离散数学A1

课堂测试—集合论—（一）

- 计算机学院某学期有292，312和344个学生分别选了离散数学、数据结构或程序设计语言课程，且有211人同时选了离散数学和程序设计语言课程，43人同时选了离散数学和数据结构课程，没有学生同时选数据结构和程序设计语言课程。问有多少学生只选了离散数学课程？

课堂测试—集合论—（一）

- 计算机学院某学期有292，312和344个学生分别选了离散数学、数据结构或程序设计语言课程，且有211人同时选了离散数学和程序设计语言课程，43人同时选了离散数学和数据结构课程，没有学生同时选数据结构和程序设计语言课程。问有多少学生只选了离散数学课程？

解：设集合A表示选离散数学课程的学生集合，集合B表示选数据结构课程的学生集合，集合C表示选程序设计语言课程的学生集合,则只选了离散数学课程的学生集合为$A-((A\cap B)\cup(A\cap C))$。

已知$|A|=292$，$|B|=312$，$|C|=344$，$|A\cap C|=211$，$|A\cap B|=43$，$|B\cap C|=0$，因为 $B\cap C=\phi$，则$A\cap B\cap C=\phi$，$|A\cap B\cap C|=0$，

$|(A\cap B)\cup(A\cap C)|=|A\cap B|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|=43+211-0=254$，

所以 $|A-((A\cap B)\cup(A\cap C))|=292-254=38$

即只选了离散数学课程的学生有38人。

课堂测试—集合论—（二）

- 化简集合表达式：$(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

课堂测试—集合论—（二）

- 化简集合表达式：$(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

解：$(B - (A \cap C)) \cup (A \cap B \cap C)$

$= (B \cap \sim (A \cap C)) \cup (B \cap A \cap C)$

$= (B \cap (\sim (A \cap C)) \cup (A \cap C))$

$= (B \cap U)$

$= B$

课堂测试—集合论—（三）

- 设集合A中的元素是长度不超过3的二进制串，定义A上的关系R：$<x,y> \in R$当且仅当x,y中0的个数相同，证明R是A上的等价关系，并写出所有的等价类。

解：A={0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111}

证明：

课堂测试—集合论—（三）

- 设集合A中的元素是长度不超过3的二进制串，定义A上的关系R：$<x,y>\in R$当且仅当x,y中0的个数相同，证明R是A上的等价关系，并写出所有的等价类。

解：A={0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111}

证明：(1)设任意$x\in A$，显然x和x包含相同个数的0，即$<x,x>\in R$，所以R具有自反性。

(2)对于任意$x,y\in A$，若$<x,y>\in R$，即x和y中0的个数相同，显然y和x中0的个数也相同，即$<y,x>\in R$，所以R具有对称性。

(3)对于任意的$x,y,z\in A$，若$<x,y>\in R$，且$<y,z>\in R$，由R的定义知x和y中0的个数相同，且y和z中0的个数相同，则x和z中0的个数也相同，即$<x,z>\in R$，所以R具有传递性。

综上(1)(2)(3)知R是A上的等价关系。

课堂测试—集合论—（三）

- 设集合A中的元素是长度不超过3的二进制串，定义A上的关系R：$\langle x,y\rangle \in R$当且仅当x,y中0的个数相同，证明R是A上的等价关系，并写出所有的等价类。

解：

课堂测试—集合论—（三）

- 设集合A中的元素是长度不超过3的二进制串，定义A上的关系R：$<x,y>\in R$当且仅当x,y中0的个数相同，证明R是A上的等价关系，并写出所有的等价类。

解： A={0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111}

等价类有：

$[0]_R$={0,01,10,110,101,011}

$[00]_R$={00,100,001,010}

$[000]_R$={000}

$[1]_R$={1,11,111}

课堂测试—集合论—（四）

- 某精密产品生产过程中包括1，2，3，4，5共5道工序，设工序集S={1, 2, 3, 4, 5}。其中工序2完成后才能开始工序3，工序1和工序3完成后才能开始工序5，工序5完成后才能开始工序4。在S上定义偏序关系R如下：$<i, j> \in R$ 当且仅当 $i = j$ 或者任务i必须在任务j之前完成。

（1）给出S上的关系R的集合表示；

（2）画出关系R的哈斯图。

（3）对S的工序子集B ={1,2,3,5}，找出它的极小元和上确界，并说明这些特殊元素对子集B来说具有什么含义。

解：

课堂测试—集合论—（四）

解：

课堂测试—集合论—（四）

- 某精密产品生产过程中包括1，2，3，4，5共5道工序，设工序集S={1, 2, 3, 4, 5}。其中工序2完成后才能开始工序3，工序1和工序3完成后才能开始工序5，工序5完成后才能开始工序4。在S上定义偏序关系R如下：$<i, j> \in R$ 当且仅当 $i = j$ 或者任务i必须在任务j之前完成。

（1）给出S上的关系R的集合表示；

（2）画出关系R的哈斯图。

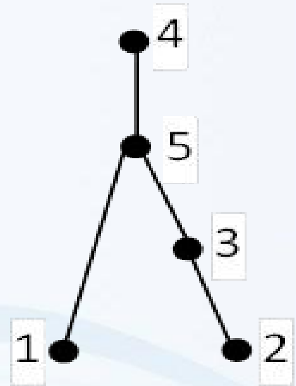
（3）对S的工序子集B ={1,2,3,5}，找出它的极小元和上确界，并说明这些特殊元素对子集B来说具有什么含义。

解： （1）R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<2,3>,<1,5>,<3,5>,<5,4>,<1,4>,<3,4>,<2,4>,<2,5>}

课堂测试—集合论—（四）

解：（1）$R=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>,<5,5>,<2,3>,<1,5>,<3,5>,<5,4>,<1,4>,<3,4>,<2,4>,<2,5>\}$

（2）关系R的哈斯图



（3）对于子集$B=\{1,2,3,5\}$，极小元：1，2。

含义：工序1是工序5之前必须完成的任务，工序2是工序3和工序5之前必须完成的任务。

子集B的上确界：5。

含义：上确界5是工序1，2，3完成后可马上开始的任务 。

课堂测试—集合论—（五）

- （凯撒密码）设26个英文字母集合A={a,b,…,z}，整数集合B={0,1,2,…,25}。从A到B的函数f表示英文字母与数字的对应关系：f(a)=0,f(b)=1,…,f(z)=25； B上的函数g：g(x)=(x+3)mod26。则明文加密过程即为计算复合函数$f\circ g\circ f^{-1}$。

（1）写出明文“computer”对应的密文；

（2）密文解密过程的函数是什么？

（3）给出密文“khoor”对应的明文。

课堂测试—集合论—（五）

- （凯撒密码）设26个英文字母集合A={a,b,…,z}，整数集合B={0,1,2,…,25}。从A到B的函数f表示英文字母与数字的对应关系：f(a)=0,f(b)=1,…,f(z)=25； B上的函数g：g(x)=(x+3)mod26。则明文加密过程即为计算复合函数$f\circ g\circ f^{-1}$。

（1）写出明文“computer”对应的密文；

（2）密文解密过程的函数是什么？

（3）给出密文“khoor”对应的明文。

解：（1）明文“computer”对应的密文是：frpsxwhu；

（2）密文解密过程即为计算函数：$(f\circ g\circ f^{-1})^{-1}= f\circ g^{-1}\circ f^{-1}$；

（3）密文“khoor”对应的明文是：hello。

课堂测试—数理逻辑—（一）

- 按要求符号化下列命题：

（1）除非天下雨或气温超过30°C，否则我不去教室看书。

（命题逻辑）

（2）尽管有人喜欢吃馒头，但未必所有人都喜欢吃馒头。

（谓词逻辑，令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x喜欢吃馒头）

课堂测试—数理逻辑—（一）

- 按要求符号化下列命题：

（1）除非天下雨或气温超过30°C，否则我不去教室看书。（命题逻辑）

（2）尽管有人喜欢吃馒头，但未必所有人都喜欢吃馒头。（谓词逻辑，令$F(x)$：x是人，$G(x)$：x喜欢吃馒头）

解：（1）设 p：天下雨， q：气温超过30°C，r：我去教室看书。

符号化表示为： $\neg(p\vee q)\rightarrow\neg r$ 或 $r\rightarrow(p\vee q)$

（2） $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))\wedge\neg(\forall x)(F(x)\rightarrow G(x))$

或 $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))\wedge(\exists x)(F(x)\wedge\neg G(x))$

课堂测试—数理逻辑—（二）

- 小立或小敏是三八红旗手；如果小立是三八红旗手，则大家会被告知小立是三八红旗手；如果小敏是三八红旗手，那么小赵也是；大家并没有被告知小立是三八红旗手。请问：谁是三八红旗手？（请通过命题公式的化简进行求解）

课堂测试—数理逻辑—（二）

课堂测试—数理逻辑—（二）

- 小立或小敏是三八红旗手；如果小立是三八红旗手，则大家会被告知小立是三八红旗手；如果小敏是三八红旗手，那么小赵也是；大家并没有被告知小立是三八红旗手。请问：谁是三八红旗手？（请通过命题公式的化简进行求解）

解：令 p：小立是三八红旗手；q：小敏是三八红旗手；

r：大家被告知小立是三八红旗手；s：小赵是三八红旗手。

题目符号化为：

$$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s) \wedge \neg r$$

课堂测试—数理逻辑—（二）

解： $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \neg r$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee s) \wedge \neg r$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg q \vee s) \wedge ((\neg p \vee r) \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg q \vee s) \wedge ((\neg p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r))$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg q \vee s) \wedge ((\neg p \wedge \neg r) \vee 0)$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg q \vee s) \wedge \neg p \wedge \neg r$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg p) \wedge ((\neg q \vee s) \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \wedge ((\neg q \vee s) \wedge \neg r)$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (\neg q \vee s) \wedge \neg r$

$\Leftrightarrow (q \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge s)$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s$

可得结论：小敏和小赵是三八红旗手，小立不是三八红旗手。

课堂测试—数理逻辑—（三）

■ 给定解释I：

(1) 个体域$D=\{\alpha, \beta\}$；　　(2) 个体常元c 指定为 α ；

(3) 函词$f(x)$指定为：$f(\alpha)=\beta$ ，$f(\beta)=\alpha$ ；

(4) 谓词$A(x)$指定为：$A(\alpha) = 1$，$A(\beta) = 0$；

谓词$B(x, y)$指定为：$B(\alpha, \alpha) = B(\alpha, \beta) = 1$，$B(\beta, \alpha) = B(\beta, \beta) = 0$。

请求出谓词公式$(\forall x)(A(x)\rightarrow(\exists y)B(f(c), y))$在解释$I$下的真值。

课堂测试—数理逻辑—（三）

- 给定解释I：

(1) 个体域D={α，β}；　　(2) 个体常元c 指定为 α；

(3) 函词$f(x)$指定为：$f(\alpha)=\beta$，$f(\beta)=\alpha$；

(4) 谓词$A(x)$指定为：$A(\alpha)=1$，$A(\beta)=0$；

谓词$B(x, y)$指定为：$B(\alpha,\alpha)=B(\alpha,\beta)=1$，$B(\beta,\alpha)=B(\beta,\beta)=0$。

请求出谓词公式$(\forall x)(A(x)\to(\exists y)B(f(c), y))$在解释$I$下的真值。

解：$(\forall x)(A(x)\to(\exists y)B(f(c), y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\to(\exists y)B(f(\alpha), y))\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\to(\exists y)B(\beta, y))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\to(B(\beta,\alpha)\vee B(\beta,\beta)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\to(0\vee 0))\Leftrightarrow(\forall x)(A(x)\to 0)$

$\Leftrightarrow(A(\alpha)\to 0)\wedge(A(\beta)\to 0)\Leftrightarrow(1\to 0)\wedge(0\to 0)$

$\Leftrightarrow 0\wedge 1\Leftrightarrow 0$

课堂测试—数理逻辑—（四）

- 符号化下列命题，用命题逻辑的构造证明法加以证明。

刘老师的桌子上多了一盆鲜花，已知如下事实：

（1）鲜花是小乐或者小凌送给刘老师的。

（2）如果是小凌送来的，那么一定不是早晨送来的，

（3）如果小凌说了真话，那么刘老师的办公室窗户是关上的。

（4）如果小凌说了假话，那么花一定是早晨送来的。

（5）刘老师的办公室窗户是开着的。

刘老师推测出花是小乐送来的，他的推理是否正确？

课堂测试—数理逻辑—（四）

课堂测试—数理逻辑—（四）

■ 符号化下列命题，用命题逻辑的构造证明法加以证明。

刘老师的桌子上多了一盆鲜花，已知如下事实：

（1）鲜花是小乐或者小凌送给刘老师的。

（2）如果是小凌送来的，那么一定不是早晨送来的，

（3）如果小凌说了真话，那么刘老师的办公室窗户是关上的。

（4）如果小凌说了假话，那么花一定是早晨送来的。

（5）刘老师的办公室窗户是开着的。

刘老师推测出花是小乐送来的，他的推理是否正确？

解： 令 p：小乐送给刘老师鲜花； q：小凌送给刘老师鲜花；

r：鲜花是早晨送来的；s：小凌说了真话；

t：刘老师的办公室窗户是开着的。

前提：$p \vee q$，$q \to \neg r$，$s \to \neg t$，$\neg s \to r$，t

结论：p

课堂测试—数理逻辑—（四）

前提：$p\vee q$，$q\rightarrow\neg r$，$s\rightarrow\neg t$，$\neg s\rightarrow r$，t

结论：p

证明：

（1）t 前提引入

（2）$s\rightarrow\neg t$ 前提引入

（3）$\neg s$ （1）（2）拒取式

（4）$\neg s\rightarrow r$ 前提引入

（5）r （3）（4）假言推论

（6）$q\rightarrow\neg r$ 前提引入

（7）$\neg q$ （5）（6）拒取式

（8）$p\vee q$ 前提引入

（9）p （7）（8）析取三段论

刘老师的推理正确，鲜花是小乐送来的。

课堂测试—数理逻辑—（五）

- 符号化下列命题，用谓词逻辑的构造证明法加以证明。

所有的哺乳动物都是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物。故有些脊椎动物不是胎生的。

课堂测试—数理逻辑—（五）

课堂测试—数理逻辑—（五）

■ 符号化下列命题，用谓词逻辑的构造证明法加以证明。

所有的哺乳动物都是脊椎动物；并非所有的哺乳动物都是胎生动物。故有些脊椎动物不是胎生的。

解：

令P(x)：x是哺乳动物； Q(x)：x是脊椎动物；

R(x)：x是胎生动物。

则上述语句可符号化为

前提：$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

结论：$(\exists x)(Q(x)\wedge \neg R(x))$

课堂测试—数理逻辑—（五）

前提：$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$，$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$

结论：$(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$

证明：

（1）$\neg(\forall x)(P(x)\rightarrow R(x))$ 前提引入

（2）$(\exists x)(P(x)\wedge\neg R(x))$ （1）等值置换

（3）$P(c)\wedge\neg R(c)$ （2）ES规则

（4）$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$ 前提引入

（5）$P(c)\rightarrow Q(c)$ （4）US规则

（6）$P(c)$ （3）化简式

（7）$Q(c)$ （5）（6）假言推论

（8）$\neg R(c)$ （3）化简式

（9）$Q(c)\wedge\neg R(c)$ （7）（8）合取引入

（10）$(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$ （9）EG规则