $\langle x, x \rangle \in R$  且  $\langle x, x \rangle \in S$ ，则  $\langle x, x \rangle \in R \cap S$ ，所以  $R$  具有自反性。

(2)对于任意  $x, y \in A$ ，若  $\langle x, y \rangle \in R \cap S$ ，则  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle x, y \rangle \in S$ ，因为  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系，则  $R$  和  $S$  都是  $A$  上对称关系，则  $\langle y, x \rangle \in R$  且  $\langle y, x \rangle \in S$ ，即  $\langle y, x \rangle \in R \cap S$ ，所以  $R$  具有对称性。

(3)对于任意  $x, y, z \in A$ ，若  $\langle x, y \rangle \in R \cap S$  且  $\langle y, z \rangle \in R \cap S$ ，即  $\langle x, y \rangle \in R$  且  $\langle y, z \rangle \in R$  且  $\langle x, y \rangle \in S$  且  $\langle y, z \rangle \in S$ ，因为  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系，则  $R$  和  $S$  都是  $A$  上传递关系，所以  $\langle x, z \rangle \in R$  且  $\langle x, z \rangle \in S$ ，即  $\langle x, z \rangle \in R \cap S$ ，所以  $R$  具有传递性。

综上(1)(2)(3)知  $R$  是等价关系。

③  $R$  和  $S$  是集合  $A$  上的等价关系， $R-S$  具有对称性，但没有自反性，没有传递性，所以  $R-S$  不是  $A$  上的等价关系。

例：设  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $R = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ ,  $S = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\}$ ，则  $R$  和  $S$  是  $A$  上的等价关系，而  $R-S = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$  没有自反性，所以不是等价关系。

4. 对于集合  $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  的划分  $S = \{\{a, c\}, \{b, d, e, f\}, \{g\}\}$ ，求划分  $S$  所对应的等价关系。

解：划分  $S$  所对应的等价关系  $R$  为

$$\begin{aligned} R &= (\{a, c\} \times \{a, c\}) \cup (\{b, d, e, f\} \times \{b, d, e, f\}) \cup (\{g\} \times \{g\}) \\ &= \{\langle a, a \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, a \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle d, d \rangle, \langle e, e \rangle, \langle f, f \rangle, \langle b, d \rangle, \langle d, b \rangle, \langle b, e \rangle, \\ &\quad \langle e, b \rangle, \langle b, f \rangle, \langle f, b \rangle, \langle d, e \rangle, \langle e, d \rangle, \langle d, f \rangle, \langle f, d \rangle, \langle e, f \rangle, \langle f, e \rangle, \langle g, g \rangle\} \end{aligned}$$