第四章　二元关系和函数

一. 集合的笛卡儿积

二. 集合的二元关系

三. 关系的性质

四. 等价关系

一. 集合的笛卡儿积

1. 有序对 $\langle x, y\rangle$，x和y按照一定次序构成二元组

实例：点的直角坐标(3,–4)

特点： (1) $x \neq y$时，$\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$元素顺序不能交换

(2) $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \Leftrightarrow x = u, y = v$。

有序n元组($n \geq 3$)，记$\langle x_1, x_2, \cdots x_n\rangle$。

例1 **<2, x+5> = <3y–4, y>，求 x, y.**

解 **3y–4 = 2, x+5 = y $\Rightarrow$ y = 2, x = –3**

2. 笛卡儿积

定义：集合A和B的笛卡儿积，记作$A\times B$

$$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$$

以A中元素作为第一元素，

B中元素作为第二元素，

构成有序对，

所有这样的有序对构成的集合。

例2 $A=\{0,1\}, B=\{a,b,c\}$

求 $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$, $A\times\varnothing$, $\varnothing\times B$

解: $A\times B=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 0,c\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 1,c\rangle\}$

$B\times A=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$A\times A=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$A\times\varnothing=\varnothing$

$\varnothing\times B=\varnothing$

例3. 设 $A=\{a,b\}$，求 $A\times P(A)$。

解： $P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},A\}$

$$A\times P(A)=\{\langle a,\varnothing\rangle,\langle a,\{a\}\rangle,\langle a,\{b\}\rangle,\langle a,A\rangle,$$
$$\langle b,\varnothing\rangle,\langle b,\{a\}\rangle,\langle b,\{b\}\rangle,\langle b,A\rangle\}$$

3. 笛卡儿积的性质

- **不适合交换律** $A\times B\neq B\times A\quad (A\neq B,\ A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$
- **不适合结合律** $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)\quad (A\neq\varnothing,\ B\neq\varnothing)$
- **若A或B中有一个为空集，则$A\times B$就是空集.**

  $A\times\varnothing=\varnothing\times B=\varnothing$
- **若**$|A|=m,\ |B|=n$，则 $|A\times B|=mn$

例4

(1) 证明 $A=B \land C=D \Rightarrow A\times C=B\times D$

(2) $A\times C=B\times D$是否推出 $A=B \land C=D$? 为什么?

解 (1) 任取$<x,y>$

$$<x,y>\in A\times C \Leftrightarrow x\in A \land y\in C$$

$$\Leftrightarrow x\in B \land y\in D \Leftrightarrow <x,y>\in B\times D$$

(2) 不一定. 反例如下:

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$, $C=D=\varnothing$,

则 $A\times C=B\times D$ 但是 $A\neq B$.

4. n 阶$(n \geq 2)$笛卡儿积

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$$

$$\left\{ \left\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \right\rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n \right\}$$

特别，当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$ 时，记为 A^n

如 $A = \{a, b\}$

$$A^2 = \left\{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle \right\}$$

$$A^3 = \{ \langle a, a, a \rangle, \langle a, a, b \rangle, \langle a, b, a \rangle, \langle a, b, b \rangle,$$
$$\langle b, a, a \rangle, \langle b, a, b \rangle, \langle b, b, a \rangle, \langle b, b, b \rangle \}$$

二. 二元关系

引例

甲乙丙三人进行乒乓球赛，任意两人赛一场，共三场，结果为：

乙胜甲，甲胜丙，丙胜乙

记作 $\{<\text{乙}, \text{甲}>, <\text{甲}, \text{丙}>, <\text{丙}, \text{乙}>\}$

$<x, y>$：代表x胜y

表示$\{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}\}$三人之间的胜负关系

1. 二元关系的定义

（1） 若集合 R 为**空集**或它的元素都是**有序对**，

则称 R 为**二元关系**, 简称为**关系**。

若 $\langle x, y\rangle \in R$，则记作 xRy ，

否则，记作 $x\not{R}y$ 。

实例： $R=\{<1,2>,<a,b>\}$, R是二元关系,

写为 $1R2$, aRb

(2) $A\times B$ 的**任何子集**所定义的二元关系都称作从 A 到 B 的二元关系，

特别，当 $A=B$ 时，称作 A 上的二元关系。

例5. $A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$

$$A\times B=\{<a,0>,<a,1>,<a,2>,<b,0>,<b,1>,<b,2>\}$$

设 $R_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,2\rangle\}$　$R_2=\varnothing$

$R_3=A\times B$　$R_4=\{\langle b,1\rangle\}$　$R_5=\{\langle a,b\rangle\}$

则 R_1,R_2,R_3,R_4 都是从A到B的关系。

R_5是从A到A的二元关系

2. A上不同关系的数目

若 A 为 n 元集，记 $|A| = n$

则 $|A \times A| = n^2$

$A \times A$的子集共有2^{n^2}个

n元集 A上不同的关系共有 2^{n^2} 个。

例如 $|A|=3$, 则 A上有=512个不同的二元关系.

3.特殊的关系

对任意集合 A， $\varnothing$是 **A 上**的关系，称为**空关系**

全域关系 $E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A$

恒等关系 $I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$

例如, A={1,2}, 则

E_A={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>}

I_A={<1,1>,<2,2>}

4.常用关系

(1) 设 $A \subseteq R$，A 上**小于等于关系**：

$$L_A = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \le y\}$$

(2) 设 $B \subseteq Z^+$，B 上**整除关系**：

$$D_B = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in B \wedge x \mid y\}$$

类似的还可以定义大于等于关系, 真包含关系等等.

例6. $A = \{2,3,6,8\}$，求 L_A，D_A。

解：$L_A = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 3,3 \rangle,$

$\langle 3,6 \rangle, \langle 3,8 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 6,8 \rangle, \langle 8,8 \rangle\}$

$$D_A = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 6,6 \rangle, \langle 8,8 \rangle\}$$

三. 关系的性质

（自反，反自反，对称，反对称，传递）

（R 为 A上关系）

自反性 $\forall x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \in R$

反自反性 $\forall x \in A$，都有$\langle x, x\rangle \notin R$

对称性 若$\langle x, y\rangle \in R$，则 $\langle y, x\rangle \in R$

反对称性 若$\langle x, y\rangle \in R$且$x \neq y$，则 $\langle y, x\rangle \notin R$

传递性

若$\langle x, y\rangle \in R$ 且$\langle y, z\rangle \in R$，则$\langle x, z\rangle \in R$

例7. $A=\{1,2,3\}$，A 上关系如下所示，判断R_1, R_2, R_3 各有哪些性质。

（1） $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

解：R_1 既不是自反又不是反自反，是对称的，不是传递的。

（2） $R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

解：R_2 是反自反的，反对称的，传递的。

(3) $R_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$

解：R_3 是自反的，既不是对称又不是反对称的，不是传递的。

四. 等价关系

1. 等价关系的定义

若 A上关系 R 满足自反，对称，传递，

则称 R 为 A 上的等价关系。若 $\langle x, y\rangle \in R$，记 $x \sim y$

2. 等价类

(1) 定义：设R是非空集合 A上的等价关系，

对 $x \in A$，记

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

则称$[x]_R$ 为x关于R的等价类，

简称x的等价类，记 $[x]$

实例 设 $A=\{1,2,\ldots,8\}$, 如下定义A上的关系 R:

$$R = \{ \langle x,y\rangle \mid x,y\in A \wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3) \}$$

其中 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$ 叫做 x 与 y 模3相等, 即 x 除以3的余数与 y 除以3的余数相等.

验证模 3 相等关系 R 为 A上的等价关系, 因为

$\forall x\in A$, 有$x \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x, y\in A$, 若 $x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, 则有 $y \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$

$\forall x, y, z\in A$, 若$x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$, $y \equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$,

则有 $x\equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$

自反性、对称性、传递性得到验证

$R = \{ \langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,5\rangle, \langle 2,8\rangle,$

$\langle 3,3\rangle, \langle 3,6\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 4,7\rangle,$

$\langle 5,2\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,8\rangle, \langle 6,3\rangle, \langle 6,6\rangle,$

$\langle 7,1\rangle, \langle 7,4\rangle, \langle 7,7\rangle\}, \langle 8,2\rangle, \langle 8,5\rangle, \langle 8,8\rangle\}$

$A=\{ 1, 2, \ldots , 8 \}$上模 3 等价关系的**等价类**：

$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$

$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$

$[3]=[6]=\{3,6\}$