§4.1　命题逻辑的基本概念

4.1.1　命题

自然语言是人类高级思维的重要表达形式。自然语言对现实世界或事实的描述是通过一个或多个句子来完成的。句子可以分为疑问句、祈使句、感叹句和陈述句等，其中可以分辨出真假的只有陈述句，而其他的句子是不存在真假的。**命题逻辑**（proposition logic）是以自然语言中可判断真假的**陈述句**（declcerative sentence）为基本单元实现对人类思维规律的数学化和符号化。

定义 1　自然语言中能够判断真假的陈述句称为**命题**（proposition）。如果陈述句表述的意义为真，则称为**真命题**（true proposition）；如果陈述句表述的意义为假，则称为**假命题**（false proposition）。陈述句表述意义的真或假称为命题的**真值**（value）或**取值**。真命题的取值为**真**（true），假命题的取值为**假**（false），分别用“t”（或“1”）和“f”（或“0”）表示。

由定义 1 可知，判断一个语句是否为命题，有两个要点：其一，语句必须是陈述句，不能是疑问句、祈使句、感叹句，更不能是一个不完整的句子；其二，语句表述的意义必须能够判断真假，即，语句具有惟一真值，不能兼而有之。

例 1　判断下列语句哪些是命题？如果是命题，其真值如何？

① 5 能被 3 整除。

② 你现在好吗?

③ 请勿喧哗!

④ $1+2=3$。

⑤ $x+y=6$。

⑥ 好美的音乐啊!

⑦ 地球外的星球上也有生命。

⑧ 3 是偶数。

⑨ 我正在说的是谎话。

⑩ 李明选修了离散数学。

解　① 是陈述句，但 5 不能被 3 整除，所以，该语句是命题，其真值为假。

② 不是陈述句，所以，该语句不是命题。

③ 不是陈述句，所以，该语句不是命题。

④ 是陈述句，并且表述的意义为真，所以，该语句是命题，其真值为真。

⑤ 是陈述句，但是在 x 和 y 的不同取值下，所表述的意义可能为真，也可能为假。例如，x 取 1 和 y 取 5 时，$5+1=6$；x 取 3 和 y 取 7 时，$3+7=10\neq 6$。所以，该语句不是命题。

⑥ 不是陈述句，所以，该语句不是命题。

⑦ 是陈述句，只是目前技术条件，还无法断定地球外的星球上是否有生命，但是，终将做出明确的判断，所以，该语句是命题，其真值目前还未知。

⑧ 是陈述句，但 3 不是偶数，所以，该语句是命题，其真值为假。

⑨ 是陈述句，但是无法判断该语句的真假。如果为真，根据语句表述的意义，我正在说的是谎话，那么就应该为假；如果为假，根据语句表述的意义，我正在说的是谎话，那么就应该为真。所以，该语句不是命题。

⑩ 是陈述句，李明是具体的人，是否选修离散数学可以根据学校选课系统给出明确的判定，所以，该语句是命题，其真值是惟一确定的。 ■

从上述例子可知：命题一定是陈述句，但是，并非所有的陈述句都一定是命题。命

题的真值有时可明确给出，有时还需依靠环境、条件、时间等实际情况才能确定其真值。一个陈述句是否为命题，关键在于其是否具有惟一真值，而与我们是否知道其真假无关。

定义 2 能够判断真假的简单陈述句称为**简单命题**（simple proposition）或**原子命题**（atomic proposition）。通过关联词将简单命题复合连接而成的命题称为**复合命题**（compound proposition）。

例 2 判断下列语句哪些是简单命题？哪些是复合命题？对于复合命题指出其中的关联词？

① 李强不是教师。
② 小王会法语和英语。
③ 下班高峰时，交通真拥挤！
④ 如果明天不下雨，我就去书店。
⑤ l+3＝4 当且仅当今天是 3 号
⑥ 张宏不是学习委员，也不是三好学生。
⑦ 等价关系是离散数学中的一个概念。
⑧ 如果暑假没有生产实习，我就去西藏或海南旅游。
⑨ 这朵花是红色的。
⑩ 计算机专业同学选修了 Java 程序设计课程或者动画游戏软件开发课程。

解 ① 是复合命题，关联词为“非”。
② 是复合命题，关联词为“并且”。
③ 不是命题。
④ 是复合命题，关联词为“非”和“如果…就…”。
⑤ 是复合命题，关联词为“当且仅当”。
⑥ 是复合命题，关联词为“非”和“并且”。
⑦ 是简单命题。
⑧ 是复合命题，关联词为“非”、“如果…就…”和“或者”。
⑨ 是简单命题。
⑩ 是复合命题，关联词为“或者”。 ■

为了描述与推理的方便，常用符号来表示命题，称为命题的符号化。通常用小写或大写英文字母表示命题。如，x、X、y、Y、z、Z、a、A、p、P、q、Q…等。一个特定含义的命题的符号表示称为**命题常量**（proposition constant）或**命题常元**。如，用 p 表示命题“李明选修了离散数学”，p 就是一个命题常元。一个没有赋予具体内容的命题的符号表示称为**命题变量**（proposition variable）或**命题变元**。如，用 x 表示没有指定内容的命题，x 就是一个命题变元。

4.1.2 联结词

复合命题是含有关联词和简单陈述句的陈述句。自然语言中关联词的规范化和形式化符号表示称为**逻辑联结词**（logic connevtive），简称为**联结词**。

定义 1 设 p 为任一命题，复合命题“非 p”(或“p 的否定”)称为 p 的**否定式**，记为 $\neg p$，“$\neg$”称为**否定联结词**（negation）。并规定，$\neg p$ 为真当且仅当 p 为假。

例 1 符号化表示如下命题，并给出其真值

① 经过平面上任意两点不能做两条直线。
② 美国的首都不是洛杉矶。
③ 火星上没有生命。

④ 北京不是2008年奥运会举办城市。

⑤ 3不是奇数。

⑥ 李强不是教师。

解 ① 用p表示命题“经过平面上任意两点能做两条直线”，那么，命题“经过平面上任意两点不能做两条直线”可符号表示为$\neg p$。由于命题p取值为假，所以，$\neg p$的真值为真。

② 用q表示命题“美国的首都是洛杉矶”，那么，命题“美国的首都不是洛杉矶”可符号表示为$\neg q$。由于命题q取值为假，所以，命题$\neg q$的真值为真。

③ 用r表示命题“火星上有生命”，那么，命题“火星上没有生命”可符号表示为$\neg r$。由于命题r取值目前还难以给出，所以，命题$\neg r$的真值也难以给出。

④ 用t表示命题“北京是2008年奥运会举办城市”，那么，命题“北京不是2008年奥运会举办城市”可符号表示为$\neg t$。由于命题t取值为真，所以，命题$\neg t$的真值为假。

⑤ 用s表示命题“3是奇数”，那么，命题“3不是奇数”可符号表示为$\neg s$。由于命题s取值为真，所以，命题$\neg s$的真值为假。

⑥ 用w表示命题“李强是教师”，那么，命题“李强不是教师”可符号表示为$\neg w$。如果李强是教师，即，命题w取值为真，那么$\neg w$的真值为假；如果李强不是教师，即，命题w取值为假，那么命题$\neg w$的真值为真。所以，该命题的真值视具体情况而定。 ■

否定联结词是自然语言中“非”、“不”和“没有”等关联词的逻辑抽象。命题p取值为真，那么，其否定式$\neg p$取值为假；反之，命题p取值为假，则其否定式$\neg p$取值为真。

定义2 设p、q为两任意命题，复合命题“p并且q”(或“p和q”)称为p和q的**合取式**，记为$p \wedge q$，“$\wedge$”称为**合取联结词**（conjuction）。并规定，$p \wedge q$为真当且仅当p和q都为真。

例2 符号化表示如下命题，并给出其真值

① 计算机专业学生必须选修高等数学和离散数学。

② 上海既是世博会举办城市又是奥运会举办城市。

③ 地球上有生命，火星上也有生命。

④ 集合$\varnothing$既属于集合$\{\varnothing\}$又包含于集合$\{\varnothing\}$。

⑤ 9是素数且能被2整除。

⑥ 偏序集中的任意两元素具有自反性和对称性。

解 ① 用p和q分别表示命题“计算机专业学生必须选修高等数学”和“计算机专业学生必须选修离散数学”，那么，命题“计算机专业学生必须选修高等数学和离散数学”可符号表示为$p \wedge q$。由于命题p取值为真，命题q取值也为真，所以，命题$p \wedge q$的真值为真。

② 用p和q分别表示命题“上海是世博会举办城市”和“上海是奥运会举办城市”，那么，命题“上海既是世博会举办城市又是奥运会举办城市”可符号表示为$p \wedge q$。由于命题p取值为真，但命题q取值为假，所以，命题$p \wedge q$的真值为假。

③ 用p和q分别表示命题“地球上有生命”和“火星上有生命”，那么，命题“地球上有生命，火星上也有生命”可符号表示为$p \wedge q$。由于命题p取值为真，但命题q取值目前不能给出，所以，命题$p \wedge q$的真值也不能给出。

④ 用p和q分别表示命题“集合$\varnothing$属于集合$\{\varnothing\}$”和“集合$\varnothing$包含于集合$\{\varnothing\}$”，那么，命题“集合$\varnothing$既属于集合$\{\varnothing\}$又包含于集合$\{\varnothing\}$”可符号表示为$p \wedge q$。由于命题p取值为真，命题q取值也为真，所以，命题$p \wedge q$的真值为真。

⑤ 用p和q分别表示命题“9是素数”和“9能被2整除”，那么，命题“9是素数且能被2整除”可符号表示为$p \wedge q$。由于命题p取值为假，命题q取值也为假，所以，

命题 $p\wedge q$ 的真值为假。

⑥ 用 p 和 q 分别表示命题“偏序集中的任意两元素具有自反性”和“偏序集中的任意两元素具有对称性”，那么命题“偏序集中的任意两元素具有自反性和对称性”可符号表示为 $p\wedge q$。由于命题 p 取值为真，但命题 q 取值为假，所以，命题 $p\wedge q$ 的真值为假。 ■

合取联结词是自然语言中“并且”、“和”和“既…又…”等关联词的逻辑抽象。命题 p 和 q 都取值为真，那么，其合取式 $p\wedge q$ 取值为真；命题 p 和 q 至少一个取值为假，则其合取式 $p\wedge q$ 取值为假。

定义 3 设 p、q 为两任意命题，复合命题“p 或 q”称为 p 和 q 的**析取式**，记为 $p\vee q$，“$\vee$”称为**析取联结词**（disjuction）。并规定，$p\vee q$ 为假当且仅当 p 和 q 都为假。

例 3 符号化表示如下命题，并给出其真值

① 离散数学是必修课程或者等腰三角形两内角相等。

② $2+2=4$ 或者 3 是偶数。

③ 4 是素数或者 6 是素数。

④ 2012 年是足球世界杯举办年，或者巴西队获得过足球世界杯冠军。

⑤ 张宏喜欢打篮球或者打网球。

⑥ 今天午餐为牛排饭或者烤鸡饭。

解 ① 用 p 和 q 分别表示命题“离散数学是必修课程”和“等腰三角形两内角相等”，那么，命题“离散数学是必修课程或者等腰三角形两内角相等”可符号表示为 $p\vee q$。由于命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，所以，命题 $p\vee q$ 的真值为真。

② 用 p 和 q 分别表示命题“$2+2=4$”和“3 是偶数”，那么，命题“$2+2=4$ 或者 3 是偶数”可符号表示为 $p\vee q$。由于命题 p 取值为真，尽管命题 q 取值为假，但是，命题 $p\vee q$ 的真值仍为真。

③ 用 p 和 q 分别表示命题“4 是素数”和“6 是素数”，那么，命题“4 是素数或者 6 是素数”可符号表示为 $p\vee q$。由于命题 p 取值为假，命题 q 取值也为假，所以，命题 $p\vee q$ 的真值为假。

④ 用 p 和 q 分别表示命题“2012 年是足球世界杯举办年”和“巴西队获得过足球世界杯冠军”，那么，命题“2012 年是足球世界杯举办年，或者巴西队获得过足球世界杯冠军”可符号表示为 $p\vee q$。由于命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，所以，命题 $p\vee q$ 的真值为真。

⑤ 用 p 和 q 分别表示命题“张宏喜欢打篮球”和“张宏喜欢打网球”，那么，命题“张宏喜欢打篮球或者打网球”可符号表示为 $p\vee q$。如果张宏确实至少喜欢打篮球或网球之一，即，命题 p 和命题 q 有一个取值为真，那么，命题 $p\vee q$ 的真值为真；如果张宏确实既不喜欢打篮球也不喜欢打网球，即，命题 p 和命题 q 取值都为假，那么，命题 $p\vee q$ 的真值为假。所以，该命题的真值视具体情况而定。

⑥ 用 p 和 q 分别表示命题“今天午餐为牛排饭”和“今天午餐为烤鸡饭”，但是，“今天午餐为牛排饭或者烤鸡饭”不能符号表示为 $p\vee q$。因为，该命题描述的意思是：午餐可以选择牛排饭或者烤鸡饭，但不能既选牛排饭又选烤鸡饭。所以，应该符号表示为$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$。如果午餐确实为牛排饭或烤鸡饭，即，命题 p 和命题 q 有一个取值为真，那么，命题$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$的真值为真；如果午餐确实既不是牛排饭也不是烤鸡饭，即，命题 p 和命题 q 取值都为假，那么，命题$(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$的真值为假。所以，该命题的真值视具体情况而定。 ■

析取联结词是自然语言中“或”和“或者”等关联词的逻辑抽象。但是，值得注意的是，自然语言中的“或”可细分为：“排它性或”和“非排它性或”。析取联结词则是对应的“非排它性或”，即，如果命题 p 和 q 至少有一个取值为真，那么其析取式 $p\vee q$ 取值为真；如果

命题 p 和 q 取值都为假，则其析取式 $p\vee q$ 取值为假。

定义 4 设 p、q 为两任意命题，复合命题“如果 p，则 q”称为 p 和 q 的**蕴含式**，记为 $p\to q$，“$\to$”称为**蕴含联结词**（implication）。p 称为蕴含式的**前件**，q 称为蕴含式的**后件**。并规定，$p\to q$ 为假当且仅当 p 为真且 q 为假。

例 4 符号化表示如下命题，并给出其真值

① 如果 2 是偶数，那么 4 是偶数。

② 如果明天不下雨，我就去踢足球。

③ 如果 6 是素数，那么 3 是素数。

④ 如果任意集合是空集的子集，那么空集中至少包含一个元素。

⑤ 因为鸽子是鸟类动物，所以鸽子会飞。

⑥ 除非雪是黑的，否则 7 是偶数。

⑦ 只有同学通过英语六级考试，才能免修英语。

⑧ 除非公民年满 18 周岁，否则不能参加选举。

解 ① 用 p 和 q 分别表示命题“2 是偶数”和“4 是偶数”， 那么，命题“如果 2 是偶数，那么 4 是偶数”可符号表示为 $p\to q$。由于命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，所以，命题 $p\to q$ 的真值为真。

② 用 p 和 q 分别表示命题“明天下雨”和“我去踢足球”， 那么，命题“如果明天不下雨，我就去踢足球”可符号表示为$\neg p\to q$。如果明天确实不下雨，我明天确实去踢足球，即，命题$\neg p$ 取值为真，命题 q 取值也为真，那么命题$\neg p\to q$ 的真值为真；如果明天确实不下雨，我明天确实没去踢足球，即，命题$\neg p$ 取值为真，命题 q 取值为假，那么命题$\neg p\to q$ 的真值为假；如果明天确实下雨，我明天确实去踢足球，即，命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，那么命题$\neg p\to q$ 的真值为真；如果明天确实下雨，我明天确实没去踢足球，即，命题 p 取值为真，命题 q 取值为假，那么命题$\neg p\to q$ 的真值为真。所以，命题$\neg p\to q$ 的真值视具体情况而定。

③ 用 p 和 q 分别表示命题“6 是素数”和“3 是素数。”， 那么，命题“如果 6 是素数，那么 3 是素数。”可符号表示为 $p\to q$。由于命题 p 取值为假，命题 q 取值为真，所以，命题 $p\to q$ 的真值为真。

④ 用 p 和 q 分别表示命题“任意集合是空集的子集”和“空集中至少包含一个元素”， 那么，命题“如果任意集合是空集的子集，那么空集中至少包含一个元素”可符号表示为 $p\to q$。由于命题 p 取值为假，命题 q 取值也为假，所以，命题 $p\to q$ 的真值为真。

⑤ 用 p 和 q 分别表示命题“鸽子是鸟类动物”和“鸽子会飞”， 那么，命题“因为鸽子是鸟类动物，所以鸽子会飞”可符号表示为 $p\to q$。由于命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，所以，命题 $p\to q$ 的真值为真。

⑥ 用 p 和 q 分别表示命题“雪是黑的”和“7 是偶数”， 那么，命题“除非雪是黑的，否则 7 是偶数”可符号表示为$\neg q\to p$。由于命题 q 取值为假，命题 p 取值也为假，所以，命题$\neg q\to p$ 的真值为假。

⑦ 用 p 和 q 分别表示命题“同学通过英语六级考试”和“同学修英语”， 那么，命题“只有同学通过英语六级考试，才能免修英语”可符号表示为$\neg q\to p$。命题$\neg q\to p$ 的真值要依据同学的具体英语学习情况才能确定。

⑧ 用 p 和 q 分别表示命题“公民年满 18 周岁”和“公民能参加选举”， 那么，命题“除非年满 18 周岁，否则不能参加选举”可符号表示为$\neg p\to\neg q$ 或 $q\to p$。不同的公民年龄有所不同，所以，命题$\neg p\to\neg q$ 的真值无法确定。 ■

蕴含联结词是自然语言中“因为…所以…”、“如果…就…”、“只要…就…”、“只有…

才…”、“除非…否则…”、“除非…才…”和“仅当”等关联词的逻辑抽象。

值得注意的是，蕴含式“$p \to q$”表示的是，q 是 p 的必要条件，或者，p 是 q 的充分条件。在列写语句的蕴含式时，要清晰分析出蕴含联结词的前件和后件所对应的自然语言的句子成份。在自然语言中，“q 是 p 的必要条件”有多种表述方式，例如：“因为 p 所以 q”、“只要 p 就 q”、“p 仅当 q”、“只有 q 才 p”、“除非 q 才 p”、“除非 q 否则非 p”等等。

此外，在自然语言中，如果前件为假，不管后件或结论为真或假，整个语句的意义往往无法判断。但在数理逻辑中，当前件 p 为假时，不管后件 q 的真假如何，蕴含式 $p \to q$ 都为真。同时，自然语言中的蕴含式的前件（或条件）和后件（或结论）之间必含有某种因果联系，但在数理逻辑中可以允许两者无必然因果关系，即，前件和后件的内容并不要求存在直接的联系。

定义 5　设 p、q 为两任意命题，复合命题“p 当且仅当 q”称为 p 和 q 的**等价式**，记为 $p \leftrightarrow q$，“$\leftrightarrow$”称为**等价联结词**（equivalence）。并规定，$p \leftrightarrow q$ 为真当且仅当 p 和 q 同时为真或同时为假。

例 5　符号化表示如下命题，并给出其真值

① 两个三角形全等当且仅当三角形的三条对应边全部相等。

② 如果你每天上网，就能了解国内外重要事件；反之亦然。

③ 只有当一个数仅能被 1 和自身整除，该数才是素数。

④ 如果食品没有过期，就一定可以食用；反之亦然。

⑤ 集合 A 和集合 B 相等当且仅当 $A \subseteq B$ 和 $B \supseteq A$。

⑥ 通过三个点可以做一个平面当且仅当 3 是偶数。

解　① 用 p 和 q 分别表示命题“两个三角形全等”和“两个三角形的三条对应边全部相等”，那么，命题“两个三角形全等当且仅当三角形的三条对应边全部相等”可符号表示为 $p \leftrightarrow q$。如果两个三角形确实全等，那么三角形的三条对应边必然完全相等，即，命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，那么命题 $p \to q$ 的真值为真；如果两个三角形的三条对应边完全相等，则这两个三角形确实全等，即，命题 q 取值为真，命题 p 取值也为真，那么命题 $q \to p$ 的真值为真。所以，命题 $p \leftrightarrow q$ 的真值为真。

② 用 p 和 q 分别表示命题“你每天上网”和“你能了解国内外重要事件”，那么，命题“如果你每天上网，就能了解国内外重要事件；反之亦然”可符号表示为 $p \leftrightarrow q$。如果你确实每天上网，你确实能了解国内外重要事件，即，命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，那么命题 $p \to q$ 的真值为真；如果你能了解国内外重要事件，则你每天可以上网，也可以不上网，通过其它媒体了解国内外重要事件，即，命题 q 取值为真，命题 p 取值可能为真，也可能为假，那么命题 $q \to p$ 的真值可能为真，也可能为假。所以，命题 $p \leftrightarrow q$ 的真值无法确定。

③ 用 p 和 q 分别表示命题“一个数仅能被 1 和自身整除”和“一个数是素数”，那么，命题“只有当一个数仅能被 1 和自身整除，该数才是素数”可符号表示为 $p \leftrightarrow q$。如果一个数确实仅能被 1 和自身整除，这个数一定是素数，即，命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，那么命题 $p \to q$ 的真值为真；如果一个数是素数，它仅能被 1 和自身整除，即，命题 q 取值为真，命题 p 取值也为真，因此命题 $q \to p$ 的真值为真。所以，命题 $p \leftrightarrow q$ 的真值为真。

④ 用 p 和 q 分别表示命题“食品过期”和“食品可以食用”，那么，命题“如果食品没有过期，就一定可以食用；反之亦然”可符号表示为 $\neg p \leftrightarrow q$。食品可否食用不仅仅与食品的期限有关，还与其它因素有关。所以，命题 $\neg p \leftrightarrow q$ 的真值视具体情况而定。

⑤ 用 p 和 q 分别表示命题“集合 A 和集合 B 相等”和“$A \subseteq B$ 和 $B \supseteq A$”，那么，命题“集合 A 和集合 B 相等当且仅当 $A \subseteq B$ 和 $B \supseteq A$”可符号表示为 $p \leftrightarrow q$。如果集合 A 和集

合 B 相等，则 $A \subseteq B$ 且 $B \supseteq A$ 成立，即，命题 p 取值为真，命题 q 取值也为真，那么命题 $p \to q$ 的真值为真；如果 $A \subseteq B$ 和 $B \supseteq A$ 成立，则集合 A 和集合 B 相等，即，命题 q 取值为真，命题 p 取值也为真，那么，命题 $q \to p$ 的真值为真。所以，命题 $p \leftrightarrow q$ 的真值为真。

⑥ 用 p 和 q 分别表示命题“通过三个点可以做一个平面”和“3 是偶数”， 那么，命题“通过三个点可以做一个平面当且仅当 3 是偶数”可符号表示为 $p \leftrightarrow q$。由于命题 p 取值为真，命题 q 取值为假，所以，命题 $p \leftrightarrow q$ 的真值为假。 ■

等价联结词是自然语言中“充分必要条件”、“如果…就…，反之亦然”和“当且仅当”等关联词的逻辑抽象。值得注意的是，在自然语言中，有些类似于“只有…才…”、“除非…才…”等形式的语句，也需要用等价式来表示。关键是要分析判断自然语言中的语句成份是不是具有充分必要性。此外，在自然语言中，等价式中的两个成份之间必含有某种内在联系，但在数理逻辑中可以允许两者之间无直接的联系。

§4.2 命题逻辑公式

4.2.1 命题公式及其解释

自然语言形式表示的任何可判断真假的陈述句都可以分解为简单陈述句和关联词的连接形式，进而通过命题变元、命题常元以及关联词实现形式化符号表示。由命题变元符号、命题常元符号和联结词符号等组成的用以表示复杂命题的符号串，称为**命题逻辑公式**（propositional logic formula），简称为**命题公式**（propositional formula）。下面给出命题公式的严格数学定义。

定义 1 命题变元、命题常元和联结词按照一定规则组成的，用以表示复杂命题的符号串，称为**命题合适公式**（well-formed propositional formula），简称为**命题公式**。命题公式按如下规则生成：

① 单个命题常元或命题变元是命题公式；

② 如果 A 是命题公式，则$(\neg A)$是命题公式；

③ 如果 A 和 B 是命题公式，则$(A \vee B)$、$(A \wedge B)$、$(A \to B)$、$(A \leftrightarrow B)$是命题公式；

④ 有限次使用①、②和③后所得到的符号串才是命题公式。

例如，字符串$\neg q$、$p \vee q$、$(p \wedge q) \vee s$、$(p \wedge q) \to (p \to s)$、$((p \wedge q) \vee s) \to (p \leftrightarrow q)$都满足命题公式定义 1 中的规则，所以，它们都是命题公式；字符串$(q \neg p \vee q$、$(\to p \wedge q) \vee s$、$(p \wedge q) \to (p \to s \vee)$、$((p \wedge q) \neg \vee s)\ \to (p \leftrightarrow q)$都不满足命题公式定义 1 中的规则，所以，这些字符串都不是命题公式。

一个命题公式中，命题变元、命题常元以及联结词可以多次出现。命题公式 A 中出现的所有命题变元，称为命题公式 A 含有的命题变元。命题公式 A 中出现的所有命题常元，称为命题公式 A 含有的命题常元。命题公式 A 中出现的所有联结词，称为命题公式 A 含有的联结词。含有 n 个命题变元 p_1、p_2、$\ldots p_n$ 的命题公式 A，可以记为：$A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$。含有一个联结词的命题公式称为基本复合命题公式，简称为**基本命题公式**（fundamental proposition formula），所表示的复合命题，称为**基本复合命题**（fundamental proposition）。含有两个或两个以上联结词的命题公式称为**复杂命题公式**（complex proposition formula），所表示的复合命题，称为**复杂复合命题**，简称为**复杂命题**（complex proposition）。

为了简化命题公式的表示，通常对命题公式中的联接词规定如下优先级：$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\to$、$\leftrightarrow$依次优先级降低。这样，我们用命题公式表示命题时，就可以省略一些其中的圆括号。

例如，命题公式$(p \vee q)$、$((p \wedge q) \vee (s \wedge q)) \wedge t$、$(p \wedge q) \to (p \to s)$和$((p \to q) \vee s) \to (p \leftrightarrow q)$中可以略去圆括号，得到相应的命题公式 $p \vee q$、$(p \wedge q \vee s \wedge q) \wedge t$、$p \wedge q \to (p \to s)$和$(p \to q) \vee s \to (p \leftrightarrow q)$。

再如，命题公式$(p\wedge q\vee s\wedge q)\wedge t$和命题$p\wedge q\vee s\wedge q\wedge t$表示的含义不同。命题公式$p\wedge q\to p\to s$和命题公式 $p\wedge(q\to p)\to s$、$p\wedge(q\to p\to s)$的含义都不同。命题公式$(p\to q)\vee s\to(p\leftrightarrow q)$和命题公式 $p\to q\vee s\to(p\leftrightarrow q)$、$p\to q\vee s\to p\leftrightarrow q$ 的含义都不同。

例 1 用命题公式表示下列语句

① 小李现在在教室或图书馆。

② 程序运行停机的原因在于语法错误或者输入参数不合理。

③ 除非他以书面或短信方式正式通知我，否则我不参加明天的婚礼。

④ 虽然每天课很紧，但我还是坚持跑步。

⑤ 选离散数学或数理方程中的一门作为选修课。

⑥ 不经一事，不长一智。

⑦ 如果我上街，我就去书店看看，除非我很累。

⑧ 如果今天下午下雨，我就去看 NBA，否则，我去打网球。

⑨ 只要明天不是雨夹雪，我就去锻炼身体。

⑩ 明天我将风雨无阻地去上班。

解 ① 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：小李现在在教室；q：小李现在在图书馆。

那么，该语句可有两种表示方式。其一，$p\vee q$，这是“非排它性或”，表示小李也可能在操场、也可能在商场等其它场所；其二，$(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$，这是“排它性或”，表示小李只可能在教室或图书馆。

② 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：程序运行停机；q：程序有语法错误；r：程序输入参数合理。

那么，该语句可表示为：$q\vee\neg r\to p$。

③ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：他以书面方式正式通知我；

q：他以短信方式正式通知我；

r：我参加明天的婚礼。

那么，该语句可表示为：$\neg(p\vee q)\to\neg r$ 或者 $r\to(p\vee q)$。

④ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：每天课很紧；q：每天坚持跑步。

那么，该语句可表示为：$p\wedge q$。

⑤ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：选离散数学作为选修课；q：选数理方程作为选修课。

那么，该语句可表示为：$(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)$。

⑥ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：经一事；q：长一智。

那么，该语句可表示为：$\neg p\to\neg q$。

⑦ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：我上街；q：我去书店看看；r：我很累。

那么，该语句可表示为： $\neg r\to(p\to q)$。

⑧ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：今天下午下雨；q：我去看 NBA；r：我打网球。

那么，该语句可表示为：$(p\to(q\wedge\neg r))\wedge(\neg p\to(\neg q\wedge r))$。

⑨ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：明天下雨；q：明天下雪；r：我去锻炼身体。

那么，该语句可表示为：$\neg(p\wedge q)\to r$。

⑩ 从语句中抽取出如下简单陈述句：

p：明天刮风；q：明天下雨；r：我去上班。

要表述该语句，首先要恰当地表述风雨无阻。风雨无阻分四种情况：既刮风又下雨，只刮风不下雨，不刮风只下雨，既不刮风又不下雨。由于“我去上班”与天气情况同时发生，所以，该语句可表示为：$((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\wedge r$。 ■

定义 2 对出现在命题公式 A 中的命题变元 p_1、p_2、…p_n 指定一组真值，称为对命题公式 A 的一个**赋值**（evaluation）或**解释**（explanation），记为 I。含有 n 个命题变元的命题公式的一个赋值，可以表示为 n 维 0-1 向量（$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$），其中 σ_i（$i = 1, 2, \ldots, n$）是命题变元 p_i 所对应的真值。若指定的一组真值使命题公式 A 的真值为真，就称这组真值为命题公式 A 的**成真赋值**（true evaluation）；若指定的一组真值使命题公式 A 的真值为假，就称该组真值为命题公式 A 的**成假赋值**（false evaluation）。

例 2 给出如下命题公式的所有赋值，并判断哪些是成真赋值？哪些是成假赋值？

① $\neg r\to(p\to q)$ ② $\neg(p\wedge q)\to r$

③ $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ ④ $\neg p\to\neg q$

解 ① 命题公式 $\neg r\to(p\to q)$ 有如下 8 组赋值：

p =1、q=1 和 r=1，表示为(1, 1, 1)； p =1、q=1 和 r=0，表示为(1, 1, 0)；

p =1、q=0 和 r=1，表示为(1, 0, 1)； p =1、q=0 和 r=0，表示为(1, 0, 0)；

p =0、q=1 和 r=1，表示为(0, 1, 1)； p =0、q=1 和 r=0，表示为(0, 1, 0)；

p =0、q=0 和 r=1，表示为(0, 0, 1)； p =0、q=0 和 r=0，表示为(0, 0, 0)。

成真赋值有：(1, 1, 1)、(1, 0, 1)、(0, 1, 1)、(0, 0, 1)、(1, 1, 0)、(0, 1, 0)、(0, 0, 0)。

成假赋值有：(1, 0, 0)。

② 类似于①，命题公式 $\neg(p\wedge q)\to r$ 有如下 8 组赋值：

(1, 1, 1)、(1, 1, 0)、(1, 0, 1)、(1, 0, 0)、(0, 1, 1)、(0, 1, 0)、(0, 0, 1)、(0, 0, 0)。

成真赋值有：(1, 1, 0)、(1, 1, 1)、(1, 0, 1)、(0, 1, 1)、(0, 0, 1)。

成假赋值有：(0, 1, 0)、(0, 0, 0)、(1, 0, 0)。

③ 类似于①，命题公式 $(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ 有如下 8 组赋值：

(1, 1, 1)、(1, 1, 0)、(1, 0, 1)、(1, 0, 0)、(0, 1, 1)、(0, 1, 0)、(0, 0, 1)、(0, 0, 0)。

成真赋值有：(1, 1, 0)、(1, 1, 1)、(0, 1, 1)、(0, 0, 1)。

成假赋值有：(1, 0, 0)、(1, 0, 1)、(0, 1, 0)、(0, 0, 0)。

④ 命题公式 $\neg p\to\neg q$ 有如下 4 组赋值：

p =1 和 q=1，表示为(1, 1)； p =1 和 q=0，表示为(1, 0)；

p =0 和 q=1，表示为(0, 1)； p =0 和 q=0，表示为(0, 0)。

成真赋值有：(0, 0)、(1, 0)、(1, 1)。

成假赋值有：(0, 1)。 ■

从上述例子可以看出，对于含有多个命题变元的命题公式，赋值的数目取决于命题公式中命题变元的数目。含有 n 个命题变元的命题公式，所有可能赋值的数目为 2^n 个。为了直观地表示一个命题公式的所有可能解释与公式在各解释下的真值，引出如下定义。

定义 3 命题公式在其所有可能解释下所取真值的表格形式表示，称为该命题公式的**真值表**（truth table）。

表 4.1 给出了几个基本命题公式的真值表，通过该真值表可以直观地看出各个联结词的逻辑含义。

表 4.1

p	q	$\neg p$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\to q$	$p\leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

例 3 给出例 2 中命题公式的真值表。

解 表 4.2、4.3、4.4 和 4.5 分别给出了各命题公式的真值表。 ■

表 4.2

p	q	r	$\neg r$	$p\to q$	$\neg r\to(p\to q)$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1

表 4.3

p	q	r	$p\wedge q$	$\neg(p\wedge q)$	$\neg(p\wedge q)\to r$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0

表 4.4

p	q	r	$\neg p$	$p\wedge q$	$\neg p\wedge r$	$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0

表 4.5

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p\to\neg q$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

例 4 给出如下命题公式的真值表，并指出各命题公式的成真赋值和成假赋值。

① $(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$ ② $p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$

③ $(p\wedge q)\wedge r\leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$ ④ $(p\wedge q)\vee r\leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$

⑤ $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow\neg(p\to q)\vee\neg(q\to p)$ ⑥ $(p\to\neg q)\vee\neg q$

解 表 4.6、4.7、4.8、4.9、4.10 和 4.11 分别给出了各命题公式的真值表。

表 4.6

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$	$(p\vee q)\leftrightarrow(q\vee p)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

表 4.7

p	q	$p\vee q$	$p\wedge(p\vee q)$	$p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	1

表 4.8

p	q	r	$p\wedge q$	$q\wedge r$	$(p\wedge q)\wedge r$	$p\wedge(q\wedge r)$	$(p\wedge q)\wedge r\leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

表 4.9

p	q	r	$p\wedge q$	$p\vee r$	$q\vee r$	$(p\wedge q)\vee r$	$(p\vee r)\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee r\leftrightarrow(p\vee r)\wedge(q\vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

表 4.10

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\to q$	$q\to p$	$\neg(p\to q)\vee\neg(q\to p)$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow\neg(p\to q)\vee\neg(q\to p)$
1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0

表 4.11

p	q	$\neg q$	$p\to\neg q$	$(p\to\neg q)\vee\neg q$
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

从真值表中可以看出：命题公式①、②、③和④的所有赋值都为成真赋值；命题公式⑤的所有赋值都为成假赋值；命题公式⑥的成真赋值为(0, 0)、(1, 0)和(0, 1)，成假赋值为(1, 1)。 ■

4.2.2 命题公式的分类

定义 1 如果命题公式 A 在所有解释下的真值都为真，则称 A 为**永真命题公式**，简称为**永真公式**（always true formula）或**重言式**（tautology），用 1 表示。

例 1 判断下列命题公式是否为重言式？

① $\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$

② $\neg p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow q$

③ $(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\to q)\wedge(q\to p)$

④ $(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$

解 列写各命题公式的真值表，如表 4.12、4.13、4.14 和 4.15 所示。从真值表可以看出：命题公式①、③和④的所有可能的解释下的真值都是真，所以，它们是重言式；命题公式②在解释(1, 1)下的真值为假，所以，它不是重言式。 ■

表 4.12

p	q	$p\wedge q$	$\neg p\vee\neg q$	$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

表 4.13

p	q	$p\vee q$	$\neg p\wedge(p\vee q)$	$\neg p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow q$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

表 4.14

p	q	$p\leftrightarrow q$	$p\to q$	$q\to p$	$(p\to q)\wedge(q\to p)$	$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\to q)\wedge(q\to p)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

表 4.15

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

定义 2 如果至少存在一个解释使命题公式 A 的真值为真，则称命题公式 A 为**可满足命题公式**，简称为**可满足公式**（satisfable formula）。

例 2 判断下列命题公式，哪些是可满足公式？

① $(p\to q)\wedge(q\to r)\leftrightarrow(p\to r)$

② $(p\vee q)\vee(\neg p\wedge q)$

③ $\neg q\wedge(p\to q)\to\neg q$

④ $((p\vee r)\to(q\vee r))\to(p\to q)$

解 列写各命题公式的真值表，如表 4.16、4.17、4.18 和 4.19 所示。从真值表可以看出：命题公式①在解释（1, 1, 1）、（1, 1, 0）、（1, 0, 0）、（0, 1, 1）、（0, 0, 1）和（0, 0, 0）下的真值为真；命题公式②在解释（1, 1）、（1, 0）和（0, 1）下的真值都是真；命题公式③的所有可能的解释下的真值都是真；命题公式④在除解释（1, 0, 1）外的所有解释下的真值为真，所以，它们都是可满足公式。 ■

表 4.16

p	q	r	$p\to q$	$q\to r$	$p\to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$(p\to q)\wedge(q\to r)\leftrightarrow(p\to r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

表 4.17

p	q	$p\vee q$	$\neg p\wedge q$	$(p\vee q)\vee(\neg p\wedge q)$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

表 4.18

p	q	$p\to q$	$\neg q\wedge(p\to q)$	$\neg q\wedge(p\to q)\to\neg q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

表 4.19

p	q	r	$p\to q$	$p\vee r$	$q\vee r$	$(p\vee r)\to(q\vee r)$	$((p\vee r)\to(q\vee r))\to(p\to q)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1

定义 3 如果命题公式 A 在所有解释下的真值都为假，则称命题公式 A 为**永假命题公式**，简称为**永假公式**或**矛盾式**（contradiction）或**不可满足公式**（unsatisfable formula），用 0 表示。

例 3 分析下列命题公式的类型

① $(p\wedge(p\to q))\wedge\neg p$

② $p\wedge(p\to q)\to p$

③ $(\neg p\wedge(p\vee q))\vee q$

④ $(q\vee\neg(p\to q))\wedge\neg q$

解 列写各命题公式的真值表，如表 4.20、4.21、4.22 和 4.23 所示。

表 4.20

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$	$\boldsymbol{(p\wedge(p\to q))\wedge\neg p}$
1	1	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

表 4.21

p	q	$p\to q$	$p\wedge(p\to q)$	$\boldsymbol{p\wedge(p\to q)\to p}$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

表 4.22

p	q	$p\vee q$	$\neg p\wedge(p\vee q)$	$\boldsymbol{(\neg p\wedge(p\vee q))\vee q}$
1	1	1	0	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	1
0	0	0	0	0

表 4.23

p	q	$p\to q$	$q\vee\neg(p\to q)$	$\boldsymbol{(q\vee\neg(p\to q))\wedge\neg q}$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

从真值表可以看出：命题公式①在所有可能的解释下的真值都是假，所以，命题公式①是矛盾式；命题公式②在所有可能解释下的真值都是真，所以，命题公式②是重言式；命题公式③在解释(1, 1)和(0, 1)下的真值为真，在解释(1, 0)和(0, 0)下的真值为假，所以，命题公式③是可满足公式；命题公式④在解释(1, 0)下的真值为真，在其余解释下的真值为假，所以，命题公式④是可满足公式。 ■

4.2.3 命题公式的等值式

含有相同的命题变元的命题公式，它们的解释是相同的，但是，它们在同一解释下的真值不一定相同。如果在所有可能的解释下，两个含有相同命题变元的命题公式的真值都相同，那么，从逻辑解释角度，它们所表述的含义是相同的，或者说是逻辑等价的。

定义 1 如果命题公式 A 和 B 的等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称命题公式 A 与 B 是**逻辑等值的**（equivalent），或者是**命题公式的等值式**，简称为**等值式**（equivalent formula），记为 $A\Leftrightarrow B$ 或 $A=B$。

需要注意的是，上述定义中的⇔不是逻辑联结词，$A\Leftrightarrow B$ 也不是命题公式，它只是命题公式 A 与 B 逻辑等值时的一种简单记法，不要对⇔与↔产生混淆。

对于任意命题公式 A 和 B，我们可以通过列写出等价式 $A\leftrightarrow B$ 的真值表，分析 $A\leftrightarrow B$ 是否为重言式，来确定命题公式 A 和 B 是否为等值式。

例 1 分析下列命题公式是否为等值式？

① $p\to q$ 和 $\neg q\to\neg p$　　② $p\to q$ 和 $\neg p\vee q$

③ $(p\vee q)\wedge r$ 和 $(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$　　④ $\neg(p\wedge q)$ 和 $\neg p\vee\neg q$

⑤ $p\leftrightarrow q$ 和 $\neg p\leftrightarrow\neg q$　　⑥ $(p\to q)\wedge(p\to\neg q)$ 和 $\neg p$

解 根据等值式的定义，列写出各命题公式的真值表，如表 4.24、4.25、4.26、4.27、4.28 和 4.29 所示。从真值表可以看出：这些命题公式在所有可能的解释下的真值都是真，所以，它们都是等值式。

■

表 4.24

p	q	$p\to q$	$\neg q\to\neg p$	$\boldsymbol{(p\to q)\leftrightarrow(\neg q\to\neg p)}$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

表 4.25

p	q	$p\to q$	$\neg p\vee q$	$\boldsymbol{(p\to q)\leftrightarrow\neg p\vee q}$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

表 4.26

p	q	r	$p\vee q$	$p\wedge r$	$q\wedge r$	$(p\vee q)\wedge r$	$(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$	$\boldsymbol{(p\vee q)\wedge r\leftrightarrow(p\wedge r)\vee(q\wedge r)}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

表 4.27

p	q	$p\wedge q$	$\neg p\vee\neg q$	$\boldsymbol{\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q}$
1	1	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

表 4.28

p	q	$p\leftrightarrow q$	$\neg q\leftrightarrow\neg p$	$\boldsymbol{(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\leftrightarrow\neg p)}$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	1

表 4.29

p	q	$\neg p$	$p\rightarrow q$	$p\rightarrow\neg q$	$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)$	$\boldsymbol{(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)\leftrightarrow\neg p}$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

在命题逻辑中，命题公式的等值式对于命题逻辑演算有非常重要的作用。在含有命题公式 A 的命题公式$\Phi(A)$中，将所有命题公式 A 的出现用命题公式 B 来替换，得到新的命题公式$\Phi(B)$，如果命题公式 A 和命题公式 B 是等值式，那么，$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$。在命题逻辑中，由已知的等值式，通过等值式替换，推演出另外一些等值式的过程称为**命题逻辑的等值演算**，简称为**等值演算**（equivalent calculus）。

下面是命题逻辑中的一些基本等值式：

交换律 $A\vee B\Leftrightarrow B\vee A$

$A\wedge B\Leftrightarrow B\wedge A$

结合律 $(A\vee B)\vee C\Leftrightarrow A\vee(B\vee C)$

$(A\wedge B)\wedge C\Leftrightarrow A\wedge(B\wedge C)$

分配律 $(A\vee B)\wedge C\Leftrightarrow(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$

$(A\wedge B)\vee C\Leftrightarrow(A\vee C)\wedge(B\vee C)$

吸收律 $A\wedge(A\vee B)\Leftrightarrow A$

$A\vee(A\wedge B)\Leftrightarrow A$

幂等律 $A\vee A\Leftrightarrow A$

$A\wedge A\Leftrightarrow A$

同一律 $A\vee 0\Leftrightarrow A$

$A\wedge 1\Leftrightarrow A$

零律 $A\vee 1\Leftrightarrow 1$

$A\wedge 0\Leftrightarrow 0$

排中律 $A\vee\neg A\Leftrightarrow 1$

矛盾律 $A\wedge\neg A\Leftrightarrow 0$

双重否定律 $A\Leftrightarrow\neg\neg A$

德摩根律 $\neg(A\vee B)\Leftrightarrow\neg A\wedge\neg B$

$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow\neg A\vee\neg B$

蕴含等值式　$A\to B \Leftrightarrow \neg A\vee B$

等价等值式　$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\to B)\wedge(B\to A)$

假言易位　$A\to B \Leftrightarrow \neg B\to\neg A$

等价否定等价式　$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A\leftrightarrow\neg B$

归谬论　$(A\to B)\wedge(A\to\neg B) \Leftrightarrow \neg A$

例 2　证明下列命题公式的等值式

① $(p\to q)\to r \Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$　② $(p\vee q)\to r \Leftrightarrow (p\to r)\wedge(q\to r)$

③ $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$　④ $(\neg p\wedge(\neg q\wedge r))\vee((q\wedge r)\vee(p\wedge r))\Leftrightarrow r$

证明　① $(p\to q)\to r$

$\Leftrightarrow \neg(p\to q)\vee r$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q)\vee r$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r$　（双重否定律）

$\Leftrightarrow (p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$　（分配律）

② $(p\vee q)\to r$

$\Leftrightarrow \neg(p\vee q)\vee r$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee r$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$　（分配律）

$\Leftrightarrow (p\to r)\wedge(q\to r)$　（蕴含等值式）

③ $p\to(q\to r)$

$\Leftrightarrow \neg p\vee(q\to r)$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow \neg p\vee(\neg q\vee r)$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)\vee r$　（结合律）

$\Leftrightarrow \neg (p\wedge q)\vee r$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$　（蕴含等值式）

④ $(\neg p\wedge(\neg q\wedge r))\vee((q\wedge r)\vee(p\wedge r))$

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge r)\vee((q\vee p)\wedge r)$　（结合律、分配律）

$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\wedge r)\vee((q\vee p)\wedge r)$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (\neg(p\vee q)\vee(q\vee p))\wedge r$　（分配律）

$\Leftrightarrow 1\wedge r$　（排中律）

$\Leftrightarrow r$　（同一律）　■

在前面分析命题公式的真值情况以及判断命题公式的类型时，我们都是采用的真值表方法。事实上，如果命题公式含有的命题变元较多时，列写真值表是一件非常繁琐的事情。我们也可以通过命题逻辑的等值演算来判断命题公式的类型。

例 3　用等值演算判断下列命题公式的类型

① $(p\to q)\wedge p\to q$　② $\neg(p\to(q\vee p))\wedge r$　③ $p\wedge(((p\vee q)\wedge\neg p)\to q)$

解　① $(p\to q)\wedge p\to q$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge p\to q$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge p)\vee q$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee\neg p)\vee q$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\vee(\neg p\vee q)$　（结合律）

$\Leftrightarrow 1$　（排中律）

所以，命题公式$(p\to q)\wedge p\to q$ 是重言式。

② $\neg(p\to(q\vee p))\wedge r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee (q \vee p)) \wedge r$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg\neg p \wedge \neg(q \vee p)) \wedge r$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow (p \wedge (\neg q \wedge \neg p)) \wedge r$ （双重否定律、德摩根律）

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \wedge \neg q) \wedge r$ （交换律、结合律）

$\Leftrightarrow (0 \wedge \neg q) \wedge r$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow 0 \wedge r$ （零律）

$\Leftrightarrow 0$ （零律）

所以，命题公式$\neg(p \to (q \vee p) \wedge r$ 是矛盾式。

③ $p \wedge (((p \vee q) \wedge \neg p) \to q)$

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg((p \vee q) \wedge \neg p) \vee q)$ （蕴含等值式）

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg((p \wedge \neg p) \vee (\neg p \wedge q)) \vee q)$ （分配律）

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg(0 \vee (\neg p \wedge q)) \vee q)$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg(\neg p \wedge q) \vee q)$ （同一律）

$\Leftrightarrow p \wedge ((p \vee \neg q) \vee q)$ （德摩根律）

$\Leftrightarrow p \wedge (p \vee (\neg q \vee q))$ （结合律）

$\Leftrightarrow p \wedge (p \vee 1)$ （排中律）

$\Leftrightarrow p \wedge 1$ （零律）

$\Leftrightarrow p$ （同一律）

所以，命题公式 $p \wedge (((p \vee q) \wedge \neg p) \to q)$既不是重言式，也不是矛盾式。它是一个可满足公式。■

4.2.4 命题公式的范式

从命题公式的等值式角度，一个命题公式可以有不同的表现形式，不同的表现形式可以显示不同的特征，而这些特征可以体现出从某一角度考虑问题的极为重要的性质。命题公式的规定标准形式，称为**命题公式的范式**，简称为**命题范式**（proposition normal form）或**范式**（normal form）。命题范式给不同表现形式的命题公式提供了统一的表达形式。同时，命题范式对于命题逻辑演算有着非常重要的作用。

定义 1 有限个命题变元或者命题变元的否定的析取构成的命题公式称为**命题公式的析取式**，简称为**析取式**或**析取项**（disjunctive term）。有限个命题变元或者命题变元的否定的合取构成的命题公式称为**命题公式的合取式**，简称为**合取式**或**合取项**（conjunctive term）。

例如，命题公式 $p \vee q$、$p \vee \neg q$、$\neg p \vee \neg q \vee r$、$p \vee \neg q \vee \neg r$、$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 都是析取项；命题公式 $p \wedge q$、$p \wedge \neg q$、$\neg p \wedge \neg q \wedge r$、$p \wedge \neg q \wedge \neg r$、$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$ 都是合取项；命题公式 p、$\neg q$ 既是析取项，也是合取项。

定义 2 有限个合取项的析取构成的命题公式称为**命题公式的析取范式**，简称为**析取范式**（disjunctive normal form）。有限个析取项的合取构成的命题公式称为**命题公式的合取范式**，简称为**合取范式**（conjunctive normal form）。命题公式的析取范式和合取范式统称为**命题公式的范式**，简称为**范式**（normal form）。

例如，命题公式 $p \vee (q \wedge p) \vee \neg q$、$(\neg p \wedge \neg q) \vee r$、$(p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee p$、$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg r \wedge p) \vee (p \wedge \neg q)$ 都是析取范式；命题公式$(p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$、$(\neg p \vee \neg q) \wedge r$、$(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee p)$、$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (p \vee \neg q)$都是合取范式；命题公式 $p \wedge q$、$p \wedge \neg q$、$\neg p \wedge \neg q \wedge r$、$p \wedge \neg q \wedge \neg r$、$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s$ 既是合取范式，也是析取范式；命题公式 $p \vee q$、$p \vee \neg q$、$\neg p \vee \neg q \vee r$、$p \vee \neg q \vee \neg r$、$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ 既是析取范式，也是合取范式。

定理 1 任意命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

证明 对于任意命题公式，可以通过下述命题逻辑等值演算步骤得到与之等值的范式：

步骤一：利用蕴含等值式和等价等值式消去蕴含联结词$\to$和等价联接词$\leftrightarrow$；

步骤二：利用双重否定律消去否定联结词$\neg$，或者利用德摩根律将否定联结词$\neg$置于各命题变元的前面；

步骤三：利用合取联结词$\wedge$对析取联结词$\vee$的分配律求析取范式，或者利用析取联结词$\vee$对合取联结词$\wedge$的分配律求合取范式。证毕。 ■

例 1　求下列命题公式的析取范式

① $\neg(p\to q)\vee\neg r$　　② $p\wedge(q\leftrightarrow r)$

③ $(q\to r)\to p$　　④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

解　① $\neg(p\to q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg r$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$　（双重否定律）

② $p\wedge(q\leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow p\wedge((q\to r)\wedge(r\to q))$　（等价等值式）

$\Leftrightarrow p\wedge((\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee q))$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (p\wedge(\neg q\vee r))\wedge(\neg r\vee q)$　（结合律）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r))\wedge(\neg r\vee q)$　（分配律）

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r))\wedge\neg r)\vee(((p\wedge\neg q)\vee(p\wedge r))\wedge q)$　（分配律）

$\Leftrightarrow (((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)\vee((p\wedge r)\wedge\neg r)))\vee(((p\wedge\neg q)\wedge q)\vee((p\wedge r))\wedge q)))$　（分配律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge r\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge r\wedge q)$　（结合律）

③ $(q\to r)\to p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q\vee r)\vee p$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg\neg q\wedge\neg r)\vee p$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (q\wedge\neg r)\vee p$　（双重否定律）

④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\to(q\wedge r))\wedge((q\wedge r)\to p)$　（等价等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee(q\wedge r))\wedge(\neg(q\wedge r)\vee p)$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee(q\wedge r))\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p)$　（德摩根律、结合律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p))\vee((q\wedge r)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p))$　（分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge(\neg r\vee p))\vee((q\wedge r)\wedge\neg q)\vee((q\wedge r)\wedge(\neg r\vee p))$　（结合律、分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee((\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge p))\vee(q\wedge r\wedge\neg q)\vee(((q\wedge r)\wedge\neg r)\vee((q\wedge r)\wedge p))$（结合律、分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge p)\vee(q\wedge r\wedge\neg q)\vee(q\wedge r\wedge\neg r)\vee(q\wedge r\wedge p)$　（结合律） ■

例 2　求例 1 中命题公式的合取范式。

解　① $\neg(p\to q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee\neg r$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q)\vee\neg r$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$　（双重否定律）

$\Leftrightarrow (p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$　（分配律）

② $p\wedge(q\leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow p\wedge((q\to r)\wedge(r\to q))$　（等价等值式）

$\Leftrightarrow p\wedge((\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee q))$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee q)$　（结合律）

③ $(q\to r)\to p$

$\Leftrightarrow \neg(\neg q\vee r)\vee p$　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow (\neg\neg q\wedge\neg r)\vee p$　（德摩根律）

$\Leftrightarrow (q\wedge\neg r)\vee p$　　（双重否定律）

$\Leftrightarrow (q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$　　（分配律）

④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\rightarrow(q\wedge r))\wedge((q\wedge r)\rightarrow p)$　　（等价等值式）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee(q\wedge r))\wedge(\neg(q\wedge r)\vee p)$　　（蕴含等值式）

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r))\wedge((\neg q\vee\neg r)\vee p)$　　（分配律、德摩根律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p)$　　（结合律） ■

例 3　举例说明命题公式的析取范式不一定唯一。

解　对于命题公式$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$，可以证明命题公式 $p\vee(q\wedge r)$、$(p\wedge p)\vee(q\wedge r)$、$p\vee(q\wedge\neg q)\vee(q\wedge r)$、$p\vee(p\wedge r)\vee(q\wedge r)$都是与之等值的，它们也都是析取范式。所以，命题公式的析取范式不一定唯一。 ■

例 4　举例说明命题公式的合取范式不一定唯一。

解　对于命题公式$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$，可以证明命题公式$p\wedge(q\vee r)$、$(p\vee p)\wedge(q\vee r)$、$p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(q\vee r)$、$p\wedge(p\vee r)\wedge(q\vee r)$都是与之等值的，它们也都是合取范式。所以，命题公式的合取范式不一定唯一。 ■

由上面内容可知，析取范式、合取范式仅含有否定联结词$\neg$、析取联结词$\vee$和合取联结词$\wedge$。原因在于，蕴含联结词$\rightarrow$和等价联接词$\leftrightarrow$可以通过蕴含等值式和等价等值式，转换为否定联结词$\neg$、析取联结词$\vee$和合取联结词$\wedge$的表达形式，亦即，任意命题公式所含有的蕴含联结词$\rightarrow$和等价联接词$\leftrightarrow$都可以通过等值演算使之消去。联结词的这种性质称为联结词功能的**完备性**（completeness）。能够表示任意命题公式的联结词的集合称为**联结词的完备集**（complete set of connectives）。联结词集$\{\neg, \vee, \wedge\}$、$\{\neg, \rightarrow\}$、$\{\neg, \vee\}$、$\{\neg, \wedge\}$等都是联结词的完备集。

定义 3　对于一个含有 n 个命题变元 p_1、p_2、$\ldots p_n$ 的合取项，如果每个命题变元与它的否定不同时出现，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称该合取项为关于命题变元 p_1、p_2、$\ldots p_n$ 的**极小项**（minterm）。对于一个含有 n 个命题变元 p_1、p_2、$\ldots p_n$ 的析取项，如果每个命题变元与它的否定不同时出现，但二者之一恰好出现一次且仅一次，则称该析取项为关于命题变元 p_1、p_2、$\ldots p_n$ 的**极大项**（maxterm）。

例如，对于一个命题变元 p，它对应的极小项和极大项都是 p 和$\neg p$ 两项；对于两个命题变元 p 和 q，它们对应的极小项为$p\wedge q$、$p\wedge\neg q$、$\neg p\wedge q$ 和$\neg p\wedge\neg q$ 共 4 项，极大项为$p\vee q$、$p\vee\neg q$、$\neg p\vee q$ 和$\neg p\vee\neg q$ 共 4 项；对于三个命题变元 p、q 和 r，它们对应的极小项为$p\wedge q\wedge r$、$p\wedge q\wedge\neg r$、$p\wedge\neg q\wedge r$、$p\wedge\neg q\wedge\neg r$、$\neg p\wedge q\wedge r$、$\neg p\wedge q\wedge\neg r$、$\neg p\wedge\neg q\wedge r$ 和$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$ 共 8 项，极大项为 $p\vee q\vee r$、$p\vee q\vee\neg r$、$p\vee\neg q\vee r$、$p\vee\neg q\vee\neg r$、$\neg p\vee q\vee r$、$\neg p\vee q\vee\neg r$、$\neg p\vee\neg q\vee r$ 和$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$ 共 8 项。显然，n 个命题变元所对应的极小项和极大项都为 2^n 个。

表 4.30

极小项			极大项		
命题公式	成真赋值	符号表示	命题公式	成假赋值	符号表示
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	(0，0，0)	$\boldsymbol{m_0}$	$p\vee q\vee r$	(0，0，0)	$\boldsymbol{M_0}$
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	(0，0，1)	$\boldsymbol{m_1}$	$p\vee q\vee\neg r$	(0，0，1)	$\boldsymbol{M_1}$
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	(0，1，0)	$\boldsymbol{m_2}$	$p\vee\neg q\vee r$	(0，1，0)	$\boldsymbol{M_2}$
$\neg p\wedge q\wedge r$	(0，1，1)	$\boldsymbol{m_3}$	$p\vee\neg q\vee\neg r$	(0，1，1)	$\boldsymbol{M_3}$
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	(1，0，0)	$\boldsymbol{m_4}$	$\neg p\vee q\vee r$	(1，0，0)	$\boldsymbol{M_4}$
$p\wedge\neg q\wedge r$	(1，0，1)	$\boldsymbol{m_5}$	$\neg p\vee q\vee\neg r$	(1，0，1)	$\boldsymbol{M_5}$
$p\wedge q\wedge\neg r$	(1，1，0)	$\boldsymbol{m_6}$	$\neg p\vee\neg q\vee r$	(1，1，0)	$\boldsymbol{M_6}$
$p\wedge q\wedge r$	(1，1，1)	$\boldsymbol{m_7}$	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	(1，1，1)	$\boldsymbol{M_7}$

从命题公式的真值角度考虑，极小项和极大项有非常有趣的性质：每个极小项只有一组成真赋值；每个极大项只有一组成假赋值。表 4.30 列出了 3 个命题变元所对应的极小项、极大项、极小项的唯一成真赋值和极大项的唯一成假赋值。

为了便于极小项的表达，我们用字符 m_i 表示各极小项，将各极小项的唯一成真赋值视作为一个二进制数，该二进制数所对应的十进制数作为相应的角标 i。同理，我们用字符 M_i 表示各极大项，将各极大项的唯一成假赋值视作为一个二进制数，该二进制数所对应的十进制数作为相应的角标 i。从表 4.30 可以看出，这些极小项和极大项之间满足：$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$，$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$（$i = 0,1,2,\ldots,7$）。

例 5 设 m_i 和 M_i（$i = 0,1,2,\ldots,2^n-1$）分别为 n 个命题变元所对应的的极小项和极大项，试证明 $m_i \Leftrightarrow \neg M_i$（$i = 0,1,2,\ldots,2^n-1$）。

证明 对命题变元的个数 n 进行归纳法证明。

$n = 1$，1 个命题变元对应的极大项和极小项为：$m_0 = \neg p$，$m_1 = p$，$M_0 = p$，$M_1 = \neg p$。显然，满足 $m_i \Leftrightarrow \neg M_i$（$i = 0,1$）。

假设 $n = k$ 时成立，即，$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$（$i = 0,1,2,\ldots,2^k-1$）。

考察 $n = k+1$ 的情形。假定第 $k+1$ 个命题变元为 p，那么，$k+1$ 个命题变元对应的 2^{k+1} 个极小项为：$\neg p\wedge m_i, p\wedge m_i$（$i = 0,1,2,\ldots,2^k-1$）；$k+1$ 个命题变元对应的 2^{k+1} 个极大项为：$p\vee M_i$，$\neg p\vee M_i$（$i = 0,1,2,\ldots,2^k-1$）。根据命题公式的等值演算有：

$\neg(p\vee M_i) \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg M_i \Leftrightarrow \neg p\wedge m_i$ （$i = 0,1,2,\ldots,2^k-1$）

$\neg(\neg p\vee M_i) \Leftrightarrow \neg\neg p\wedge\neg M_i \Leftrightarrow p\wedge m_i$ （$i = 0,1,2,\ldots,2^k-1$）

亦即 $m_j \Leftrightarrow \neg M_j$（$j = 0,1,2,\ldots,2^{k+1}-1$）。

由上述知，对于 n 个命题变元，$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$（$i = 0,1,2,\ldots,2^n-1$）成立。证毕。 ■

定义 4 对于一个含有 n 个命题变元的命题公式，如果已表示成析取范式，且该析取范式中的每一个合取项都是该 n 个命题变元的极小项，则称此析取范式为**命题公式的主析取范式**，简称为**主析取范式**（principal disjunctive normal form）。

例如，$(p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q)$、$(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$ 、$(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$是含有两个命题变元的命题公式的主析取范式；$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$、$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$、$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ 是含有三个命题变元的命题公式的主析取范式。如果用极小项形式可表示为：$m_3\vee m_2$、$m_1\vee m_0$、$m_3\vee m_1\vee m_0$ 是含有两个命题变元的命题公式的主析取范式；$m_7\vee m_6$、$m_5\vee m_4\vee m_3\vee m_2$ 、$m_7\vee m_6\vee m_1\vee m_0$ 是含有三个命题变元的命题公式的主析取范式。同时可以发现，各主析取范式的成真赋值就是其中极小项角标的二进制数所对应的赋值。

例 6 试证明：主析取范式的所有成真赋值就是其中极小项角标的二进制数所对应的赋值，反之亦然。

证明 （必要性）由于主析取范式是极小项的析取，所以，为了使主析取范式的真值为真，应该至少有一个极小项的真值为真。根据极小项的定义，极小项角标的二进制数是该极小项的唯一成真赋值。从而，主析取范式的所有成真赋值就是其中极小项角标的二进制数所对应的赋值。

（充分性） 由于极小项角标对应的二进制数是该极小项的唯一成真赋值，所以根据主析取范式的定义，极小项角标对应的二进制数是主析取范式的成真赋值。证毕。 ■

定理 2 任何命题公式都存在与之等值的唯一主析取范式。

证明 首先证明存在性。设 A 是一个含有 n 个命题变元的命题公式。由定理 1 知，存在与 A 等值的析取范式 A'，即 $A\Leftrightarrow A'$。如果 A'的某个合取项 A_j，既不含有 n 个命题变元中的命题变元 p，也不含有该命题变元的否定$\neg p$，则对合取项 A_j 进行如下等值演算：

$A_j \Leftrightarrow A_j\wedge 1 \Leftrightarrow A_j\wedge(p\vee\neg p) \Leftrightarrow (A_j\wedge p)\vee (A_j\wedge\neg p)$

显然，$(A_j\wedge p)$和 $(A_j\wedge\neg p)$都是合取项。继续进行此等值演算过程，直到所有合取项都含有 n 个命题变元中的每一命题变元或其否定，即，所有合取项都是极小项。

在等值演算过程中，对于重复出现的命题变元、命题变元的否定、合取项、矛盾式等，都应消去。如，$p\wedge p\Leftrightarrow p$、$\neg p\wedge\neg p\Leftrightarrow\neg p$、$p\wedge\neg p\Leftrightarrow 0$。最后，将 A 等值演算为与之等值的主析取范式 A''。

下面再证明唯一性。假设命题公式 A 存在两个与之等值的主析取范式 B 和 C，即 $A\Leftrightarrow B$ 且 $A\Leftrightarrow C$，即 $B\Leftrightarrow C$。由于 B 和 C 为不同的主析取范式，不妨设极小项 m_i 只出现在 B 中，而不出现在 C 中。于是，角标 i 的二进制数对应的赋值为 B 的成真赋值，而为 C 的成假赋值。这与 $B\Leftrightarrow C$ 矛盾。所以，主析取范式唯一。证毕。 ■

事实上，定理 2 的证明过程同时给出了求命题公式的主析取范式的方法：首先要把命题公式转化为析取范式，然后对合取项中缺少的命题变元用 $p\vee\neg p$ 补上，再用分配律和结合律展开，并合并相同的合取项，就可得到主析取范式。称之为主析取范式求解的**等值演算方法**。

例 7 用等值演算方法求例 1 中各命题公式的主析取范式。

解 在例 1 中已求出各命题公式的析取范式，在这里，我们就从各命题公式的析取范式开始求解。

① $\neg(p\to q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee\neg r$ （例 1）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\wedge 1)\vee(1\wedge\neg r)$ （同一律）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\vee\neg p)\wedge\neg r)$ （排中律）

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r))\vee((p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg r))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee((p\wedge\neg r)\wedge 1)\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge 1)$ （结合律、同一律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee((p\wedge\neg r)\wedge(q\vee\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge(q\vee\neg q))$ （排中律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee((p\wedge\neg r\wedge q)\vee(p\wedge\neg r\wedge\neg q))\vee((\neg p\wedge\neg r\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg r\wedge\neg q))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$

（交换律、结合律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （交换律、幂等律）

② $p\wedge(q\leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge r\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge q)\vee(p\wedge r\wedge q)$ （例 1）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge 0)\vee(p\wedge 0)\vee(p\wedge r\wedge q)$ （结合律、矛盾律）

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$ （幂等律、同一律、交换律）

③ $(q\to r)\to p$

$\Leftrightarrow (q\wedge\neg r)\vee p$ （例 1）

$\Leftrightarrow (1\wedge(q\wedge\neg r))\vee(p\wedge 1)$ （同一律）

$\Leftrightarrow ((p\vee\neg p)\wedge(q\wedge\neg r))\vee(p\wedge(q\vee\neg q))$ （排中律）

$\Leftrightarrow ((p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r))\vee((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee((p\wedge q)\wedge 1)\vee((p\wedge\neg q)\wedge 1)$ （同一律）

$\Leftrightarrow ((p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee((p\wedge q)\wedge(r\vee\neg r))\vee((p\wedge\neg q)\wedge(r\vee\neg r))$ （排中律）

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$ （幂等律）

④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge p)\vee(q\wedge r\wedge\neg q)\vee(q\wedge r\wedge\neg r)\vee(q\wedge r\wedge p)$ （例 1）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)\vee 0\vee(r\wedge 0)\vee(q\wedge 0)\vee(q\wedge r\wedge p)$ （结合律、矛盾律、交换律）

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge 1)\vee((\neg p\wedge\neg r)\wedge 1)\vee(q\wedge r\wedge p)$ （零律、同一律）

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q)\wedge (r\vee\neg r))\vee ((\neg p\wedge\neg r)\wedge(q\vee\neg q))\vee(q\wedge r\wedge p)$ （排中律）

$\Leftrightarrow ((\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r))\vee ((\neg p\wedge\neg r\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg r\wedge\neg q))\vee(q\wedge r\wedge p)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$ （结合律、交换律） ■

命题公式的主析取范式还可以通过列写真值表，从真值表中找出命题公式对应的极小项，并将所有极小项析取。这种方法称为主析取范式求解的**真值表方法**。

例 8 用真值表方法求例 1 中各命题公式的主析取范式。

解 列些出各命题公式的真值表及极小项，如表 4.31、4.32、4.33 和 4.34 所示。

表 4.31

p	q	r	$p\to q$	$\neg(p\to q)\vee\neg r$	m_i
1	1	1	1	0	
1	1	0	1	1	m_6
1	0	1	0	1	m_5
1	0	0	0	1	m_4
0	1	1	1	0	
0	1	0	1	1	m_2
0	0	1	1	0	
0	0	0	1	1	m_0

表 4.32

p	q	r	$q\leftrightarrow r$	$p\wedge(q\leftrightarrow r)$	m_i
1	1	1	1	1	m_7
1	1	0	0	0	
1	0	1	0	0	
1	0	0	1	1	m_4
0	1	1	1	0	
0	1	0	0	0	
0	0	1	0	0	
0	0	0	1	0	

表 4.33

p	q	r	$q\to r$	$(q\to r)\to p$	m_i
1	1	1	1	1	m_7
1	1	0	0	1	m_6
1	0	1	1	1	m_5
1	0	0	1	1	m_4
0	1	1	1	0	
0	1	0	0	1	m_2
0	0	1	1	0	
0	0	0	1	0	

表 4.34

p	q	r	$q\wedge r$	$p\leftrightarrow(q\wedge r)$	m_i
1	1	1	1	1	m_7
1	1	0	0	0	
1	0	1	0	0	
1	0	0	0	0	
0	1	1	1	0	
0	1	0	0	1	m_2
0	0	1	0	1	m_1
0	0	0	0	1	m_0

由表中各极小项，可得各命题公式的主析取范式如下：

① $\neg(p\to q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q \wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q \wedge\neg r)$

② $p\wedge(q \leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow m_4\vee m_7$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee (p\wedge q\wedge r)$

③ $(q\to r)\to p$

$\Leftrightarrow m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_7$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)$ ■

定义 5 对于一个含有 n 个命题变元的命题公式，如果已表示成合取范式，且该合取范式中的每一个析取项都是该 n 个命题变元的极大项，则称此合取范式为**命题公式的主合取范式**，简称为**主合取范式**（principal conjunctive normal form）。

例如，$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)$、$(p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$、$(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$ 是含有两个命题变元的命题公式的主合取范式；$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$、$(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r) \wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$、$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$ 是含有三个命题变元的命题公式的主合取范式。如果用极大项形式可表示为：$M_0\wedge M_1$、$M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3$、$M_1\wedge M_2\wedge M_3$ 是含有两个命题变元的命题公式的主合取范式；$M_0\wedge M_1$、$M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5$、$M_0\wedge M_1\wedge M_6\wedge M_7$

是含有三个命题变元的命题公式的主合取范式。同时可以发现，各主合取范式的成假赋值就是其中极大项角标的二进制数所对应的赋值。

例 9 试证明：主合取范式的所有成假赋值就是其中极大项角标的二进制数所对应的赋值，反之亦然。

证明 （必要性）由于主合取范式是极大项的合取，所以，为了使主合取范式的真值为假，应该至少有一个极大项的真值为假。根据极大项的定义，极大项角标的二进制数是该极大项的唯一成假赋值。从而，主合取范式的所有成假赋值就是其中极大项角标的二进制数所对应的赋值。

（充分性） 由于极大项角标对应的二进制数是该极大项的唯一成假赋值，所以根据主合取范式的定义，极大项角标对应的二进制数是主合取范式的成假赋值。证毕。 ■

定理 3 任何命题公式都存在与之等值的唯一主合取范式。

证明 首先证明存在性。设 A 是一个含有 n 个命题变元的命题公式。由定理 1 知，存在与 A 等值的合取范式 A'，即 $A\Leftrightarrow A'$。如果 A'的某个析取项 A_j，既不含有 n 个命题变元中的命题变元 p，也不含有该命题变元的否定$\neg p$，则对析取项 A_j 进行如下等值演算：

$A_j \Leftrightarrow A_j\vee 0 \Leftrightarrow A_j\vee(p\wedge\neg p) \Leftrightarrow (A_j\vee p)\wedge(A_j\vee\neg p)$

显然，$(A_j\vee p)$和 $(A_j\vee\neg p)$都是析取项。继续进行此等值演算过程，直到所有析取项都含有 n 个命题变元中的每一命题变元或其否定，即，所有析取项都是极大项。

在等值演算过程中，对于重复出现的命题变元、命题变元的否定、析取项、重言式等，都应消去。如，$p\vee p\Leftrightarrow p$、$\neg p\vee\neg p\Leftrightarrow\neg p$、$p\vee\neg p\Leftrightarrow 1$。最后，将 A 等值演算为与之等值的主合取范式 A''。

下面再证明唯一性。假设命题公式 A 存在两个与之等值的主合取范式 B 和 C，即 $A\Leftrightarrow B$ 且 $A\Leftrightarrow C$，即 $B\Leftrightarrow C$。由于 B 和 C 为不同的主合取范式，不妨设极大项 M_i 只出现在 B 中，而不出现在 C 中。于是，角标 i 的二进制数对应的赋值为 B 的成假赋值，而为 C 的成真赋值。这与 $B\Leftrightarrow C$ 矛盾。所以，主合取范式唯一。证毕。 ■

事实上，定理 3 的证明过程同时给出了求命题公式的主合取范式的方法：首先要把命题公式转化为合取范式，然后对析取项中缺少的命题变元用 $p\wedge\neg p$ 补上，再用分配律和结合律展开，并合并相同的析取项，就可得到主合取范式。称之为主合取范式求解的**等值演算方法**。

例 10 用等值演算方法求例 2 中各命题公式的主合取范式。

解 在例 2 中已求出各命题公式的合取范式，在这里，我们就从各命题公式的合取范式开始求解。

① $\neg(p\to q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow (p\vee\neg r)\wedge(\neg q\vee\neg r)$ （例 2）

$\Leftrightarrow (p\vee\neg r\vee 0)\wedge(0\vee\neg q\vee\neg r)$ （同一律）

$\Leftrightarrow (p\vee\neg r\vee(q\wedge\neg q))\wedge((p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee\neg r)$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow ((p\vee\neg r\vee q)\wedge(p\vee\neg r\vee\neg q))\wedge((p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$ （交换律、结合律、幂等律）

② $p\wedge(q\leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow p\wedge(\neg q\vee r)\wedge(\neg r\vee q)$ （例 2）

$\Leftrightarrow (p\vee 0)\wedge(0\vee\neg q\vee r)\wedge(0\vee\neg r\vee q)$ （同一律）

$\Leftrightarrow (p\vee(q\wedge\neg q)\wedge((p\wedge\neg p)\vee\neg q\vee r)\wedge((p\wedge\neg p)\vee\neg r\vee q)$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee\neg q))\wedge((p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r))\wedge((p\vee\neg r\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg r\vee q))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee 0)\wedge(p\vee\neg q\vee 0)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg r\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg r\vee q)$ （同一律）

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee(r\wedge\neg r))\wedge(p\vee\neg q\vee(r\wedge\neg r))\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg r\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg r\vee q)$

（矛盾律）

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg r\vee q)$

$\wedge(\neg p\vee\neg r\vee q)$ （分配律、等幂律）

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)$ （等幂律）

③ $(q\rightarrow r)\rightarrow p$

$\Leftrightarrow (q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$ （例 2）

$\Leftrightarrow (q\vee p\vee 0)\wedge(\neg r\vee p\vee 0)$ （同一律）

$\Leftrightarrow (q\vee p\vee(r\wedge\neg r))\wedge(\neg r\vee p\vee(q\wedge\neg q))$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow ((q\vee p\vee r)\wedge(q\vee p\vee\neg r))\wedge((\neg r\vee p\vee q)\wedge(\neg r\vee p\vee\neg q))$ （分配律）

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$ （交换律、结合律、幂等律）

④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p)$ （例 2）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee 0)\wedge(\neg p\vee r\vee 0)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p)$ （同一律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee(r\wedge\neg r))\wedge(\neg p\vee r\vee(q\wedge\neg q))\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p)$ （矛盾律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee r\vee q)\wedge(\neg p\vee r\vee\neg q)\wedge(\neg q\vee\neg r\vee p)$ （分配律）

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$ （交换律、幂等律） ■

命题公式的主合取范式也可以通过列写真值表，从真值表中找出命题公式对应的极大项，并将所有极大项合取。这种方法称为主合取范式求解的**真值表方法**。

例 8 用真值表方法求例 1 中各命题公式的主合取范式。

解 列些出各命题公式的真值表及极大项，如表 4.35、4.36、4.37 和 4.38 所示。

由真值表，求出各命题公式的极大项，可得各命题公式的主合取范式如下：

① $\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r$

$\Leftrightarrow M_1\wedge M_3\wedge M_7$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

② $p\wedge(q\leftrightarrow r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

③ $(q\rightarrow r)\rightarrow p$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_3$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

④ $p\leftrightarrow(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6$

$\Leftrightarrow (p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$ ■

表 4.35

p	q	r	$p\rightarrow q$	$\neg(p\rightarrow q)\vee\neg r$	M_i
1	1	1	1	0	M_7
1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	
1	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	M_3
0	1	0	1	1	
0	0	1	1	0	M_1
0	0	0	1	1	

表 4.36

p	q	r	$q\leftrightarrow r$	$p\wedge(q\leftrightarrow r)$	M_i
1	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	M_6
1	0	1	0	0	M_5
1	0	0	1	1	
0	1	1	1	0	M_3
0	1	0	0	0	M_2
0	0	1	0	0	M_1
0	0	0	1	0	M_0

表 4.37

p	q	r	$q\rightarrow r$	$(q\rightarrow r)\rightarrow p$	M_i
1	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	
1	0	1	1	1	
1	0	0	1	1	
0	1	1	1	0	M_3
0	1	0	0	1	
0	0	1	1	0	M_1
0	0	0	1	0	M_0

表 4.38

p	q	r	$q\wedge r$	$p\leftrightarrow(q\wedge r)$	M_i
1	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	M_6
1	0	1	0	0	M_5
1	0	0	0	0	M_4
0	1	1	1	0	M_3
0	1	0	0	1	
0	0	1	0	1	
0	0	0	0	1	

利用命题公式的主析取范式和主合取范式，可以方便地求取命题公式的成真赋值和成假赋值。命题公式的成真赋值就是主析取范式中所有极小项的唯一成真赋值；命题公式的成假赋值就是主合取范式中所有极大项的唯一成假赋值。同时，主析取范式和主合取范式可用来判断命题公式的类型：命题公式为重言式当且仅当它的主析取范式包含所有极小项；命题公式为矛盾式当且仅当它的主合取范式包含所有极大项。此外，主析取范式和主合取范式也可用来判断命题公式的等值式：两个命题公式是等值式当且仅当它们对应的主析取范式相同，当且仅当它们对应的主合取范式相同。

§4.3　命题逻辑推理

4.3.1　推理的基本概念

数理逻辑的主要任务是用数学的方法来研究人们在科学领域、工程实践以及日常生活中的推理。**推理**（reasoning）是指从前提（premise）出发推出结论（conclusion）的思维过程。前提是推理所依据的已知条件、事实、假设或公理，结论则是从前提出发应用推理规则推出的结果。遵循了正确的推理规则的推理称为**有效推理**（effective reasoning）或者推理是**有效的**，有效推理的结论称为**有效结论**（effective conclusion）。**逻辑推理**（logic reasoning）就是研究和提供从前提导出有效结论的合理推理规则和论证原理。

值得注意的是，逻辑推理最关心的不是结论的真实性而是推理的有效性。前提的真实性并不作为确定推理是否有效的依据，必须把推理的有效和结论的真实区别开来。有效的推理不一定产生真实的结论，产生不真实结论的推理过程未必不是有效的。再之，有效的推理中可能包含假的前提；而不是有效的推理却可能包含真的前提。可见，推理的有效是一回事，前提与结论的真实与否是另一回事。推理是有效的，是指它的结论是它的前提的合乎逻辑的结果，也即，如果它的前提都为真，那么所得结论也必然为真，而并不是要求前提或结论一定为真或为假。但是，如果推理是有效的话，那么不可能它的前提都为真时而它的结论为假。

命题逻辑推理（proposition logic reasoning）是由已知的命题公式为前提推出命题公式的结论的过程。

定义 1　对于命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 和 B，如果对命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 和 B 中出现的命题变元的任一赋值，命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都为真，则命题公式 B 为真，那么称命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 到命题公式 B 是一个**有效推理**（effective reasoning），或者称命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 到命题公式 B 的推理是**有效的**（effective）或**正确的**。并称命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是推理的**前提**（premise），命题公式 B 是前提为命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 下推理的**逻辑结果**（logic conclusion）或**有效结论**（effective conclusion）。并记为 $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$。

例 1　判断下列推理是否有效的？

① 前提为 p 和 $p\to q$，结论为 q

② 前提为 p 和 $q\to p$，结论为 q

解 ① 命题公式 p 和 $p\to q$ 在赋值：$p = 1$ 和 $q = 1$ 下为真，且该赋值下命题公式 q 也为真，所以，根据定义 1，该推理是有效的，q 是前提 p 和 $p\to q$ 的有效结论。

② 命题公式 p 和 $q\to p$ 在赋值：$p = 1$ 和 $q = 1$，$p = 1$ 和 $q = 0$ 下都为真，但赋值 $p =$

1 和 $q=0$ 下命题公式 q 不为真，所以，根据定义 1，该推理不是有效的。 ■

定理 1 命题公式 B 是命题公式 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\to B$ 是重言式。

证明（必要性）假设命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论，但命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\to B$ 不是重言式。那么，必然存在命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n$ 的一组成真赋值 I，使得命题公式 B 在该解释 I 下的真值为假。矛盾。所以，命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\to B$ 是重言式。

（充分性）假设命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\to B$ 是重言式，但命题公式 B 不是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论。那么，必然存在命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的一组成真赋值 I，使得命题公式 B 在该解释 I 下的真值为假，亦即，必然存在命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n$ 的一组成真赋值 I，使得命题公式 B 在该解释 I 下的真值为假。由此，命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\to B$ 不是重言式。矛盾。所以，命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论。证毕。 ■

定义 2 对于命题公式 A 和 B，如果蕴含式 $A\to B$ 的所有赋值都是成真赋值，那么，称该蕴含式为命题公式的永真蕴含式或命题公式的重言蕴含式，简称为**永真蕴含式**（always true implication）或**重言蕴含式**（tautology implication）。记为 $A\Rightarrow B$。

根据定义 2，命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论可简记为 $A_1, A_2, \ldots, A_n\Rightarrow B$。

需要注意的是，上述定义中的⇒不是逻辑联结词，$A\Rightarrow B$ 也不是一个命题公式，它只是公式 A→B 永真时的一种简单记法。不要混淆⇒与→。

例 2 判断下面蕴含式是否为永真蕴含式？

① $A\wedge B\to A$　　② $\neg(A\to B)\to A$

③ $\neg(A\to B)\to\neg B$　　④ $A\wedge(A\to B)\to A$

⑤ $\neg B\wedge(A\to B)\to\neg B$　　⑥ $(A\to B)\wedge(B\to C)\to(A\to C)$

解 ① 利用等值演算。

$$A\wedge B\to A\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)\vee A\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)\vee A\Leftrightarrow(\neg A\vee A)\vee\neg B\Leftrightarrow 1\vee\neg B\Leftrightarrow 1$$

所以，命题公式①为永真蕴含式，即，$A\wedge B\Rightarrow A$。

② 利用等值演算。

$$\neg(A\to B)\to A\Leftrightarrow\neg\neg(A\to B)\vee A\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\vee A\Leftrightarrow(\neg A\vee A)\vee B\Leftrightarrow 1\vee B\Leftrightarrow 1$$

所以，命题公式②为永真蕴含式，即，$\neg(A\to B)\Rightarrow A$。

③ 利用等值演算。

$$\neg(A\to B)\to\neg B\Leftrightarrow\neg\neg(A\to B)\vee\neg B\Leftrightarrow(\neg A\vee B)\vee\neg B\Leftrightarrow\neg A\vee(B\vee\neg B)\Leftrightarrow\neg A\vee 1\Leftrightarrow 1$$

所以，命题公式③为永真蕴含式，即，$\neg(A\to B)\Rightarrow\neg B$。

④ 利用主析取范式。

$$A\wedge(A\to B)\to A\Leftrightarrow\neg(A\wedge(\neg A\vee B))\vee A\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg(\neg A\vee B))\vee A)$$
$$\Leftrightarrow(\neg A\wedge 1)\vee(\neg\neg A\wedge B)\vee(A\wedge 1)$$
$$\Leftrightarrow(\neg A\wedge(\neg B\vee B))\vee(A\wedge B)\vee(A\wedge(\neg B\vee B))$$
$$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee(A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$$
$$\Leftrightarrow(\neg A\wedge\neg B)\vee(\neg A\wedge B)\vee(A\wedge\neg B)\vee(A\wedge B)$$
$$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3$$

显然，命题公式④的主析取范式中含有所有极小项，所以，命题公式④为永真式。从而，命题公式④为永真蕴含式，即，$A\wedge(A\to B)\Rightarrow A$。

⑤ 利用主析取范式。

$$\neg B\wedge(A\to B)\to\neg B$$
$$\Leftrightarrow\neg(\neg B\wedge(\neg A\vee B))\vee\neg B$$
$$\Leftrightarrow(\neg\neg B\vee\neg(\neg A\vee B))\vee\neg B$$
$$\Leftrightarrow((1\wedge B)\vee(\neg\neg A\wedge B))\vee(1\wedge\neg B)$$

$\Leftrightarrow ((\neg A \vee A) \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee ((\neg A \vee A) \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

$\Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$

显然，命题公式⑤的主析取范式中含有所有极小项，所以，命题公式⑤为永真式。从而，命题公式⑤为永真蕴含式，即，$\neg B \wedge (A \to B) \Rightarrow \neg B$。

⑥ 利用真值表。

表 4.39 为命题公式⑥的真值表，从中可以看出：命题公式⑥的所有赋值都是成真赋值。所以，命题公式⑥为永真蕴含式，即，$(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$。 ■

表 4.39

A	B	C	$A \to B$	$B \to C$	$A \to C$	$(A \to B) \wedge (B \to C)$	$(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

定理 2 命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式。

证明 根据定理 1，命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ 是重言式，即，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B \Leftrightarrow 1$。那么，$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B) \Leftrightarrow 0$，即，$\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B)$为矛盾式。

由于 $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \vee B)$

$\Leftrightarrow \neg\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \wedge \neg B$

$\Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$

所以，命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式。证毕。 ■

定理 1 和定理 2 是命题逻辑推理的理论基础。只要证明命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ 是重言式，那么，命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论就是命题公式 B；同时，命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论是命题公式 B，也可以通过证明命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式而得到证明。前者称为命题逻辑推理的**直接方法**（direct method），后者称为命题逻辑推理的**间接方法**（indirect method）或**反证法**。

4.3.2 简单证明推理

“命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论是命题公式 B”的证明，可转换为“命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ 是重言式”，或者“命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ 是矛盾式”的证明，即，命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ 或者命题公式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B$ 的类型判断问题。这两个命题公式的类型判断，都可以采用前面内容介绍过的真值表、等值演算、主析（合）取范式等来完成，并称之为**简单证明推理**。

例 1 判断下列推理是否正确？

① 如果小王是计算机专业的学生，小王就学离散数学。小王不是计算机专业的学生，所以小王不学离散数学。

② 如果他在图书馆，他必定在看书。如果他不在操场，他必定在图书馆。他没有在看书，所以他在操场。

解 判断推理正确与否首先要将命题符号化，找出前提与结论，写出要证明的推理式，然后再实施推理证明。

① 命题符号化为：

p：小王是计算机专业的学生；q：小王学离散数学

前提：$p\to q$，$\neg p$

结论：$\neg q$

只要证明：$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 为重言式，或$(p\to q)\wedge\neg p\wedge\neg\neg q$ 为矛盾式即可。

（真值表） 表 4.40 为命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 的真值表，从表中可以看出：命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 在赋值（0，1）下的真值为假，即，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 不为重言式。所以，推理①不是有效推理。

推理①的有效性也可以通过判定$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 为矛盾式得到证明。表 4.41 为命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 的真值表，从表中可以看出：命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 在赋值（0，1）下的真值为真，即，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 不为矛盾式。所以，推理①不是有效推理。

表 4.40

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge\neg p$	$\boldsymbol{(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q}$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	1	1

表 4.41

p	q	$p\to q$	$(p\to q)\wedge\neg p$	$\boldsymbol{(p\to q)\wedge\neg p\wedge q}$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	0

（主析取范式）$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge\neg p)\vee\neg q$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg\neg p)\vee\neg q$

$\Leftrightarrow(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge 1)\vee(1\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge(\neg q\vee q))\vee((\neg p\vee p)\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_2\vee m_3$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 的主析取范式没有含有极小项$\neg p\wedge q$，即，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 不是重言式，所以，推理①不是有效推理。

（主合取范式）$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee 0)\wedge(0\vee q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee(\neg q\wedge q))\wedge((\neg p\wedge p)\vee q)$

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(p\vee q)$

$\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_2\wedge M_3$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 的主合取范式没有含有极大项 $p\vee\neg q$，即，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 不是矛盾式，所以，推理①不是有效推理。

（等值演算）$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$

$\Leftrightarrow\neg((\neg p\vee q)\wedge\neg p)\vee\neg q$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg p\vee q)\vee\neg\neg p)\vee\neg q$

$\Leftrightarrow(\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(p\vee\neg q)$

$\Leftrightarrow(p\vee(p\vee\neg q))\wedge(\neg q\vee(p\vee\neg q))$

$\Leftrightarrow p\vee\neg q$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 的等值式 $p\vee\neg q$ 存在成假赋值（0，1），即，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\to\neg q$ 不是重言式，所以，推理①不是有效推理。

$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge\neg p\wedge q$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge(\neg p\wedge q))\vee (q\wedge(\neg p\wedge q))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q)\vee (q\wedge\neg p)$

$\Leftrightarrow \neg p\wedge q$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 的等值式$\neg p\wedge q$ 存在成真赋值（0，1），即，命题公式$(p\to q)\wedge\neg p\wedge q$ 不是矛盾式，所以，推理①不是有效推理。

② 命题符号化为：

p：他在图书馆；q：他在看书；r：他在操场；

前提：$p\to q$，$\neg r\to p$，$\neg q$

结论：r

只要证明：$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 为重言式，或$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 为矛盾式。

（真值表） 表 4.42 为命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 的真值表，从表中可以看出：命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 的所有赋值都是成真赋值，即，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 是重言式。所以，推理②是有效推理。

表 4.42

p	q	r	$p\to q$	$\neg r\to p$	$\neg p$	$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p$	$\boldsymbol{(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r}$
1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1

推理②的有效性也可以通过判定$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 为矛盾式而得到证明。表 4.43 为命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 的真值表，从表中可以看出：命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge \neg p\wedge\neg r$ 的所有赋值都为成假赋值，即，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 为矛盾式。所以，推理②是有效推理。

表 4.43

p	q	r	$p\to q$	$\neg r\to p$	$\neg p$	$\neg r$	$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$
1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	0

（主析取范式）$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q) \wedge(\neg\neg r\vee p)\wedge\neg p)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q) \vee\neg(r\vee p)\vee\neg\neg p)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q) \vee (\neg r\wedge\neg p)\vee(p\wedge 1)\vee(1\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee (\neg r\wedge\neg p)\vee(p\wedge(\neg q\vee q))\vee((\neg p\vee p)\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee (\neg r\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\vee(p\wedge r)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge 1)\vee(\neg p\wedge\neg r\wedge 1)\vee(p\wedge q\wedge 1)\vee(\neg p\wedge r\wedge 1)\vee(p\wedge r\wedge 1)$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge(\neg r\vee r))\vee(\neg p\wedge\neg r\wedge(\neg q\vee q))\vee(p\wedge q\wedge(\neg r\vee r))\vee(\neg p\wedge r\wedge(\neg q\vee q))\vee(p\wedge r\wedge(\neg q\vee q))$

$\Leftrightarrow (p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg r\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r\wedge q)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge r\wedge\neg q)$
$\vee(\neg p\wedge r\wedge q)\vee(p\wedge r\wedge\neg q)\vee(p\wedge r\wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$
$\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 的主析取范式含有所有极小项，即，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 是重言式，所以，推理②是有效推理。

（主合取范式）$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg\neg r\vee p)\wedge(\neg p\vee 0)\wedge(0\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(r\vee p)\wedge(\neg p\vee(\neg q\wedge q))\wedge((\neg p\wedge p)\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(r\vee p)\wedge(\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee 0)\wedge(p\vee r\vee 0)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee 0)\wedge(\neg p\vee\neg r\vee 0)\wedge(p\vee\neg r\vee 0)$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee(\neg r\wedge r))\wedge(p\vee r\vee(\neg q\wedge q))\wedge(\neg p\vee\neg q\vee(\neg r\wedge r))\wedge(\neg p\vee\neg r\vee(\neg q\wedge q))\wedge(p\vee\neg r\vee(\neg q\wedge q))$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(p\vee r\vee\neg q)\wedge(p\vee r\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg r\vee\neg q)$
$\wedge(\neg p\vee\neg r\vee q)\wedge(p\vee\neg r\vee\neg q)\wedge(p\vee\neg r\vee q)$

$\Leftrightarrow (p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge$
$(\neg p\vee\neg q\vee\neg r)$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_2\wedge M_3\wedge M_4\wedge M_5\wedge M_6\wedge M_7$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 的主合取范式含有所有极大项，即，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 是矛盾式，所以，推理②是有效推理。

（等值演算）$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p\vee q)\wedge(\neg\neg r\vee p)\wedge\neg p)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg(\neg p\vee q)\vee\neg(r\vee p)\vee\neg\neg p)\vee r$

$\Leftrightarrow (\neg\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg r\wedge\neg p)\vee p\vee r$

$\Leftrightarrow ((p\wedge\neg q)\vee p)\vee(\neg r\wedge\neg p)\vee r$

$\Leftrightarrow p\vee(\neg r\wedge\neg p)\vee r$

$\Leftrightarrow (p\vee r)\vee\neg(p\vee r)$

$\Leftrightarrow 1$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\to r$ 是重言式，所以，推理②是有效推理。

$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\wedge(\neg\neg r\vee p)\wedge\neg p\wedge\neg r$

$\Leftrightarrow ((\neg p\vee q)\wedge\neg p)\wedge(r\vee p)\wedge\neg r$

$\Leftrightarrow \neg p\wedge(r\vee p)\wedge\neg r$

$\Leftrightarrow (\neg p\wedge\neg r)\wedge(r\vee p)$

$\Leftrightarrow \neg(p\vee r)\wedge(p\vee r)$

$\Leftrightarrow 0$

显然，命题公式$(p\to q)\wedge(\neg r\to p)\wedge\neg p\wedge\neg r$ 是矛盾式，所以，推理②是有效推理。 ■

4.3.3 构造证明推理

简单证明推理是从命题公式的真值角度进行解释和论证的，推理过程中没有明确的推演过程，并且当命题变元较多时，会非常繁琐。分析有效推理和永真蕴含式的定义，可以发现，如果命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 和 C 满足 $A_1\Rightarrow A_2$，$A_2\Rightarrow A_3$，…，且 $A_n\Rightarrow C$，那 $A_1\Rightarrow C$，即，我

们可以通过一系列永真蕴含式证明出命题公式 C 是命题公式 A_1 的有效结论。基于永真蕴涵式或推理规则进行的命题公式的推理称为**构造证明推理**。

下面给出一些基本的永真蕴含式或推理规则：

化简式	$A\wedge B\Rightarrow A$
	$A\wedge B\Rightarrow B$
	$\neg(A\rightarrow B)\Rightarrow A$
	$\neg(A\rightarrow B)\Rightarrow\neg B$
合取引入	$A, B \Rightarrow A\wedge B$
附加式	$A\Rightarrow A\vee B$
	$\neg A \Rightarrow A\rightarrow B$
假言推论	$A\wedge(A\rightarrow B)\Rightarrow B$
拒取式	$\neg B\wedge(A\rightarrow B)\Rightarrow\neg A$
析取三段论	$\neg A\wedge(A\vee B)\Rightarrow B$
条件三段论	$(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C)\Rightarrow A\rightarrow C$
双条件三段论	$(A\leftrightarrow B)\wedge(B\leftrightarrow C)\Rightarrow A\leftrightarrow C$
合取构造二难	$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\wedge C) \Rightarrow B\wedge D$
析取构造二难	$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D)\wedge(A\vee C) \Rightarrow B\vee D$
二难推论	$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow B)\wedge(A\wedge C) \Rightarrow B$
	$(A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow B)\wedge(A\vee C) \Rightarrow B$
前后件附加	$A\rightarrow B \Rightarrow(A\vee C)\rightarrow(B\vee C)$
	$A\rightarrow B \Rightarrow(A\wedge C)\rightarrow(B\wedge C)$

在构造推理证明中，还用到如下几个中重要的推理规则：

① 前提引入规则：前提在证明过程中的任何步骤上都可以引入使用。

② 结论引入规则：在推理中，若一个或一组前提已证出结论 B，则 B 可引入到以后的推理中作为前提使用。

③ 置换规则：在推理过程的任何步骤上，命题公式中的任何命题公式都可以用与之等值的命题公式置换。

构造证明推理分为**直接构造证明推理**和**间接构造证明推理**。**直接构造证明推理**是从一组已知的命题公式的前提出发，利用推理规则逐步推演出逻辑结论的推理。**间接构造证明推理**是从一组已知的命题公式的前提以及附加的前提出发，利用推理规则间接地给出推理有效性证明的推理。

例 1 用直接构造证明推理证明 $p\wedge q\rightarrow r, \neg r\vee s, \neg s\models\neg p\vee\neg q$。

证明 (1) $\neg r\vee s$ 前提引入

(2) $\neg s$ 前提引入

(3) $\neg r$ (1)(2)析取三段论

(4) $p\wedge q\rightarrow r$ 前提引入

(5) $\neg(p\wedge q)$ (3)(4)拒取式

(6) $\neg p\vee\neg q$ (5)等值置换 ■

例 2 用直接构造证明推理证明 $p\rightarrow r, q\rightarrow s, p\vee q, s\rightarrow t, \neg t\models r$。

证明 (1) $p\rightarrow r$ 前提引入

(2) $q\rightarrow s$ 前提引入

(3) $p\vee q$ 前提引入

(4) $r\vee s$ (1)(2)(3)析取构造二难

(5) $s\rightarrow t$ 前提引入

(6) $\neg t$ 前提引入

(7) $\neg s$ (5)(6)拒取式

(8) r (4)(7)析取三段论 ■

例 3 用直接构造证明推理证明如下推理：如果张宏努力学习，他一定取得好成绩。若张宏贪玩或不按时完成作业，他就不能取得好成绩。所以，如果张宏努力学习，他就不贪玩并且按时完成作业。

解 命题符号化：

p：张宏努力学习；q：张宏取得好成绩；r：张宏贪玩；s：张宏按时完成作业

前提：$p\rightarrow q$，$(r\vee\neg s)\rightarrow\neg q$

结论：$p\rightarrow(\neg r\wedge s)$

证明如下：

(1) $p\rightarrow q$ 前提引入

(2) $(r\vee\neg s)\rightarrow\neg q$ 前提引入

(3) $\neg(r\vee\neg s)\vee\neg q$ (2)等值置换

(4) $q\rightarrow\neg(r\vee\neg s)$ (3)等值置换

(5) $p\rightarrow\neg(r\vee\neg s)$ (1)(4)条件三段论

(6) $p\rightarrow(\neg r\wedge s)$ (5)等值置换 ■

定理 1 命题公式 $A\rightarrow B$ 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 B 是命题公式 $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论。

证明 命题公式 $A\rightarrow B$ 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow(A\rightarrow B)$是重言式。由于

$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow(A\rightarrow B)$

$\Leftrightarrow\neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\vee(\neg A\vee B)$

$\Leftrightarrow\neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\vee\neg A)\vee B$

$\Leftrightarrow\neg((A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n)\wedge A)\vee B$

$\Leftrightarrow\neg(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\wedge A)\vee B$

$\Leftrightarrow(A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\wedge A)\rightarrow B$

所以，命题公式 $A\rightarrow B$ 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 B 是命题公式 $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论。证毕。 ■

根据定理 1，命题公式 $A\rightarrow B$ 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论的证明，可转换为附加新的前提 A 后，命题公式 B 是命题公式 $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论的证明。这是间接构造证明推理方式之一。

例 4 用间接构造证明推理证明例 3 中的推理。

解 在例 3 中结论为 $p\rightarrow(\neg r\wedge s)$，可将 p 做为附加前提、$\neg r\wedge s$ 做为新的结论，进行证明。即：

前提：$p\rightarrow q$，$(r\vee\neg s)\rightarrow\neg q$

附加前提：p

新的结论：$\neg r\wedge s$

证明如下：

(1) p 附加前提引入

(2) $p\rightarrow q$ 前提引入

(3) q (1)(2)假言推论

(4) $(r\vee\neg s)\rightarrow\neg q$ 前提引入

(5) $\neg(r\vee\neg s)$ (3)(4)拒取式

(6) $\neg r \wedge s$　　(5)等值置换　■

间接构造证明推理的另一种方式是，结论的否定$\neg B$作为附加前提引入，新的结论为矛盾式，即，命题公式B是命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_n$的有效结论，只要证明命题公式$A_1, A_2, \ldots, A_n$和$\neg B$的有效结论为矛盾式。这种方式又称为**归谬推理**。事实上，归谬推理是间接构造证明推理中的反证法。

例 5　用归谬推理证明$r \to \neg q, r \vee s, s \to \neg q, p \to q \models \neg p$。

证明

(1)	$p \to q$	前提引入
(2)	$\neg\neg p$	结论的否定引入
(3)	p	(2)等值置换
(4)	q	(1)(3)假言推论
(5)	$s \to \neg q$	前提引入
(6)	$\neg s$	(4)(5)拒取式
(7)	$r \vee s$	前提引入
(8)	r	(6)(7)析取三段论
(9)	$r \to \neg q$	前提引入
(10)	$\neg q$	(8)(9)假言推论
(11)	$\neg q \wedge q$	(4)(10)合取
(12)	0	(11) 等值置换 ■

例 6　用归谬推理证明：如果小张守第一垒并且小李向乙队投球，则甲队将取胜。或者甲队未取胜，或者甲队成为联赛第一名。甲队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。因此，小李没有向乙队投球。

解　命题符号化：

p：小张守第一垒；q：小李向乙对投球；r：甲队取胜；s：甲队成为联赛第一名

前提：$(p \wedge q) \to r$，$\neg r \vee s$，$\neg s$，p

结论：$\neg q$

附加前提: $\neg\neg q$

新的结论：0

证明如下：

(1)	$\neg\neg q$	附加前提引入
(2)	$\neg r \vee s$	前提引入
(3)	$\neg s$	前提引入
(4)	$\neg r$	(2)(3)析取三段论
(5)	$(p \wedge q) \to r$	前提引入
(6)	$\neg(p \wedge q)$	(4)(5)拒取式
(7)	$\neg p \vee \neg q$	(6)等值置换
(8)	p	前提引入
(9)	$\neg q$	(7)(8)析取三段论
(10)	q	(1) 等值置换
(11)	$\neg q \wedge q$	(9)(10)合取
(12)	0	(11)等值置换 ■