第 5 章　谓词逻辑

§5.1　谓词逻辑的基本概念

命题逻辑的基本研究单位是简单命题，所研究的是命题之间的逻辑关系和推理。换言之，命题逻辑对自然语言的事实陈述及其推理只解析到简单命题为止，而无法研究命题的内部结构及命题间的内在关系。由此，导致一些简单而又常见的推理过程往往无法处理。例如，如下推理：

所有计算机科学与技术专业的本科生都要修离散数学；

王强是计算机科学与技术专业的本科生；

所以，王强要修离散数学。

显然，这个推理是正确的推理。从命题逻辑的观点看，上述推理过程含有三个简单命题，若分别用符号 p、q、r 表示“所有计算机科学与技术专业的本科生都要修离散数学”、“ 王强是计算机科学与技术专业的本科生”和“王强要修离散数学”，则 r 应该是 p 和 q 的有效结论，即，$p\wedge q\Rightarrow r$。根据命题逻辑公式的解释，在 p 取 1、q 取 1 和 r 取 0 下，命题公式 $p\wedge q\rightarrow r$ 的真值为 0。所以，命题公式 $p\wedge q\rightarrow r$ 不是永真公式，即，$p\wedge q\Rightarrow r$ 不成立。因此，命题逻辑无法正确地表述这一推理过程。

产生上述问题的原因在于：这类推理中，各命题之间的逻辑关系不仅体现在简单命题之间，而且体现在简单命题的内部成份之间。命题逻辑无法对简单命题的内部成份及其之间的逻辑结构进行描述和推理，这是命题逻辑的局限性。因此，有必要对简单命题进行进一步的解析，分析其中的更细节要素，即，分解出其中的个体词、谓词、量词和函词，研究它们的形式结构及逻辑关系。这就是**一阶谓词逻辑**所研究的内容。一阶谓词逻辑简称为**谓词逻辑**或**一阶逻辑**。

5.1.1　个体词

命题是具有真假意义的陈述句。从自然语言的语法角度，一个陈述句的主要结构形式为“主语+谓语”或“主语+谓语+宾语”。我们可以把陈述句所含有的各个句子成份作为基本单元，进行简单命题的进一步解析。例如，陈述句“离散数学是计算机科学与技术专业本科生的必修课程”属于“主语+谓语”的句子结构，其中，主语为“离散数学”，谓语为“是计算机科学与技术专业本科生的必修课程”；陈述句“x 大于 5”属于“主语+谓语+宾语”的句子结构，其中，主语为“x”，谓语为“大于”，宾语为“5”。

定义 1　在陈述句中，可以独立存在的具体的或抽象的客体（句子中的主语、宾语等），称为**个体词**（individual）。表示具体或特定的客体的个体词称为**个体常量**或**个体常元**（individual constant）。没有赋予具体内容或泛指的个体词称为**个体变元**或**个体变量**（individual variable）。个体变元的所有可能取值组成的集合称为**个体域**（individual field）。

一般地，个体常量用小写英文字母 a、b、c、…等表示，个体变量用小写英文字母 x、y、z、…等表示，个体域用 D 表示。个体域可以是有限集合，也可以是无限集合。

例如，在陈述句“3 是质数”中，“3”和“质数”是个体词，“3”是个体常量，“质数”是个体变量，其个体域为所有质数的集合；在陈述句“所有人都需要呼吸氧气”中，“人”

和“氧气”是个体词，“氧气”是个体常量，“人”是个体变量，其个体域是所有人的集合；在陈述句“$x<y+1$，$x\in\mathbf{Z}$，$y\in\mathbf{N}$ 且 $y<6$”中，“1”、“ x”和“y”都是个体词，“1”是个体常量，“x”和“y”都是个体变量，个体变量 x 的个体域为整数集合 **Z**，个体变量 y 的个体域为有限集合$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$。

5.1.2 谓词

谓语是构成一个句子必有的成份单元，在这里我们用下述概念对其进行形式化描述。

定义 1 在陈述句中，用来刻画个体词性质以及个体词之间相互关系的词（句子中的谓语），称为**谓词**（predicate）。表示具体或特定的性质或关系的谓词称为**谓词常量**或**谓词常元**（predicate constant）。没有赋予具体内容或泛指的谓词称为**谓词变量**或**谓词变元**（predicate variable）。表示 n 个个体词之间关系的谓词称为 ***n* 元谓词**（*n*-ary predicate）或 ***n* 元命题函数**（*n*-ary propositional function）。

谓词变元或谓词常元都用大写英文字母 P、Q、R、G、B、…等表示。含有 n 个个体变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n 元谓词用 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示。一元谓词 $P(x)$表示 x 具有性质 P；二元谓词 $P(x, y)$表示 x 和 y 具有关系 P；三元谓词 $P(x, y, z)$表示 x、y 和 z 具有关系 P。实质上，n 元谓词 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$可看成以个体域的笛卡尔积 $D_1\times D_2\times\ldots\times D_n$（$D_i$ 为 x_i 的个体域）为定义域，以$\{0, 1\}$值域的 n 元函数。不含有个体词的谓词称为 **0 元谓词**。0 元谓词实际上就是一般的命题。

对于 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$，如果个体变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 没有赋予确切的个体词，那么，该 n 元谓词就没有确切的真值，即，并非为一个命题。只有当个体变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 被赋予确定的个体词后，才能确定 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的真假值，此时，$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$才是一个命题。

例 1 表示如下命题中的谓词

① 离散数学是一门重要的计算机课程；

② 张兰和王强是同班同学；

③ 桂林位于北京和南宁之间；

④ 任意偶数能被 2 整除；

⑤ $x<y$；

⑥ 老李是小李的父亲。

解 ① 用一元谓词 $S(x)$表示“x 是一门重要的计算机课程”，用个体常量 a 表示“离散数学”。那么，命题①中的谓词表示为 $S(a)$；

② 用二元谓词 $P(x, y)$表示“x 和 y 是同班同学”，用个体常量 a 和 b 分别表示“张兰”和“王强”。那么，命题②中的谓词表示为 $P(a, b)$；

③ 用三元谓词 $Q(x, y, z)$表示“x 位于 y 和 z 之间”，用个体常量 a、b 和 c 分别表示“桂林”、“北京”和“南宁”。那么，命题③中的谓词表示为 $Q(a, b, c)$；

④ 用二元谓词 $P(x, y)$表示“x 能被 y 整除”，用个体常量 a 表示“2”， 用个体变量 x 表示“任意偶数”。那么，命题④中的谓词表示为 $P(x, a)$；

⑤ 用二元谓词 $R(x, y)$表示“x 小于 y”。那么，命题⑤中的谓词表示为 $R(x, y)$；

⑥ 用二元谓词 $H(x, y)$表示“x 是 y 的父亲”，用个体常量 a 和 b 分别表示“老李”和“小李”。那么，命题⑥中的谓词表示为 $H(a, b)$。 ■

值得注意的是，谓词中个体词的顺序是十分重要的，不能随意变更。例如，例 1 中命题⑥， $H(b, a)$表示的是“小李是老李的父亲”，显然，不同于 $H(a, b)$的含义。再如，例 1 中命题③，$Q(b, a, c)$表示的是“北京位于桂林和南宁之间”，$Q(c, a, b)$ 表示的是“南宁位于桂林和北京之间”，显然，它们都不同于 $Q(a, b, c)$的含义。

5.1.3 函词

在许多陈述句中，含有类似于“集合的幂集”“张山的父亲”“键盘的字符”等形式的句子成份。这些句子成份是个体词到个体词的映射，可以通过下述**函词**（function）来描述。

定义 1 个体词到个体词的映射称为**函词**（function），用小写字母 f、g、h、…等表示。以个体域的笛卡尔积 $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$（$D_i$ 为 x_i 的个体域）为定义域，以个体域 D 为值域的 n 元函数，称为 ***n* 元函词**（*n*-ary function），含有 n 个个体变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的 n 元函词用 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示。

实质上，函词就是一般意义下的函数，n 元函词就是 n 元函数。只不过，函词的定义域为个体域的笛卡尔积，函词的值域是个体域。因此，函词也就具有了函数的一些特征。对应于函数中的复合函数，函词也有复合函词。

例 1 表示如下命题中的谓词和函词

① 任意集合包含于它的幂集；

② 大连的海滩和北海的海滩一样漂亮；

③ 桂林的漓江是 5A 级旅游风景区；

④ 周宏的离散数学任课老师是教授；

⑤ 刘芳的妹妹喜欢唱歌；

⑥ 唐钢和李红的女儿在弹琵琶。

解 ① 用一元函词 $f(x)$表示“x 的幂集”，用二元谓词 $P(x, y)$表示“x 包含于 y”。那么，命题①中的谓词和函词表示为 $P(x, f(x))$；

② 用一元函词 $g(x)$表示“x 的海滩”，用二元谓词 $H(x,y)$表示“x 和 y 一样漂亮”，用个体常量 a 和 b 分别表示“大连”和“北海”。那么，命题②的谓词和函词表示为 $H(g(a), g(b))$；

③ 用一元函词 $f(x)$表示“x 的漓江”，用一元谓词 $Q(x)$表示“x 是 5A 级旅游风景区”，用个体常量 a 表示“桂林”。那么，命题③中的谓词和函词表示为 $Q(f(a))$；

④ 用一元函词 $f(x)$表示“x 的离散数学任课老师”，用一元谓词 $R(x)$表示“x 是教授”，用个体常量 a 表示“周宏”。那么，命题④中的谓词和函词表示为 $R(f(a))$；

⑤ 用一元函词 $g(x)$表示“x 的妹妹”，用二元谓词 $R(x, y)$表示“x 喜欢 y”，用个体常量 a 和 b 分别表示“刘芳”和“唱歌”。那么，命题⑤中的谓词和函词表示为 $R(g(a), b)$；

⑥ 用二元函词 $f(x, y)$表示“x 和 y 的女儿”，用二元谓词 $R(x, y)$表示“x 在弹 y”，用个体常量 a、b 和 c 分别表示“唐钢”、“李红”和“琵琶”。那么，命题⑥中的谓词和函词表示为 $R(f(a, b), c)$。 ■

值得注意的是，n 元谓词也是一个 n 元函数。n 元谓词和 n 元函词的区别在于：前者的值域为$\{0, 1\}$，而后者的值域为某一个体域。不要引起混淆。

5.1.4 量词

在 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中，对所有个体变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 都赋予确定的个体词，就可以得到一个命题。将 n 元谓词转换为一个命题的另外一种方式是对个体变元进行量化。

定义 1 将谓词中个体变元的取值限定为其个体域的每一个元素，称为个体变元的**全称量化**（universal quantification），所用的量词称为**全称量词**（universal quantifier），用符号$\forall$表示。并用$\forall x$、$\forall y$、$\forall z$、…等表示所有个体，而用$(\forall x)P(x)$、$(\forall y)P(y)$、$(\forall z)P(z)$、…等表示个体域中的所有个体具有性质 P。

全称量词对应于自然语言或数学中的“一切”、“所有”、“每一个”、“任意”、“凡”、“都”等词。

例 1　表示如下命题中的全称量词

① 空集包含于任意集合；

② 所有自然数非负；

③ 每一个计算机专业学生都要修离散数学；

④ 所有鸟都会飞；

⑤ 空集是任意非空集合的子集；

⑥ 每一个大学生都要熟练使用计算机。

解　① 用二元谓词 $P(x, y)$表示“x 包含于 y”， 用个体常量 a 表示“空集”， 用个体变量 x 表示“集合”。那么，命题①中的全称量词表示为$(\forall x)P(a, x)$；

② 用一元谓词 $Q(x)$表示“x 是负数”，用个体变量 x 表示“自然数”。那么，命题②中的全称量词表示为$(\forall x)\neg Q(x)$；

③ 用二元谓词 $R(x, y)$表示“x 要修 y”， 用个体常量 b 表示“离散数学”，用个体变量 x 表示“计算机专业学生”。那么，命题③中的全称量词表示为$(\forall x)R(x, b)$；

④ 用一元谓词 $P(x)$表示“x 会飞”，用个体变量 x 表示“鸟”。那么，命题④中的全称量词表示为$(\forall x)P(x)$；

⑤ 用二元谓词 $R(x, y)$表示“y 是 x 的子集”，用个体常元 a 表示“空集$\varnothing$”，用个体变量 x 表示“非空集合”。那么，命题⑤中的全称量词表示为$(\forall x)R(x, a)$；

⑥ 用二元谓词 $H(x,y)$表示“x 熟练使用 y”，用个体常量 a 表示“计算机”， 用个体变量 x 表示“大学生”。那么，命题⑥中的全称量词表示为$(\forall x)H(x, a)$。 ■

定义 2　将谓词中个体变元的取值限定为其个体域的某一个或多个元素，称为个体变元的**存在量化**（existential quantification），所用的量词称为**存在量词**（existential quantifier），用符号$\exists$表示。并用$\exists x$、$\exists y$、$\exists z$、…等表示个体域中的有的个体，而用$(\exists x)P(x)$、$(\exists y)P(y)$、$(\exists z)P(z)$、…等表示个体域中的有的个体具有性质 P。

存在量词对应于自然语言或数学中的“存在”、“有的”、“有一个”、“至少有一个”、“某一个”、“某些”等词。全称量词和存在量词统称为**量词**（quantifier）。

例 2　表示如下命题中的存在量词

① 有一些人登上过月球；

② 有的自然数是素数；

③ 有些同学没有认真完成离散数学作业；

④ 某些人用左手写字；

⑤ 至少完成一次综合实验；

⑥ 某一个星球存在生命。

解　① 用二元谓词 $P(x, y)$表示“x 登上过 y”， 用个体常量 a 表示“月球”， 用个体变量 x 表示“人”。那么，命题①中的存在量词表示为$(\exists x)P(x, a)$；

② 用一元谓词 $Q(x)$表示“x 是素数”，用个体变量 x 表示“自然数”。那么，命题②中的存在量词表示为$(\exists x)Q(x)$；

③ 用二元谓词 $R(x, y)$表示“x 认真完成 y”，用个体常量 b 表示“离散数学作业”，用个体变量 x 表示“同学”。那么，命题③中的存在量词表示为$(\exists x)\neg R(x, b)$；

④ 用二元谓词 $Q(x, y)$表示“x 用 y 写字”，用个体常量 a 表示“左手”，用个体变量 x 表示“人”。那么，命题④中的存在量词表示为$(\exists x)Q(x, a)$；

⑤ 用一元谓词 $Q(x)$表示“完成 x”，用个体变量 x 表示“综合实验”。那么，命题⑤中的存在量词表示为$(\exists x)Q(x)$；

⑥ 用二元谓词 $H(x, y)$表示“x 存在 y”，用个体变量 x 表示“星球”，用个体变量 y 表示“生命”。那么，命题⑥中的存在量词表示为$(\exists x)(\exists y)H(x, y)$。 ■

§5.2 谓词逻辑公式

5.2.1 谓词公式及其解释

自然语言形式表示的任何可判断真假的陈述句都可以分解为简单陈述句和关联词的连接形式，而简单陈述句又可以依据语句的结构和成份进一步解析为个体词、谓词、函词、量词等。这样自然语言的表示和推理，就可以转化为基于命题变元、命题常元、关联词、个体词、谓词、函词、量词等符号的形式表示和推理。由命题变元、命题常元、联结词、个体变元、个体常量、谓词、函词、量词等组成的用以表示复杂命题的符号串，称为**一阶谓词逻辑公式**（first order predicate logic formula），简称为**谓词逻辑公式**（predicate logic formula）或**一阶逻辑公式**（first order logic formula）。下面给出谓词逻辑公式的严格数学定义。

定义 1 个体变元、个体常元和函词按照一定规则组成的符号串，称为谓词逻辑的**项**（term）。 项按如下规则生成：

① 个体变元或个体常元是项；

② 如果$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$为 n 元函词，t_1、t_2、…、t_n 为项，那么 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$是项；

③ 有限次使用①和②后所得到的符号串才是项。

项的定义使得可以用函词来表示具有某些特定性质或某些特定形式的个体。例如，个体常元 a 和 b 是项；个体变元 x 和 y 是项；函词 $f(x, y) = x + y$ 和 $g(x, y) = x - y$ 是项；函词 $f(a, f(x, y)) = a + (x + y)$和 $g(x, f(a, b)) = x - (a + b)$也是项。

定义 2 设 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$为 n 元谓词，t_1、t_2、…、t_n 为项，则称 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$为**原子谓词逻辑公式**（atomic predicate logic formula），简称为**原子谓词公式**或**原子公式**（atomic formula）。

例如，用二元谓词 $H(x, y)$表示“x 在 y 的北方”，用个体常量 a 和 b 分别表示“北京”和“上海”。那么，$H(a, b)$表示“北京在上海的北方”，$H(a, b)$是一个原子公式。

再如，用二元函词 $f(x, y)$表示“x 和 y 的老乡”，用一元谓词 $R(x)$表示“x 是学习委员”，用个体常量 a 和 c 分别表示“周强”和“江川”。那么，$R(f(a, c))$表示“周强和江川的老乡是学习委员”，$R(f(a, c))$是一个原子公式。

定义 3 原子公式、量词和联结词按照一定规则组成的，用以表示复杂命题的符号串，称为**谓词逻辑合适公式**（well-formed predicate logic formula），简称为**谓词逻辑公式**或**谓词公式**（predicate formula）。谓词公式按如下规则生成：

① 原子公式是谓词公式；

② 如果 A 是谓词公式，则$(\neg A)$是谓词公式；

③ 如果 A 和 B 是谓词公式，则$(A\vee B)$、$(A\wedge B)$、$(A\rightarrow B)$、$(A\leftrightarrow B)$是谓词公式；

④ 如果 A 是谓词公式，则$(\forall x)A$、$(\exists x)A$ 是谓词公式；

⑤ 有限次使用①、②、③和④后所得到的符号串才是谓词公式。

例如，字符串$\neg H(x, y)$、$H(x, y)\vee G(x)$、$(\exists y)(H(x, y)\vee G(x))$、$(\exists y)H(x, y)\vee G(x)$、$(\exists y)(\forall x)H(x, y)$、$(\forall x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))\rightarrow H(x)$、$\neg(\exists y)H(x, y)$、$(\forall x)\neg H(x, y)$都满足谓词公式定义中的规则，所以，它们都是谓词公式；字符串$\neg H(x,\exists y$、$\neg H(\rightarrow\wedge\exists y$、$H(,\forall y)\vee G(\forall x)$、$(\exists)(H(x, y)\vee G(\forall x))$、$(y)H(x, y)\vee$、$(\forall x)(\forall)(A(x, y)$、$\neg(\exists y)(x,A(y)$、$(\forall x)\neg H(x\rightarrow y)$都不满足谓词公式定义中的规则，所以，这些符号串都不是谓词公式。

定义 4 在形如$(\forall x)A(x)$或$(\exists x)A(x)$的谓词公式中，称 $A(x)$为量词的**辖域**（scope）或**作用域**（function field），或者个体变元 x 的**约束域**（bound field）。并称 x 为量词$\forall$或$\exists$的**作用变元**（function variable）或**指导变元**（directed variable）。在辖域中，指导变元 x 的一切出现

称为 x 在公式中的**约束出现**（bound occurrence），并称该个体变元为**约束变元**（bound variable）。在谓词公式中，除约束变元外出现的个体变元称为**自由变元**（free variable），或者个体变元的**自由出现**（free occurrence）。

例 1 判断下列谓词公式中的约束变元和自由变元？并指出约束变元的约束域？

① $(\forall x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))\rightarrow H(x)$

② $(\forall x)(\exists y)(A(x, y)\wedge B(x)\rightarrow H(x))$

③ $(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x)\rightarrow H(x))$

④ $(\exists x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z))$

⑤ $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z))$

⑥ $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(u)\wedge G(z))$

解 ① 个体变元 y 是约束变元，其约束域为 $A(x,y)\wedge B(x)$；个体变元 x 既有约束出现，又有自由出现，其约束域为$(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))$。

② 个体变元 x 是约束变元，其约束域为$(\exists y)(A(x, y)\wedge B(x)\rightarrow H(x))$；个体变元 y 是约束变元，其约束域为 $A(x, y)\wedge B(x)\rightarrow H(x)$。

③ 个体变元 x 是自由变元；个体变元 y 是约束变元，其约束域为 $A(x, y)\wedge B(x)\rightarrow H(x)$。

④ 个体变元 x 和 y 是约束变元，它们的约束域分别为$(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z))$和 $A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z)$；个体变元 z 是自由变元。

⑤ 个体变元 x、y 和 z 是约束变元，它们的约束域分别为$(\forall y)(\forall z)(A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z))$、$(\forall z)(A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z))$和 $A(x, y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(x)\wedge G(z)$。

⑥ 个体变元 x、y 和 z 是约束变元，它们的约束域为$(\forall y)(\forall z)(A(x,y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(u)\wedge G(z))$、$(\forall z)(A(x,y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(u)\wedge G(z))$和 $A(x,y)\wedge B(x)\leftrightarrow H(u)\wedge G(z)$；个体变元 u 是自由变元。 ■

从上例可知，在一个谓词公式中，某一个个体变元的出现既可以是自由的，又可以是约束的。如，谓词公式$(\forall x)A(x)\wedge B(x)$中的个体变元 x；谓词公式$(\forall x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))\rightarrow H(x)$中的个体变元 x；谓词公式$(\exists x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))\leftrightarrow(\exists u)(H(y)\wedge G(u))$中的个体变元 y。

为了使得表示和推理过程中不致引起混淆，我们希望一个个体变元在同一个谓词公式中只以自由或约束一种形式出现，即，不同含义的个体变元总是以不同的变量符号来表示。为此，引入如下两个规则：

规则 1（约束变元的改名规则）

① 在量词的辖域中，对该量词的作用变元及其约束出现用一个新的个体变元替换；

② 新的个体变元一定要有别于改名辖域中的其它所有个体变元。

规则 2（自由变元的代入规则）

① 在谓词公式中，对自由变元每一处自由出现都用新的个体变元替换；

② 新的个体变元在原谓词公式中不能有任何形式的约束出现。

例 2 对下列谓词公式进行个体变元替换，使得每一个体变元有唯一的出现形式。

① $(\forall x)A(x)\wedge B(x)$

② $(\forall x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))\rightarrow H(x)$

③ $(\exists x)(\forall y)A(x, y)\leftrightarrow(\exists u)(H(y)\wedge G(u))$

④ $(\forall x)\ (A(x, y)\wedge B(x))\rightarrow(\forall y)H(x, y)$

⑤ $(\exists x)(\forall y)(A(x, z)\wedge B(y))\leftrightarrow(\exists y)(H(y)\wedge G(x))$

⑥ $(\forall x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)\wedge(\forall x)C(x)\wedge G(x)$

解 ① 谓词公式①中，个体变元 x 既有约束出现，又有自由出现。利用规则 2，对 $B(x)$中自由出现的个体变元 x 用个体变元 y 替换。所以，谓词公式①进行个体变量替换后的形式为$(\forall x)A(x)\wedge B(y)$；

② 谓词公式②中，个体变元 x 既有约束出现，又有自由出现。利用规则 2，对 $H(x)$

中自由出现的个体变元 x 用个体变元 z 替换。所以，谓词公式②进行个体变量替换后的形式为$(\forall x)(\forall y)(A(x, y)\wedge B(x))\rightarrow H(z)$；

③ 谓词公式③中，个体变元 y 既有约束出现，又有自由出现。利用规则 2，对 $H(y)$ 中自由出现的个体变元 y 用个体变元 z 替换。所以，谓词公式③进行个体变量替换后的形式为$(\exists x)(\forall y)A(x, y)\leftrightarrow(\exists u)(H(z)\wedge G(u))$；

④ 谓词公式④中，个体变元 x 和个体变元 y 都既有约束出现，又有自由出现。利用规则 2，对 $A(x,y)$中自由出现的个体变元 y 用个体变元 z 替换，对 $H(x, y)$中自由出现的个体变元 x 用个体变元 u 替换。所以，谓词公式④进行个体变量替换后的形式为$(\forall x)(A(x, z)\wedge B(x))\rightarrow(\forall y)H(u, y)$；

⑤ 谓词公式⑤中，个体变元 x 既有约束出现，又有自由出现；个体变元 y 出现在不同的辖域。利用规则 2，对 $G(x)$中自由出现的个体变元 x 用个体变元 w 替换；利用规则 1，对$(\exists y)(H(y)\wedge G(x))$中约束出现的个体变元 y 用个体变元 u 替换。所以，谓词公式⑤进行个体变量替换后的形式为$(\exists x)(\forall y)(A(x, z)\wedge B(y))\leftrightarrow(\exists u)\ (H(u)\wedge G(w))$；

⑥ 谓词公式⑥中，个体变元 x 既有约束出现，又有自由出现，且具有不同辖域的约束出现。利用规则 2，对 $G(x)$中自由出现的个体变元 x 用个体变元 w 替换；利用规则 1，对$(\exists x)B(x)$中约束出现的个体变元 x 用个体变元 y 替换；对$(\forall x)C(x)$中约束出现的个体变元 x 用个体变元 z 替换。所以，谓词公式⑥进行个体变量替换后的形式为$(\forall x)A(x)\wedge(\exists y)B(y)\wedge(\forall z)C(z)\wedge G(w)$。 ■

例 3 给出下列命题的谓词公式表示

① 每一个苹果都是红色的；

② 任意一个整数都是正整数或负整数；

③ 有一些实数是有理数；

④ 有一些人很聪明；

⑤ 有一些实数，使得 $x+5=3$；

⑥ 所有东南亚国家都遭受了金融危机。

解 ① 用一元谓词 $R(x)$表示“x 是红色的”，那么，命题①符号表示为：$(\forall x)R(x)$，$x\in$ {苹果}；

② 用一元谓词 $P(x)$表示“x 是正整数”、一元谓词 $N(x)$表示“x 是负整数”，那么，命题②符号表示为：$(\forall x)(P(x)\vee N(x))$，$x\in\mathbf{Z}$（整数集）；

③ 用一元谓词 $Q(x)$表示“x 是有理数”，那么，命题③符号表示为：$(\exists x)Q(x)$，$x\in\mathbf{R}$（实数集）；

④ 用一元谓词 $C(x)$表示“x 很聪明”，那么，命题④符号表示为：$(\exists x)C(x)$，$x\in$ {人}；

⑤ 用一元谓词 $E(x)$表示“$x + 5=3$”，那么，命题⑤符号表示为：$(\exists x)E(x)$，$x\in\mathbf{R}$；

⑥ 用二元谓词 $F(x,y)$表示“x 遭受了 y”、个体常元 a 表示“金融危机”，那么，命题⑥符号表示为：$(\forall x)\ F(x, a)$，$x\in$ {东南亚国家}。 ■

在命题的谓词公式表示中，明确地给出个体变元的个体域是非常重要的事情。例如，对于例 3 中的命题⑤，如果个体域为实数集，则可以找到 $x = -2$ 使谓词公式$(\exists x)E(x)$成立；如果个体域为自然数，则不存在使谓词公式$(\exists x)E(x)$成立的 x。

在谓词公式表示中，我们可以通过定义**特性谓词**（particular predicate），来实现对个体域的规范和表示。这种特性谓词在添加到谓词公式中时必须遵循如下原则：

① 对于全称量词$(\forall x)$，刻画其对应个体域的特性谓词作为蕴含式的前件加入；

② 对于存在量词$(\exists x)$，刻画其对应个体域的特性谓词通过合取加入。

例 4 用特性谓词表示例 3 中的各命题。

解 ① 用特性谓词 $A(x)$表示“x 是苹果”，命题①符号表示为：$(\forall x)(A(x)\rightarrow R(x))$；

② 用特性谓词 $Z(x)$表示“x 是整数”，命题②符号表示为：$(\forall x)(Z(x)\rightarrow(P(x)\vee N(x)))$；

③ 用特性谓词 $R(x)$表示“x 是实数”，命题③符号表示为：$(\exists x)(R(x)\wedge Q(x))$；

④ 用特性谓词 $P(x)$表示“x 是人”，命题④符号表示为：$(\exists x)(P(x)\wedge C(x))$；

⑤ 用特性谓词 $R(x)$表示“x 是实数”，命题⑤符号表示为：$(\exists x)(R(x)\wedge E(x))$；

⑥ 用特性谓词 $A(x)$表示“x 是东南亚国家”，命题⑥符号表示为：$(\forall x)(A(x)\rightarrow F(x, a))$。

■

自然语言的谓词公式符号表示，较之于命题公式符号表示要复杂得多。在自然语言的谓词公式符号表示中，不仅需要考虑语句之间的联接词，而且要将语句拆开分析其句子成分，考虑谓词、量词、函词、个体词等。这些工作的开展，关键在于词性翻译，如下给出一些常用规则：

① **代词**　对应于个体常元，如，人称代词“你”、“我”、“他”，指示代词“这个”、“那个”等；

② **专有名词**　对应于个体常元，如，人命“王刚”，地名“北京”等；

③ **普通名词**　一般对应于特性谓词，即，表示为“x 是…”；没有任何修饰词时，一般还需要引入量词，如，“人需要呼吸氧气”中的“人”就要引入全称量词；如果被名词所有格或物主代词限制或修饰时，相当于专有名词，则对应于函词，如，“他的书”就要引入函词；名词的所有格或物主代词，一般对应于函词的个体变元；

④ **动词**　对应于谓词，如，“我喜欢书”的动词“喜欢”；

⑤ **形容词**　对应于特性谓词，即，表示为“x 是…的”

⑥ **数量词**　对应于量词，如，“所有的植物”中的“所有”，“有些动物”中的“有些”；

⑦ **副词**　与其所修饰的词合并，不进行单独分析；

⑧ **前置词**　与其所修饰的词合并，不进行单独分析。

例 5　给出下列语句的谓词公式表示

① 沃尔玛超市供应一切简易办公用品；

② 没有以 0 为后继的自然数；

③ 有会说话的机器人；

④ 每个实数都存在比它大的另外的实数；

⑤ 每个人都有某些专长；

⑥ 尽管有人很聪明，但未必一切人都聪明。

解 ① 分析语句①的成分如下：

沃尔玛超市	供应	一切	简易	办公用品
专用名词	动词	量词	形容词	普通名词

用个体常元 a 表示“沃尔玛超市”；用二元谓词 $S(x, y)$表示“x 供应 y”；用特性谓词 $N(x)$表示“x 是简易的”；用特性谓词 $W(x)$表示“x 是办公用品”。那么，语句①的谓词公式表示为：$(\forall x)(N(x)\wedge W(x)\rightarrow S(a, x))$；

② 分析语句②的成分如下：

没	有	以	0	为后继的	自然数
否定联接词	数量词		专有名词	动词	普通名词

用个体常元 a 表示“0”；用二元谓词 $A(x, y)$表示“x 以 y 为后继”；用特性谓词 $N(x)$表示“x 是自然数”。那么，语句②的谓词公式表示为：$\neg(\exists x)(N(x)\wedge A(x, a))$；

③ 分析语句③的成分如下：

有	会说话的	机器人
数量词	动词	普通名词

用一元谓词 $S(x)$表示"x 会说话"；用特性谓词 $R(x)$表示"x 是机器人"。那么，语句③的谓词公式表示为：$(\exists x)(R(x)\wedge S(x))$；

④ 分析语句④的成分如下：

每个	实数	都存在	比	它	大的	另外的	实数
数量词	普通名词	数量词		代词	动词		普通名词

用二元谓词 $L(x, y)$表示"x 比 y 大"；用特性谓词 $R(x)$表示"x 是实数"。那么，语句④的谓词公式表示为：$(\forall x)(R(x) \rightarrow(\exists y)(R(y)\wedge L(y, x)))$；

⑤ 分析语句⑤的成分如下：

每个	人	都有	某些	专长
数量词	普通名词	动词	数量词	普通名词

用二元谓词 $H(x,y)$表示"x 有 y"；用特性谓词 $P(x)$表示"x 是人"；用特性谓词 $S(x)$表示"x 是专长"。那么，语句⑤的谓词公式表示为：$(\forall x)(P(x) \rightarrow(\exists y)(S(y)\wedge H(x, y)))$；

⑥ 分析语句⑥的成分如下：

尽管	有	人	很聪明，	但未必	一切	人	都聪明
联接词	数量词	普通名词	动词	联接词	数量词	普通名词	动词

用一元谓词 $C(x)$表示"x 很聪明"；用特性谓词 $P(x)$表示"x 是人"。那么，语句⑥的谓词公式表示为：$(\exists x)(P(x)\wedge C(x))\wedge\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow C(x))$。 ■

谓词公式是自然语言中事实的符号表示，当然谓词公式的表示也有正确与否之区分。谓词公式所表示的事实为真，则称谓词公式的取值为真；谓词公式所表示的事实为假，则称谓词公式的取值为假。谓词公式的真或假的取值称为谓词公式的**真值**（value）。谓词公式是由原子公式、逻辑联接词、量词等组成的符号串，只有对它们给予确切或具体的解释后，才能对谓词公式的真值进行分析。

定义 5 对谓词公式 G 中一些符号表示的含义进行明确的规定，称为谓词公式的一个**赋值**（evaluation），或者**解释**（explanation），记为 $\boldsymbol{I}$。谓词公式 G 的一个解释通常由如下四部分组成：

① 非空的个体域集合 D；

② 对谓词公式 G 中的个体常元，指定 D 中的某个特定的元素；

③ 对谓词公式 G 中的 n 元函词，指定 D^n 到 D 中的某个特定的函词；

④ 对谓词公式 G 中的 n 元谓词，指定 D^n 到$\{0, 1\}$的某个特定的谓词。

定义 6 对谓词公式 G 和解释 $\boldsymbol{I}$，如果在解释 $\boldsymbol{I}$ 下谓词公式 G 的真值为真，则称 $\boldsymbol{I}$ 为 G 的**成真解释**（true explanation）或**成真赋值**（true evaluation）；如果在解释 $\boldsymbol{I}$ 下谓词公式 G 的真值为假，则称 $\boldsymbol{I}$ 为 G 的**成假解释**（false explanation）或**成假赋值**（false evaluation）。

例 6 对于谓词公式$(\forall x)(\forall y)\neg(\forall z)\neg A(f(x, z), y))$，说明它在如下解释中的具体含义

解释 $\boldsymbol{I}_1$：个体域 $D_1 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

函词 $f(x, y) = x + y$

谓词 $A(x, y)$：$x = y$

解释 $\boldsymbol{I}_2$：个体域 D_2 为正有理数集合

函词 $f(x, y) = x\cdot y$

谓词 $A(x, y)$：$x = y$

解 在解释 $\boldsymbol{I}_1$ 下，谓词公式的含义为：对于 D_1 中所有的 x 和 y，并非对 D_1 中的每个 z，都有 $x + z \neq y$。换言之，对于 D_1 中所有的 x 和 y，存在 D_1 中的 z，使得 $x + z = y$。显然，当 x 取 3 和 y 取 1 时，不存在 D_1 中的 z，使得 $3 + z = 1$。所以，谓词公式在解释 $\boldsymbol{I}_1$ 下的取值为假，即，解释 $\boldsymbol{I}_1$ 是该谓词公式一个成假解释。

在解释 $\boldsymbol{I}_2$ 下，谓词公式的含义为：对于 D_2 中所有的 x 和 y，存在 D_2 中的 z，使得 $x\cdot z = y$。显然，谓词公式在解释 $\boldsymbol{I}_2$ 下的取值为真，即，解释 $\boldsymbol{I}_2$ 是该谓词公式一个成真赋值。 ■

例 7 对于谓词公式$(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x, f(a)))$，给出它在如下解释下的真值

解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 $D = \{\alpha, \beta\}$

个体常元 a 指定为α

函词指定为：$f(\alpha) = \beta$，$f(\beta) =\alpha$

谓词 $P(x)$指定为：$P(\alpha) = 1$，$P(\beta) = 0$

谓词 $Q(x, y)$指定为：$Q(\alpha, \alpha) = 0$，$Q(\alpha, \beta) = 1$，$Q(\beta, \alpha) = 1$，$Q(\beta, \beta) = 1$

解 由于谓词公式是由存在量词加以限制，根据存在量词的定义，只要个体域中有一个 x 使得 $P(f(x))\wedge Q(x, f(a))$为真，则原谓词公式为真。否则，只有当个体域中全部的 x 都使得 $P(f(x))\wedge Q(x, f(a))$为假，则原谓词公式为假。为此，分别考察 $x = \beta$ 和 $x = \alpha$时的真值情况。

当 $x = \beta$ 时，有

$f(\beta) =\alpha$

$P(f(x)) = P(f(\beta)) = P(\alpha) = 1$

$f(a) = f(\alpha) =\beta$

$Q(x, f(a)) = Q(\beta, f(\alpha))= Q(\beta, \beta) = 1$

$P(f(x))\wedge Q(x, f(a)) = P(f(\beta))\wedge Q(\beta, f(\alpha)) = 1\wedge 1=1$

即，存在 $x = \beta$，使得 $P(f(x))\wedge Q(x, f(a)) =1$。所以，谓词公式$(\exists x)(P(f(x))\wedge Q(x, f(a)))$的真值为 1。 ■

例 8 对于如下给定解释 $\boldsymbol{I}$

解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 D 为非负整数集合

个体常元 a 指定为 2

函词指定为：$f(x, y) = x + y$， $g(x, y) = x\cdot y$

谓词 $Q(x, y)$指定为：$x = y$

给出下列谓词公式的含义

① $(\forall x)Q(g(x, y), x)$

② $(\forall x)(\forall y)(Q(f(x, a), y)\rightarrow Q(f(y, a), x))$

③ $(\forall x)(\forall y)(\exists z)Q(f(x, y), z)$

④ $(\exists x)Q(f(x, x), g(x, x))$

解 ① 谓词公式①的含义为：对于任意非负整数 x，都有 $x\cdot y = x$。由于 $x\cdot y = x$ 是否成立，取决于 y 的取值。如果 y 的取值为 1，则 $x\cdot y = x$ 为真；否则，$x\cdot y = x$ 为假。所以，无法确定谓词公式①的真值，即，谓词公式①不是一个命题。

② 谓词公式②的含义为：对于任意非负整数 x 和 y，如果 $x+2 = y$ 则有 $y +2 = x$。显然，除当 x 和 y 取 0 外，其余取值均不成立。所以，谓词公式②的真值为假。

③ 谓词公式③的含义为：对于任意非负整数 x 和 y，都存在非负整数 z，使得 $x+y = z$。显然，谓词公式③的真值为真。

④ 谓词公式④的含义为：存在非负整数 x，使得 $x+x = x\cdot x$。显然，x 的取值为 0 或 2 时，$x+x = x\cdot x$ 成立。所以，谓词公式④的真值为真。 ■

从上述例子可以看出，谓词公式在不同的解释下可能有不同的真值。同时，并不是所有的解释下都可以得到谓词公式的真值，换言之，在某些解释下，谓词公式不一定是一个命题。例如，例 8 中谓词公式$(\forall x)Q(g(x, y), x)$在解释 $\boldsymbol{I}$ 下就不是一个命题。

5.2.2 谓词公式的分类

在谓词逻辑中，有的谓词公式在任何解释下真值都为真，有些谓词公式在任何解释下真值都为假，而又有些谓词公式既存在成真解释，又存在成假解释。

定义 1 如果谓词公式 A 在所有解释下的真值都为真，则称 A 为**永真谓词公式**，或者 A 是**永真的**，简称为**永真公式**（always true formula）或**重言式**（tautology），用 1 表示。

例 1 判断下列谓词公式是否为重言式？

① $(\forall x)(\exists y)P(x, y)\rightarrow(\exists y)(\forall x)P(x, y)$

② $(\exists x)(\forall y)Q(x, y)\rightarrow(\forall y)(\exists x)Q(x, y)$

③ $((\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x))\rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

④ $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\rightarrow((\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x))$

解 ①定义解释 $\boldsymbol{I}$: 个体域 D 为整数集合，$P(x, y)$指定为"$x+y = 0$"。在解释 $\boldsymbol{I}$ 下$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$成立，但是，$(\exists y)(\forall x)P(x, y)$并不成立。所以，谓词公式①不是重言式。

② 如果$(\exists x)(\forall y)Q(x, y)$成立，那么，存在 a 使得$(\forall y)Q(a, y)$成立，即，任意 y 的取值下 $Q(a, y)$成立。从而，$(\forall y)(\exists x)Q(x, y)$成立。所以，谓词公式②是重言式。

③ 如果$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$为假，则存在 a 使得$\neg(P(a)\vee Q(a))$成立，而 $\neg(P(a)\vee Q(a)) \Leftrightarrow \neg P(a)\wedge\neg Q(a)$，从而，$(\forall x)P(x)$为假且$(\forall x)Q(x)$为假，即，$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)$为假。所以，谓词公式③是重言式。

④ 定义解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 D 为自然数集合，$P(x)$指定为"x 是奇数"，$Q(x)$指定为"x 是偶数"。在解释 $\boldsymbol{I}$ 下$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$成立，但是，$(\forall x)(P(x)\vee(\forall x)Q(x)$并不成立。所以，谓词公式④不是重言式。 ■

定义 2 如果至少存在一组解释使谓词公式 A 的真值为真，则称 A 为**可满足谓词公式**，或者 A 是**可满足的**，简称为**可满足公式**（satisfable formula）。

例 2 判断下列谓词公式，哪些是可满足公式？

① $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$

② $(\exists x)\ (F(x)\wedge G(x))$

③ $(\exists x)(F(x)\vee G(x))\rightarrow(\exists x)F(x)\vee(\exists x)G(x)$

④ $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))\rightarrow(\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x)$

解 ① 定义解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 D 为实数集合，$P(x)$指定为"x 是整数"，$Q(x)$指定为"x 是有理数"。在解释 $\boldsymbol{I}$ 下$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$成立。所以，谓词公式①是可满足公式。

② 定义解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 D 为自然数集合，$F(x)$指定为"x 是自然数"，$G(x)$指定为"x 是整数"。在解释 $\boldsymbol{I}$ 下$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$成立。所以，谓词公式②是可满足公式。

③ 如果$(\exists x)(F(x)\vee G(x))$为真，则存在 a 使得 $F(a)\vee G(a)$成立，即，$F(a)$为真或者 $G(a)$为真，从而，$(\exists x)F(x)$成立或者$(\exists x)G(x)$成立，即，$(\exists x)F(x)\vee(\exists x)G(x)$为真。所以，谓词公式③是可满足公式，也是重言式。

④ 如果$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$为真，则存在 a 使得 $F(a)\wedge G(a)$成立，即，$F(a)$为真且 $G(a)$为真，从而，$(\exists x)F(x)$成立且$(\exists x)G(x)$成立，即，$(\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x)$为真。所以，谓词公式④是可满足公式，也是重言式。 ■

定义 3 如果谓词公式 A 在所有解释下的真值都为假，则称 A 为**永假谓词公式**，或者 A 是**永假的**，简称为**永假公式**或**矛盾式**（contradiction）或**不可满足公式**（unsatisfable formula），用 0 表示。

例 3 判断下列谓词公式，哪些是不可满足公式？

① $(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)\neg P(x)$

② $(\exists x)P(x)\wedge(\forall x)\neg P(x)$

③ $(\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x)\rightarrow(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$

解 ① 如果$(\exists x)\neg P(x)$成立，那么存在 a 使得$\neg P(a)$为真，即，存在 a 使得 $P(a)$为假。从而，$(\forall x)P(x)$不成立。如果$(\forall x)P(x)$成立，那么不存在 a 使得 $P(a)$为假，即，不存在 a 使得$\neg P(a)$为真。从而，$(\exists x)\neg P(x)$不成立。所以，谓词公式①是不可满足公式。

② 如果$(\forall x)\neg P(x)$成立，则不存在 a 使得$\neg P(a)$为假，即，不存在 a 使得 $P(a)$为真。从而，$(\exists x)P(x)$不成立。如果$(\exists x)P(x)$成立，那么存在 a 使得 $P(a)$为真，即，存在 a 使得$\neg P(a)$为假。从而，$(\forall x)\neg P(x)$不成立。所以，谓词公式②是不可满足公式。

③ 定义解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 D 为实数集合，$F(x)$指定为“x 是整数”，$G(x)$指定为“x 是自然数”。在 x 取值为 3 时，$F(3)$为真且 $G(3)$为真，从而$(\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x)$成立且$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$成立，即，$(\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x)\rightarrow(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$为真。所以，谓词公式③是可满足公式，不是矛盾式。 ■

从上述例子可以看出，判定一个谓词公式是否为重言式或矛盾式，都要求判断所有的解释满足或不满足该谓词公式。而解释依赖于个体域，个体域可以是有限集合，也可以是无限集合。这样解释的“所有”含义实际上是无法考虑的，这使得判断谓词公式是永真的或者永假的实际上异常困难。

5.2.3 谓词公式的等值式

不同的谓词公式，在相同的解释下的真值不一定相同。如果在所有可能的解释下，两个谓词公式的真值都相同，那么，从逻辑解释角度，它们所表述的含义是相同的，或者说是逻辑等价的。

定义 1 如果谓词公式 A 和 B 的等价式 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称谓词公式 A 与 B 是**逻辑等值的**（equivalent），或者是**谓词公式的等值式**，简称为**等值式**（equivalent formula），记为 $A\Leftrightarrow B$ 或 $A=B$。

例 1 判断下列谓词公式是否为等值式？

① $\neg(\forall x)F(x)$和$(\exists x)\neg F(x)$

② $\neg(\exists x)F(x)$和$(\forall x)\neg F(x)$

解 ① 判断$\neg(\forall x)F(x)$和$(\exists x)\neg F(x)$是否为等值式，就是判断$\neg(\forall x)F(x)\leftrightarrow(\exists x)\neg F(x)$是否为重言式，也就是判断是否$\neg(\forall x)F(x)\rightarrow(\exists x)\neg F(x)$为重言式且$(\exists x)\neg F(x)\rightarrow\neg(\forall x)F(x)$为重言式。

如果$\neg(\forall x)F(x)$为真，则存在 a 使得 $F(a)$为假，即，存在 a 使得$\neg F(a)$为真，从而，$(\exists x)\neg F(x)$为真；如果$(\exists x)\neg F(x)$为真，则存在 a 使得$\neg F(a)$为真，即，存在 a 使得 $F(a)$为假，从而，$\neg(\forall x)F(x)$为真。所以，$\neg(\forall x)F(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg F(x)$。

② 判断$\neg(\exists x)F(x)$和$(\forall x)\neg F(x)$是否为等值式，就是判断$\neg(\exists x)F(x)\leftrightarrow(\forall x)\neg F(x)$是否为重言式，也就是判断是否$\neg(\exists x)F(x)\rightarrow(\forall x)\neg F(x)$为重言式且$(\forall x)\neg F(x)\rightarrow\neg(\exists x)F(x)$为重言式。

如果$\neg(\exists x)F(x)$为真，则不存在 a 使得 $F(a)$为真，即，所有 x 使得 $F(x)$为假，从而，$(\forall x)\neg F(x)$为真；如果$(\forall x)\neg F(x)$为真，则所有 x 使得 $F(x)$为假，即，不存在 a 使得 $F(a)$为真，从而，$\neg(\exists x)F(x)$为真。所以，$\neg(\exists x)F(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg F(x)$。 ■

定义 2 设 P 是含有命题变元 $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ 的命题公式，$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ 是 n 个谓词公式，用谓词公式 A_i（i=1, 2, …, n）替换 P 中命题变元 p_i（i=1,2,…,n）的所有出现，所得到的谓词公式称为 P 的**代换实例**（substitute instance）。

例如，$(\forall x)F(x)\rightarrow(\forall x)G(x)$、$F(x)\rightarrow(\forall x)G(x)$和$(\exists x)F(x)\rightarrow(\exists x)G(x)$都是 $p\rightarrow q$ 的代换实例。但是，$(\forall x)(F(x)\rightarrow(\forall x)G(x))$、$(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$和$(\exists x)(F(x)\rightarrow G(x))$则不是 $p\rightarrow q$ 的代换实例。

定理 1 重言式的代换实例是重言式，矛盾式的代换实例是矛盾式。

定理 1 的证明从略。

例 2 判断下列谓词公式是否为等值式？

① $(\forall x)F(x)\to(\forall x)G(x)$和$\neg(\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x)$

② $(\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x)$和$\neg(\exists x)F(x)\to\neg(\exists x)G(x)$

③ $\neg((\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))$和$\neg(\forall x)F(x)\wedge\neg(\forall x)G(x)$

④ $\neg((\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x))$和$\neg(\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x)$

解 ① 在命题公式$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$中，将 p 替换为$(\forall x)F(x)$，将 q 替换为$(\forall x)G(x)$，可得代换实例$((\forall x)F(x)\to(\forall x)G(x))\leftrightarrow(\neg(\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))$。由于，$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$为重言式，所以，$((\forall x)F(x)\to(\forall x)G(x))\leftrightarrow(\neg(\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))$为重言式，即，$((\forall x)F(x)\to(\forall x)G(x))\Leftrightarrow(\neg(\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))$。

② 在命题公式$(p\vee\neg q)\leftrightarrow(\neg p\to\neg q)$中，将 p 替换为$(\exists x)F(x)$，将 q 替换为$(\exists x)G(x)$，可得代换实例$((\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x))\leftrightarrow(\neg(\exists x)F(x)\to\neg(\exists x)G(x))$。由于，$(p\vee\neg q)\leftrightarrow(\neg p\to\neg q)$为重言式，所以，$((\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x))\leftrightarrow(\neg(\exists x)F(x)\to\neg(\exists x)G(x))$为重言式，即，$((\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x))\Leftrightarrow(\neg(\exists x)F(x)\to\neg(\exists x)G(x))$。

③ 在命题公式$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$中，将 p 替换为$(\forall x)F(x)$，将 q 替换为$(\forall x)G(x)$，可得代换实例$\neg((\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))\leftrightarrow\neg(\forall x)F(x)\wedge\neg(\forall x)G(x)$。由于，$\neg(p\vee q)\leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q)$为重言式，所以，$\neg((\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))\leftrightarrow\neg(\forall x)F(x)\wedge\neg(\forall x)G(x)$为重言式，即，$\neg((\forall x)F(x)\vee(\forall x)G(x))\Leftrightarrow\neg(\forall x)F(x)\wedge\neg(\forall x)G(x)$。

④ 在命题公式$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$中，将 p 替换为$(\exists x)F(x)$，将 q 替换为$(\exists x)G(x)$，可得代换实例$\neg((\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x))\leftrightarrow\neg(\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x)$。由于，$\neg(p\wedge q)\leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$为重言式，所以，$\neg((\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x))\leftrightarrow\neg(\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x)$为重言式，即，$\neg((\exists x)F(x)\wedge(\exists x)G(x))\Leftrightarrow\neg(\exists x)F(x)\vee\neg(\exists x)G(x)$。 ■

类似于命题逻辑的等值式，人们已经证明了一些重要的等值式。利用这些等值式，就可以推演出更多的等值式，这一过程称为**谓词逻辑的等值演算**，简称为**等值演算**（equivalent calculus）。

下面给出一些基本的等值式：（设 $A(x)$、$B(x)$是含有个体变元 x 的自由出现的谓词公式，B 中不含有 x 的出现，$P(x, y)$是含有个体变元 x 和 y 的自由出现的谓词公式）

命题逻辑中等值式的推广 命题公式中的重言式的代换实例都是谓词公式的重言式，因此命题逻辑中的所有基本等值式的代换实例都是谓词公式的等值式。

例如： 幂等律 $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)$

$(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)$

$(\exists x)A(x)\vee(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)A(x)$

$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)A(x)$

排中律 $(\forall x)A(x)\vee\neg(\forall x)A(x)\Leftrightarrow 1$

$(\exists x)A(x)\vee\neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow 1$

矛盾律 $(\forall x)A(x)\wedge\neg(\forall x)A(x)\Leftrightarrow 0$

$(\exists x)A(x)\wedge\neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow 0$

量词消去律 （设个体域为有限集 $D=\{a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n\}$）

① $(\forall x)A(x)\Leftrightarrow A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\ldots\wedge A(a_n)$

② $(\exists x)A(x)\Leftrightarrow A(a_1)\vee A(a_2)\vee\ldots\vee A(a_n)$

量词与否定的交换律

① $\neg(\forall x)A(x)\Leftrightarrow(\exists x)\neg A(x)$

② $\neg(\exists x)A(x)\Leftrightarrow(\forall x)\neg A(x)$

量词辖域的收缩与扩张律

① $(\forall x)(A(x)\vee B)\Leftrightarrow(\forall x)A(x)\vee B$

② $(\forall x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge B$

③ $(\exists x)(A(x)\vee B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee B$

④ $(\exists x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\wedge B$

⑤ $(\forall x)(A(x)\to B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\to B$

⑥ $(\forall x)(B\to A(x)) \Leftrightarrow B\to(\forall x)A(x)$

⑦ $(\exists x)(A(x)\to B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\to B$

⑧ $(\exists x)(B\to A(x)) \Leftrightarrow B\to(\exists x)A(x)$

量词分配律

① $(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\wedge B(x))$

② $(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\vee B(x))$

③ $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x)\vee B(y))$

④ $(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y))$

⑤ $(\exists x)(A(x)\to B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x)$

双量词交换律

① $(\forall x)(\forall y)P(x, y)\Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x, y)$

② $(\exists x)(\exists y)P(x, y)\Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x, y)$

谓词公式的等值演算，除了要使用上述这些基本等值式外，还要用到如下规则：

置换规则　在含有谓词公式 A 的谓词公式$\Phi(A)$中，将所有谓词公式 A 的出现用谓词公式 B 来替换，得到新的谓词公式$\Phi(B)$，如果 $A\Leftrightarrow B$，那么，$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$。

换名规则　在谓词公式 A 中，对某量词辖域内的某约束变元的所有约束出现及相应的指导变元用该量词辖域中未曾出现过的个体变元代替，得到谓词公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$。

代替规则　在谓词公式 A 中，对某自由出现的个体变元的所有自由出现用 A 中未曾出现过的个体变元代替，得到谓词公式 B，则 $A\Leftrightarrow B$。

例 3　证明如下谓词公式的等值式

① $(\forall x)(A(x)\vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\vee B$

② $(\forall x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge B$

③ $(\exists x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\wedge B$

④ $(\forall x)(A(x)\to B) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\to B$

⑤ $(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\wedge B(x))$

⑥ $(\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\vee B(x))$

⑦ $(\exists x)(B\to A(x)) \Leftrightarrow B\to(\exists x)A(x)$

⑧ $(\exists x)(A(x)\to B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x)$

证明 ① $(\forall x)A(x)\vee B \Leftrightarrow 0$，当且仅当 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 0$，且，$B\Leftrightarrow 0$

当且仅当 $B \Leftrightarrow 0$，且，存在 a 使得 $A(a) \Leftrightarrow 0$

当且仅当 $(\forall x)(A(x)\vee B) \Leftrightarrow 0$

所以，$(\forall x)(A(x)\vee B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\vee B$。证毕。

② $(\forall x)A(x)\wedge B \Leftrightarrow 1$，当且仅当 $(\forall x)A(x) \Leftrightarrow 1$ 且 $B\Leftrightarrow 1$

当且仅当 $B \Leftrightarrow 1$ 且任意 a 使得 $A(a) \Leftrightarrow 1$

当且仅当 $(\forall x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow 1$

所以，$(\forall x)(A(x)\wedge B) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge B$。证毕。

③ $(\exists x)(A(x)\wedge B)$

$\Leftrightarrow \neg\neg((\exists x)(A(x)\wedge B))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\exists x)(A(x)\wedge B))$

$\Leftrightarrow \neg((\forall x)(\neg A(x)\vee\neg B))$

$\Leftrightarrow \neg((\forall x)\neg A(x)\vee\neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg A(x)\wedge\neg\neg B$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg\neg A(x)\wedge B$

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\wedge B$　　　　　　　　证毕。

④ $(\forall x)(A(x)\to B)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x)\vee B)$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)\vee B$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)A(x)\vee B$

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\to B$　　　　　　　　证毕。

⑤ $(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow 1$，当且仅当 任意 a 使得 $A(a)\wedge B(a) \Leftrightarrow 1$

当且仅当 任意 a 使得 $A(a) \Leftrightarrow 1$ 且 $B(a) \Leftrightarrow 1$

当且仅当 $(\forall x)A(x)\Leftrightarrow 1$ 且$(\forall x)B(x)\Leftrightarrow 1$

当且仅当 $(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) \Leftrightarrow 1$

所以，$(\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\wedge B(x))$。证毕。

⑥ $(\exists x)(A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\exists x)(A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\exists x)(A(x)\vee B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg((\forall x)(\neg A(x)\wedge\neg B(x)))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg A(x)\wedge(\forall x)\neg B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)\neg A(x)\vee\neg(\forall x)\neg B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg\neg A(x)\vee(\exists x)\neg\neg B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$　　　　证毕。

⑦ $(\exists x)(B\to A(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg B\vee A(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg B\vee (\exists x)A(x)$

$\Leftrightarrow \neg B\vee (\exists x)A(x)$

$\Leftrightarrow B\to(\exists x)A(x)$　　　　证毕。

⑧ $(\exists x)(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)\vee (\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\to(\exists x)B(x)$　　　　　证毕。　■

例 4　设个体域为 $D = \{a, b, c\}$，消去下列谓词公式中的量词

① $(\exists x)A(x)\to(\forall x)B(x)$

② $(\forall x)(A(x)\vee(\exists y)B(y))$

③ $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

④ $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$

⑤ $(\forall x)(\exists y)(A(x)\vee B(y))$

⑥ $(\forall x)(A(x)\to(\exists x)B(x))$

解 ① $(\exists x)A(x)\to(\forall x)B(x)$

$\Leftrightarrow (A(a)\vee A(b)\vee A(c))\to(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c))$

② $(\forall x)(A(x)\vee(\exists y)B(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\vee(B(a)\vee B(b)\vee B(c)))$

$\Leftrightarrow (A(a)\vee(B(a)\vee B(b)\vee B(c)))\wedge(A(b)\vee(B(a)\vee B(b)\vee B(c)))\wedge (A(c)\vee(B(a)\vee B(b)\vee B(c)))$

③ $(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x, a)\vee P(x, b)\vee P(x, c))$

$\Leftrightarrow (P(a, a)\vee P(a, b)\vee P(a, c))\vee(P(b, a)\vee P(b, b)\vee P(b, c))\vee(P(c, a)\vee P(c, b)\vee P(c, c))$

④ $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x, a)\wedge P(x, b)\wedge P(x, c))$

$\Leftrightarrow (P(a, a)\wedge P(a, b)\wedge P(a, c))\vee(P(b, a)\wedge P(b, b)\wedge P(b, c))\vee(P(c, a)\wedge P(c, b)\wedge P(c, c))$

⑤ $(\forall x)(\exists y)(A(x)\vee B(y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((A(x)\vee B(a))\vee(A(x)\vee B(b))\vee(A(x)\vee B(c)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(a)\vee B(b)\vee B(c))$

$\Leftrightarrow ((A(a)\vee B(a)\vee B(b)\vee B(c))\wedge(A(b)\vee B(a)\vee B(b)\vee B(c))\wedge(A(c)\vee B(a)\vee B(b))\vee B(c)))$

⑥ $(\forall x)(A(x)\to(\exists x)B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\to(B(a)\vee B(b)\vee B(c))$

$\Leftrightarrow (A(a)\to(B(a)\vee B(b)\vee B(c))\wedge(A(b)\to(B(a)\vee B(b)\vee B(c))\wedge(A(c)\to(B(a)\vee B(b)\vee B(c))$ ■

例 5 给定解释 $\boldsymbol{I}$：

个体域 $D = \{2, 3\}$

个体常元 a 指定为 2

函词 $f(x)$ 指定为：$f(2) =3$，$f(3) =2$

谓词 $P(x, y)$指定为：$P(2, 2) = P(2, 3) = P(3, 2) = 1$，$P(3, 3) = 0$

谓词 $Q(x, y)$指定为：$Q(2, 2) = Q(3, 3) = 1$，$Q(2, 3) = Q(3, 2) = 0$

谓词 $G(x)$指定为：$G(2) = 0$，$G(3) = 1$

求下列各谓词公式的真值

① $(\forall x)(G(x)\vee P(a, x))$

② $(\exists x)(G(f(x))\vee Q(f(x), x))$

③ $(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$

④ $(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$

解 ① 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下，$(\forall x)(G(x)\vee P(a, x)) \Leftrightarrow$

$(\forall x)(G(x)\vee P(2, x)) \Leftrightarrow$

$(G(2)\vee P(2, 2)) \wedge(G(3)\vee P(3, 2)) \Leftrightarrow$

$(0\vee 1)\wedge(1\vee 1) \Leftrightarrow 1$

② 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下，$(\exists x)(G(f(x))\vee Q(f(x), x)) \Leftrightarrow$

$(G(f(2))\vee Q(f(2), 2))\vee(G(f(3))\vee Q(f(3), 3)) \Leftrightarrow$

$(G(3)\vee Q(3, 2))\vee(G(2)\vee Q(2, 3)) \Leftrightarrow$

$(1\vee 0)\vee(0\vee 0) \Leftrightarrow 1$

③ 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下，$(\forall x)(\exists y)Q(x, y) \Leftrightarrow$

$(\forall x)(Q(x, 2)\vee Q(x, 3)) \Leftrightarrow$

$(Q(2, 2)\vee Q(2, 3))\wedge(Q(3, 2)\vee Q(3, 3)) \Leftrightarrow$

$(1\vee 0)\wedge(0\vee 1) \Leftrightarrow 1$

④ 在解释 $\boldsymbol{I}$ 下，$(\exists y)(\forall x)Q(x, y) \Leftrightarrow$

$(\exists y)(Q(2, y)\wedge Q(3, y)) \Leftrightarrow$

$(Q(2, 2)\wedge Q(3, 2))\vee(Q(2, 3)\wedge Q(3, 3)) \Leftrightarrow$

$(1\wedge 0)\vee(0\wedge 1) \Leftrightarrow 0$

在解释 $\boldsymbol{I}$ 下，谓词公式$(\forall x)(\exists y)Q(x, y)$和$(\exists y)(\forall x)Q(x, y)$的真值不同。由此可以看出，量词的次序并不一定能随意调换。 ■

例 6 证明如下谓词公式的等值式

① $\neg(\exists x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\to\neg B(x))$

② $\neg(\forall x)(A(x)\to B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$

③ $\neg(\forall x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\to P(x, y))\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y)\wedge\neg P(x, y))$

④ $\neg(\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y)\wedge P(x, y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\to\neg P(x, y))$

⑤ $(\forall x)A(x)\to B(x) \Leftrightarrow (\exists y)(A(y)\to B(x))$

⑥ $\neg(\forall x)(A(x)\vee B(x)\to B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$

证明 ① $\neg(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg(A(x)\wedge B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg A(x)\vee\neg B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\to\neg B(x))$ 证毕。

② $\neg(\forall x)(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(A(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg A(x)\wedge\neg B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$ 证毕。

③ $\neg(\forall x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\to P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\to P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\neg(A(x)\wedge B(y)\to P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)\neg(\neg(A(x)\wedge B(y))\vee P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\neg\neg(A(x)\wedge B(y))\wedge\neg P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y)\wedge\neg P(x, y))$ 证毕。

④ $\neg(\exists x)(\exists y)(A(x)\wedge B(y)\wedge P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg(\exists y)(A(x)\wedge B(y)\wedge P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\neg(A(x)\wedge B(y)\wedge P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\neg(A(x)\wedge B(y))\vee\neg P(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\to\neg P(x, y))$ 证毕。

⑤ $(\forall x)A(x)\to B(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x)\vee B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)\vee B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists y)\neg A(y)\vee B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\neg A(y)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists y)(A(y)\to B(x))$ 证毕。

⑥ $\neg(\forall x)(A(x)\vee B(x)\to B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg(A(x)\vee B(x))\vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((A(x)\vee B(x))\wedge\neg B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((A(x)\wedge\neg B(x))\vee(B(x)\wedge\neg B(x)))$

$\Leftrightarrow (\exists x)((A(x)\wedge\neg B(x))\vee 0) \Leftrightarrow(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$ 证毕。 ■

5.2.4 谓词公式的范式

在命题逻辑中，命题公式都可以转换为与之等值的规范型或范式，范式对于命题公式的研究具有重要的作用。类似地，对于谓词公式来说，也有规范型，即，**谓词公式的范式**（normal form）。

定义 1 对于谓词公式 G，如果 G 中的所有量词都位于表达式的最左端，且量词的辖域都延伸到该公式的末端，即，具有形式

$$(\boldsymbol{Q}_1x_1)(\boldsymbol{Q}_2x_2)\ldots(\boldsymbol{Q}_nx_n)\,M(x_1, x_1, ..., x_n)$$

其中，$\boldsymbol{Q}_i$ $(i = 1, 2, ... , n)$为量词$\forall$或$\exists$；$M(x_1, x_1, ..., x_n)$中不含有量词。则称 G 为**谓词公式的前束范式**，简称为**前束范式**（prenex normal form），并称 $M(x_1, x_1, ..., x_n)$为 G 的**母式**（matrix）。

例如，$(\forall x)(\forall y)(A(x)\vee B(y)\rightarrow\neg P(x, y))$、$(\exists x)(\exists y)(\forall z)(A(x)\wedge B(y, z)\wedge P(x, y, z))$和$(\exists x)(\forall y)(P(x, y)\rightarrow A(x,y))$都是前束范式；而$(\forall x)(\forall y)(A(x)\wedge B(y)\rightarrow\neg(\forall y)P(x, y))$、$(\exists x)\neg(\exists y)P(x, y, z)$、$(\exists y)(\forall z)(A(x)\wedge B(y, z)\wedge(\exists x)P(x, y, z))$和$(\forall y)(P(y)\rightarrow(\exists x)A(x,y))$都不是前束范式。

定理 1　任意谓词公式都存在与之等值的前束范式。

证明　对于任意谓词公式 G，可通过下述步骤将其转化为与之等值的前束范式：

步骤一：　消去谓词公式中的联结词“$\rightarrow$”、“$\leftrightarrow$”；

步骤二：　运用德摩根律，将$\neg$移到原子谓词公式的前端；

步骤三：　通过谓词等值公式将所有量词移到公式的前端。

经过上述步骤，便可求得谓词公式 G 的前束范式，由于，每一步骤都是采用谓词公式的等值演算，所以，得到的前束范式与原谓词公式 G 等值。证毕。■

例 1　求下列谓词公式的前束范式

① $(\forall x)A(x)\wedge\neg(\exists x)B(x)$

② $(\forall x)(A(x)\vee\neg(\exists y)B(x, y))$

③ $(\forall x)(\exists y)A(x, y)\rightarrow(\exists x)B(x)$

④ $\neg(\forall x)A(x, y)\rightarrow(\forall y)\neg B(x, y)$

⑤ $(\exists x)A(x)\rightarrow((\exists y)B(y)\rightarrow(\forall x)B(x))$

⑥ $(\forall x)(P(x,y)\rightarrow(\exists y)B(y))\rightarrow(\forall x)Q(x, y)$

解　① $(\forall x)A(x)\wedge\neg(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)\neg B(x)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\wedge\neg B(x))$

② $(\forall x)(A(x)\vee\neg(\exists y)B(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\vee(\forall y)\neg B(x, y))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x)\vee\neg B(x, y))$

③ $(\forall x)(\exists y)A(x, y)\rightarrow(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\exists y)A(x, y)\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\exists y)A(x, y)\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)\neg A(x, y)\vee(\exists x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)((\forall y)\neg A(x, y)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\neg A(x, y)\vee B(x))$

④ $\neg(\forall x)A(x, y)\rightarrow(\forall y)\neg B(x, y)$

$\Leftrightarrow \neg\neg(\forall x)A(x, y)\vee(\forall y)\neg B(x, y)$

$\Leftrightarrow (\forall x)A(x, y)\vee(\forall y)\neg B(x, y)$

$\Leftrightarrow (\forall x)A(x, u)\vee(\forall y)\neg B(v, y)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x, u)\vee\neg B(v, y))$

⑤ $(\exists x)A(x)\rightarrow((\exists y)B(y)\rightarrow(\forall x)B(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)A(x)\vee(\neg(\exists y)B(y)\vee(\forall x)B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)\vee(\forall y)\neg B(y)\vee(\forall z)B(z)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\neg A(x)\vee\neg B(y)\vee B(z))$

⑥ $(\forall x)(P(x,y)\rightarrow(\exists y)B(y))\rightarrow(\forall x)Q(x, y)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x,y)\vee(\exists y)B(y))\vee(\forall x)Q(x, y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg P(x,y)\vee(\exists y)B(y))\vee(\forall x)Q(x, y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\neg\neg P(x,y)\wedge\neg(\exists y)B(y))\vee(\forall x)Q(x, y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x,y)\wedge(\forall y)\neg B(y))\vee(\forall x)Q(x, y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(P(x,z)\wedge(\forall y)\neg B(y))\vee(\forall u)Q(u, w)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(P(x,z)\wedge\neg B(y))\vee(\forall u)Q(u, w)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall u) ((P(x,z)\wedge\neg B(y))\vee Q(u, w))$ ■

例 2 举例说明谓词公式的前束范式并不唯一。

解 考察谓词公式$(\exists x)A(x)\vee\neg(\forall x)B(x)$，进行如下等值演算

$(\exists x)A(x)\vee\neg(\forall x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)\neg B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists y)\neg B(y)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\vee(\exists y)\neg B(y))$

$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x)\vee\neg B(y))$

$(\exists x)A(x)\vee\neg(\forall x)B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)\neg B(x)$

$\Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\vee\neg B(x))$

显然，$(\exists x)(\exists y)(A(x)\vee\neg B(y))$和$(\exists x)(A(x)\vee\neg B(x))$都是谓词公式$(\exists x)A(x)\vee\neg(\forall x)B(x)$的前束范式。所以，谓词公式的前束范式不一定唯一。 ■

§5.3 谓词逻辑推理

谓词逻辑是命题逻辑的进一步发展，因此命题逻辑的推理理论在谓词逻辑中几乎可以完全照搬，只不过谓词逻辑所涉及的是谓词公式。**谓词逻辑推理**（predicate logic reasoning）是由已知的谓词公式为前提推出谓词公式的结论的过程。

定义 1 对于谓词公式 A 和 B，如果蕴含式 $A\to B$ 是永真的，那么，称该蕴含式为谓词公式的永真蕴含式或谓词公式的重言蕴含式，简称为**永真蕴含式**（always true implication）或**重言蕴含式**（tautology implication）。记为 $A\Rightarrow B$。

例 1 判断如下谓词公式的蕴含式是否为永真蕴含式？

① $(\forall x)A(x) \to (\forall x)A(x)\vee B(x,y)$

② $(\forall x)A(x)\wedge(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x)) \to(\forall x)A(x)$

③ $\neg((\forall x)A(x)\wedge (\exists y)B(y)) \to \neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists y)B(y)$

④ $(\forall x)(A(x)\vee B(x)) \to (\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$

解 ① $(\forall x)A(x) \to (\forall x)A(x)\vee B(x,y)$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x)A(x)\vee((\forall x)A(x)\vee B(x,y))$

$\Leftrightarrow (\neg(\forall x)A(x)\vee(\forall x)A(x))\vee B(x,y)$

$\Leftrightarrow 1\vee B(x,y)$

$\Leftrightarrow 1$

所以，$(\forall x)A(x) \Rightarrow (\forall x)A(x)\vee B(x,y)$。

② $(\forall x)A(x)\wedge(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x)) \to (\forall x)A(x)$

$\Leftrightarrow \neg((\forall x)A(x)\wedge(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x))) \vee (\forall x)A(x)$

$\Leftrightarrow (\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x)))\vee(\forall x)A(x)$

$\Leftrightarrow (\neg(\forall x)A(x) \vee(\forall x)A(x))\vee\neg(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow 1\vee\neg(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x))$

$\Leftrightarrow 1$

所以，$(\forall x)A(x)\wedge(\neg(\forall x)A(x)\vee B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)$。

③ $\neg((\forall x)A(x)\wedge(\exists y)B(y))\to\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists y)B(y)$

$\Leftrightarrow\neg\neg((\forall x)A(x)\wedge(\exists y)B(y))\vee\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists y)B(y)$

$\Leftrightarrow((\forall x)A(x)\wedge(\exists y)B(y))\vee\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists y)B(y)$

$\Leftrightarrow(((\forall x)A(x)\vee\neg(\forall x)A(x))\wedge((\exists y)B(y))\vee\neg(\forall x)A(x)))\vee\neg(\exists y)B(y)$

$\Leftrightarrow(1\wedge((\exists y)B(y)\vee\neg(\forall x)A(x)))\vee\neg(\exists y)B(y)$

$\Leftrightarrow((\exists y)B(y)\vee\neg(\exists y)B(y))\vee\neg(\forall x)A(x)$

$\Leftrightarrow 1\vee\neg(\forall x)A(x)$

$\Leftrightarrow 1$

所以，$\neg((\forall x)A(x)\wedge(\exists y)B(y))\Rightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists y)B(y)$。

④ 取解释 $\boldsymbol{I}$：个体域 D 为自然数，谓词 $A(x)$表示“x 是偶数”，谓词 $B(x)$表示“x 是奇数”。显然， 在解释下 $\boldsymbol{I}$，$(\forall x)(A(x)\vee B(x))$为真，$(\forall x)A(x)$为假，$(\forall x)B(x)$为假。从而，$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$为假，即，$(\forall x)(A(x)\vee B(x))\to(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$的真值为假。所以，蕴含式④不是永真蕴含式。 ■

命题逻辑中介绍的重言蕴含式，在谓词逻辑中的代入实例都是谓词逻辑的永真蕴含式。同时，由于等值式和蕴含式之间的关系，每一个等值式均可当做两个永真蕴含式来使用。例如，下列永真蕴含式

$(\forall x)A(x)\Rightarrow(\forall x)A(x)\vee(\exists y)B(y)$ （附加式）

$(\forall x)A(x)\wedge((\forall x)A(x)\to(\exists y)B(y))\Rightarrow(\exists y)B(y)$ （假言推论）

$\neg(\exists y)B(y)\wedge((\forall x)A(x)\to(\exists y)B(y))\Rightarrow\neg(\forall x)A(x)$ （拒取式）

$\neg((\forall x)A(x)\wedge(\exists x)B(x,y))\Rightarrow\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists x)B(x,y)$ （德摩根律）

$\neg(\forall x)A(x)\vee\neg(\exists x)B(x,y)\Rightarrow\neg((\forall x)A(x)\wedge(\exists x)B(x,y))$ （德摩根律）

谓词逻辑中增加了量词新的要素，为此，下面给出关于量词分配的几个常用的永真蕴含式：

① $(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\vee B(x))$

② $(\exists x)(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

③ $(\forall x)(A(x)\to B(x))\Rightarrow(\forall x)A(x)\to(\forall x)B(x)$

④ $(\forall x)(A(x)\to B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\to(\exists x)B(x)$

⑤ $(\forall x)(\forall y)A(x,y)\Rightarrow(\forall x)A(x,x)$

⑥ $(\exists x)A(x,x)\Rightarrow(\exists x)(\exists y)A(x,y)$

⑦ $(\exists x)(\forall y)A(x,y)\Rightarrow(\forall y)(\exists x)A(x,y)$

例 2 证明如下永真蕴含式

① $(\forall x)(A(x)\to B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\to(\exists x)B(x)$

② $(\forall x)(\forall y)A(x,y)\Rightarrow(\forall x)A(x,x)$

③ $(\exists x)A(x,x)\Rightarrow(\exists x)(\exists y)A(x,y)$

④ $(\forall x)(\forall y)(A(x)\leftrightarrow B(y))\Rightarrow(\forall x)A(x)\leftrightarrow(\forall y)B(y)$

证明 ① 如果$(\forall x)(A(x)\to B(x))$为真，那么必有 a 使得 $A(a)\to B(a)$ 为真。进而，如果 $A(a)$为真，则 $B(a)$为真，即，$(\exists x)A(x)\to(\exists x)B(x)$为真。所以，$(\forall x)(A(x)\to B(x))\Rightarrow(\exists x)A(x)\to(\exists x)B(x)$。证毕。

② 如果$(\forall x)(\forall y)A(x,y)$为真，那么任意 x 和 y 使得 $A(x,y)$为真，从而，任意 x 使得 $A(x,x)$为真，即，$(\forall x)A(x,x)$为真。所以，$(\forall x)(\forall y)A(x,y)\Rightarrow(\forall x)A(x,x)$。证毕。

③ 如果$(\exists x)A(x,x)$为真，那么存在 a 使得 $A(a,a)$为真，从而，$(\exists x)(\exists y)A(x,y)$为真。所以，$(\exists x)A(x,x)\Rightarrow(\exists x)(\exists y)A(x,y)$。证毕。

④ $(\forall x)(\forall y)(A(x)\leftrightarrow B(y))$

$\Rightarrow (\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((A(x) \to B(x)) \wedge (B(x) \to A(x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \to B(x)) \wedge (\forall x)(B(x) \to A(x))$

$\Rightarrow ((\forall x)A(x) \to (\forall x)B(x)) \wedge ((\forall x)B(x) \to (\forall x)A(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall y)B(y)$　　　　证毕。 ■

定义 2　对于谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 和 B，如果 $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \to B$ 是永真蕴含式，则称谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 到命题公式 B 是一个**有效推理**（effective reasoning），或者称谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 到谓词公式 B 的推理是**有效的**（effective）或**正确的**。并称谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 是推理的**前提**（premise），谓词公式 B 是以谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为前提的推理的**逻辑结果**（logic conclusion）或**有效结论**（effective conclusion）。并记为 $A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$，或 $A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B$。

例如，对于谓词公式$(\forall x)A(x)$、$(\forall x)A(x) \to (\exists y)B(y)$和$(\exists y)B(y)$，由于$(\forall x)A(x) \wedge ((\forall x)A(x) \to (\exists y)B(y)) \Rightarrow (\exists y)B(y)$，所以，谓词公式$(\exists y)B(y)$是谓词公式$(\forall x)A(x)$和$(\forall x)A(x) \to (\exists y)B(y)$的有效结论，或者，谓词公式$(\forall x)A(x)$和$(\forall x)A(x) \to (\exists y)B(y)$到谓词公式$(\exists y)B(y)$是一个有效推理。并记为 $(\forall x)A(x), (\forall x)A(x) \to (\exists y)B(y) \models (\exists y)B(y)$。

在谓词逻辑推理中，推理的前提和结论中可能存在受到量词约束的个体变元。为了确立前提和结论之间的内在联系，必须适时地消去和添加量词。下面给出几个量词有关的量词消去或引入规则：

全称量词消去规则（US, universal specification）　$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$

全称量词引入规则（UG, universal generalization）　$A(y) \Rightarrow (\forall x)A(x)$

存在量词消去规则（ES, existential specification）　$(\exists x)A(x) \Rightarrow A(c)$

存在量词引入规则（EG, existential generalization）　$A(c) \Rightarrow (\exists x)A(x)$

全称量词消去规则的含义在于：若个体域中所有个体 x 都具有性质 A，则个体域中任一给定个体 y 也必具有性质 A。当 $A(x)$中不再含有量词和其它个体变元时，这条规则明显成立。但当 $A(x)$中再含有量词和其它个体变元时，运用该规则的条件是：限制 y 不是 $A(x)$中的约束变元。该规则还有一个推广形式：$(\forall x)A(x) \Rightarrow A(c)$，其中 c 为一个个体常元。

全称量词引入规则的含义在于：若个体域中任意一个个体 y 都具有性质 A，则个体域中所有个体 x 也都具有性质 A。运用该规则的条件是：y 是个体域中的任意一个个体，且 y 取任何值时 A 都为真；个体变元 x 不是 $A(y)$中的约束变元。

存在量词消去规则的含义在于：若个体域中存在个体 x 具有性质 A，则个体域中必有某个体 c 具有性质 A。运用该规则的条件是：c 是个体域中某个确定的个体常元，且使 A 为真；c 不在 $A(x)$中出现过；$(\exists x)A(x)$中没有自由变元。

存在量词引入规则的含义在于：若个体域中存在个体 x 具有性质 A，则$(\exists x)A(x)$必为真。运用该规则的限制条件是：x 不在 $A(c)$中出现。

在谓词逻辑中，谓词公式的解释依赖于个体域，求取谓词公式在所有解释下的真值往往非常繁琐，甚至异常困难。这就导致了命题逻辑中的简单证明推理在谓词逻辑中不容易实施。谓词逻辑推理通常采用的是基于永真蕴涵式或推理规则的构造证明推理。

例 3　证明如下推理："所有计算机科学与技术专业的本科生都要修离散数学，王强是计算机科学与技术专业的本科生。所以，王强要修离散数学。"

证明　对命题进行符号化

谓词 $C(x)$：x 是计算机科学与技术专业的本科生

谓词 $D(x)$：x 要修离散数学

个体常元 a：王强

前提：$(\forall x)(C(x) \to D(x)), C(a)$

结论：$D(a)$

证明如下：

(1) $(\forall x)(C(x)\to D(x))$ 前提引入

(2) $C(a)\to D(a)$ (1)、US 规则

(3) $C(a)$ 前提引入

(4) $D(a)$ (2)、(3)、假言推理 ■

例 4 证明 $\neg(\exists x)(A(x)\wedge C(x)), (\forall x)(B(x)\to C(x)) \models (\forall x)(B(x)\to \neg A(x))$

证明 (1) $\neg(\exists x)(A(x)\wedge C(x))$ 前提引入

(2) $(\forall x)\neg(A(x)\wedge C(x))$ (1)、量词与否定交换律

(3) $(\forall x)(\neg A(x)\vee\neg C(x))$ (2)、德摩根律

(4) $(\forall x)(\neg C(x)\vee\neg A(x))$ (3)、交换律

(5) $(\forall x)(C(x)\to\neg A(x))$ (4)、蕴含等值式

(6) $C(y)\to\neg A(y)$ (5)、US 规则

(7) $(\forall x)(B(x)\to C(x))$ 前提引入

(8) $B(y)\to C(y)$ (7)、US 规则

(9) $B(y)\to\neg A(y)$ (6)、(8)、条件三段论

(10) $(\forall x)(B(x)\to \neg A(x))$ (9)、UG 规则 ■

定理 1 谓词公式 B 是谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当谓词公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\wedge\neg B$ 是矛盾式。

证明 在命题逻辑中已证明：命题公式 B 是命题公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论当且仅当命题公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\wedge\neg B$ 是矛盾式。对于谓词公式 B 和 $A_1, A_2, \ldots, A_n$，$A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\wedge\neg B$ 是谓词公式的代换实例，所以，定理 1 成立。证毕。 ■

定理 1 是谓词逻辑推理的理论基础。一方面，根据定义 2，只要证明谓词公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\to B$ 是重言式，那么，谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论就是命题公式 B；另一方面，谓词公式 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 的有效结论是谓词公式 B，也可以通过证明谓词公式 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\wedge\neg B$ 是矛盾式而得到证明。前者称为谓词逻辑推理的**直接方法**（direct method），后者称为谓词逻辑推理的**间接方法**（indirect method）或**反证法**。

例 5 用反证法证明如下推理："学术委员会的每个成员都是博士并且是教授。有些成员是青年人。因而，有的成员是青年教授。"

证明 对命题进行符号化

谓词 $F(x)$：x 是学术委员会成员；

谓词 $G(x)$：x 是教授；

谓词 $H(x)$：x 是博士；

谓词 $R(x)$：x 是青年人

前提：$(\forall x)(F(x)\to(G(x)\wedge H(x))), (\exists x)(F(x)\wedge R(x))$，

结论：$(\exists x)(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$

证明如下：

(1) $(\exists x)(F(x)\wedge R(x))$ 前提引入

(2) $F(c)\wedge R(c)$ (1)、ES 规则

(3) $(\forall x)(F(x)\to(G(x)\wedge H(x)))$ 前提引入

(4) $F(c)\to(G(c)\wedge H(c))$ (3)、US 规则

(5) $F(c)$ (2)、化简式

(6) $G(c)\wedge H(c)$ (4)、(5)、假言推论

(7) $G(c)$ (6)、化简式

(8) $R(c)$ (2)、化简式

(9) $\neg(\exists x)(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$ 否定结论引入

(10) $F(c)\wedge R(c)\wedge G(c)$ (5)、(7)、(8)、合取

(11) $(\exists x)(F(x)\wedge R(x)\wedge G(x))$ (10)、EG 规则

(12) 0 (9)、(11)、矛盾律 ■

例 6 用反证法证明 $(\forall x)(F(x)\to G(x)) \vDash (\forall x)((\exists y)(F(y)\wedge H(x,y))\to(\exists z)(G(z)\wedge H(x,z)))$

证明

(1)	$\neg(\forall x)((\exists y)(F(y)\wedge H(x,y))\to(\exists z)(G(z)\wedge H(x,z)))$	否定结论引入
(2)	$(\exists x)\neg((\exists y)(F(y)\wedge H(x,y))\to(\exists z)(G(z)\wedge H(x,z)))$	(1)、量词与否定交换律
(3)	$\neg((\exists y)(F(y)\wedge H(a,y))\to(\exists z)(G(z)\wedge H(a,z)))$	(2)、EI 规则
(4)	$\neg(\neg(\exists y)(F(y)\wedge H(a,y))\vee(\exists z)(G(z)\wedge H(a,z)))$	(3)、蕴含等值式
(5)	$\neg\neg(\exists y)(F(y)\wedge H(a,y))\wedge\neg(\exists z)(G(z)\wedge H(a,z)))$	(4)、德摩根律
(6)	$(\exists y)(F(y)\wedge H(a,y))\wedge\neg(\exists z)(G(z)\wedge H(a,z))$	(5)、双重否定律
(7)	$(\exists y)(F(y)\wedge H(a,y))$	(6)、化简式
(8)	$F(b)\wedge H(a,b)$	(7)、ES 规则
(9)	$F(b)$	(8)、化简式
(10)	$(\forall x)(F(x)\to G(x))$	前提引入
(11)	$F(b)\to G(b)$	(10)、UE 规则
(12)	$G(b)$	(9)、(11)、假言推理
(13)	$\neg(\exists z)(G(z)\wedge H(a,z))$	(6)、化简式
(14)	$(\forall z)\neg(G(z)\wedge H(a,z))$	(13)、量词与否定交换
(15)	$(\forall z)(\neg G(z)\vee\neg H(a,z))$	(14)、德摩根律
(16)	$\neg G(b)\vee\neg H(a,b)$	(15)、US 规则
(17)	$H(a,b)$	(8)、化简式
(18)	$\neg\neg H(a,b)$	(17)、双重否定律
(19)	$\neg G(b)$	(16)、(18)、析取三段论
(20)	0	(12)、(19)、矛盾律 ■

§5.4 谓词逻辑的应用

自动规划是人工智能应用领域中一种重要的问题求解技术。与一般问题求解相比，自动规划更注重于问题的求解过程，而不是求解结果。此外，自动规划要解决的问题往往是具体真实世界问题，如，机器人路径规划等，而不是抽象的数学模型问题。自动规划将现实世界问题用状态、操作、动作等相关概念来描述，并从某个特定的问题状态出发，寻求一系列行为动作，建立一个操作序列（问题的解），直到达到目标状态为止。基于谓词逻辑及推理的现实世界问题表示和规划求解是一种重要的自动规划方法。

图 5.1 所示为一个简单的机器人规划问题。工具箱、工作台、机器人分别放置于不同的位置 L1、L2 和 L3，电子仪器放置于工作箱内。机器人的任务是完成打开工具箱，并把电子仪器搬放到工作台上。自动规划所要解决的就是给出机器人完成这一任务的操作序列。

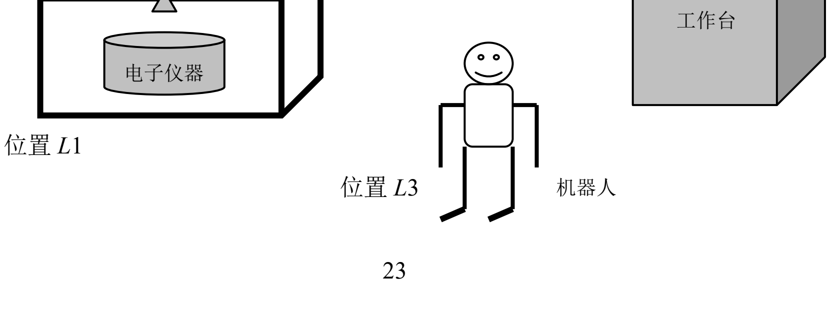

图 5.1　机器人搬运示意图

为了表示自动规划问题，定义如下相关个体常元和谓词：

个体常元 R：　机器人

个体常元 B：　工具箱

个体常元 A：　电子仪器

个体常元 D：　工作台

个体常元 $L1$：位置 $L1$

个体常元 $L2$：位置 $L2$

个体常元 $L3$：位置 $L3$

EMPTY(x)：x 上面是空的

H_EMPTY(x)：x 手中是空的

HOLDING(x, y)：x 手中拿着 y

ON(x, y)：x 在 y 的上面

NEAR(x, y)：x 在 y 的附近

IN(x, y)：x 在 y 的里面

AT(x, y)：x 在 y 处

ISCLOSE(x)：x 处于关闭状态

ISOPEN(x)：x 处于打开状态

OPEN(x, y)：x 把 y 打开

CLOSE(x, y)：x 把 y 关闭

GOTO(x, y)：x 走到 y 旁边

PICKDOWN(x, y, z)：x 把 y 放在 z 上

PICKUP(x, y)：x 把 y 拿起

这样，机器人搬运问题的初始状态（s_0）可以描述为：

$$\mathrm{AT}(B, L1)\wedge\mathrm{IN}(A, B)\wedge\mathrm{ISCLOSE}(B)\wedge\mathrm{AT}(D, L2)\wedge\mathrm{EMPTY}(D)\wedge\mathrm{AT}(R,L3)\wedge\mathrm{H\_EMPTY}(R)$$

目标状态（s_f）可以描述为：

$$\mathrm{AT}(B,L1)\wedge\neg\mathrm{IN}(A,B)\wedge\mathrm{ISCLOSE}(B)\wedge\mathrm{AT}(D,L2)\wedge\mathrm{ON}(A,D)\wedge\mathrm{NEAR}(R,D)\wedge \mathrm{H\_EMPTY}(R)$$

自动规划所要解决的是：找出一个操作序列，然后把这些操作序列告诉机器，机器就可以按预定的操作序列完成相应的任务。这里，谓词 OPEN(x, y)、CLOSE(x, y)、GOTO(x, y)、PICKDOWN(x, y, z)和 PICKUP(x, y)等都表示的是操作。

任何操作的执行都要满足一定的条件，称为先决条件（pre-condition）。操作执行的同时会产生相应的状态或条件的改变，称为行为动作（action）。下面给出，这些操作的先决条件和行为动作：

OPEN(x, y)

　　先决条件：　NEAR(x, y)$\wedge$ISCLOSE(x)

　　行为动作：　消去 ISCLOSE(x)；添加 ISOPEN(x)

CLOSE(x, y)

　　先决条件：　NEAR(x, y)$\wedge$ISOPEN(y)

　　行为动作：　消去 ISOPEN(x)；添加 ISCLOSE(y)

GOTO(x, y)

　　先决条件：　$\neg$NEAR(x, y)

　　行为动作：　消去$\neg$NEAR(x, y)；添加 NEAR(x, y)

PICKDOWN(x, y, z)

先决条件： NEAR(x, z)∧HOLDING(x, y)∧EMPTY(z)

行为动作：消去 HOLDING(x, y)∧EMPTY(z)；添加 ON(x, z)∧H_EMPTY(x)

PICKUP(x, y)

先决条件： NEAR(x, z)∧IN(y, z)∧ISOPEN(z)∧H_EMPTY(x)

行为动作： 消去 IN(y, z)∧H_EMPTY(x)；添加¬IN(y, z)∧ HOLDING(x, y)

下面的问题是依据谓词逻辑推理，确定各操作的具体执行顺序，以使得问题从初始状态到达目标状态。目前已开发出了许多自动规划推理系统，如：STRIPS（Stanford Research Institute Problem Solver）等。这里仅从谓词逻辑推理的机理角度，给出操作序列的求解过程。

在初始状态 s_0，AT(R, L3)满足。那么，操作 GOTO(R, B) 的先决条件¬NEAR(R, B)成立。所以，操作 GOTO(R, B)可以执行，产生的行为动作是：消去 AT(R,L3)；添加 NEAR(R, B)。得到新的状态 s_1：

AT(B, L1)∧IN(A, B)∧ISCLOSE(B)∧AT(D, L2)∧EMPTY(D)∧ NEAR(R, B)∧H_EMPTY(R)

在初状态 s_1，操作 OPEN(R, B) 的先决条件 NEAR(R, B)∧ISCLOSE(B)成立。所以，操作 OPEN(R, B)可以执行，产生的行为动作是：消去 ISCLOSE(B)；添加 ISOPEN(B)。得到新的状态 s_2：

AT(B, L1)∧IN(A, B)∧ISOPEN(B)∧AT(D, L2)∧EMPTY(D)∧ NEAR(R, B)∧H_EMPTY(R)

在状态 s_2，操作 PICKUP(R, A) 的先决条件 IN(A, B)∧ISOPEN(B)∧NEAR(R, B)∧H_EMPTY(R)成立。所以，操作 PICKUP(R, A)可以执行，产生的行为动作是：消去 IN(A, B)∧H_EMPTY(R)；添加¬IN(A, B)∧ HOLDING(R, A)。得到新的状态 s_3：

AT(B, L1)∧ISOPEN(B)∧AT(D,L2)∧EMPTY(D)∧NEAR(R, B)∧¬IN(A, B)∧HOLDING(R, A)

在状态 s_3，NEAR(R, B)满足。那么，操作 GOTO(R, D) 的先决条件¬NEAR(R, D)成立。所以，操作 GOTO(R, D)可以执行，产生的行为动作是：消去 NEAR(R, B)；添加 NEAR(R, D)。得到新的状态 s_4：

AT(B, L1)∧ISOPEN(B)∧AT(D,L2)∧EMPTY(D)∧NEAR(R, D)∧¬IN(A, B)∧HOLDING(R, A)

在状态 s_4，操作 PICKDOWN(R, A, D)的先决条件 NEAR(R, D)∧HOLDING(R, A)∧EMPTY(D)成立。所以，操作 PICKDOWN(R, A, D)可以执行，产生的行为动作是：消去 HOLDING(R, A)∧EMPTY(D)；添加 ON(A, D)∧H_EMPTY(R)。得到新的状态 s_5：

AT(B, L1)∧ISOPEN(B)∧AT(D,L2)∧NEAR(R, D)∧¬IN(A, B)∧ON(A, D)∧H_EMPTY(R)

在状态 s_5，NEAR(R, D)满足，那么，操作 GOTO(R, B)的先决条件¬NEAR(R, B)成立。所以，操作 GOTO(R, B)可以执行，产生的行为动作是：消去 NEAR(R, D)；添加 NEAR(R, B)。得到新的状态 s_6：

AT(B, L1)∧ISOPEN(B)∧AT(D,L2)∧NEAR(R, B)∧¬IN(A, B)∧ON(A, D)∧H_EMPTY(R)

在状态 s_6，操作 CLOSE(R, B)的先决条件 ISOPEN(B)∧NEAR(R, B)成立。所以，操作 CLOSE(R, B)可以执行，产生的行为动作是：消去 ISOPEN(B)；添加 ISCLOSE(B)。得到新的状态 s_7：

AT(B, L1)∧ISCLOSE(B)∧AT(D,L2) ∧NEAR(R, B)∧¬IN(A, B)∧ON(A, D)∧H_EMPTY(R)

在状态 s_7，NEAR(R, B)满足，那么，操作 GOTO(R, D)的先决条件¬NEAR(R, D)成立。所以，操作 GOTO(R, D)可以执行，产生的行为动作是：消去 NEAR(R, B)；添加 NEAR(R, D)。得到新的状态 s_8：

AT(B, L1)∧ISCLOSE(B)∧AT(D,L2) ∧NEAR(R, D)∧¬IN(A, B)∧ON(A, D)∧H_EMPTY(R)

状态 s_8 就是目标状态 s_f。由此，可得到该机器人搬运任务的操作序列为：

GOTO(R, B) → OPEN(R, B) → PICKUP(R, A) → GOTO(R, D) → PICKDOWN(R, A, D) → GOTO(R, B) → CLOSE(R, B) → GOTO(R, D)。