第 1 章　集　合

集合是数学中最为基本的概念，又是数学各分支、自然科学及社会科学各领域的最普遍采用的描述工具，集合论是离散数学的重要组成部分，是现代数学中占有独特地位的一个分支。

1.1 集合的概念及表示

1.1.1 基本概念

定义 1.1

集合：集合就是由人们直观上或思想上能够明确区分的一些对象所构成的一个整体。

- 通常用大写字母 A, B, C, ……表示集合。

元素：集合里含有的对象或客体称为集合的元素或成员

- 通常用小写字母 a, b, c, ……表示元素。

例　下面是一些集合的例子

① 计算机学院的全体学生；　② 教室中的课桌；

③ 所有门电路；　④ 程序语言 Pascal 的全部数据类型；

⑤ 一个人的思想观点；　⑥ 张三同学所有选修的课程；

⑦ 计算机键盘上的所有符号；⑧ 一个汉字的所有笔画；

⑨ 坐标平面上所有的点；　⑩ 离散数学课程中的所有概念。

集合定义的几点说明：

集合元素所表示的事物可以是具体

- 如学生、课桌等

集合元素所表示的事物也可以是抽象的

- 如概念、观点、数据类型

集合元素所表示的事物也可以是集合

- 例如集合{1,2,{ 3},{ 1,2} }的元素{ 3 } 和{ 1,2 } 就是集合

集合的元素必须是确定的和可区分的

- 如“授课的中年教师”这样的客体就不能组成集合，这是因为“中年”是一个界定不清的概念，教师到底是什么年纪才算中年了？这个概念不能明确界定集合的元素，所以不能构成集合

定义 1.2：一个集合中的元素个数称为集合的基数。

- 集合 A 的基数用|A|或 card(A)表示。
- 例如，一个汉堡、一张桌子、一个字母、一双鞋子、离散数学及漓江组成的集合的元素个数是 6，这个集合的基数就是 6

定义 1.3：如果组成一个集合的元素个数是有限的，则称该集合为有限集合(finite set)，简称为有限集，否则称为无限集合(infinite set),简称为无限集

- 例如，英语字母组成的集合就是有限集，实数组成的集合就是无限集

1.1.2　集合的表示

表示一个集合的主要方法有如下 3 种：

(1)枚举法：将集合中的元素全部列出，写在花括号内，元素之间用逗号隔开。

- 例如：A = {1，2，3，4 ，5}，B = {3 ，2 ，1 ，4 ，5}，

C = {a ，b ，c ，d }， D= {a ，c ，d ，d ， b ，a ，c }

- 无次序性：一般来说，各元素出现的先后次序并不重要，所以集合 A 和集合 B 相同，一般地，集合中的元素可以以任何次序出现，称为集合的*无次序性*
- 互异性：集合中元素如果有重复（即多次出现），是没有意义的，所以，集合 C 和 D 是相同的，它们的基数为 card(C) = card(D) = 4。一般如果没有特别说明，集合中元素的重复出现和单次出现表示的含义相同，这个称为集合元素的*互异性*

定义 1.4：如果集合 P 和 Q 由完全相同的元素组成，则称这两个集合*相等*，记为 P = Q，否则，称这两个集合*不相等*，记为 P ≠ Q。

- 例如，上面的集合 C 和集合 D 就是两个相等的集合，C = D；集合 A 和集合 C 就是两个不相等的集合，A ≠ C。
- 例如， 设 A={x ｜ x∈N 且 x 能整除 24}，

  B={1， 2， 3， 4， 6， 8， 12， 24}

  则 A=B

例 1.1　下面是枚举法给出集合的例子

① A= {1，3，5，7，…}

② B= {2，4，6，8，…，100}

③ P= {a+1，a+2，a+3，…，a+999}

④ Q= {a，A，b，B，c，C，…，Z}

解释

① 集合 A 由所有正奇数组成，是一个无限集；

② 集合 B 由 2 到 100 之间的 50 个偶数组成，是一个有限集，集合的基数为 card(B)=50；

③ 集合 P 由 a+1 到 a+999 的表达式组成，是一个有限集；
④ 集合 Q 由大、小写英文字母组成，是一个有限集，集合的基数为 card(Q)=52。

(2)描述法:通过刻画集合中元素所具备的某种*特性*来表示集合，通常用*符号 P(x)* 表示不同对象 x 所具有的*性质*或*属性 P，*又称为属性表示法。可表示为：

A＝{x ｜ P(x)}

即集合 A 是由满足特性 P 的全体 x 组成。

例 1.2 下面是描述法给出的集合的例子
① A = { x | x 是“discrete structure”中的所有英文字母}
② B = { x | x 是偶数，且 x ≥100}
③ P = { x | x 是整数，且 x^2 + 1 = 0}
解释
① A 由“discrete structure”中的英文字母 d、i、s、c、r、e、t、e、s、t、r、u、c、t、u、r 和 e 组成，但根据集合元素的互异性，不同字母为 d、i、s、c、r、e、t 和 u，所以，A= {d，i，s，c，r，e，t，u}，是一个有限集合，集合的基数为 card(A)=8；
② B 由大于等于 100 的偶数组成，是一个无限集；
③ 没有任何整数满足 x^2 + 1 = 0，所以 P 中没有元素；

定义 1.5：一个对象 *a* 是集合 *A* 的元素，*记为 a∈A，读作“a 属于集合 A”*；如果一个对象 *a 不是*集合 *A* 的元素，*记为 a∉A，读作“a 不属于集合 A”。*

- 例如，对于例 1.1 中集合 A 和 B，9 是集合 A 中的元素，所以 9 属于 A，记为 9 ∈ A，9 不是集合 B 中的元素，所以 9 不属于 B，记为 9 ∉ B

练习：

1. 用枚举法表示下列集合

（1）A={x| x∈P 且 x<20}

（2）B={y| |y|<4 且 y 为奇数}

A={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

B={-3, -1, 1, 3}

2. 用描述法表示下列集合

(1) C={0, 2, 4, …, 200}

(2) D={2, 4, 8, …, 1024}

C={2x|x∈Z 且 0≤ x≤100}

$D=\{2^n \mid n\in N \text{ 且 } 1\le n\leqslant 10\}$

(3)图形法:利用平面上点的对应元素的封闭区域对集合进行图解标示，一般通过平面上的方形或圆形表示一个集合，又称为文氏图（Venn Diagrams）法。

- 例如：图 1.1 就是集合 *A*、*B*、*C* 和 *D* 的图形表示。

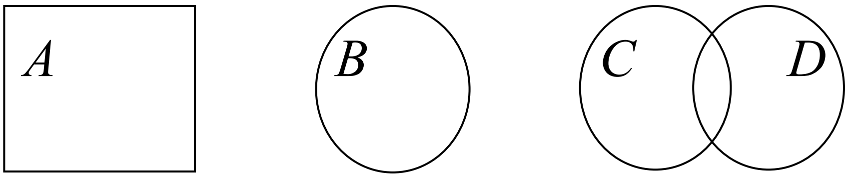


图 1.1　集合的图形表示

1.2 特殊集合

一些常用的特定的数集合，一般约定用特定字母来标示：

- N：所有*自然数*组成的集合
- Z(或者 I)：所有*整数*组成的集合
- Q：所有*有理数*组成的集合
- R：所有*实数*组成的集合

定义 1.6

- 空集
  - 没有任何元素的集合称为*空集合*，简称为*空集*。
  - 一般用 ∅ 表示空集。
  - 例如： P = { x | x 是整数，且 $x^2+1=0$ }就是一个空集
- 全集
  - 与空集对应，在以集合作为模型研究问题时，都有一个相对固定的范围，由该范围内所有元素组成的集合，称为*全集合*，简称为*全集*
  - 一般用 U 表示全集

例 1.3　下面是一些空集和全集的例子

① *A* = { x | $x=y^2$，y 是实数，且 x<0 }

② *在学校人事管理系统中，全体教职员工是全集*

③ *在立体几何中，全集由空间的全体点组成*

定义 1.7 子集:对于两个集合 A 和 B，如果集合 B 的每个元素都是 A 的元素，则

称 B 是 A 的*子集合（subset）*，简称为*子集*，这时也称 B 被 A 包含（inclusion），或者 B 包含于 A，或者 A 包含 B，记作 $B \subseteq A$ *或* $A \supseteq B$，称“$\subseteq$”为包含于，“$\supseteq$”为包含。

- 例如，空集 $\varnothing$ 是任意集合 A 的子集，即 $\varnothing \subseteq A$;任意集合 A 是它自身的子集，即 $A \subseteq A$；任意集合 A 是全集的子集，即 $A \subseteq U$

定理 1.1：对于任意两个集合 A 和 B, $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$, *当且仅当* $A=B$

证明：（必要性）用反证法。假定 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 下，$A \neq B$。那么，存在 $x \in A$，$x \notin B$。因此，$A \not\subseteq B$。矛盾。所以，如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则 $A = B$。

（充分性）对于任意 $x \in A$，由于 $A = B$，因此 $x \in B$，所以，$A \subseteq B$。对于任意 $x \in B$，由于 $A = B$，因此 $x \in A$，所以，$B \subseteq A$

综上知，对于任意两个集合 A 和 B，$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，当且仅当 $A = B$。证毕。

定义 1.8 真子集:对于两个集合 A 和 B，如果

$$B \subseteq A \text{ 且 } A \neq B$$

则称 B 是 A 的*真子集合*（proper subset），简称为*真子集*，这时也称 B 被 A 真包含（properly inclusion），或者 B 真包含于 A，或者 A 真包含 B，记作 $B \subset A$ 或 $A \supset B$。称“$\subset$”为真包含于，“$\supset$”为真包含。否则，称 B 不是 A 的真子集，也称 B 不被 A 真包含，记作 $B \not\subset A$。

例 1.4　分析如下各组集合中存在的关系

① $A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{a, b, c\}$，$C = \{b, d\}$，$D = \{\{d, b\}, a, c\}$；

② $A = \varnothing$，$B = \{\varnothing\}$，$C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$；

③ $A = \{x \mid x = y^2, y \in Z \text{ 且 } x < 5\}$，　$B = \{x \mid x = y + 1, y \in N \text{ 且 } x < 5\}$。

解　① 集合 B、C 中的每个元素都是集合 A 中的元素。所以，集合 B、C 都是集合 A 的子集，且是集合 A 的真子集，即 $B \subseteq A$、$C \subseteq A$ 且 $B \subset A$、$C \subset A$；集合 C 是集合 D 的元素，所以，$C \in D$。但是，集合 C 不是集合 D 的子集。

② 集合 A 是空集，因此集合 A 既是集合 B、C 中的元素，又是集合 B、C 的子集，所以，$A \in B$、$A \in C$、$A \subseteq B$、$A \subseteq C$；集合 B 中的所有元素都是集合 C 中的元素，且集合 B 是集合 C 中的元素，所以，集合 B 是集合 C 的子集，且是集合 C 的真子集，即，既有 $B \subseteq C$ 且 $B \subset C$，又有 $B \in C$。

③ 集合 A 由元素 0、1、4 组成，集合 B 由元素 1、2、3、4 组成。集合 A 中元素 0 不在集合 B 中，所以，集合 A 不是集合 B 的子集。

定义 1.9 ：对于任意集合 A，由 A 的所有不同子集为元素组成的集合称为集合 A 的*幂集合*（power set），简称为*幂集*，记作为 P(A)或 2^A。

例 1.5　计算下列集合的幂集

① $A=\{a，c\}$；

② $B=\{b，\{d\}\}$；

③ $C=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$。

解

① 集合 $A=\{a，c\}$的子集合有 $\varnothing$、$\{a\}$、$\{c\}$和$\{a，c\}$，所以 $P(A)=\{\varnothing，\{a\}，\{c\}，\{a，c\}\}$；

② 集合 $B=\{b，\{d\}\}$的子集合有 $\varnothing$、$\{b\}$、$\{\{d\}\}$和$\{b，\{d\}\}$，所以 $P(B)=\{\varnothing，\{b\}，\{\{d\}\}，\{b，\{d\}\}\}$；

③ 集合 $C=\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$的子集合有 $\varnothing$、$\{\varnothing\}$、$\{\{\varnothing\}\}$和$\{\varnothing，\{\varnothing\}\}$，所以 $P(C)=\{\varnothing，\{\varnothing\}，\{\{\varnothing\}\}，\{\varnothing，\{\varnothing\}\}\}$。

问题：如果$|A|$=n，则$|P(A)|$= ？　　　$|P(A)|=2^n$

例：设 A=$\{\{\varnothing\}, 0, 1\}$，计算 A 的幂集。

<u>注意：　$\varnothing$ 与$\{\varnothing\}$是不同的！</u>

- $\varnothing$ 与 A 之间是什么关系？
- $\{\varnothing\}$与 A 之间是什么关系？
- $\varnothing$ 与 P(A)之间是什么关系？
- $\{\varnothing\}$与 P(A)之间是什么关系？

练习：

- $P(\varnothing)$ = ？
- $P(P(\varnothing))$ = ？
- $P(P(P(\varnothing)))$ = ？
- ……

定义 1.10 ：对于任意集合 A 和全集 U，由所有属于全集 U 但不属于集合 A 的元素组成的集合称为集合 A 的*补集合（complement）*，简称为*补集*，记作为$\sim A$。

显然，全集的补集是空集，空集的补集是全集，即$\sim U=\varnothing$，$\sim\varnothing=U$。

例 1.6 求下列集合的补集

① A ={a，c，d，f，w，u，y }，全集为英文字母；

② 自然数集 N，全集为 Z。

解

① $\sim A$ ={b，e，g，h，i，j，k，l，m，n，o，p，q，r，s，t，v，x，z }；

② ~N ={-1，-2，-3，-4，-5，…}。

1.3 集合的运算

1.3.1 基本运算

集合作为一种数学对象，可以以许多种不同方式进行结合。类似于，在初等数学中，我们不仅学习了“数”，而且还学习了“数”的各种运算。集合的不同结合方式，就是集合的运算，或者集合上的操作（operation）

定义 1.11 ：对于集合 A 和 B，A 和 B 的*并集（union）*是由 A 和 B 中所有元素组成的集合，记作为 $A\cup B$，称“$\cup$”为*并运算*（union operation）。并集可形式化表示为

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ 或者 } x\in B\}$$

定义 1.12 ：对于集合 A 和 B，A 和 B 的*交集（intersection）*是由 A 和 B 中的共有元素组成的集合，记作为 $A\cap B$，称“$\cap$”为*交运算*（intersection operation）。交集可形式化表示为

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

定义 1.13 ：对于集合 A 和 B，A 和 B 的*差集（subtraction）*是由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，记作为 $A - B$，称“ - ”为*差运算（subtraction operation）*。差集可形式化表示为

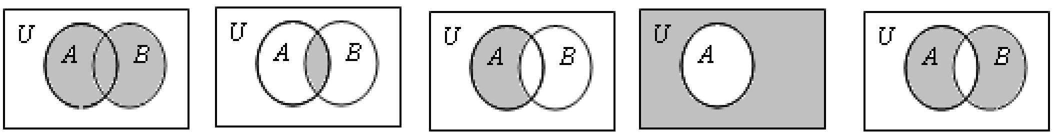
$$A - B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

定义 1.14 ：对于全集 U 和集合 A，U 和 A 的*差集* U - A 称为集合 A 的*补集（complement）*，记作$\sim A$，又称“~”为*补运算（complement operation）*。补集可形式化表示为

$$\sim A = U - A = \{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}$$

定义 1.15 ：对于集合 A 和 B，A 和 B 的*对称差集（sysmmetric difference）*是由 A 和 B 中所有非共有元素组成的集合，记作为 $A\oplus B$，称“$\oplus$”为*对称差运算（sysmmetric difference operation）*。对称差集可形式化表示为

$$A\oplus B = \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B \text{，或者 } x\in B \text{ 且 } x\notin A\}$$



$A\cup B$　　$A\cap B$　　$A-B$　　$\sim A$　　$A\oplus B$

图 1.2　集合运算的图形表示

例 1.7：已知全集 U 和集合 A、B 为

U:全体英文小写字母

A={a，c，d，f，u，y}

B={b，c，d，e，f，u，z}

求集合 A 和 B 的并集、交集、差集、补集和对称差集

解：

$A \cup B = B \cup A = \{a，b，c，d，e，f，u，y，z\}$

$A \cap B = B \cap A = \{c，d，f，u\}$

$A - B = \{a，y\}$，$B - A = \{b，e，z\}$

$\sim A = \{b，e，g，h，i，j，k，l，m，n，o，p，q，r，s，t，v，w，x，z\}$

$\sim B = \{a，g，h，i，j，k，l，m，n，o，p，q，r，s，t，v，w，x，y\}$

$A \oplus B = B \oplus A = \{a，b，e，y，z\}$

习题：求下列集合 A 和 B 的并集、交集、差集、补集和对称差集 。

① $A = N$，$B = Z$，全集 $U = Z$

②$A = \{1，3，5，8\}$，$B = \{2，3，4，5\}$，全集 $U = \{x \mid x$ 为自然数，且 $x < 10\}$

1.3.2 运算的性质

根据集合运算的定义，可以得到集合运算的许多性质，这些性质又称为集合运算的基本恒等式。对于集合 A 、B 和 C，以及全集 U，可以列写出如下一些主要性质：

①幂等律：　$A \cup A = A$　　　$A \cap A = A$

②交换律：　$A \cup B = B \cup A$　　$A \cap B = B \cap A$　　$A \oplus B = B \oplus A$

③结合律：　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$　　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

④分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$　　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

⑤吸收律：$A \cup (A \cap B) = A$　　　$A \cap (A \cup B) = A$

⑥零律：　$A \cup U = U$　　　$A \cap \varnothing = \varnothing$

⑦同一律：$A \cup \varnothing = A$　　　$A \cap U = A$

⑧排中律：$A \cup \sim A = U$

⑨矛盾律：$A \cap \sim A = \varnothing$

⑩双重否定律：　$\sim\sim A = A$

⑪补交转换律　$A - B = A \cap \sim B$

⑫德·摩根律：　$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$　　　$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$ $A-(B\cap C) = (A-B)\cup(A-C)$

⑬(余补集) $\sim\varnothing = U$ $\sim U = \varnothing$

上述性质都可用文氏图得到方便分析和直观理解。利用上述性质，可以推演出各种新的集合等式或包含式。

如何证明这些基本定律的正确性？

- 以对集合运算的定义为基础。
- 以已经得到证明的基本定律为基础，利用集合演算。

例：证明 $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$

提示：以集合运算的定义为基础来证明

例：证明 $A \cap(A\cup B) = A$

提示：基于已证明基本定律为基础来证明

要求：熟练掌握集合运算的基本定律，能够用来证明集合之间的相等关系。

例 1.8:对于集合 A 和 B，证明 $A\oplus B = (A-B) \cup (B-A)$

证明

对于任意 $x\in A\oplus B$，根据对称差的定义知：$x\in A$ 且 $x\notin B$，或者 $x\in B$ 且 $x\notin A$；又根据差集的定义知：$x\in A-B$，或者 $x\in B-A$；再根据并集的定义知：$x\in(A-B)\cup(B-A)$。由此，$A\oplus B \subseteq (A-B) \cup (B-A)$。

对于任意 $x\in(A-B) \cup (B-A)$，根据并集的定义知：$x\in A-B$，或者 $x\in B-A$；又根据差集的定义知：$x\in A$ 且 $x\notin B$，或者 $x\in B$ 且 $x\notin A$；再根据对称差的定义知：$x\in A\oplus B$。由此，$(A-B) \cup (B-A) \subseteq A\oplus B$。

综上述，$A\oplus B = (A-B) \cup (B-A)$。 证毕。

例 1.9:对于集合 A、B 和 C，证明：如果 $A \oplus B = A \oplus C$， 则 $B = C$

证明　对于任意 $x\in B$，分两种情形讨论。

情形一：$x\in A$。由 $x\in A$ 及交集的定义，$x\in A\cap B$。从而，由对称差的定义知 $x\notin A\oplus B$，那么由已知条件得到 $x\notin A\oplus C$。假定 $x\notin C$，那么由差集的定义知：$x\in A-C$；进而，由 $A\oplus C = (A-C)\cup(C-A)$知：$x\in A\oplus C$。矛盾。所以有 $x\in C$。故 $B\subseteq C$

情形二：$x\notin A$。由 $x\in B$ 及差集的定义，$x\in B-A$。由 $A\oplus B = (A-B)\cup(B-A)$知：$x\in A\oplus B$，那么由已知条件得到 $x\in A\oplus C$。再由 $A\oplus C = (A-C)\cup(C-A)$知：$x\in A-C$ 或 $x\in C-A$。由于 $x\notin A$，于是 $x\notin A-C$。由此，$x\in C-A$。进而 $x\in C$。故 $B\subseteq C$

同理，可证得 $C \subseteq B$。
综上知，如果 $A \oplus B = A \oplus C$，则 $B = C$。 证毕。

例 1.10:已知 $A\cup B = A\cup C$，$A\cap B = A\cap C$，求证 $B = C$
证明

$B = B\cap(A\cup B)$ （吸收律）
$= B\cap(A\cup C)$ （已知条件）
$= (B\cap A)\cup(B\cap C)$ （分配律）
$= (A\cap B)\cup(B\cap C)$ （交换律）
$= (A\cap C)\cup(B\cap C)$ （已知条件）
$= (A\cup B)\cap C$ （分配律）
$= (A\cup C)\cap C = C$ （已知条件、吸收律） 证毕。

例 1.11:试证明 $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$
证明

对于任意 $x\in P(A-B)$，如果 $x = \varnothing$，显然 $x \in (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$；如果 $x \neq \varnothing$，根据幂集定义，$x \subseteq A-B$。从而，$x \subseteq A$ 且 x 中的任何元素不是 B 的元素。那么，x 不是 B 的子集合。因此，$x\in P(A)$ 且 $x\notin P(B)$。所以，$x\in(P(A) - P(B))$。故 $P(A-B) \subseteq (P(A) - P(B)) \cup \{\varnothing\}$。 证毕。

例 1.12:试证明如下集合恒等式

$A\cup(B\cap C\cap D)=(A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)$，
$A\cap(B\cup C\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$

证明 $A\cup(B\cap C\cap D) = A\cup((B\cap C)\cap D)$ （结合律）
$= (A\cup(B\cap C))\cap(A\cup D)$ （分配律）
$= ((A\cup B)\cap(A\cup C))\cap(A\cup D)$ （分配律）
$= (A\cup B)\cap(A\cup C)\cap(A\cup D)$ （结合律）

$A\cap(B\cup C\cup D) = A\cap((B\cup C)\cup D)$ （结合律）
$= (A\cap(B\cup C))\cup(A\cap D)$ （分配律）
$= ((A\cap B)\cup(A\cap C))\cup(A\cap D)$ （分配律）
$= (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)$ （结合律）

证毕。

用举反例的方法判断不成立的情况

- ☐ $A \cup B = A \cup C \Rightarrow B=C$ ？
- ☐ $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B=C$ ？

1.4 计数问题

1.4.3 容斥原理

有限集交与并的计数问题是计算机科学及其应用中遇到的许多问题的抽象计算模型。这类问题的处理需要下面讨论的容斥原理。

包含排斥原理主要讨论有限集元素的计数问题。设 A，B 是有限集合，当 A 和 B 不相交时，即 A 和 B 没有公共元素时，显然有 $|A \cup B| = |A| + |B|$，对于一般情况有如下定理

定理 1.4(容斥原理)：设 A，B 是有限集合，则：

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

证明：由集合运算的文氏图可以看出

$A\cup B = (A-B) \cup (A\cap B) \cup (B-A)$

$A = (A-B) \cup (A\cap B)$

$B = (A\cap B) \cup (B-A)$

同时，集合$(A-B)$、$(A\cap B)$和$(B-A)$之间都不含有相同元素，所以

$|A\cup B| = |A-B| + |A\cap B| + |B-A|$

$|A| = |A-B| + |A\cap B|$

$|B| = |A\cap B| + |B-A|$

结合上面三个式子有 $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$。 证毕。

3 个有限集并的元素计数公式为

定理 1.5：对于有限集合 A、B 和 C，$A\cup B\cup C$ 的基数为

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

证明：根据集合的运算性质和定理有如下推导

$|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C|$ （结合律）

$= |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C|$ （定理 1.4）

$= |A\cup B| + |C| - |(A\cap C)\cup(B\cap C)|$（交换律、分配律）

$= |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - (|A\cap C| + |B\cap C| - |(A\cap C)\cap(B\cap C)|)$

（定理 1.4）

$= |A| + |B| + |C| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|$

（结合律、交换律、幂等律）

例 1.20 求 1~500 之间能被 3、5、7 中任一数整除的整数个数。

解：设 1 到 500 间分别能被 3，5，7 整除的整数集合为 A，B 和 C，那么（[x]表示不大于 x 的最大整数）

$|A| = [500/3]=166$，$|B|=[500/5]=100$，$|C|=[500/7]=71$

$|A\cap B|=[500/(3\times5)]=33$，$|A\cap C|=[500/(3\times7)]=23$，$|B\cap C|=[500/(5\times7)]=14$

$|A\cap B\cap C|=[500/(3\times5\times7)]=4$

根据定理 4 得到

$$|A\cup B\cup C| = (|A|+|B|+|C|) - (|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|)+|A\cap B\cap C|$$
$$=166+100+71-(33+23+14)+4=271$$

例 1.21:对 100 名技术人员的调查结果表明，有 32 人学过日语，20 人学过法语，45 人学过英语。并且，其中有 15 人既学过日语又学过英语，7 人既学过日语又学过法语，10 人既学过法语又学过英语。30 人没学过这三门语言的任何一种。根据以上提供的数据回答以下问题：

(1)三种语言都学过的人数为多少？

(2)只学过日语、只学过法语、只学过英语的人数各为多少？

(3)至少学过以上三种语言中的两种语言的人数为多少？

(4)只学过日语和法语、只学过日语和英语、只学过法语和英语的人数各为多少？

解 设 $A=\{x|\ x$ 学过日语$\}$，$B=\{x|\ x$ 学过法语$\}$，$C=\{x|\ x$ 学过英语$\}$，由题设条件可知：

$|A|=32$，$|B|=20$，$|C|=45$，$|A\cap B|=7$，$|A\cap C|=15$，$|B\cap C|=10$，$|A\cup B\cup C|=100-30=70$

根据定理 2

$$|A\cup B\cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|$$

即 $$70 = (32 + 20 + 45) - (7 + 15 + 10) + |A \cap B \cap C|$$

所以，3 种语言都学过的人数为

$$|A \cap B \cap C| = 70 - (32 + 20 + 45) + (7 + 15 + 10) = 5$$

求解只学过日语的人数时，可以将 A 看成全集，$A\cap B$、$A\cap C$ 和 $A\cap B\cap C$ 都是 A 的子集，$A\cap B\cap C$ 是 $A\cap B$、$A\cap C$ 的子集，所以，只学过日语的人数为

$$|A|-(|A\cap B| + |A\cap C|) + |A \cap B \cap C| = 32 - (15 + 7) + 5 = 15$$

同理，只学过法语的人数为

$$|B|-(|B\cap A| + |B\cap C|) + |A \cap B \cap C| = 20 - (7 + 10) + 5 = 8$$

只学过英语的人数为

$$|C|-(|C\cap A| + |C\cap B|) + |A \cap B \cap C| =45-(10 + 5) + 5 = 25$$

至少学过两种语言的人数计算，可以对 $A\cap B$、$A\cap C$ 和 $B\cap C$ 使用定理 2，即

$$|(A\cap B) \cup (A\cap C) \cup (B\cap C)|$$
$$= |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - (|(A\cap B) \cap (A\cap C)| + |(A\cap B) \cap (B\cap C)| + |(A\cap C)$$

$\cap (B\cap C)|)$

$+ |A\cap B \cap C|$

$= |A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C| - 3|(A\cap B \cap C)| + |A\cap B \cap C|$

$= 7 + 15 + 10 - 3\times 5 + 5 = 22$

由于 $A\cap B \cap C$ 是 $A\cap B$、$A\cap C$ 和 $B\cap C$ 的子集。所以只学过日语和法语、日语和英语、法语和英语的人数分别为

$|A\cap B| - |(A \cap B \cap C)| = 7 - 5 = 2$

$|A\cap C| - |(A \cap B \cap C)| = 15 - 5 = 10$

$|B\cap C| - |(A \cap B \cap C)| = 10 - 5 = 5$

容斥原理可以推广到 n 个有限集的情形

定理 1.6：对于 n 个有限集合 $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$，

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots\cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k}|A_i\cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap A_3\cap\ldots\cap A_n|$$

例 1.21:计算机科学与技术专业 2010 级共有 24 名同学参加各种球类体育活动。参加篮球、排球、网球、足球的人数分别为 13、5、10 和 9，其中同时参加篮球和排球活动的人数为 2 人；同时参加篮球和网球、篮球和足球、网球和足球活动的人数均为 4 人；参加排球活动的同学既不参加网球又不参加足球活动。试求只参加一种体育活动的同学人数？同时参加篮球、网球和足球活动的同学人数？

解　设 A、B、C 和 D 分别为参加篮球、排球、网球和足球活动同学组成的集合，由已知条件得

$|A| = 13$，$|B| = 5$，$|C| = 10$，$|D| = 9$

$|A\cap B| = 2$，$|A\cap C| = |A\cap D| = |C\cap D| = 4$，$|B\cap C| = |B\cap D| = 0$

$|A\cap B\cap C| = |A\cap B\cap D| = |B\cap C\cap D| = 0$, $|A\cap B\cap C\cap D| = 0$, $|A\cup B \cup C\cup D| = 24$

根据定理 3

$$|A\cup B \cup C\cup D| = (|A|+|B|+|C|+|D|) - (|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|+|B\cap C|+|B\cap D|+|C\cap D|) + (|A\cap B \cap C|+|A\cap B \cap D|+|B\cap C \cap D|+|A\cap C \cap D|) - |A\cap B\cap C\cap D|$$

将已知条件带入上式可得

$$24 = (13 + 5 + 10 + 9) - (2 + 4 + 4 + 4 + 0 + 0) + (0 + 0 + 0 + |A\cap C \cap D|) - 0$$

从而得到 $|A\cap C \cap D|=1$，即同时参加篮球、网球和足球的同学为 1 人。

求只参加篮球活动的同学人数时，可以将 A 看成全集，$A\cap(B\cup C\cup D)$是参加了排球、网球和足球中一项以上活动且参加篮球活动的同学组成的集合，只参加篮球活动的同学人数为

$|A| - |A\cap(B\cup C\cup D)|$

$= |A| - |(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D)|$

$= |A| - ((|A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D|) - (|(A\cap B)\cap(A\cap C)| + |(A\cap B)\cap(A\cap D)| + (A\cap C)\cap(A\cap D)|) + |(A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(A\cap D)|)$

$= |A| - ((|A\cap B|+|A\cap C|+|A\cap D|) - (|(A\cap B\cap C)| + |(A\cap B\cap D)| + |(A\cap C\cap D)|) +$

$|(A\cap B\cap C\cap D)|)$

$= 13-((2+4+4) - (0+0+1)+0) = 4$

同理，可求得只参加排球活动的同学人数为

$|B| - |B\cap(A\cup C\cup D)|$

$= |B|-((|B\cap A|+|B\cap C|+|B\cap D|)-(|(B\cap A\cap C)|+ |(B\cap A\cap D)|+ |(B\cap C\cap D)|)+ |(A\cap B\cap C\cap D)|)$

$= 5 - ((2+0+0) - (0+0+0)+0) = 3$

只参加网球活动的同学人数为

$|C| - |C\cap(A\cup B\cup D)|$

$= |C|-((|C\cap A|+|C\cap B|+|C\cap D|)-(|(C\cap A\cap B)|+ |(C\cap A\cap D)| + |(C\cap B\cap D)|)+|(A\cap B\cap C\cap D)|)$

$= 10 - ((4+0+4) - (0+1+0)+0) = 3$

只参加足球活动的同学人数为

$|D| - |D\cap(A\cup B\cup C)|$

$=|D|-((|D\cap A|+|D\cap B|+|D\cap C|)-(|(D\cap A\cap B)|+ |(D\cap A\cap C)|+ |(D\cap B\cap C)|)+ |(A\cap B\cap C\cap D)|)$

$= 9 - ((4+0+4) - (0+1+0) + 0) = 2$