第 2 章 关 系

本章主要介绍关系的基本内容

- ■ 关系的概念及表示
  - □ 序偶与笛卡尔积
  - □ 关系的定义
  - □ 关系的表示
- ■ 关系的性质
  - □ 性质的定义
  - □ 性质的判别
- ■ 关系的运算
  - □ 基本运算
  - □ 复合运算
  - □ 逆运算
  - □ 幂运算
  - □ 闭包运算
- ■ 特殊关系：等价关系、相容关系、偏序关系

2.1 关系的概念及表示

2.1.1 序偶与笛卡尔积

在现实世界中，许多事物都是按照一定联系成对或成组出现的，例如：上下；大小；父子；师生；平面上一个点的坐标；中国的首都是北京等等。为此，我们给出下面的定义。

定义 2.1 有序对/序偶：

- ■ 由两个元素 x 和 y 按照一定的次序排列成的二元组称为一个有序对或序偶，记作<x, y>
- ■ x 称为有序对的第一元素或前元素，y 称为有序对的第二元素或后元素。
- ■ 例：可以用序偶<x,y>表示师生关系，x 是 y 的老师，实例

<王奇，刘一>，则表示王奇是刘一的老师

注意：

- ■ 值得注意的是，序偶是一个合成的整体元素，序偶成员与该序偶本身之间没有隶属关系。
- ■ 在一个序偶中，如果两个元素不相同，那么它们是不能交换次序的，称为序偶元素的有次序性，简称为有序性。

- 例：平面直角坐标系中<1，2>和<2，1>就表示的不同的两个点；如果用序偶<x, y>表示 x 的学分绩排名在 y 之前，实例为<张三，李四>表示张三排名在李四之前，实例为<李四，张三>则表示李四排名在张三之前，这里<张三，李四>和<李四，张三>就表示了不同的含义。

定义 2.2 ：对于序偶$\langle a, b\rangle$和$\langle c, d\rangle$，如果 $a = c$ 且 $b = d$，则称这两个序偶相等，记为$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$；否则，称这两个序偶不相等，记为$\langle a, b\rangle \neq \langle c, d\rangle$

例 2.1 已知$\langle x+2, 4\rangle$和$\langle 5, 2x+y\rangle$相等，求 x 和 y。

*解：*由序偶相等的定义有

$$x+2 = 5$$

$$2x+y = 4$$

由此解得 $x = 3$，$y = -2$。

定义 2.3： n 元序偶：由 n 个元素 $a1$，$a2$，$a3$，…，an 按照一定次序组成的 n 元组称为 n 元序偶（ordered n-tuple），记为$\langle a1, a2, a3, \cdots, an\rangle$

- 例如，我们可以用三元序偶<1, 2, 3>、<0, 8, 0>、<1, 2, 0>等来表示空间三维坐标系中的点；也可以用五元序偶<姓名, 职称, 年龄, 职务, 工资>来抽象地表示某人的人事档案信息；也可以用六元序偶<年, 月, 日, 时, 分, 秒>表示具体的时间。

定义 2.4:对于 n 元序偶$\langle a1, a2, a3, \cdots, an\rangle$和$\langle b1, b2, b3, \cdots, bn\rangle$，如果 $ai = bi$（i=1,2,3,…,n)，那么称这两个 n 元序偶相等，记为$\langle a1, a2, a3, \cdots, an\rangle = \langle b1, b2, b3, \cdots, bn\rangle$；否则，称这两个 n 元序偶不相等，记为$\langle a1, a2, a3, \cdots, an\rangle \neq \langle b1, b2, b3, \cdots, bn\rangle$

定义 2.5 ：对于集合 A 和 B，以 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素组成序偶，所有这样的序偶组成的集合称为 A 和 B 的笛卡尔积（Cartesian product），记作 $A\times B$，形式化表示为

$$A\times B = \{\langle x, y\rangle \mid x\in A, y\in B\}$$

例 2.2：设 $A=\{a\}$，$B=\{b, c\}$，$C=\varnothing$ ，$D=\{1, 2\}$，列写出笛卡尔积 $A\times B$、$B\times A$、$A\times C$、$C\times A$、$A\times(B\times D)$和$(A\times B)\times D$ 中的元素。

解:

$A\times B=\{\langle a,\ b\rangle,\ \langle a,\ c\rangle\}$

$B\times A=\{\langle b,\ a\rangle,\ \langle c,\ a\rangle\}$

$A\times C=C\times A=\varnothing$

$B\times D=\{\langle b,\ 1\rangle,\ \langle c,\ 1\rangle,\ \langle b,\ 2\rangle,\ \langle c,\ 2\rangle\}$

$A\times(B\times D)=\{\langle a,\ \langle b,\ 1\rangle\rangle,\ \langle a,\ \langle c,\ 1\rangle\rangle,\ \langle a,\ \langle b,\ 2\rangle\rangle,\ \langle a,\ \langle c,\ 2\rangle\rangle\}$

$(A\times B)\times D=\{\langle\langle a,\ b\rangle,\ 1\rangle,\ \langle\langle a,\ b\rangle,\ 2\rangle,\ \langle\langle a,\ c\rangle,\ 1\rangle,\ \langle\langle a,\ c\rangle,\ 2\rangle\}$

课堂练习：

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$B=\{a,\ b,\ c\}$

- $A\times B$
- $B\times A$

(2) $A=\{0,1\}$　　求 $A\times A$

由例 2.2 可以看出如下**笛卡尔积的运算性质：**

- 如果集合 A 或 B 为空集，那么 $A\times B$ 为空集
  - 即：$A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$
- 不满足交换律：
  - 除非 $A=\varnothing$ 或者 $B=\varnothing$，否则 $A\times B\neq B\times A$
- 不满足结合律：
  - 除非 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 或 $C=\varnothing$，否则 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$
- 对于任意集合 A、B 和 C，笛卡儿积对并和交都满足分配律
  - $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
  - $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
  - $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
  - $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

定理 2.1: 对于任意集合 *A*、*B*、*C* 和 *D*，*如果* $A\subseteq C$ *且* $B\subseteq D$，那么

$$A\times B\subseteq C\times D。$$

证明:

对于任意 $\langle x,\ y\rangle\in A\times B$，那么 $x\in A$ 且 $y\in B$。由于 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$，故 $x\in C$ 且 $y\in D$，进而，$\langle x,\ y\rangle\in C\times D$。所以 $A\times B\subseteq C\times D$。　　证毕。

定理 1 的逆命题不成立，可分以下情况讨论。

② 当 $A=B=\varnothing$ 时，显然有 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$ 成立；

② 当 $A \neq \varnothing$ 且 $B \neq \varnothing$ 时，对于任意 $x \in A$，由于 $B \neq \varnothing$，必存在 $y \in B$，因此有 $x \in A$ 且 $y \in B$，使得 $\langle x, y \rangle \in A \times B$。又由于 $A \times B \subseteq C \times D$，故 $\langle x, y \rangle \in C \times D$，由此 $x \in C$ 且 $y \in D$，从而证明了 $A \subseteq C$。同理可证 $B \subseteq D$；

③ 当 $A=\varnothing$ 而 $B \neq \varnothing$ 时，有 $A \subseteq C$ 成立，但不一定有 $B \subseteq D$ 成立。可以举如下反例：

对于集合 $A=\varnothing$、$B=\{1\}$、$C=\{3\}$ 和 $D=\{4\}$，有 $A \times B=\varnothing$ 和 $C \times D=\{\langle 3, 4\rangle\}$，显然 $A \times B \subseteq C \times D$，但是 $B \not\subseteq D$。

④ 当 $A \neq \varnothing$ 而 $B=\varnothing$ 时，有 $B \subseteq D$ 成立，但不一定有 $A \subseteq C$ 成立。反例略。

定义 2.6 ：对于 n 个集合 A1、A2、A3、…、An 称集合

$A1 \times A2 \times A3 \times \cdots \times An=\{\langle a1, a2, a3, \cdots, an\rangle \mid ai \in Ai (i=1,2,3,\cdots,n)\}$

为集合 A1、A2、A3、…、An 笛卡尔积。

定理 2.2： 对于有限集合 A1、A2、A3、…、An，有

$|A1 \times A2 \times A3 \times \cdots \times An| = |A1| \times |A2| \times |A3| \times \cdots \times |An|$

证明　根据 n 个集合笛卡尔积的定义和乘法原理可以得证。

例 2.3:对于 $A = \{a, b\}$，$B = \{x, y\}$，$C = \{0, 1\}$，列写出笛卡尔积 $A \times B \times C$、$B \times A \times C$、$A \times C \times B$、$A \times (B \times C)$ 和 $(A \times B) \times C$ 中的元素。

解　$A \times B \times C = \{\langle a, x, 0\rangle, \langle a, x, 1\rangle, \langle a, y, 0\rangle, \langle a, y, 1\rangle, \langle b, x, 0\rangle, \langle b, x, 1\rangle, \langle b, y, 0\rangle, \langle b, y, 1\rangle\}$

$B \times A \times C = \{\langle x, a, 0\rangle, \langle x, a, 1\rangle, \langle x, b, 0\rangle, \langle x, b, 1\rangle, \langle y, a, 0\rangle, \langle y, a, 1\rangle, \langle y, b, 0\rangle, \langle y, b, 1\rangle\}$

$A \times C \times B = \{\langle a, 0, x\rangle, \langle a, 1, x\rangle, \langle a, 0, y\rangle, \langle a, 1, y\rangle, \langle b, 0, x\rangle, \langle b, 1, x\rangle, \langle b, 0, y\rangle, \langle b, 1, y\rangle\}$

$A \times (B \times C) = \{\langle a, \langle x, 0\rangle\rangle, \langle a, \langle x, 1\rangle\rangle, \langle a, \langle y, 0\rangle\rangle, \langle a, \langle y, 1\rangle\rangle, \langle b, \langle x, 0\rangle\rangle, \langle b, \langle x, 1\rangle\rangle, \langle b, \langle y, 0\rangle\rangle, \langle b, \langle y, 1\rangle\rangle\}$

$(A \times B) \times C = \{\langle\langle a, x\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, x\rangle, 1\rangle, \langle\langle a, y\rangle, 0\rangle, \langle\langle a, y\rangle, 1\rangle, \langle\langle b, x\rangle, 0\rangle, \langle\langle b, x\rangle, 1\rangle, \langle\langle b, y\rangle, 0\rangle, \langle\langle b, y\rangle, 1\rangle\}$

2.1.2 关系的定义

“关系”是我们熟悉的，经常使用的概念。如父子关系、夫妻关系、兄弟关系、师生关系、数量的大小关系等，为了便于用数学的方法来研究和讨论各种关系，我们将以集合论的观点来描述关系

- 例如，A={宋江,李逵,武松,时迁,林冲},B={沉鱼,落雁,闭月,羞花,倾国,倾城}，如果宋江与倾国是夫妻关系；武松与闭月是夫妻关系；时迁与沉鱼是夫妻关系；林冲与羞花是夫妻关系。那么二元序偶<宋江,倾国>, <武松,闭

月>, <时迁,沉鱼>, <林冲,羞花>就表示了这夫妻关系。由这些序偶作为元素构成的集合R，即:

R={<宋江,倾国>, <武松,闭月>, <时迁,沉鱼>, <林冲,羞花>}

称R为A到B的二元关系

- 例如,A={a,b,c,d,e,f},元素a,b,c,d,e,f分别表示6个男人，他们是我们考察的对象。其中a是b和c的父亲，b是d的父亲,c是e和f的父亲。现在把这6个人中所有符合父子关系的两个人分别用序偶<a,b>,<a,c>,<b,d>,<c,e>,<c,f>来表示，以这些序偶作为元素构成的集合记为R,即

R={<a,b>,<a,c>,<b,d>,<c,e>,<c,f>}

称R为A上一个关系(父子关系)，集合R完整的描述了集合A 中元素的父子关系

定义2.7 关系

- 如果一个集合的全体元素都是序偶，则称这个集合为一个二元关系，简称为关系，记作R。
- 对于某个二元关系R,若<x, y>∈R，则称x与y以R相关，也常记为xRy,如果<x，y>∉R，则称x与y不以R相关，记作$x\not R y$。

例2.4:对于$R1$={<1, 2>, <a, b>}和$R2$={<1, 2>, a, b}，$R1$是一个关系，而$R2$不是一个关系，只是一个集合，除非a和b定义为序偶。根据上面的记法可以列写1$R1$2、a $R1$$b$、1$\not R1$$a$、1$\not R1$$b$等。

说明：

- 关系是一个集合，序偶是其元素。
- 序是重要的，不可随意安排。
  - 如上面提到的夫妻关系R,由于宋江与倾国是夫妻关系，所以序偶<宋江,倾国> ∈ R,而序偶<倾国,宋江> ∉R,他属于妻夫关系；又如父子关系R中，序偶<a,b> ∈ R，而序偶<b, a> ∉R,他属于子父关系。
- 在我们讨论的关系中，由于序偶仅有两个元素组成，所以这种关系也称为二元关系，同样的方法也可以定义n元关系。
- 一般地,符合某种特殊条件的两个元素组成的序偶构成的集合就是一个关系

例：设A={2,3,4,6,12}，写出A上的整除关系，即当a,b ∈A,且a能整除b时，<a,b>∈R.

解：R={〈2,2〉,〈2,4〉,〈2,6〉,〈2,12〉,〈3,3,〉,〈3,6〉,〈3,12〉,〈4,4〉,〈4,12〉,
〈,6,6〉,〈6,12〉,〈12,12〉}

为了把二元关系的概念抽象化，以便于对二元关系进行一般性的讨论，在给出二元关系的明确定义时，就不再强调二元关系的具体含义，如父子关系，小于关系等，而是抽象地把二元关系看作是笛卡尔乘积的子集。根据笛卡尔积定义，关系还可以有如下定义。

定义 2.8 : 设 A、B 为任意集合，将 A×B 的任一子集 R 称为集合 A 到集合 B 的一个二元关系（简称关系）。

- ■ 当 A=B 时（即 R⊆A×A），称 R 为 A 上的二元关系。

例 2.5: 对于 A={0, 1} 和 B={1, 2, 3}，R1={〈0, 2〉}、R2=A×B、R3=∅ 和 R4={〈0, 1〉，〈1, 1〉} 都是从 A 到 B 的关系，而 R3 和 R4 同时也是 A 上的关系 。

- □ 设|A|=n, |B|=m, A 到 B 总共可能有多少个不同的二元关系 ?
  - ■ $|A\times B|$=m●n，集合$|P(A\times B)|=2^{m\cdot n}$所以，从 A 到 B 的关系有 $2^{m\cdot n}$ 个
- □ |A|=m, A 上总共可能有多少个不同的二元关系 ?
  - ■ $|A\times A|$= m●m，集合$|P(A\times A)|=2^{m\cdot m}$所以，$A$ 上的关系有 $2^{m\cdot m}$ 个

例 2.6: 对于 $A=\{a, b\}$ 和 $B=\{0, 1\}$，试列写出 A 到 B 的所有不同关系？A 上的所有不同关系？

解 由 $A=\{a, b\}$ 和 $B=\{0, 1\}$ 知，$A\times B = \{<a, 0>, <a, 1>, <b, 0>, <b, 1>\}$。于是，$A$ 到 B 的所有不同关系为

0 个元素：∅

1 个元素：$\{<a, 0>\}, \{<a, 1>\}, \{<b, 0>\}, \{<b, 1>\}$

2 个元素：$\{<a, 0>, <a, 1>\}, \{<a, 0>, <b, 0>\}, \{<a, 0>, <b, 1>\}$
$\{<a, 1>, <b, 0>\}, \{<a, 1>, <b, 1>\}, \{<b, 0>, <b, 1>\}$

3 个元素：$\{<a, 0>, <a, 1>, <b, 0>\}, \{<a, 0>, <a, 1>, <b, 1>\}$
$\{<a, 0>, <b, 0>, <b, 1>\}, \{<a, 1>, <b, 0>, <b, 1>\}$

4 个元素：$\{<a, 0>, <a, 1>, <b, 0>, <b, 1>\}$

由 $A=\{a, b\}$ 知，$A\times A = \{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>\}$。于是，$A$ 上的所有不同关系为

0 个元素：∅

1 个元素：$\{<a, a>\}, \{<a, b>\}, \{<b, a>\}, \{<b, b>\}$

2 个元素：$\{<a, a>, <a, b>\}, \{<a, a>, <b, a>\}, \{<a, a>, <b, b>\}$
$\{<a, b>, <b, a>\}, \{<a, b>, <b, b>\}, \{<b, a>, <b, b>\}$

3 个元素：$\{<a, a>, <a, b>, <b, a>\}, \{<a, a>, <a, b>, <b, b>\}$
$\{<a, b>, <b, a>, <b, b>\}, \{<a, a>, <b, a>, <b, b>\}$

4 个元素：$\{<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>\}$

几种特殊的二元关系

定义 2.9:

- □ 空关系：对于任意集合 A,空集 ∅ 称为 A 上的空关系
  - ■原因：∅ 是任何集合的子集，即 ⊆∅A×B，因此它也定义了一种关系。
- □ 全关系：当 R= A×A 时，称 R 为 A 上的全关系，记为 E_A
  - ■问题：若|A|=n,关系 E_A 中有多少个元素？
- □ 恒等关系：设 R 是 A 上的二元关系，且满足 R={<x, x> | x∈A}，则称 R 是 A 上的恒等关系，记作 I_A
  - ■问题：若|A|=n,关系 I_A 中有多少个元素？

例 2.7:对于 A= {1, 2, 3}，试列写出 A 上的全域关系和恒等关系。

解: A 上的全域关系为

E_A={<1, 1 >, <1, 2>, <1, 3>, <2, 1>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 1>, <3, 2>, <3, 3>}；

A 上的恒等关系为　　I_A={<1, 1 >, <2, 2>，<3, 3>}

定义 2.10:关系 R 中所有序偶的第一元素组成的集合称为 R 的定义域（domain）或前域，记为 dom R；R 中所有序偶的第二元素组成的集合称为 R 的值域（range）或后域，记为 ran R；R 的定义域和值域的并集称为 R 的域（field），记为 fld R。形式化表示为

dom R = {x | 存在 y 满足<x, y>∈R }；

ran R = {x | 存在 y 满足<y, x>∈R }；

fld R = dom R ∪ ran R

例 2.8:对于 R= {<1, 2 >, <1, 3>, <2, 4>, <4, 3>}，试求 dom R、ran R 和 fld R。

解　根据定义 2.10 有

dom R = {1, 2, 4}

ran R = {2, 3, 4}

fld R = dom R ∪ ran R={1, 2, 3, 4}

定义 2.11:对于 n 个非空集合 $A1$、$A2$、$A3$、…、An，称笛卡尔积 A1×A2×A3×…×An 的任意子集为依赖于 $A1$×$A2$×$A3$×…×An 的 n 元关系（n-ary relation）。

例 2.9:对于集合 A={a, b}、B={x, y}、C={0, 1}和　D={2, 1}，

$R1=\{\langle a, x, 0, 2\rangle, \langle a, x, 1, 1\rangle, \langle a, y, 0, 2\rangle, \langle a, y, 1, 1\rangle\}$是依赖于 $A\times B\times C\times D$ 的 4 元关系

$R2=\{\langle x, a, 0\rangle, \langle x, b, 1\rangle, \langle y, a, 0\rangle, \langle y, a, 1\rangle, \langle y, b, 1\rangle\}$是依赖于 $B\times A\times C$ 的 3 元关系。

2.1.3 关系的表示

关系的表示主要有如下三种方法 :集合法、关系图、关系矩阵

集合法: 由于关系是一种集合，因此集合的两种基本表示方法—枚举法和描述法，都可以用到关系的表示中。

■枚举法：列出关系中的序偶，序偶之间用逗号隔开并用花括号括起来。

例如： $R1 = \{\langle 1,b\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 5,c\rangle\}$

■描述法：通过刻画关系中序偶所具备的某种特性来表示，通常用符号 P(x) 表示不同对象 x 所具有的性质或属性 P。

例如： 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，$R2 = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in A \wedge x\le y \}$

例 2.10: 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$，下面是以描述法表示的 A 上的各种关系，试用枚举法表示这些关系。

① $R = \{\langle x, y\rangle \mid x/y$ 是素数，$x\in A, y\in A\}$

② $R = \{\langle x, y\rangle \mid (x-y)^2\in A, x\in A, y\in A\}$

③ $R = \{\langle x, y\rangle \mid x\ne y, x\in A, y\in A\}$

④ $R = \{\langle x, y\rangle \mid x$ 是 y 的倍数，$x\in A, y\in A\}$

⑤ $R = \{\langle x, y\rangle \mid x\le y, x\in A, y\in A\}$

⑥ $R = \{\langle x, y\rangle \mid x=y^2, x\in A, y\in A\}$

解

①$R=\{\langle 2,1\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

②$R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$

③$R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$

④ $R=\{\langle 4,4\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

⑤ $R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$

⑥ $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 4, 2\rangle\}$

关系图： 由于关系是一些序偶组成的集合，所以可用有向图来刻划关系，这种

称为关系 R 的关系图。

■对于从 A 到 B 的关系 R，设 $A=\{a1, a2, a3, \cdots, an\}$和 $B=\{b1, b2, b3, \cdots, bm\}$，那么对应的关系图有如下规定

① A 中元素 $a1$，$a2$，$a3$，…，an 和 B 中元素 $b1$，$b2$，$b3$，…，bm 为图的结点；

② 对于序偶$<ai, bj>\in R$，画一条从 ai 到 bj 的有向弧。

■对于 A 上的关系 R，设 $A=\{a1, a2, a3, \cdots, an\}$，那么对应的关系图有如下规定：

① A 中元素 $a1$，$a2$，$a3$，…，an 为图得结点；

② 对于序偶$<ai, aj>\in R$，画一条从 ai 到 aj 的有向弧。

例 2.11:试用关系图表示下列关系

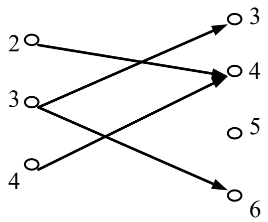
① 集合 $A=\{2, 3, 4\}$到 $B=\{3, 4, 5, 6\}$的关系

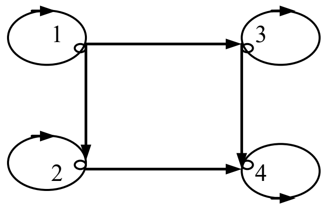
$$R1 = \{<2, 4>, <3, 3>, <3, 6>, <4, 4>\}$$

② 集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$上的关系

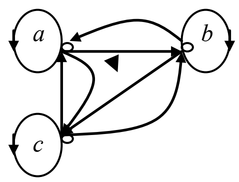
$$R2 = \{<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <1, 2>, <1, 3>, <2, 4>, <3, 4>\}$$

解：关系 R1 和 R2 的关系图如图所示

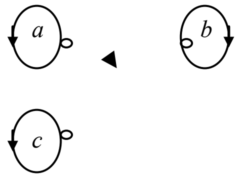




例 2.11:给出集合 A= {a, b, c}上的全域关系和恒等关系的关系图表示。



E_A



I_A

关系矩阵:

关系图表示法十分形象、直观，给人一目了然之感。但是，当关系非常复杂时，尤其当含有元素较多时，该表示方法则十分不便，同时也不利于计算机处理。为此，引入一种新的关系表示法—关系矩阵表示法。

■对于从 A 到 B 的关系 R，设 $A=\{a1, a2, a3, \cdots, an\}$和 $B=\{b1, b2, b3, \cdots, bm\}$，称以 A 中元素 $a1$，$a2$，$a3$，…，an 为行序标、以 B 中元素 $b1$，$b2$，$b3$，…，bm 为列序标的矩阵 $MR=(rij)n\times m$ 为关系 R 的关系矩阵（relation matrix），其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & <a_i,b_j>\in R\\ 0 & <a_i,b_j>\notin R\end{cases}$$

■对于 A 上的关系 R，设 $A = \{a1, a2, a3, \cdots, an\}$，称以 A 中元素 $a1$，$a2$，$a3$，…，an 为行、列序标的矩阵 $MR =(rij)n \times n$ 为关系 R 的关系矩阵（relation matrix），其中

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & <a_i, a_j> \in R \\ 0 & <a_i, a_j> \notin R \end{cases}$$

例 2.13：试列写出例 2.11 中关系 $R1$ 和 $R2$ 的关系矩阵表示。

解：关系 R1 和 R2 的关系矩阵表示分别为如下矩阵 M1 和 M2

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 2.14:给出集合 A= {a，b，c}上的全域关系和恒等关系的关系矩阵表示。

$$M_{E_A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

课堂练习：

1、设 A={1,2,3,4,5}，R 是 A 上的小于等于关系，即当 a ≤ b 时，⟨a,b⟩ ∈R. 求 R 的集合表示，矩阵表示和图形表示。

说明：

- 三种表示方法是等价的，可以相互转换。
- 集合表示法：揭示了关系的本质。
- 矩阵表示法：适用于在计算机中表示和操作二元关系。
- 关系图表示法：比较直观形象。
- 矩阵表示法、关系图表示法：关系中的有序对是有限的。

2.2 关系的性质

自反性与反自反性

定义 2.12:对于集合 A 上的关系 R，如果*任意*元素 $x \in A$，*都有*$\langle x, x\rangle \in R$，那么称集合 A 上的关系 R 具有*自反性（reflexitviy）*，或者 R 在集合 A 上是*自反的（reflexitve）*。具有自反性的关系称为*自反关系*（reflexitve relation）。如果*任意*元素 $x \in A$，*都有*$\langle x, x\rangle \notin R$，那么称集合 A 上的关系 R 具有*反自反性*（anti-reflexitviy），或者 R 在集合 A 上是*反自反的*（anti-reflexitve）。具有反自反性的关系称为*反自反关系*（anti-reflexitve relation）。

例 2.15:考虑如下{1, 2, 3, 4}上的关系

$R1$ = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 4>, <4, 1>, <4, 4>}

$R2$ = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>}

$R3$ = {<1, 1>, <1, 2>, <1, 4>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 1>, <4, 4>}

$R4$ = {<2, 1>, <3, 1>, <3, 2>, <4, 1>, <4, 2>, <4, 3>}

$R5$ = {<1, 1>, <1, 2>, <1, 3>, <1, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <2, 4>, <3, 3>, <3, 4>, <4, 4>}

$R6$ = { <3, 4>}

其中哪些是自反的？哪些是反自反的？

解: 关系 R3 和 R5 是自反的，因为它们都含有了形如<x, x>的序偶，即<1, 1>、<2, 2>、<3, 3>和<4, 4>。其它关系不是自反的，因为它们不含有所有这些序偶。关系 R1 含有序偶<1, 1>、<2, 2>和<4, 4>，但不含有序偶<3, 3>，所以，关系 R1 不是自反的。关系 R2 含有序偶<1, 1>，但不含有序偶<2, 2>、<3, 3>和<4, 4>，所以，关系 R2 不是自反的。关系 R4 和 R6 不含有任何形如<x, x>的序偶，所以，关系 R4 和 R6 不是自反的。

关系 R4 和 R6 是反自反的，因为它们不含有任何形如<x, x>的序偶。其它关系不是反自反的，因为它们含有某些形如<x, x>的序偶。

例 2.16:用关系矩阵和关系图表示例 2.15 中的关系，并分析其中自反性、反自反性的特征？

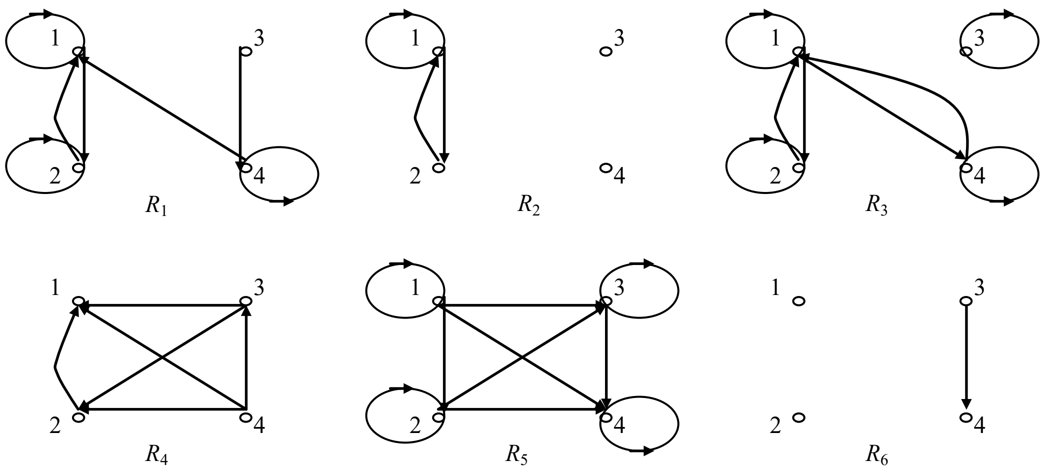
解: 例 2.15 中关系 R1、R2、R3、R4 、R5 和 R6 的关系矩阵分别为如下矩阵 M1、M2、M3、M4 、M5 和 M6。从这些关系矩阵中可以看出：自反关系 R3 和 R5 的关系矩阵的主对角线元素全为 1；反自反关系 R4 和 R6 的关系矩阵的主对角线元素全为 0。

$$M_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\end{bmatrix}\quad M_5=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M_6=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

例 2.15 中关系的关系图如下图所示。

从这些关系图中可以看出:自反关系 R3 和 R5 的关系图中每个结点都有自环;反自反关系 R4 和 R6 的关系图中每个结点都没有自环。



同时，可以发现:如果某个关系 *R* 是自反的，那么该关系一定不是反自反的，反之亦然;如果某个关系 *R* 不是自反的，那么该关系不一定就是反自反的，反之亦然。换言之，存在既不是自反的也不是反自反的关系。

例 2.17:计算集合 A={a, b}上所具有的自反关系的个数

解:

由 A={a, b}知，A×A ={<a, a>, <b, b>, <a, b>, <b, a>}。根据自反性定义，所有具有自反性的关系至少含有<a，a>和<b，b>两个元素。因此，计算 A 上所有具有自反性的关系的个数就相当于计算集合{<a，b>，<b, a>}的所有不同子集的个数，而集合{<a, b>, <b, a>}的所有不同子集的个数就等于的 0 组合、1 组合和 2 组合的个数之和，即

C(2,0) + C(2,1) + C(2,2) = 1 + 2 +1 = 4

对称性与反对称性

定义 2.13:设 R 为集合 A 上的关系，对于*任意元素 x∈A 和 y∈A，如果<x, y>∈R，那么<y, x>∈R*，则称集合 A 上的关系 R 具有*对称性（symmetry）*，或者 R 在集合 A 上是*对称的*（symmetric）。对于任意元素 x∈A 和 y∈A，如果*仅当 x = y 时，<x, y>∈R 且<y, x>∈R*，则称集合 A 上的关系 R 具有*反对称性（antisymmetry）*，或者 R 在集合 A 上是*反对称的（antisymmetric）*。

理解:

- 集合 A 上的关系 R 是*对称的，当且仅当*如果集合 A 中元素 x 与 y 以 R 相关，

则 y 与 x 就以 R 相关。

- 集合 A 上的关系 R 是*反对称*的，*当且仅当不存在由集合 A 中不同元素 x 与 y 构成的序偶*，使得 x 与 y 以 R 相关并且 y 与 x 也以 R 相关
- 对称与反对称概念*不是对立的*,因为一个关系可以同时具有这两种性质或者同时不具有这两种性质。

例 2.18:分析例 2.15 中所列出关系的对称性和反对称性？

解:

在关系 R1 中，<3, 4>∈ R1 但<4, 3>∉R1，所以，R1 不具有对称性；同时，<1, 2>∈ R1 且<2, 1>∈ R1，所以 R1 也不具有反对称性。

在关系 R2 中，<1, 2>∈ R2 且<2, 1>∈ R2，所以，R2 具有对称性，但不具有反对称性。

在关系 R3 中，<1, 2>∈ R3 且<2, 1>∈ R3，<1, 4>∈ R3 且<4, 1>∈ R3，所以，R3 具有对称性，但不具有反对称性。

在关系 R4 中，<2, 1>∈ R4 但<1, 2>∉R4，<3, 1>∈ R4 但<1, 3>∉R4，<3, 2>∈ R4 但<2, 3>∉R4，<4, 1>∈ R4 但<1, 4>∉R4，<4, 2>∈ R4 但<2, 4>∉R4，<4, 3>∈ R4 但<3, 4>∉R4，所以，R4 具有反对称性，但不具有对称性。

在关系 R5 中，<1, 2>∈ R5 但<2, 1>∉R5，<1, 3>∈ R5 但<3, 1>∉R5，<1, 4>∈ R5 但<4, 1>∉R5，<2, 3>∈ R5 但<3, 2>∉R5，<2, 4>∈ R5 但<4, 2>∉R5，<3, 4>∈ R5 但<4, 3>∉R5，所以，R5 是反对称的，但不是对称的。

在关系 R6 中，<3, 4>∈ R6 但<4, 3>∉R6，所以，R6 是反对称的，但不是对称的。

例 2.19:试给出一个集合上的关系例子，要求它既是对称的又是反对称的。

解:

考察集合 A = {a, b}上的关系 R = {<a, a>, <b, b>}。

由于不存在集合 A 上的元素 x ≠ y 及其序偶<x, y>∈R，所以集合 A 上的关系 R 是对称的。又由于 R 中不存在集合 A 上的元素 x ≠ y 及其序偶<x, y>∈R 且<y, x>∈R，所以集合 A 上的关系 R 是反对称的。即，集合 A = {a, b}上的关系 R = {<a, a>, <b, b>}既是对称的又是反对称的。

例 2.20:分析例 2.16 中关系的关系矩阵和关系图，给出对称性、反对称性的表示特征。

解:从关系矩阵表示中可以看出：具有对称性的关系 R2 和 R3 的关系矩阵为对称矩阵；具有反对称性的关系 R4、R5 和 R6 的关系矩阵为反对称矩阵。

从关系图表示中可以看出：具有对称性的关系 R2 和 R3 的关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么没有任何边；具有反对称性的关系 R4、R5 和 R6 的关系图中，任何一对结点之间至多有一条边。

传递性

定义 2.13: 设 R 为集合 A 上的关系，对于任意元素 x∈A、y∈A 和 z∈A，*如果<x, y>∈R 且<y, z>∈R，那么<x, z>∈R，则称集合 A 上的关系 R 具有传递性（transitivity），* 或者 R 在集合 A 上是传递的（transitive）。

例 2.21: 分析例 2.15 中所列出关系的传递性？并结合例 2.16 中给出的关系的关系矩阵和关系图表示，分析关系矩阵和关系图表示中传递性的特征。

解:

R2、R4、R5 和 R6 是传递的。因为在这些关系中，如果<x, y>∈R 且<y, z>∈R，那么必有<x, z>∈R。

R1 不是传递的。因为在 R1 中，<3, 4>∈R1 且<4,1>∈ R1 但<3,1>∉R1。

R3　不是传递的，因为<2, 1>∈R3,<1, 4>∈R3 但<2, 4>∉R3

从关系矩阵表示中可以看出：具有传递性关系的关系矩阵中，对任意 i、j、k∈ {1,2,3,…, n}，若 $r_{ij}=1$ 且 $r_{jk}=1$，必有 $r_{ik}=1$。

从关系图表示中可以看出：具有对称性的关系的关系图中，任何三个结点 x、y 和 z（可以相同）之间，若从 x 到 y 有一条边且从 y 到 z 有一条边，那么从 x 到 z 一定有一条边。

例 2.22: 试求集合 A = {1, 2}上所有具有传递性的的关系 R

解:

因为|A| = 2，所以 A 上的不同关系，即 A×A 的子集，共有 2^4=16。列写如下

R1 = ∅

R2 = {<1, 1>}，R3 = {< 2, 2>}，R4= {<1, 2>}，R5= {<2, 1>}

R6 = {<1,1>, <2, 2>}，R7 = {<1, 1>, <1, 2>}，R8 = {< 1,1>, <2, 1>}

R9 = {<2,2>, <1,2>}，R10 ={<2, 2>, <2, 1>}，R11 = {<1, 2>, <2, 1>}

R12 = {<1, 1>, <2, 2>, <1, 2>}，R13 = {<1, 1>, <2, 2>, <2, 1>}

R14 = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>}，R15 = {<2, 2>, <1, 2>, <2, 1>}

R16 = {<1, 1>, <2, 2>, <1, 2>, <2, 1>}

不难看出，除了 R11、R14 和 R15 外，其它关系都具有传递性。因为，在关系 R11 中，<1, 2>∈R11 且<2, 1>∈R11，但<1, 1>∉R11；在关系 R14 中，<2, 1>∈R14

且<1，2>∈R14，但<2，2>∉R14；在关系 R15 中，<1，2>∈R11 且<2，1>∈R15，但<1，1>∉R15。

所以，集合 A 上所有具有传递性的关系为 R1、R2、R3、R4、R5、R6、R7、R8、R9、R10、R12、R13 和 R16。

性质的判别

判别类型	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
定义	对于所有 $a\in A$ 都有 $\langle a,a\rangle\in R$	对于所有 $a\in A$ 都有 $\langle a,a\rangle\notin R$	若 $\langle a,b\rangle\in R$，则有 $\langle b,a\rangle\in R$	若 $\langle a,b\rangle\in R$ 并且 $\langle b,a\rangle\in R$，则有 $a=b$	若 $\langle a,b\rangle\in R$ 并且 $\langle b,c\rangle\in R$，则有 $\langle a,c\rangle\in R$
集合	$I_A\subseteq R$	$R\cap I_A=\varnothing$	$R=R^{-1}$	$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$	$R^2\subseteq R$
关系图	图中每个结点都有环	图中每个结点都无环	任意两个不同的结点间要么没有弧，要么有方向相反的一对弧。	任意两个结点间至多有一条弧	若 a 到 b 有弧，b 到 c 有弧，则 a 到 c 有弧
关系矩阵	主对角线上全为 1	主对角线上全为 0	对称阵	反对称阵（r_{ij} 和 r_{ji} 不能同时为 1）	如果 $r_{ik}=1$ 并且 $r_{kj}=1$，则 $r_{ij}=1$

例 2.23 判断集合 A={1，2，3}上的如下关系的性质

R1 = {<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>}

R2 = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 3>}

R3 = {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>}

R4 = E_A

R5 = ∅

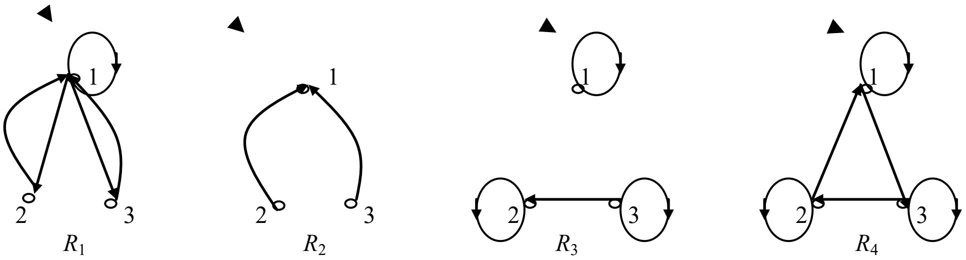
解： 根据关系性质的定义，可以判定

关系 R1 具有反自反性、反对称性和传递性；

关系 R2 具有反对称性；

关系 R3 具有自反性、对称性、反对称性和传递性；
关系 R4 具有自反性、对称性和传递性；
关系 R5 具有反自反性、对称性、反对称性和传递性。

例 2.24:判断下图中给出的关系的性质：



解:

关系 R1 是对称的，因为无单向边；不是反对称的，因为存在双向边；不是自反的，也不是反自反的，因为有些结点有自环，有些结点无自环；不是传递的，因为存在<2,1>边和<1,2>边，但没有<2,2>自环。

关系 R2 是反自反的、反对称的、传递的，因为所有结点无自环，不存在双向边，不存在从 x 到 y 的边且从 y 到 z 的边。不是自反的、对称的。

关系 R3 是自反的、反对称的、传递的，因为所有结点有自环，不存在双向边，不存在从 x 到 y 的边且从 y 到 z 的边。不是反自反的、对称的。

关系 R4 是自反的、反对称的，因为所有结点有自环，不存在双向边，所有从 x 到 y 的边且从 y 到 z 的边对应有一条从 x 到 z 的边。不是反自反的、对称的、传递的。

例 2.25:判断下列关系矩阵所表示的关系的性质：

$$M_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad M_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad M_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\quad M_4=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

解: 关系 R1 是对称的，因为 M1 是对称矩阵；不是自反的，也不是反自反的，因为主对角线元素有些为 0，有些为 1；不是传递的，因为 2 行 1 列元素和 1 行 2 列元素均为 1，但 2 行 2 列元素为 0。

关系 R2 是反自反的、反对称的、传递的，因为 M2 的主对角线元素全为 0，

为反对称矩阵，不存在 i 行 j 列元素和 j 行 k 列元素均为 1。

关系 R3 是自反的、反对称的，因为 M3 的主对角线元素全为 1，为反对称矩阵；不是传递的，因为 3 行 2 列元素和 2 行 1 列元素均为 1，但 3 行 1 列元素为 0。

关系 R4 是自反的、反对称的，因为 M4 的主对角线元素全为 1，为反对称矩阵；不是传递的，因为 1 行 3 列元素和 3 行 2 列元素均为 1，但 1 行 2 列元素为 0

2.3 关系的运算

2.3.1 基本运算

关系是一种集合，所以集合的所有基本运算，如，并、交、差、补、对称差等运算，都适用于关系。

例 2.26: 设 A = {a, b, c, d}上的关系 R={<a, b>, <b, d>, <c, c>}和 S={<a, c>, <b, d>, <d, b>}，计算 R∪S、R∩S、R−S、~R 和 R⊕S。

解:

R∪S = {<a, b>, <b, d>, <c, c>, <a, c>, <d, b>}

R∩S = {<b, d>}

R−S = {<a, b>, <c, c>}

~R = A×A−R

= {<a, b>, <a, c>, <a, d>, <b, c>, <b, d>, <c, d>, <b, a>, <c, a>, <d, a>, <c, b>, <d, b>, <d, c>, <a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>} − {<a, b>, <b, d>, <c, c>}

= {<a, c>, <a, d>, <b, c>, <c, d>, <b, a>, <c, a>, <d, a>, <c, b>, <d, b>, <d, c>, <a, a>, < b, b>, <d, d>}

R⊕S = {<a, b>, <c, c>, <a, c>, <d, b>}

2.3.2 复合运算

定义 2.15: 设 R 是一个从集合 A 到集合 B 的关系，S 是从集合 B 到集合 C 的关系，则定义关系 R 和 S 的*合成关系或复合关系*（composite relation）为集合 A 到集合 C 的关系

R∘S ={<x，z>| x ∈A、z∈C 且存在 y ∈B，使得<x，y>∈R 且<y，z>∈S}

其中，“∘”称为关系的复合运算（composite operation）。

例 2.29: 设集合 A = {a, b, c, d}、B = {b, c, d}和 C = {a, b, d}，集合 A 到集合 B 的关系 R = {<a, b>, <c, d>, <b, b>}，集合 B 到集合 C 的关系 S ={ <b, d>, <c, b>, <d, b>}，求 R∘S，并给出其关系图和关系矩阵。

解:

集合 A、B 和 C 以及关系 R 和 S 满足复合运算的要求，序偶<a, b>和序偶<b, d>可以得到<a, d>，序偶<c, d>和序偶<d, b>可以得到<c, b>，序偶<b, b>和序偶<b, d>可以得到<b, d>，所以

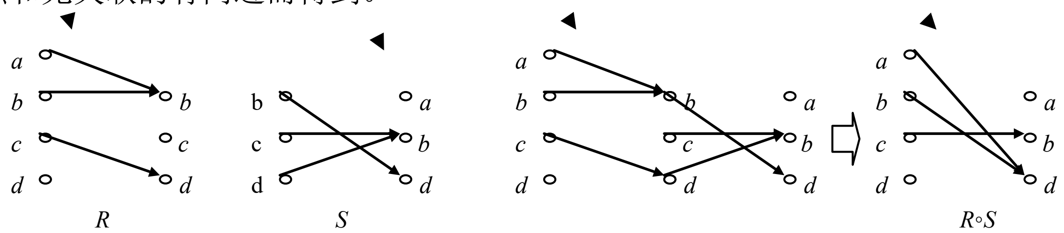
R∘S={<a, d>, <c, b>, <b, d>}。

关系 R、S 以及复合关系 R∘S 的关系矩阵如下:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{R\circ S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

事实上，如果将矩阵运算中的乘和加运算定义为布尔与和布尔或运算，关系矩阵 $M_{R\circ S}$ 就可以有关系矩阵 M_R 和 M_S 乘运算而得到，即 $M_{R\circ S} = M_R M_S$。

下图给出了关系 R、S 以及复合关系 R∘S 的关系图。复合关系的关系图可以直接根据求得的复合关系绘制，也可以通过对 R 和 S 的关系图叠加，删除中间结点和无关联的有向边而得到。



课堂练习：

设集合 A = {a, b, c}和 B = {1, 2, 3, 4, 5}，集合 A 上关系 R = {<a, a>, <a, c>, <b, b>, <c, b>, <c, c>}，集合 A 到集合 B 的关系 S = {<a, 1>, <a, 4>, <b, 2>, <c, 4>, <c, 5>}，利用矩阵和关系图求 R∘S。

例 2.31: 设 R 为集合 A 到集合 B 的关系，试证明 $I_A \circ R = R \circ I_B = R$，其中 I_A 和 I_B 分别是集合 A 和 B 上的恒等关系。

证明:

对于任意<x, y>∈ $I_A \circ R$，其中，x∈A，y∈B。根据复合运算的定义，则存在 x∈A，使得<x, x>∈ I_A 且<x, y>∈R。即 $I_A \circ R \subseteq R$。

反之，对于任意$\langle x, y\rangle\in R$，其中，$x\in A$，$y\in B$。根据恒等关系的定义，则有$\langle x, x\rangle\in I_A$。再根据复合运算的定义，必有$\langle x, y\rangle\in I_A\circ R$。即$R\subseteq I_A\circ R$。
综上知，$I_A\circ R = R$。

定理 2.3:对于任意集合 A、B、C 和 D，设 R、S 和 T 分别是集合 A 到 B、集合 B 到 C 和集合 C 到 D 的关系，那么 $(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$。
证明:
任取$\langle x, w\rangle\in(R\circ S)\circ T$，则由复合运算的定义知，存在$z\in C$，使得$\langle x, z\rangle\in R\circ S$且$\langle z, w\rangle\in T$。由$\langle x, z\rangle\in R\circ S$知，存在$y\in B$，使得$\langle x, y\rangle\in R$且$\langle y, z\rangle\in S$。由于$\langle y, z\rangle\in S$且$\langle z, w\rangle\in T$，所以$\langle y, w\rangle\in S\circ T$。又由$\langle x, y\rangle\in R$且$\langle y, w\rangle\in S\circ T$知，$\langle x, w\rangle\in R\circ(S\circ T)$。故$(R\circ S)\circ T\subseteq R\circ(S\circ T)$。
同理，可证得$R\circ(S\circ T)\subseteq(R\circ S)\circ T$。所以，$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T)$。 证毕。

定理 2.4:对于任意集合 A、B、C 和 D，设 R、S1、S2 和 T 分别是集合 A 到 B、集合 B 到 C、集合 B 到 C 和集合 C 到 D 的关系，那么
① $R\circ(S1\cup S2) = (R\circ S1)\cup(R\circ S2)$
② $R\circ(S1\cap S2)\subseteq(R\circ S1)\cap(R\circ S2)$
③ $(S1\cup S2)\circ T = (S1\circ T)\cup(S2\circ T)$
④ $(S1\cap S2)\circ T\subseteq(S1\circ T)\cap(S2\circ T)$
证明:
仅以②为例进行证明，其余留做练习。
　　对于任意$\langle x, z\rangle\in R\circ(S1\cap S2)$，由复合运算的定义知，存在$y\in B$，使得$\langle x, y\rangle\in R$且$\langle y, z\rangle\in S1\cap S2$。根据交运算的定义，有$\langle y, z\rangle\in S1$且$\langle y, z\rangle\in S2$。于是，有$\langle x, z\rangle\in R\circ S1$且$\langle x, z\rangle\in R\circ S2$，即有$\langle x, z\rangle\in(R\circ S1)\cap(R\circ S2)$。从而，$R\circ(S1\cap S2)\subseteq(R\circ S1)\cap(R\circ S2)$。 证毕。

例 2.33:试说明下列式子不成立
① $(R\circ S1)\cap(R\circ S2)\subseteq R\circ(S1\cap S2)$
② $(S1\circ T)\cap(S2\circ T)\subseteq(S1\cap S2)\circ T$
解:
取下列集合$A = \{1, 2, 3\}$、$B = \{1, 2\}$、$C = \{2, 3\}$、$D = \{4\}$，以及关系$R = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$、$S1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$、$S2 = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$和$T = \{\langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$，显然$S1\cap S2 = \varnothing$。有如下情形
① $R\circ(S1\cap S2) = \varnothing$；$R\circ S1 = \{\langle 2, 3\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$；$R\circ S2 = \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$。

即有，$(R\circ S1)\cap(R\circ S2)=\{\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle\}$。所以，$(R\circ S1)\cap(R\circ S2)\subseteq R\circ(S1\cap S2)$不成立。

② $(S1\cap S2)\circ T=\varnothing$；$S1\circ T=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle\}$；$S2\circ T=\{\langle 2,4\rangle,\langle 1,4\rangle\}$。即有，$(S1\circ T)\cap(S2\circ T)=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle\}$。所以，$(S1\circ T)\cap(S2\circ T)\subseteq(S1\cap S2)\circ T$ 不成立。

说明：

- 复合对并运算满足分配律！
- 复合对交运算不满足分配律！
- 复合运算满足结合律！

2.3.3 逆运算

定义 2.16: 设 R 是一个从集合 A 到集合 B 的关系，则定义关系 R 的逆关系（inverse relation）为集合 B 到集合 A 的关系

$$R^{-1}=\{\langle x,y\rangle\mid x\in A、y\in B，\langle y,x\rangle\in R\}$$

其中，*“-1”*称为关系的*逆运算*（inverse operation）。

例 2.34: 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$、$B=\{a,b,c,d\}$和 $C=\{2,3,4,5\}$，R 是从 A 到 B 的关系 $R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 4,d\rangle\}$，S 是从 B 到 C 的关系 $S=\{\langle a,2\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,5\rangle,\langle d,5\rangle\}$

① 试计算 R^{-1}、S^{-1}、$(R^{-1})^{-1}$、$(S^{-1})^{-1}$、$(R\circ S)^{-1}$和 $S^{-1}\circ R^{-1}$；

② 画出关系 R、S、R^{-1}和 S^{-1}的关系图；

③ 列写出关系 R、S、R^{-1}和 S^{-1}的关系矩阵。

解　① 根据逆运算和复合运算的定义，有

$R^{-1}=\{\langle a,1\rangle,\langle c,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle b,4\rangle,\langle d,4\rangle\}$

$S^{-1}=\{\langle 2,a\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 3,c\rangle,\langle 5,c\rangle,\langle 5,d\rangle\}$

$(R^{-1})^{-1}=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 4,b\rangle,\langle 4,d\rangle\}$

$(S^{-1})^{-1}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,4\rangle,\langle c,3\rangle,\langle c,5\rangle,\langle d,5\rangle\}$

$R\circ S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 4,5\rangle\}$

$(R\circ S)^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,4\rangle\}$

$S^{-1}\circ R^{-1}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,4\rangle\}$

定理 2.5: 对于任意集合 A 和 B，设 R 是集合 A 到 B 的关系，那么 $(R^{1})^{-1}=R$。

证明:

对于任意$\langle x,y\rangle\in(R^{-1})^{-1}$，根据逆运算的定义，则$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$。再根据逆运算的定义，必有$\langle x,y\rangle\in R$。于是，$(R^{-1})^{-1}\subseteq R$。

反之，对于任意$\langle x, y\rangle\in R$，根据逆运算的定义，那么$\langle y, x\rangle\in R^{-1}$。再根据逆运算的定义，必有$\langle x, y\rangle\in (R^{-1})^{-1}$。于是，$R\subseteq(R^{-1})^{-1}$。

综上知，$(R^{-1})^{-1} = R$.　　　　证毕。

定理 2.6: 对于任意集合 A、B 和 C，设 R 和 S 分别是集合 A 到 B 和集合 B 到 C 的关系，那么 $(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$。

证明:

对于任意$\langle z, x\rangle\in(R\circ S)^{-1}$，根据逆运算的定义，则$\langle x, z\rangle\in R\circ S$。根据复合运算的定义，那么存在 $y\in B$，使得$\langle x, y\rangle\in R$ 且$\langle y, z\rangle\in S$。再根据逆运算的定义，必有$\langle y, x\rangle\in R^{-1}$且$\langle z, y\rangle\in S^{-1}$。于是根据复合运算的定义，得到$\langle z, x\rangle\in S^{-1}\circ R^{-1}$，即$(R\circ S)^{-1}\subseteq S^{-1}\circ R^{-1}$。

反之，对于任意$\langle z, x\rangle\in S^{-1}\circ R^{-1}$，根据复合运算的定义，那么存在 $y\in B$，使得$\langle z, y\rangle\in S^{-1}$且$\langle y, x\rangle\in R^{-1}$。根据逆运算的定义，那么$\langle y, z\rangle\in S$ 且$\langle x, y\rangle\in R$。于是根据复合运算的定义，得到$\langle x, z\rangle\in R\circ S$。再根据逆运算的定义，必有$\langle z, x\rangle\in(R\circ S)^{-1}$，即 $S^{-1}\circ R^{-1}\subseteq(R\circ S)^{-1}$。

综上知，$(R\circ S)^{-1} = S^{-1}\circ R^{-1}$　　　　证毕。

定理 2.7: 对于任意集合 A、B 和 C，设 R 和 S 分别是集合 A 到 B 和集合 B 到 C 的关系，那么。

① $(R\cup S)^{-1} = R^{-1}\cup S^{-1}$

② $(R\cap S)^{-1} = R^{-1}\cap S^{-1}$

③ $(R-S)^{-1} = R^{-1}-S^{-1}$

④ $(\sim R)^{-1} = \sim(R^{-1})$

⑤ $(A\times B)^{-1} = B\times A$

⑥ $R^{-1}\subseteq S^{-1}$ 当且仅当 $R\subseteq S$

2.3.4 幂运算

定义 2.17: 设 R 是一个集合 A 上的关系，n 为自然数，则关系 R 的 n 次幂定义为:

$$R^0 = \{\langle x, x\rangle \mid x\in A\}$$

$$R^{n+1} = R^n \circ R$$

由上述定义知，对于 A 上的任何关系 R，R 的最低次幂是 0 次幂，都等于 A 上的恒等关系 I_A。反复使用定义中的规则，就可以得到 R 的任何正整数次幂。例如

$$R^1 = R^0\circ R = R$$

$R^2 = R^1 \circ R = R \circ R$

$R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R = R \circ R \circ R$

$\vdots$

亦即，R 的 n 次幂就是 n 次个 R 的复合或合成。

例 2.35:设集合 $A = \{a, b, c, d\}$上的关系 $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle\}$，求 R的各次幂，并分别用关系矩阵和关系图表示。

解：关系 R 的关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么，R2、R3、R4、R5、R6、R7…的关系矩阵分别为：

$$M_{R^2} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3} \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R^2}$$

$$M_{R^5} = M_{R^4} \cdot M_R = M_{R^2} \cdot M_R = M_{R^3}$$

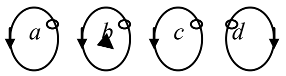
$$M_{R^6} = M_{R^5} \cdot M_R = M_{R^3} \cdot M_R = M_{R^2}$$

$$M_{I_A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

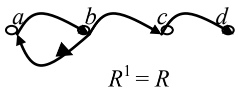
$$M_{R^7} = M_{R^6} \cdot M_R = M_{R^2} \cdot M_R = M_{R^3}$$

由此，$R^2=R^4=R^6=R^8$ …，$R^3=R^5=R^7$ …, 而 $R^0=I_A$

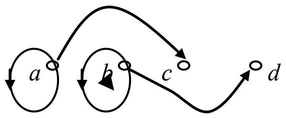
根据已得到的 R^0、R^1、R^2、R^3、R^4、R^5、R^6…的关系矩阵，可以得到这些 R 的各次幂的关系图如下图所示。



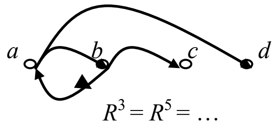
R^0



$R^1 = R$



$R^2 = R^4 = \ldots$



$R^3 = R^5 = \ldots$

定理 2.8:设 R 是基数为 n 的有限集 A 上的关系,则存在自然数 s 和 t(s<t)使得 $R^s = R^t$

证明:

由于 R 是基数为 n 的有限集 A 上的关系，那么对于任意自然数 k，R^k 都是 A×A 的子集。又由于$|A\times A| = n\cdot n$，$|P(A\times A)| = 2^{n\cdot n}$，即 A×A 的不同子集有 $2^{n\cdot n}$ 个。当列出 R 的各次幂 R^0、R^1、R^2、R^3、R^4、R^5、R^6…，必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$

证毕。

定理 2.9:设 R 是集 A 上的关系，m 和 n 为自然数，那么

① $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

② $(R^m)^n = R^{mn}$

证明:

① 对于任意自然数 m，对 n 进行归纳。

若 n = 0，则有

$R^m \circ R^0 = R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$，则有

$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n} \circ R = R^{m+n+1}$

所以，对于任意自然数 m 和 n，都有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$。

② 对于任意自然数 m，对 n 进行归纳。

若 n = 0，则有

$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\cdot 0}$

假设$(R^m)^n = R^{mn}$，则有

$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+n} = R^{m(n+1)}$

所以，对于任意自然数 m 和 n，都有$(R^m)^n = R^{mn}$。

证毕。

定理 2.10:设 R 是集 A 上的关系，若存在自然数 s 和 t（s<t），使得 $R^s = R^t$，那么① 对于任意自然数 k 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$；

② 对于任意自然数 k 和 i 有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 p = t−s；

③ 令 $S = \{R^0, R^1, R^2, \cdots, R^{t-1}\}$，则对于任意自然数 q 有 $R^q \in S$。

证明:

① $R^{s+k} = R^s \circ R^k = R^t \circ R^k = R^{t+k}$。

② 对 k 进行归纳。

若 k = 0，则有

$R^{s+0\cdot p+i} = R^{s+i}$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 p = t−s，则有

$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i \circ Rp}$

$= R^{s+i \circ Rp} = R^{s+i+p}$

$= R^{s+i+t-s} = R^{t+i} = R^{s+i}$

所以，对于任意自然数 k，都有 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$。

③ 对于任意自然数 q，如果 q<t，显然有 $R^q \in S$。

如果 q≥t，则存在自然数 k 和 i 使得

$q = s + k\cdot p + i$

其中，$0 \le i \le p-1$。于是 $R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，而

$s + i \le s + p - 1 = s + t - s - 1 = t - 1$

所以，$R^q \in S$。

证毕。

通过上面定理可以看出，有限集 A 上的关系 R 的幂序列 R^0、R^1、R^2、R^3、R^4、R^5、R^6……是一个周期变化的序列。

例 2.36: 设集合 A = {a, b, d, e, f}上的关系

R = {<a, b>, <b, a>, <d, e>, <e, f>, <f, d>}

求出最小的自然数 s 和 t（s<t）使得 $R^s = R^t$。

解：关系 R 的关系矩阵为

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

那么，R^2、R^3、R^4、R^5、R^6、R^7…的关系矩阵分别为:

$$M_{R^2} = M_R \cdot M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R^3}=M_{R^2}\cdot M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\cdot M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^5}=M_{R^4}\cdot M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R^6}=M_{R^5}\cdot M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=M_{I_A}=M_{R^0}$$

由此，$s=0$，$t=6$。

2.3.5 闭包运算

设非空集合 A 上的二元关系为 R，一般而言，R 并不一定具有一些有用的性质，例如自反性、对称性、传递性等。因此，需要在 R 中额外地添加一些序偶，从而构成新的二元关系，使其具有我们所需要的性质。

□ 思路：

① 添加有效序偶后所形成的新的二元关系必须具有我们所需要的性质；

② 添加的条件就是添加的序偶尽可能地少。

定义 2.18: 设 R 和 R′是集合 A 上的关系，如果它们满足 ：

①R′是自反的；

②$R\subseteq R'$；

③对 A 上任何包含 R 的自反关系 R″都有 $R'\subseteq R''$.

我们就称二元关系 R′为关系 R 的自反闭包（reflexive closure），记为 r(R)

例 2.37: 试求集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的关系 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

的自反闭包 。

解：由关系自反性的定义知，R 是自反的当且仅当任意 x∈A 都有<x, x>∈R。因此，在 R 中添加序偶<2, 2>和<3, 3>后得到的关系就具有自反性，且满足自反闭包的定义，即

r(R) = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <3, 3>}

定义 2.19:设 R 和 R′是集合 A 上的关系，如果它们满足 ：

①R′是对称的；

②R⊆R′；

③对 A 上任何包含 R 的对称关系 R″都有 R′⊆R″.

我们就称二元关系 R′为关系 R 的对称闭包（symmetric closure），记为 s(R)

例 2.38:试求例 2.37 中关系 R 的对称闭包。

解: 由关系对称性的定义知，R 是对称的当且仅当对任意 x∈A 和 y∈A，如果<x, y>∈R，则有<y, x>∈R。因此，在 R 中添加序偶<3, 1>后得到的关系就具有对称性，且满足对称闭包的定义，即

s(R) = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <3, 1>}

定义 2.20:设 R 和 R′是集合 A 上的关系，如果它们满足 ：

①R′是传递的；

②R⊆R′；

③对 A 上任何包含 R 的传递关系 R″都有 R′⊆R″.

我们就称二元关系 R′为关系 R 的传递闭包（symmetric closure)，记为 t(*R*)

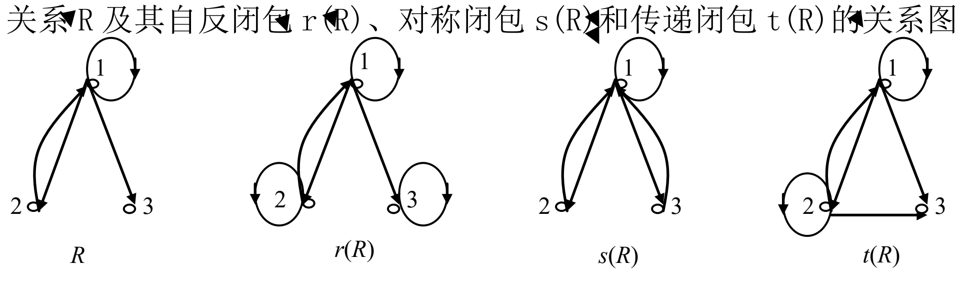
例 2.39:试求例 2.37 中关系 R 的传递闭包。

解: 由关系传递性的定义知，R 是传递的当且仅当对任意 x∈A、y∈A 和 z∈A，如果<x, y>∈R 且<y, z>∈R，则有<x, z>∈R。因此，在 R 中添加序偶<2, 2>和<2, 3>后得到的关系就具有传递性，且满足传递闭包的定义，即

t(R) = {<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <1, 3>, <2, 2>, <2, 3>}

例 2.40:试画出例 2.37 中关系 R 及其自反闭包、对称闭包和传递闭包的关系图。

解:关系 R 及其自反闭包 r(R)、对称闭包 s(R)和传递闭包 t(R)的关系图



从例 2.40 可总结出通过关系图求闭包的方法：

（1）如果对 R 的关系图的不含自环的顶点添加自环。则可以得到自反闭包 $r(R)$ 的关系图。

（2）在 R 的关系图中，如果两个不同的结点之间只有一条边，则在它们之间添加一条相反方向的边，就可以得到 R 的对称闭包 $s(R)$ 的关系图。

（3） 在 R 的关系图中，如果存在结点 x 指向 y 的一条边，且存在 y 指向 z 的一条边，但没有 x 指向 z 的一条边，那么添加一条 x 指向 z 的边。重复这一过程，直到不再需要添加有向边为止，这样就可以得到 R 的传递闭包 t(R)的关系图。

例 2.41:列出例 2.37 中关系 R 及其自反闭包、对称闭包和传递闭包的关系矩阵。
解:关系 R 及其自反闭包 r(R)、对称闭包 s(R)和传递闭包 t(R)的关系矩阵

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad M_{r(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad M_{s(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad M_{t(R)}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

从例 2.41 可总结出通过矩阵求闭包的方法：

（1）将 R 的关系矩阵的对角线上的 0 全部改为 1，就可以得到 R 的自反闭包 r(R)的关系矩阵；

（2）对于 R 的关系矩阵的非主对角线上的值为 1 的元素，如果它关于主对角线对称的相应位置上的元素不为 1，那么将其改为 1，从而可以得到 R 的对称闭包 s(R)的关系矩阵；

（3）利用关系矩阵求解关系 R 的传递闭包 t(R)，用到定理 2.11。

定理 2.11:设 R 是非空集合 A 上的关系，则有

① r(R) = R ∪IA

② s(R) = R ∪ R-1

③ $t(R) = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$

④ 如果$|A|=n$，则 $t(R) = \cup_{i=1}^{n} R^i$

证略。

用来求闭包！

例 2.42:设集合 A = {a, b, c, d}上的关系 R = {<a, b>, <a, c>, <b, c>, <c, d>, <d, c>}，求 r(R)、s(R)和 t(R)。

解:

根据定理 2.11 可以得到

$r(R) = R \cup I_A = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$s(R) = R \cup R^{-1} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$

$R^2 = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$R^3 = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle\}$

$R^4 = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

$= \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$

2.4 特殊关系

关系可能具有一些特殊的性质，如自反性、对称性、传递性等，当一个关系具有一个或多个特殊性质时，就可定义不同的特殊关系。

- 等价关系
- 相容关系
- 偏序关系

2.4.1 等价关系

定义 2.21: 设 R 为非空集合 A 上的关系（即 $A \neq \emptyset$ 并且 $R \subseteq A \times A$），如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

- 设 R 是一个等价关系，若 $\langle x, y\rangle \in R$，则称 x 与 y 等价.

例 2.50: 试判断下列关系是否为等价关系

- R1:选修离散数学课程同学中的“同班”关系
- R2:幂集上的“$\subseteq$”关系
- R3:直线间的“平行”关系
- R4:整数集上的“$\leq$”关系
- R5:人群中的“朋友”关系

	自反	对称	传递	等价关系
R1	√	√	√	√
R2	√	×	√	×
R3	√	√	√	√
R4	√	×	×	×
R5	√	√	×	×

例 2.51:在集合 A={1, 2, 3, …, 24}上定义整除关系 R={<x, y>| x∈A，y∈A，(x−y)被 12 整除}， 判断关系 R 是否为 A 上的等价关系？

解:

（自反性）对于任意 x∈A，(x−x)/12= 0，于是(x−x)被 12 整除，即<x, x>∈R。因此，R 是自反的。

（对称性）对于任意 x∈A 和 y∈A，如果<x，y>∈R，那么(x−y)/12= k，其中 k 为整数。从而(y −x)/12= −(x−y)/12= −k，于是(y −x)被 12 整除，即<y, x>∈R。因此，R 是对称的。

（传递性)对于任意 x∈A、y∈A 和 z∈A,如果<x, y>∈R 和<y, z>∈R,那么(x−y)/12= k1，(y−z)/12= k2，其中 k1 和 k2 为整数。又(x−z)/12= (x−y)/12+ (y−z)/12 =k1+k2，故 (x −z)被 12 整除，即<x, z>∈R。因此，R 是传递的。

综上述知，关系 R 为 A 上的等价关系。

例 2.52:设 n 为正整数，考虑整数集合 Z 上的整除关系

R={<x, y>| x∈Z，y∈Z，(x−y)被 n 整除}

证明关系 R 为 Z 上的等价关系。

证明:

（自反性）对于任意 x∈ Z，(x−x)/ n= 0，于是(x−x)被 n 整除，即<x, x>∈R。因此，R 是自反的。

（对称性）对于任意 x∈Z 和 y∈Z，如果<x，y>∈R，那么(x−y)/n = k，其中 k 为整数。从而(y −x)/n = −(x−y)/n = −k，于是(y −x)被 n 整除，即<y，x>∈R。因此，R 是对称的。

（传递性）对于任意 x∈Z、y∈Z 和 z∈Z，如果<x, y>∈R 和<y，z>∈R，那么(x−y)/n = k1，(y−z)/n = k2,其中 k1 和 k2 为整数。又(x−z)/n = (x−y)/n+ (y−z)/n =k1+k2，故 (x −z)被 n 整除，即<x，z>∈R。因此，R 是传递的。

综上述知，关系 R 为 Z 上的等价关系。 证毕。

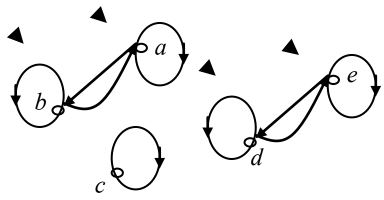
- □ $x-y$ 可以被 n 整除，即 x 除以 n 的余数与 y 除以 n 的余数相等。通常称为 Z 上的以 n 为模的同余关系（congruence relation）。对于<x，y>∈R，一般记为 $x \equiv y \pmod n$。

- ■ **在数学中，也将上面的关系 R 称为“模 n 同余关系”。**

例 2.53: 设集合 A = {a，b，c，d，e }上的关系 R1 = {<a，a>，<a，b>，<b，a>，<b，b>，<c，c>，<d，d>，<d，e>，<e，d>，<e，e>}和 R2 = {<a，b>，<b，a>，<b，b>，<c，c>，<d，d>，<d，e>}，判断 R1 和 R2 是否为等价关系？并用关系矩阵和关系图表示其中的等价关系。

解：关系 R1 具有自反性、对称性和传递性，所以，关系 R1 是等价关系。其关系矩阵和关系图表示如下图

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$$



R_1

关系 R2 不具有自反性、对称性和传递性，所以，关系 R2 不是等价关系。

从上述关系矩阵和关系图可以看出，相互等价的元素组成了关系图中相互连通的部分，并将关系矩阵分成了不同的块。

定义 2.22：设 R 是非空集合 A 上的等价关系，对于任意 x∈A，称集合.

$$[x]_R = \{ y \mid y\in A \text{ 且} \langle x, y\rangle \in R \}$$

为 x 关于 R 的**等价类**（equivalent class）。或称为由 x 生成的一个 R 的等价类，并称其中的 x 为 $[x]_R$ 的生成元（generator）或代表元。

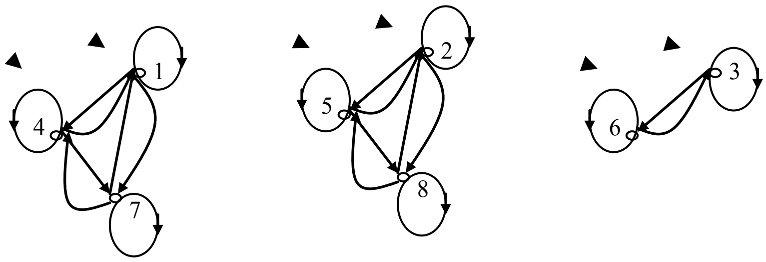
- ■ $[x]_R$ 表示由所有与 x 关于 R 等价的元素组成的集合。
- ■ 在不引起混淆的情况下，即 R 可以通过上下文可知的情况下，也将 $[x]_R$ 简写为 $[x]$。

例 2.54: 设 R 是集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8}上的模 3 同余关系，试用关系图表示该关系？并求 R 的所有等价类。

解：集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8}上的模 3 同余关系为

R = {<1，1>，<1，4>，<1，7>，<2，2>，<2，5>，<2，8>，<3，3>，<3，6>，<4，1>，<4，4>，<4，7>，<5，2>，<5，5>，<5，8>，<6，3>，<6，6>，<7，1>，<7，4>，<7，7>，<8，2>，<8，5>，<8，8>}

可以得到关系 R 的关系图如图所示。



R

关于 R 的等价类如下

$[1]_R=\{1, 4, 7\}$　$[2]_R=\{2, 5, 8\}$　$[3]_R=\{3, 6\}$ $[4]_R=\{1, 4, 7\}$

$[5]_R=\{2, 5, 8\}$ $[6]_R=\{3, 6\}$ $[7]_R=\{1, 4, 7\}$ $[8]_R=\{2, 5, 8\}$

显然有

$[1]_R=[4]_R=[7]_R$

$[2]_R=[5]_R=[8]_R$

$[3]_R=[6]_R$

定理 2.19 ： 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，则：

(1) 对于任意 $x\in A$，$[x]_R$ 是 A 的非空子集.

(2) 对于任意 $x, y\in A$，如果 xRy，则 $[x]_R=[y]_R$.

(3) 对于任意 $x, y\in A$，如果 $\langle x, y\rangle\notin R$，则 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

(4) $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$.

证明：

① 对任意 $x\in A$，由于 R 是等价关系，所以 $\langle x, x\rangle\in R$，即 $x\in[x]_R$，故，$[x]_R$ 是 A 的非空子集。

② 对任意 $x\in A$ 和 $y\in A$，如果 $\langle x, y\rangle\in R$，那么，由 R 的对称性知，$\langle y, x\rangle\in R$。对于任意 $z\in[x]_R$，则 $\langle x, z\rangle\in R$。进而，又由 R 的传递性知，$\langle y, z\rangle\in R$。于是 $z\in[y]_R$，即 $[x]_R\subseteq[y]_R$。

同理可证，$[y]_R\subseteq[x]_R$。从而有 $[x]_R=[y]_R$。

③ 对任意 $x\in A$ 和 $y\in A$，如果 $\langle x, y\rangle\notin R$，假设 $[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$，那么，存在 $z\in[x]_R\cap[y]_R$，即 $z\in[x]_R$ 且 $z\in[y]_R$。因此有 $\langle x, z\rangle\in R$ 且 $\langle y, z\rangle\in R$。由 R 的对称性知，$\langle z, y\rangle\in R$。又由 R 的传递性知，$\langle x, y\rangle\in R$。矛盾。所以，$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$。

④ 对任意 $x\in A$，$[x]_R\subseteq A$，所以 $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}\subseteq A$。

对任意 $x\in A$，由 R 的自反性知，$\langle x, x\rangle\in R$，即 $x\in[x]_R$。于是，$x\in\cup[x]_R$，即 $A\subseteq\cup\{[x]_R \mid x\in A\}$。故 $\cup\{[x]_R \mid x\in A\}=A$。证毕。

定义 2.23： 设 R 是非空集合 A 上的等价关系；将由 R 的所有等价类构成的集合

称为***A*关于*R*的商集**，记做A/R。即，

$$A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$$

例 2.25：令 R 是集合 A={ 1，2，3 ，4 ，5 ，6 ,7,8}上的模 3 同余关系。

A 关于 R 的商集为：

$$A/R = \{[1]_R, [2]_R, [3]_R\} = \{\{1,4,7\}, \{2,5,8\}, \{3,6\}\}$$

A关于恒等关系的商集为：

$$A/I_A = \{ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\} ,\{7\},\{8\} \}$$

A关于全域关系的商集为：

$$A/E_A = \{ \{1, 2, 3, 4, 5, 6,7,8\} \}$$

商集的计算步骤：

① 从集合A中任意选取一个元素a，并计算a所在的等价类$[a]_R$；

② 如果$[a]_R \neq A$，选取另外一个元素b，$b \in A$且$b \notin [a]_R$，计算$[b]_R$；

③ 如果 A 不与所计算出的等价类的并相等，则选取不在这些等价类中的元素 $x \in A$，计算$[x]_R$；

④ 重复③直到集合 A 与所有的等价类的并相等，则结束。

例 2.56：对于集合$A = \{a, b, c, d, e\}$上的关系$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$，求$A/R$。

解：根据等价类的定义有

$[a]= [b]=\{a, b\}$ ， $[c] =\{c\}$

$[d]= [e]=\{d, e\}$

从而有$A/R = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$

划分：

定义 2.24 ： 对于非空集合 A ，$S=\{S_1, S_2,\cdots,S_m\}$如果满足

① $S_i \subseteq A$且$S_i \neq \varnothing$（$i=1, 2, \cdots, m$），

② $S_i \cap S_j = \varnothing$（$i \neq j$； $i=1, 2, \cdots, m$ ； $j=1, 2, \cdots, m$ ），

③ $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m = A$，

则称 S 为 A 的一个划分（partition），而$S_1, S_2, \cdots, S_m$分别称为这个划分的块或类（block）

例 2.57:设集合$A=\{1, 2, 3, 4\}$，判断下列集合是否是A的划分

①{{1}，{2，3}，{4}}　　　是 A 的划分

②{{1，2，3，4}}　　　　　　　是 A 的划分

③{{1}，{2，3}，{1，4}} 不是 A 的划分,因为{1}和{1，4}有相交元素

④{∅，{1，2}，{3，4}}　　不是 A 的划分,含有空集 ∅

⑤{{1}，{2，3}}　　　　不是 A 的划分，因为所有子集的并不等于集合 A

⑥{{1，2，3，4}，∅}　　　　不是 A 的划分,含有空集 ∅

例 2.58：对于例 2.55 中集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8}以及商集 A/R= {{1，4，7}，{2，5，8}，{3，6}}。显然，商集 A/R 为集合 A 的一个划分。

对于集合{{1，4，7}，{2，5，8}，{1，3，6}}，虽然满足定义 2.23 中的条件①和③，但是{1，4，7}∩{1，3，6} ≠ ∅，不满足定义中条件②，所以，集合{{1，4，7}，{2，5，8}，{1，3，6}}不是集合 A={1，2，3，4，5，6，7，8}的一个划分。

定理 2.20:设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则集合 A 上关于 R 的商集 A/R 是 A 的一个划分，称之为由等价关系 R 导出的等价划分。

证明：由定理 2.19 以及集合划分的定义，显然有定理 2.20 的结论。证毕。

例 2.59:对于例 2.56 中集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 以及商集 $A/R= \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$。显然，商集 A/R 为集合 A 的一个划分。

定理 2.21:设 $\{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$ 是非空集合 A 的一个划分，则由该划分确定的关系

$$R = (S_1\times S_1)\cup(S_2\times S_2)\cup\cdots\cup(S_m\times S_m)$$

是 A 上的等价关系，称之为由该划分所导出的等价关系。

证明：

（自反性）对于任意 $x\in A$，由于 $\cup S_i = A$，所以，存在某个 $i > 0$，使得 $x\in S_i$。于是，$\langle x, x\rangle\in S_i\times S_i$，即$\langle x, x\rangle\in R$。因此，$R$ 是自反的。

（对称性）对于任意 $x\in A$ 和 $y\in A$，如果$\langle x, y\rangle\in R$，则存在某个 $j > 0$，使得$\langle x, y\rangle\in S_j\times S_j$。于是，$\langle y, x\rangle\in S_j\times S_j$，即$\langle y, x\rangle\in R$。因此，$R$ 是对称的。

（传递性）对于任意 $x\in A$、$y\in A$ 和 $z\in A$，如果$\langle x, y\rangle\in R$ 和$\langle y, z\rangle\in R$，那么必存在某个 $i > 0$ 和 $j > 0$，使得$\langle x, y\rangle\in S_i\times S_i$ 和$\langle y, z\rangle\in S_j\times S_j$，即 $x\in S_i$ 且 $y\in S_i$ 且 $y\in S_j$ 且 $z\in S_j$。从而，$y\in S_i\cap S_j$。又由于不同的划分块交为空，所以 $S_i = S_j$。进而，x 和 z 同属于同一个划分块。故$\langle x, z\rangle\in R$。因此，R 是传递的。

综上述知，关系 R 为 A 上的等价关系。证毕。

思考：对非空集合 A 来说，A 上的等价关系与 A 的划分哪种更多?

例 2.60:对于集合 $A=\{1, 2, 3, 4\}$ 的划分 $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}\}$，试构造 A 上的等价关系。

解：　根据定理 2.21，构造如下关系

$R = (\{1\}\times\{1\})\cup(\{2,3\}\times\{2,3\})\cup(\{4\}\times\{4\})$

$= \{\langle 1,1\rangle\}\cup\{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}\cup\{\langle 4,4\rangle\}$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}$

显然，关系 R 是自反的、对称的和传递的，即，R 是 A 上的等价关系。

课堂练习： 设 A={1,2,3,4,5}.

1）求 A 的划分 Π={{1,2},{3},{4,5}}对应的等价关系。

2)已知关系 R={<1,3>, <1,1>, <3,1>, <3,3>, <2,2>, <5,2>, <5,5>, <2,5>, <4,2>, <4,4>, <4,5>, <5,4>, <2,4>}，求 R 对应的划分。

练习：

设 A 为含有 3 个元素的集合。问：A 上可以有多少个不同的等价关系？

（答案：5 种）

设 A 为含有 4 个元素的集合。问：A 上可以有多少个不同的等价关系？

（答案：15 种）

2.4.3 偏序关系

序关系反映了事物之间的次序特征。通过序关系就可以对集合中元素进行排序。由于集合 A 上的所有元素不一定都能够排序，一般是部分元素之间的排序，所以部分序或偏序的意义更大。

例如，集合 A={2, 4, 6, 8}上的“≤”小于等于关系为 $R=\{\langle 2,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 2,8\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,6\rangle, \langle 4,8\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 6,8\rangle, \langle 8,8\rangle\}$。可以看出该关系具有自反性、反对称性和传递性。

定义 2.28 对于非空集合 A 上的二元关系 R，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系（partial order relation)，简称为偏序，记为“$\preccurlyeq$”，读作“小于等于”，并将序偶 $\langle x, y\rangle\in R$ 记为 $x\preccurlyeq y$。如果集合 A 上有偏序关系 R，则称 A 为偏序集（partial order set)，记为 $\langle A, \preccurlyeq\rangle$。

注意：这里的“小于等于”不是指数值的大小，而是在偏序关系中的顺序性。“x 小于等于 y”的含义是：依照这个序，x 在偏序上排在 y 的前面或者相同。根据不同偏序的定义有不同的解释。例如，整数集上的整除关系是偏序关系，$3\preccurlyeq 6$ 的含义是 3 整除 6；整数集上的大于等于关系也是偏序关系，$5\preccurlyeq 4$ 的含义是该关系中 5 排在 4 的前边，也就是 5 比 4 大。

例 2.66:判断下列关系是否为偏序关系

① 集合 A 的幂集合 $P(A)$ 中元素之间的包含关系“$\subseteq$”；

② 实数集合 R 上的小于等于关系“≤”；

③ 实数集合 R 上的大于等于关系“≥”；

④ 自然数集合 N 上的模 n 同余关系；

⑤ 正整数集合上的整除关系；

⑥ 人群中的“父子”关系。

解 ① 集合 A 的幂集合 $P(A)$ 中元素之间的包含关系“$\subseteq$”是自反的、反对称的和传递的，所以，$\langle P(A), \subseteq\rangle$是偏序关系；

② 实数集合 R 上的小于等于关系“≤”具有自反性、反对称性的和传递性，所以，它是偏序关系；

③ 实数集合 R 上的大于等于关系“≥”具有自反性、反对称性的和传递性，所以，该关系是偏序关系；

④ 自然数集合 N 上的模 n 同余关系具有自反性和传递性，但不具有反对称性，所以，该关系不是偏序关系；

⑤ 正整数集合上的整除关系具有自反性、反对称性的和传递性，所以，该关系是偏序关系；

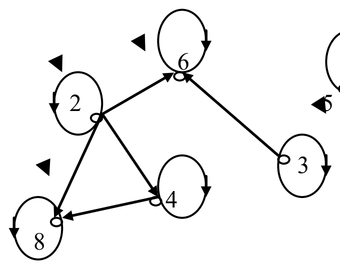
⑥ 人群中的“父子”关系具有反对称性，但不具有自反性和传递性，所以，该关系不是偏序关系。

例 2.67:判断集合 A={2, 3, 4, 5, 6, 8}上的整除关系是否为偏序关系？并用关系矩阵和关系图表示。

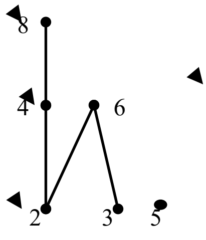
解: 集合 A 上的整除关系 R ={<2,2>,<2,4>,<2,6>,<2,8>,<3,3>,<3,6>,<4,4>,<4,8>,<5,5>,<6,6>,<8,8>}

显然，该关系具有自反性、反对称性和传递性。所以，它是偏序关系。该关系的关系矩阵和关系图表示如下

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$



R



关系 R 的哈斯图

定义 2.29:设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，对于任意元素 $x\in A$ 和 $y\in A$，如果 x≤y 或者 y≤x，则称 x 与 y 是可比的（comparable）。若 $x\leq y$ 且 $x\neq y$，则称 x 排在 y 的前面，记作 $x<y$，读作“x 小于 y”。 如果<x, y>∉R 且<y, x>∉R，则称 x 与 y 是不可比的（incomparable），或者不是可比的。如果 $x<y$ 且不存在元素 $z\in A$，使得 $x<z$ 且 $z<y$，则称 y 盖住（covering）x。

由定义 2.29 可知，具有偏序关系 R 的集合 A 中的任意元素 x 和 y，可能有下述

几种情况发生：

① $x<y$（或 $y<x$）；

② $x = y$；

③ x 与 y 不是可比的。

例 2.68:例 2.67 中集合 A={2, 3, 4, 5, 6, 8}上的整除关系。

2 与 4 是可比的，且 2 排在 4 的前面，即，2 小于 4，2<4；

2 与 6 是可比的，且 2 排在 6 的前面，即，2 小于 6，2<6；2 与 8 是可比的，且 2 排在 8 的前面，即，2 小于 8，2<8；

3 与 6 是可比的，且 3 排在 6 的前面，即，3 小于 6，3<6；

4 与 8 是可比的，且 4 排在 8 的前面，即，4 小于 8，4<8；

2 与 2 是可比的，3 与 3 是可比的，4 与 4 是可比的，5 与 5 是可比的，6 与 6 是可比的，8 与 8 是可比的；

2 与 3 是不可比的，2 与 5 是不可比的；

3 与 4 是不可比的，3 与 5 是不可比的，3 与 8 是不可比的；

4 与 5 是不可比的，4 与 6 是不可比的；

5 与 6 是不可比的，5 与 8 是不可比的；

6 与 8 是不可比的；

4 盖住 2，8 盖住 4，6 盖住 2，6 盖住 3。

哈斯图：

对于偏序关系的关系图表示可进行如下简化：

① 由于偏序关系是自反的，各节点处均有环，约定全部略去

② 由于偏序关系是反对称的，关系图中任何两个不同节点之间不可能有相互到达的边，因此可约定边的向上方向为箭头方向，省略全部箭头。

③ 由于偏序关系是传递的，我们可以将传递关系可以推出的边也省去。

经过这些简化后的偏序关系的关系图称为哈斯图（Hasse graph）。

哈斯图的绘制步骤：

（1）以“•” 表示元素；

（2）若 x<y，则 y 画在 x 的上层；

（3）若 y 盖住 x，则连线；

（4）不可比的元素可画在同一层。

例 2.70:绘制如下偏序关系的哈斯图

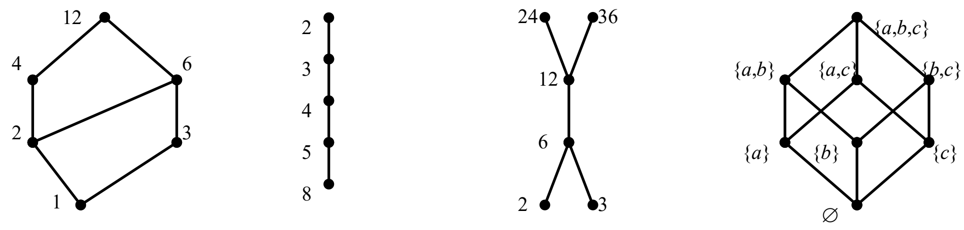
① 集合 A = {1, 2, 3, 4, 6, 12}上的整除关系；

② 集合 A = {2, 3, 4, 5, 8}上的大于等于关系“≥”；

③ 集合 A = {2, 3, 6, 12, 24, 36}上的整除关系；

④ 集合 $A=\{a, b, c\}$的幂集 $P(A)$上的包含关系“$\subseteq$”；

解：偏序关系①、②、③和④的哈斯图绘制于图



整除关系　　大于等于关系　　整除关系　　包含关系

偏序集中的特殊元素

利用偏序关系可对集合中的元素进行比较和排序。在哈斯图中，各元素都处在不同的层次上，有的元素的位置特殊，它们是偏序集合中的特殊元素，这些元素有助于我们对偏序集合进行深入分析。

定义 2.30: 对于偏序集$\langle A, \leqslant\rangle$和集合 A 的任意子集 B，如果存在元素 $b\in B$，使得任意 $x\in B$ 都有 $x\leqslant b$，则称 b 为 B 的最大元素（greatest element），简称为最大元;如果存在元素 $b\in B$,使得任意 $x\in B$ 都有 $b\leqslant x$,则称 b 为 B 的最小元素(smallest element)，简称为最小元。

例 2.71: 对于例 2.70 中偏序关系①，集合 B1= {1, 6}、B2= {1, 2, 3}、B3= {4, 6, 12}、B4= {2, 4, 6}、B5= {1, 2, 6, 12}和 B6= {1, 2, 3, 4, 6, 12} 都是集合 A 的子集，试求出 B1、B2、B3、B4、B5 和 B6 的最大元和最小元。

解:

对于集合 $B1=\{1, 6\}$，最大元为 6，最小元为 1；

对于集合 $B2=\{1, 2, 3\}$，元素 2 和 3 不可比，所以，不存在最大元，最小元为 1；

对于集合 $B3=\{4, 6, 12\}$，元素 4 和 6 不可比，所以，不存在最小元，最大元为 12；

对于集合 $B4=\{2, 4, 6\}$，元素 4 和 6 不可比，所以，不存在最大元，最小元为 2；

对于集合 $B5=\{1, 2, 6, 12\}$，最大元为 12，最小元为 1；

对于集合 $B6=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，最大元为 12，最小元为 1。

课堂练习： 对于例 2.70 中偏序关系③，集合 B1= {6, 12}、B2= {2, 3}、B3= {12, 36}、B4= {2, 3, 6}、B5= {2, 3, 6, 12}和 B6= {2, 3, 6, 12, 24, 36} 都是集合 A 的子集，试求出 B1、B2、B3、B4、B5 和 B6 的最大元和最小元。

定义 2.31: 对于偏序集$\langle A, \leqslant\rangle$和集合 A 的任意子集 B，如果存在元素 $b\in B$，使得

B中不存在其它元素 x 满足 $b \preccurlyeq x$，则称 b 为 B 的极大元素（maximal element），简称为极大元；如果存在元素 $b \in B$，使得 B 中不存在其它元素 x 满足 $x \preccurlyeq b$，则称 b 为 B 的极小元素（minimal element），简称为极小元

说明：偏序集<A, ≼>的任意子集 B 的最大（小）元与极大（小）元不同之处是：最大（小）元必须与 B 中每个元素都可比（或都有关系），而极大（小）元则无此要求（只要求没有比它更大或更小的元素）。

例 2.73:对于例 2.70 中偏序关系①，集合 B1= {1, 6}、B2= {1, 2, 3}、B3= {4, 6, 12}、B4= {2, 4, 6}、B5= {1, 2, 6, 12}和 B6= {1, 2, 3, 4, 6, 12} 都是集合 A 的子集，试求出 B1、B2、B3、B4、B5 和 B6 的极大元和极小元。

解:

对于集合 B1= {1, 6}，极大元为 6，极小元为 1；

对于集合 B2= {1, 2, 3}，极大元为 2 和 3，极小元为 1；

对于集合 B3= {4, 6, 12}，极大元为 12，极小元为 4 和 6；

对于集合 B4= {2，4，6}，极大元为 4 和 6，极小元为 2；

对于集合 B5= {1, 2, 6, 12}，极大元为 12，极小元为 1；

对于集合 B6= {1, 2, 3, 4, 6, 12}，极大元为 12，极小元为 1。

课堂练习：对于例 2.70 中偏序关系③，集合 $B1$= {6, 12}、$B2$= {2, 3}、$B3$= {12, 36}、$B4$= {2, 3, 6}、$B5$= {2, 3, 6, 12}和 $B6$= {2, 3, 6, 12, 24, 36} 都是集合 A 的子集，试求出 $B1$、$B2$、$B3$、$B4$、$B5$ 和 $B6$ 的极大元和极小元。

定义 2.32:对于偏序集<A, ≼>和集合 A 的任意子集 B，如果存在元素 $a \in A$，使得任意 $x \in B$ 都有 $x \preccurlyeq a$，则称 a 为子集 B 的上界（upper bound）；如果存在元素 $a \in A$，使得任意 $x \in B$ 都有 $a \preccurlyeq x$，则称 a 为子集 B 的下界（lower bound）。

说明：偏序集<A, ≼>的任意子集 B 的上（下）界，不一定是集合 B 中的元素。

例 2.75:对于例 2.70 中偏序关系①，集合 $B1$= {1, 6}、$B2$= {1, 2, 3}、$B3$= {4, 6, 12}、$B4$= {2, 4, 6}、$B5$= {1, 2, 6, 12}和 $B6$= {1, 2, 3, 4, 6, 12} 都是集合 A 的子集，试求出 $B1$、$B2$、$B3$、$B4$、$B5$ 和 $B6$ 的上界和下界。

解:

对于集合 B1= {1, 6}，上界为 6 和 12，下界为 1；

对于集合 B2= {1, 2, 3}，上界为 6 和 12，下界为 1；

对于集合 B3= {4, 6, 12}，上界为 12，下界为 1 和 2；

对于集合 B4= {2, 4, 6}，上界为 12，下界为 1 和 2；

对于集合 B5= {1, 2, 6, 12}，上界为 12，下界为 1；

对于集合 B6= {1, 2, 3, 4, 6, 12}，上界为 12，下界为 1。

课堂练习：对于例 2.70 中偏序关系③，集合 *B*1= {6, 12}、*B*2= {2, 3}、*B*3= {12, 36}、*B*4= {2, 3, 6}、*B*5= {2, 3, 6, 12}和 *B*6= {2, 3, 6, 12, 24, 36} 都是集合 A 的子集，试求出 *B*1、*B*2、*B*3、*B*4、*B*5 和 *B*6 的上界和下界。

定义 2.33:对于偏序集<A, ≼>和集合 A 的任意子集 B，如果存在子集 B 的上界 a，使得 B 的任意上界 x 都有 a≼x，则称 a 为子集 B 的最小上界（least upper bound）或上确界，记为 sup(B) = a；如果存在子集 B 的下界 a，使得 B 的任意下界 x 都有 x≼a，则称 a 为子集 B 的最大下界（greatest lower bound）或下确界，记为 inf(B) = a。

说明：如果 C 是 B 的所有上界的集合，则 C 的最小元 c 称为 B 的最小上界或上确界；如果 C 是 B 的所有下界的集合，则 C 的最大元 c 称为 B 的最大下界或下确界。

例 2.77:对于例 2.70 中偏序关系①，集合 *B*1= {1, 6}、*B*2= {1, 2, 3}、*B*3= {4, 6, 12}、*B*4= {2, 4, 6}、*B*5= {1, 2, 6, 12}和 *B*6= {1, 2, 3, 4, 6, 12} 都是集合 A 的子集，试求出 *B*1、*B*2、*B*3、*B*4、*B*5 和 *B*6 的上确界和下确界。

解:

对于集合 B1= {1, 6}，上确界为 6，下确界为 1；

对于集合 B2= {1, 2, 3}，上确界为 6，下确界为 1；

对于集合 B3= {4, 6, 12}，上确界为 12，下确界为 2；

对于集合 B4= {2, 4, 6}，上确界为 12，下确界为 2；

对于集合 B5= {1, 2, 6, 12}，上确界为 12，下确界为 1；

对于集合 B6= {1, 2, 3, 4, 6, 12}，上确界为 12，下确界为 1。

课堂练习:对于例 2.70 中偏序关系③，集合 *B*1= {6, 12}、*B*2= {2, 3}、*B*3= {12, 36}、*B*4= {2, 3, 6}、*B*5= {2, 3, 6, 12}和 *B*6= {2, 3, 6, 12, 24, 36} 都是集合 A 的子集，试求出 *B*1、*B*2、*B*3、*B*4、*B*5 和 *B*6 的上确界和下确界。

定理 2.24:对于偏序集<*A*, ≼>和集合 *A* 的任意子集 *B*，那么

① 若 *b* 为 *B* 的最大元，则 *b* 为 *B* 的极大元、上界和上确界；

② 若 *b* 为 *B* 的最小元，则 *b* 为 *B* 的极小元、下界和下确界；

③ 若 *a* 为 *B* 的上界且 a ∈B，则 *a* 为 *B* 的最大元；

④ 若 *a* 为 *B* 的下界且 a ∈B，则 *a* 为 *B* 的最小元。

证明：这里仅证明②和③，①和④的证明留做练习。

② 对于偏序集<A, $\preccurlyeq$>集合 A 的任意子集 B，若 b 为 B 的最小元，那么，根据最小元的定义知，任意 $x\in B$ 都有 $b\preccurlyeq x$，当然不存在元素 $y\in B$ 满足 $y\prec b$，所以，根据极小元和下界的定义，必有 b 为 B 的极小元，也为的 B 的下界。

设 a 为 B 的下确界。由于最小元要小于等于 B 中的元素，因此 b 为 B 的一个下界。又由于 a 为 B 的下确界，即最大下界，因此 $b\preccurlyeq a$。另一方面，a 为 B 的下界，它要小于等于 B 中的所有元素，即 $a\preccurlyeq b$。由偏序关系的反对称性知，必有 $b=a$，即最小元是下确界。

③ 对于偏序集<A, $\preccurlyeq$>集合 A 的任意子集 B，若 a 为 B 的上界且 $a\in B$，那么，根据上界的定义知，B 中所有元素都要小于等于 a，显然，a 为 B 的最大元。

定理 2.25:对于偏序集<A, $\preccurlyeq$>和集合 A 的任意子集 B，那么

① 若 B 有最大元，则 B 的最大元惟一；

② 若 B 有最小元，则 B 的最小元惟一；

③ 若 B 有上确界，则 B 的上确界惟一；

④ 若 B 有下确界，则 B 的下确界惟一；

⑤ 若 B 为有限集，则 B 的极大元、极小元恒存在。

证明:这里仅证明①和③，②、④和⑤的证明留做练习。

① 对于偏序集<A, $\preccurlyeq$>集合 A 的任意子集 B，若 b 为 B 的最大元，设 x 为 B 的另一最大元。根据最大元的定义，B 中所有元素都要小于等于它，即 $b\preccurlyeq x$ 且 $x\preccurlyeq b$。由偏序关系的反对称知，必有 $b = x$，即 B 的最大元惟一。

③ 对于偏序集<A, $\preccurlyeq$>集合 A 的任意子集 B，若 b 为 B 的上确界，设 x 为 B 的另一上确界。根据上确界的定义，B 的上界中所有元素都要小于等于它。又由于 b 和 x 必然都是的上界，于是，$b\preccurlyeq x$ 且 $x\preccurlyeq b$。由偏序关系的反对称性知，必有 $b=x$，即 B 的上确界惟一。

定义 2.34:对于偏序集<A, $\preccurlyeq$>，如果 A 中任意两个元素 x 和 y 都是有关系的（或者 x 和 y 是可比的），即 $x\preccurlyeq y$ 或者 $y\preccurlyeq x$，则称该偏序关系为全序关系（total order relation），简称为全序，或者线序关系，简称为线序。并称<A,$\preccurlyeq$>称为全序集（total order set），或者线序集，或者链（chain）。

例 2.79:判断下列关系是否为全序关系？并给出其哈斯图。

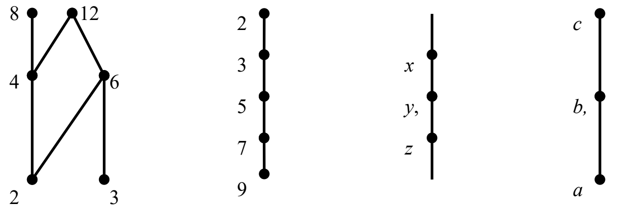
① 集合{2, 3, 4, 6, 8, 12}上的整除关系 $R1$；

② 集合{2, 3, 5, 7, 9}上的大于等于关系 $R2$；

③ 实数集合上的小于等于关系 $R3$；

④ 集合$\{a, b, c\}$上的关系 $R4=\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, c\rangle\}$；

解：关系①、②、③和④都是偏序关系。根据全序关系的定义，②、③和④都是全序关系；①不是全序关系，因为其中元素 2 和 3 无关，元素 3 和 4 无关，元素 3 和 8 无关，元素 4 和 6 无关，元素 6 和 8 无关，元素 8 和 12 无关。



R_1　　R_2　　R_3　　R_4

注：当一个偏序关系是全序时，其哈斯图将集合中元素排成一条线，像一条链子，充分体现了其“链”的特征。而且，如果$\langle A, \preccurlyeq\rangle$是一个全序集，B 是 A 的子集，则 B 有最大（小）元当且仅当 B 有极大（小）元。

定义 2.35:对于偏序集$\langle A, \preccurlyeq\rangle$，如果 A 的任意一个非空子集都有最小元素，则称该偏序关系为良序关系（well order relation），简称为良序。并称$\langle A, \preccurlyeq\rangle$称为良序集（well order set）。

例 2.80:判断例 2.79 中关系是否为良序关系？

解： 根据良序关系的定义，首先判断它们是否为偏序关系，然后再判断其任何一个非空子集是否都有最小元。

关系①、②、③和④都是偏序关系。关系②和④是良序关系，因为它们任何一个非空子集是都有最小元；关系①不是良序关系，因为非空子集{2, 3}、{4, 6}…等都没有最小元;关系③不是良序关系,因为存在没有最小元的非空子集,如(0,1)开区间等。

注：从例 2.80 可以看出，一个良序集一定是全序集，反之则不然；同时，一个有限的全序集一定是良序集。