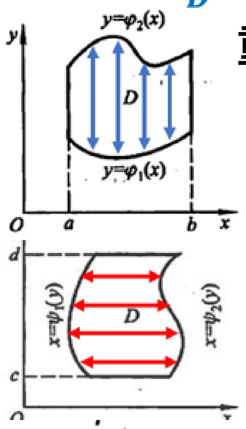
一个ppt学会所有积分

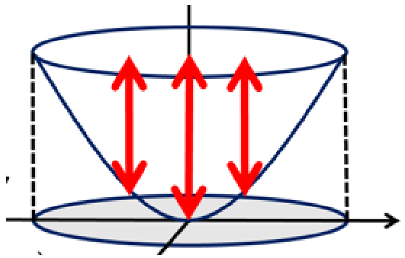
A PPT Learns All Integrals

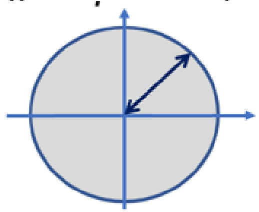
质量的积分都能用对称 + 奇

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \quad \iiint_\Omega f(x,y,z)dv \qquad \int_L f(x,y)ds \quad \iint_\Sigma f(x,y,z)dS$$

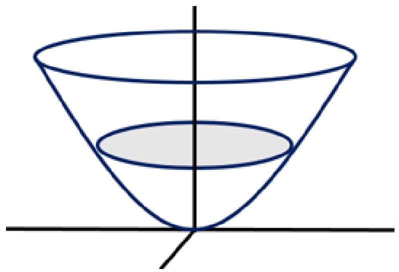


重积分不能化简被积函数
直接找范围





$0 < \rho < R$
$0 < \theta < 2\pi$



被积函数的变量有点多

利用显函数化简： $f \rightarrow$ 常

$\int_L$ 常ds = 常 $*$ L长度

$\iint_\Sigma$ 常dS = 常 $*$ Σ面积

利用显函数化为定积分，二重积分

注意处理

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$dS = \sqrt{法向量的平方和}d\sigma$$

向量的积分不能用对称＋奇

$$\int_L Pdx+Qdy$$

$P,Q\,or\,L$简单时，利用L显函数变为定积分

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy,\ L: y=g(x), x: qi\to zhong$$

$$\int_{qi}^{zhong} P(x,g(x))dx+Q(x,g(x))dg(x)$$

$$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$P,Q,R\,or\,\Sigma$简单时，利用Σ显函数变为二重积分

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy \qquad \Sigma: z=f(x,y)\ \text{方向}$$

代入

$$=\pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

简单时直接做

复杂时找公式

P,Q,L都复杂时，利用格林公式改路径

$$\oint_{L+L'}=\pm\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}d\sigma$$

改变积分路径 $\int_L=\pm\iint_D-\int_{L'}$

积分与路径无关 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Longrightarrow\int_L=-\int_{L'}$

P,Q,R,Σ都复杂时，利用高斯公式改曲面

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma'}=\pm\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}dv$$

$$\iint_\Sigma=\pm\iiint_\Omega-\iint_{\Sigma'}$$

填空题 1.5分

考点：二重积分交换积分次序　　　　方法：画图，改变切割方法

? [填空1] * [填空2] % [填空3]

$$\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy = \int_{?}^{*} dy\int_{e^y}^{\%} f(x,y)dx .$$

提交

填空题 1分

考点：二重积分给定积分次序一定是错的 方法：画图，改变切割方法

$=\frac{1}{2}(e-?),?$ [填空1] $\int_0^1 dy\int_y^1 e^{x^2}dx$

提交

填空题 1分

$\iint\limits_{D}(\quad - x \quad)dxdy$，其中 D 是由 $y = x$， $y = 2x$， $y = 2$ 围成

[填空1]

考点：二重积分自由选择积分次序

方法：非圆用直角坐标系，怎么好切怎么切

提交

填空题 1分

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv$$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 平面 $z=1$ 所围成

$\frac{\pi}{?}$,? [填空1] 考点：三重积分找范围 方法：投影法，找顶，底的z的表达式，投影消去z找xy的范围
二重积分圆形区域用极坐标

要认识主要出现的几种曲面：$z=x^2+y^2, z=1-(x^2+y^2), z=\sqrt{x^2+y^2}, z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}, x^2+y^2=1$
出题主要是用这些移植的面替换不同的顶和底

提交

填空题 1分

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dv，\ \Omega 为 z=x^2+y^2 与 z=1 所围成$$

$\frac{\pi}{?}$,? [填空1] 考点：三重积分找范围 出题就是换Ω的顶或底 方法：投影法，找顶，底的z的表达式，投影消去z找xy的范围

提交

填空题 1分

计算曲线积分 $\oint_L (4x^2+3y^2+16xy)ds$，其中 L：$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$， A 为该椭圆的周长

[填空1] ds的积分严格分三部，1，对称+奇，2，代入方程化被积函数为常数，3，套公式变为定积分计算

$$\begin{cases} \text{已知} L: y=g(x), a<x<b, ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2} \\ \text{公式：} \quad \int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+y'^2}dx \end{cases}$$

提交

填空题 1分

$\oint_L (x+y)ds$，L 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形边界

? +√%,? [填空1]% [填空2]

ds的积分严格分三部，1，对称+奇，2，代入方程化被积函数为常数，3，套公式变为定积分计算

已知$L: y = g(x), a < x < b, ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

公式： $\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx$

提交

填空题 1分

Σ 是柱面 $x^2+y^2=R^2\,(R>0)$ 被平面 $z=0, z=h$ 所截部分，求 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$

$? \pi h R^{\%}, ?$ [填空1] % [填空2]

dS的积分严格分三部，1，对称+奇，2，代入方程化被积函数为常数，3，套公式变为二重积分计算

已知$\Sigma: z=g(x,y),(x,y)\in D$(投影)$, ds=\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}dxdy$

公式： $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS=\iint_{D} f(x,y,g(x,y))\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}dxdy$

提交

填空题 1分

$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的曲面

$\frac{\pi}{\sqrt{?}}$,? [填空1]

dS的积分严格分三部，1，对称+奇，2，代入方程化被积函数为常数，3，套公式变为二重积分计算

已知$\Sigma: z = g(x,y), (x,y) \in D$(投影)$, ds = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}dxdy$

公式：$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D} f(x,y,g(x,y))\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}dxdy$

提交

填空题 1分

$\oint_L (1-\cos y)dx + x(1+\sin y)dy$ L 是 D: $0 \le y \le \sin x$， $0 \le x \le \pi$ 的边界取正向

[填空1]

第二类曲线积分的思路是固定的

简单时，利用L方程变为定积分

复杂时，利用green公式变为二重积分

提交

填空题　1分

$\int_L (2x-3y)dx+(3y^2-3x)dy$，其中 L 为连接从 $A(0,1)$ 到 $B(1,2)$ 的光滑曲线

[填空1]

考点：没有给出路径的积分，就是考察积分与路径无关

积分与路径无关 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}\Rightarrow\int_L=-\int_{L'}$

提交

填空题　1分

验证 $(2x-3y)dx+(3y^2-3x)dy$ 是一个全微分，并求一个原函数

[填空1]

填懂or不懂

考点：验证全微分和积分与路径无关都是利用 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

再利用积分上限函数 $\int_{(0,0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ 算出原函数

$(2x-3y)_y=-3=(3y^2-3x)_x$　所以它是一个全微分，同时积分与路径无关

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x-3y)dx+(3y^2-3x)dy$　$=\int_{L_1}+\int_{L_2}$

(x,y)

x是常数dx=0

$L_2: x=x, y: 0\to y$

$(0,0) \longrightarrow (x,0)$

$L_1: y=0, x: 0\to x$　y是常数dy=0

$\int_{L_1}=\int_0^x(2x-3*0)dx+(3*0^2-3x)d0=\int_0^x(2x)dx$

$\int_{L_2}=\int_0^y(2x-3y)*0+(3y^2-3x)dy=\int_0^y(3y^2-3x)dy$

提交

填空题 1分

$\int_L (x^2-2y)dx+(3x+ye^y)dy$ L是由直线$x+2y=2$上从点$A(2,0)$到点$B(0,1)$的一段

以及圆弧$x=-\sqrt{1-y^2}$上从点$B(0,1)$到点$C(-1,0)$的一段连接而成

$\frac{?\pi}{4}$ + %,? [填空1] ,% [填空2]

第二类曲线积分的思路是固定的

简单时，利用L方程变为定积分

复杂时，利用green公式变为二重积分

提交

填空题 1分

$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2}{2}dydz+\sin(xz^2)dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $z=0, z=1$ 之间的下侧.

$\frac{\pi}{?}$, ? [填空1]

第二类曲面积分
的思路是固定的

简单时，利用Σ方程变为二重积分

复杂时，利用guass公式变为三重积分

提交

填空题 1分

$\iint\limits_{\Sigma} 2x^3dydz + 2y^3dzdx + 3(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$（$z \geq 0$）的上侧.

$\frac{\pi}{?}$， ? [填空1]

第二类曲面积分的思路是固定的

简单时，利用Σ方程变为二重积分

复杂时，利用guass公式变为三重积分

提交