第二章　一阶逻辑

第一节　一阶逻辑基本概念

内容：个体词，谓词，量词，命题符号化。

重点： 1、掌握个体词，谓词，量词的有关概念，

2、掌握在一阶逻辑中的命题符号化。

一、一阶逻辑(谓词逻辑)研究的内容。

知识点回顾

命题逻辑：命题（命题演算的基本单位）

↓

不再对简单命题进行分解

↓

无法研究命题的内部结构

例如：判断以下推理是否正确：

凡人都是要死的，（前提）

苏格拉底是人，（前提）

所以苏格拉底是要死的。（结论）

这是著名的“苏格拉底三段论”，

若用 p, q, r 分别表示以上3个命题，

推理形式为$(p \wedge q) \rightarrow r$，不是重言式。

例如：判断以下推理是否正确：

凡人都是要死的，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底是要死的。

命题逻辑的局限性：

未将 p, q, r 的**内在联系**反映出来

$\Longrightarrow$ 对简单命题进一步分析。

二. 个体词，谓词，量词

简单命题
- 个体词：所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的客体
- 谓词：用来刻画个体词的性质或个体词之间关系的词

二. 个体词，谓词，量词

1. 个体词，谓词

例如：李华是大学生。

$\sqrt{2}$是无理数。

小王比小明高。

（1）个体词——简单命题中表示**主体**或**客体**的词（由名词组成）。

个体常项：表示具体的或特定的个体的词

个体变项：表示抽象的或泛指的个体的词

个体词
- 个体常项 用 $a, b, c\cdots$ 表示
- 个体变项 用 $x, y, z\cdots$ 表示

个体变项的取值范围

个体域（或论域）

全总个体域

宇宙间一切事物组成的个体域

(2) 谓词——刻画个体词的性质或个体词之间关系的词。

$$
\text{谓词}\begin{cases}\text{谓词常项:表示具体性质或关系}\\ \text{谓词变项:表示抽象或者泛指的性质或关系}\end{cases}
$$

均用 $F,G,H\cdots$ 表示.

例如：

(1) $F(x)$ **表示个体变项** x **有性质** F

(2) $F(a)$ **表示个体常项** a **有性质** F

(3) $F(x, y)$ **表示个体变项** x **和** y **有关系** F

以后常称这种个体变项和谓词的联合体 $F(x)$,$L(x,y)$ **等为谓词**

例1：分析下列个命题中的个体和谓词

1. π是无理数。

2. 张三与李四同在电子信息学院。

3. x与y的和等于z（x，y，z是确定的数）。

4. π的平方是非负的。

5. 所有的实数的平方都是非负的。

6. 有一个比2^{1000}大的素数。

（1）π是无理数。

解： 个体词：π（代表圆周率）

谓词： …是无理数，表示“π”的性质。

（2）张三与李四同在电子信息学院。

解：个体词：张三，李四

谓词： …与 …同在电子信息学院

表示“张三”与“李四”之间的关系。

（3）x 与 y 的和等于 z

（x，y，z是确定的数）

个体词： x、 y、 z

谓词： …与 …的和等于 …

（4） π的平方是非负的。

解：个体词： π

谓词： $\cdots$的平方是非负的

个体词： π的平方

谓词： $\cdots$是非负的

（5）所有的实数的平方都是非负的。

个体词：每一个实数

谓词： $\cdots$的平方是非负的

"所有"是什么？

量词：所有

（6）有一个比2^{1000}大的素数。

个体词：一个素数

谓词： $\cdots$比2^{1000}大

"有一个"是什么？

量词：有一个

n元谓词(用 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示)

表示含n个体**变项**的谓词。$(n \geq 1)$

如$F(x,y)$：x比 y高。

其中$F(x,y)$ 是二元谓词，x,y为个体词。

a：小王， b：小明，

$F(a,b)$：小王比小明高。

0 元谓词: 不带个体变项的谓词.

当0元谓词中的谓词为**谓词常项**时，0元谓词为命题. 所以命题逻辑中的命题均可以表示成0元谓词。

例如：李华是大学生，

小明是大学生。

$F(x)$：x 是大学生，　　一元谓词

a：李华　　个体常项

b：小明　　个体常项

$F(a), F(b)$ 分别表示李华，小明是大学生，

它们是0元谓词。

例2 将下列命题用0元谓词符号化

(1) 2是素数且是偶数

解： $F(x)$：x是素数。

$G(x)$：x是偶数。

$a:2$

则命题符号化为：

$$F(a) \wedge G(a)$$

例2　将下列命题用0元谓词符号化

(2) 如果2大于3，则2大于4

解： $L(x, y): x\text{大于}y$

$$a:2; b:3; c:4$$

则命题符号化为：

$$L(a,b) \to L(a,c)$$

例2　将下列命题用0元谓词符号化

(3) 如果张明比李民高，

李民比赵亮高，则张明比赵亮高。

解： $H(x,y):x$比y高

$a:$张明; $b:$李民; $c:$赵亮

则命题符号化为：

$$H(a,b)\wedge H(b,c)\rightarrow H(a,c)$$

例3：将下列命题在一阶逻辑中符号化

(1) 所有的人都是要死的。

(2) 有的人活百岁以上。

称表示个体常项或变项之间数量关系的词为量词

2.量词——表示数量的词

$$\text{量词}\begin{cases}\text{全称量词 } \forall \\ \text{存在量词 } \exists\end{cases}$$

全称量词: “一切”“所有的”“任意的”等

$\forall x$:对个体域里的所有个体

$\forall x F(x)$:个体域里的所有个体都有性质F

存在量词: “存在着”“有一个”“至少有一个”等

$\exists x$:存在个体域里的个体

$\exists x F(x)$:存在着个体域里的个体具有性质F

下面考虑以上两个命题的符号化

(1) **所有的人都是要死的。**

(2) **有的人活百岁以上。**

在命题符号化之前必须明确个体域。

第一种情况：个体域D为人类集合

(1) 符号化为 $\forall x F(x)$

$F(x)$: x是要死的. 真命题

(2) 符号化为 $\exists x G(x)$

$G(x)$: x活百岁以上. 真命题

下面考虑以上两个命题的符号化

(1) 所有的人都是要死的。

(2) 有的人活百岁以上。

第二种情况：个体域D为**全总个体域**

(1) 对所有个体而言，如果它是人，则它是要死 的。

(2) 存在着个体，它是人并且活百岁以上。

特性谓词

$M(x): x$是人.

下面考虑以上两个命题的符号化

(1) 所有的人都是要死的。

(2) 有的人活百岁以上。

第二种情况：个体域D为全总个体域

(1)对所有个体而言，如果它是人，则它是要死的

$$\forall x(M(x) \to F(x))$$

(2) 存在着个体，它是人并且活百岁以上。

$$\exists x(M(x) \wedge F(x))$$

注意：使用量词时，应注意以下5点：

（1）在不同个体域中，

命题符号化的形式可能不一样，

（2）一般，除非有特别说明，

均以全总个体域为个体域，

（3）在引入特性谓词后，使用全称量词用“$\rightarrow$”，

使用存在量词用“$\wedge$”，

(4) 当个体域为有限集时,

如 $D=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$，则

$$\forall xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$$

$$\exists xA(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$$

(5) 多个量词同时出现时,

不能随意颠倒顺序。

例如：对任意的*x*，存在着*y*, 使得*x*+*y*=5.

取个体域为实数集。

三.命题符号化

例4.在一阶逻辑中将下面命题符号化。

(1) 所有的有理数均可表成分数。

解：因无指定个体域，则以全总个体域为个体域。

$Q(x)$：x为有理数，

$F(x)$：x可表成分数，

$$\forall x\left(Q(x) \rightarrow F(x)\right)$$

三.命题符号化

例4.在一阶逻辑中将下面命题符号化。

(2) 有的有理数是整数。

解：$Q(x)$：x 为有理数， $Z(x)$：x 为整数，

$$\exists x\big(Q(x)\wedge Z(x)\big)$$

注：若本题指定的个体域为有理数集，

则(1)，(2)分别符号化为 $\forall xF(x)$

和 $\exists xZ(x)$。

例5.在一阶逻辑中将下列命题符号化。

(1) 凡偶数均能被2整除。 **全总个体域**

解： $F(x)$**：**x**是偶数，**$G(x)$**：**x**能被2整除，**

$$\forall x\left(F(x)\rightarrow G(x)\right)$$

(2) 存在着偶素数。

解： $F(x)$**：**x**是偶数，**$H(x)$**：** x **是素数，**

$$\exists x\left(F(x)\wedge H(x)\right)$$

例5.在一阶逻辑中将下列命题符号化。

(3) 没有不犯错误的人。

解：$M(x)$：x**是人，** $F(x)$： x**犯错误，**

$$\neg\exists x\left(M(x)\wedge\neg F(x)\right)$$

原命题即：“每个人都犯错误”。

又可符号化为：$\forall x\left(M(x)\rightarrow F(x)\right)$

(4) 素数不全是奇数。

解：$F(x)$：x是素数，　$G(x)$：x是奇数，

$$\neg\forall x\left(F(x)\rightarrow G(x)\right)$$

原命题即：“有的素数不是奇数”。

又可符号化为：$\exists x\left(F(x)\wedge\neg G(x)\right)$

(5) 尽管有些人聪明，但未必一切人都聪明。

解：$M(x)$：x是人，$F(x)$：x聪明，

$$\underline{\exists x\left(M(x)\wedge F(x)\right)}\wedge\underline{\neg\forall x\left(M(x)\rightarrow F(x)\right)}$$

例6. 在一阶逻辑中将下列命题符号化。

(1) 对所有的x，均有$x^2-1=(x-1)(x+1)$。

(2) 存在x，使得$x+5=2$。

其中个体域为自然数集。

解：(1) $F(x): x^2-1=(x-1)(x+1)$

$\forall x F(x)$ 真命题。

(2) $G(x): x+5=2$

$\exists x G(x)$ 假命题。

若个体域为实数集，则(1), (2)均为真命题。

例7. 在一阶逻辑中将下面命题符号化

(1) 所有人都不一样高。

解： $M(x)$：x 是人，$H(x,y)$：x 和 y 不是同一个人

$L(x,y)$：x 和 y 一样高

$$\forall x \forall y \left(M(x) \land M(y) \land H(x,y) \rightarrow \neg L(x,y) \right)$$

又可符号化为：

$$\neg \exists x \exists y \left(M(x) \land M(y) \land H(x,y) \land L(x,y) \right)$$

例7．在一阶逻辑中用二元谓词将下面命题符号化

(2)每个自然数都有后继数。

解：$F(x)$：x 是自然数，

$H(x,y)$：y 是x的后继数

$$\forall x\Big(F(x)\to \exists y(F(y)\wedge H(x,y))\Big)$$

例7. 在一阶逻辑中用二元谓词将下面命题符号化

(3)有的自然数无先驱数。

解：$F(x)$：x 是自然数，

$L(x, y)$:y是x的先驱数

$$\exists x\big(F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow \neg L(x, y))\big)$$

小　结

1. 概念：个体词，谓词，量词，命题符号化。

2. 重点：掌握个体词，谓词，量词的有关概念，

   掌握在一阶逻辑中的命题符号化。