第四节　范式

一. 析取范式与合取范式

二. 主范式

三. 主范式的应用

一、析取范式与合取范式

1、简单析取式，简单合取式

简单析取式:由有限个**命题变项或其否定**构成的**析取**式

例如：p，$\neg q$，$p \vee q$，$\neg p \vee q$ 等都是简单析取式。

简单合取式:由有限个**命题变项或其否定**构成的**合取**式

例如：p，$\neg q$，$p \wedge q$，$\neg p \wedge q$等都是简单合取式。

2. 定理

(1) 一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含有某个命题变项及其否定式.

例如：$p \vee \neg p \vee q \vee \neg q$

(2) 一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含有某个命题变项及其否定式.

例如：$p \wedge \neg p \wedge q \wedge \neg q$

3. 析取范式，合取范式

定义：

由有限个简单合取式构成的析取式称作析取范式。

由有限个简单析取式构成的合取式称作合取范式。

例如：$A=(p\wedge q)\vee p\vee(\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

为析取范式，

$B=(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee q)\wedge\neg q$

为合取范式。

合取范式和析取范式统称为范式。

3. 析取范式，合取范式

性质

（1）一个析取范式是矛盾式，当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式

（2）一个合取范式是重言式，当且仅当它的每个简单析取式都是重言式

问题： 1：对于任意命题公式，是否一定存在和其等值的范式？若存在，如何求范式？

2：范式是否唯一？

目标：将任意的命题公式化为与之等值的合取范式和析取范式

范式的特征：范式中的联结词只有$\neg, \wedge, \vee$

思考？用等值演算，将其他的联结词转化为$\neg, \wedge, \vee$

注意：（1）在范式中不出现联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

（2）在范式中不出现如下形式的公式：

$$\neg\neg A, \neg(A \wedge B), \neg(A \vee B)$$

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A,$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B,$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

（3）在析取范式中不出现如下形式的公式：

$$A \wedge (B \vee C)$$

在合取范式中不出现如下形式的公式：

$$A \vee (B \wedge C)$$

利用分配律可得：

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

可将任意公式化成与之等值的析取范式与合取范式。

范式存在定理：

任一命题公式都存在与之等值的析取范式和合取范式。

求范式步骤：

（1）消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$

（2）否定消去(双重否定律)或内移(德摩根律)。

（3）利用分配律。

求析取范式：利用 $\wedge$ 对 $\vee$ 的分配律
求合取范式：利用 $\vee$ 对 $\wedge$ 的分配律

例1. 求公式 $\left(\left(p\vee q\right)\to r\right)\to p$ 的析取范式和合取范式。

解：原式

$\Leftrightarrow\neg\left(\neg\left(p\vee q\right)\vee r\right)\vee p$ 消去→

$\Leftrightarrow\left(\neg\left(\neg\left(p\vee q\right)\right)\wedge\neg r\right)\vee p$ ¬内移

$\Leftrightarrow\left(\left(p\vee q\right)\wedge\neg r\right)\vee p$ 消去¬¬

$\Leftrightarrow(p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg r)\vee p$ 分配律（∧对∨分配）

$\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg r)$ 吸收律

上式即析取范式

例1. 求公式 $\left(\left(p\vee q\right)\to r\right)\to p$ 的析取范式和合取范式。

解：原式

$$\Leftrightarrow \neg\left(\neg\left(p\vee q\right)\vee r\right)\vee p$$ 消去→

$$\Leftrightarrow \left(\neg\left(\neg\left(p\vee q\right)\right)\wedge\neg r\right)\vee p$$ ¬内移

$$\Leftrightarrow \left(\left(p\vee q\right)\wedge\neg r\right)\vee p$$ 消去¬¬

$$\Leftrightarrow (p\vee q\vee p)\wedge(\neg r\vee p)$$ 分配律（∨对∧分配）

上式即合取范式

例2. 求公式 $\neg(p \to q) \vee \neg r$ 的析取范式和合取范式。

解：原式

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg r$　　消去$\to$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg r$　　$\neg$内移

上式即析取范式

$\Leftrightarrow (p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$　　分配律（$\vee$对$\wedge$分配）

上式即合取范式

$(p \wedge \neg q) \vee \neg r$ 为析取范式

$(p \wedge \neg q) \vee \neg r \vee (q \wedge \neg q)$ 也为析取范式

$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$ 为合取范式

$(p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r)$ 也为合取范式

- 析取范式和合取范式不唯一
- 寻找公式的唯一的范式形式
- 主析取范式与主合取范式

二、主范式

1、极小项

在含有n个命题变项的简单合取式中，如果每个命题变项和它的否定不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次， 称这样的简单合取式为极小项.

注意：规定极小项中的命题变项与其否定通常按照字典序排列。

2、极大项

在含有n个命题变项的简单析取式中，如果每个命题变项和它的否定不同时出现，而二者之一必出现且仅出现一次，称这样的简单析取式为极大项.

规定：极大项中的命题变项与其否定通常按照字典序排列。

例如，对只含变项 p,q 的命题公式中，

$p \wedge q, p \wedge \neg q$ **都是极小项，**

但 $p \wedge q \wedge \neg q$ **不是极小项。**

$p \vee \neg q, \neg p \vee \neg q$ 都是极大项，

但 $p \vee p \vee q$ **不是极大项。**

下面讨论 $n=2$ ，即 2 个命题变项 p,q 的极大项，极小项 。

极小项	成真赋值	对应十进制数	记法
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	0	m_0
$\neg p \wedge q$	0 1	1	m_1
$p \wedge \neg q$	1 0	2	m_2
$p \wedge q$	1 1	3	m_3

极大项	成假赋值	对应十进制数	记法
$p \vee q$	0 0	0	M_0
$p \vee \neg q$	0 1	1	M_1
$\neg p \vee q$	1 0	2	M_2
$\neg p \vee \neg q$	1 1	3	M_3

下面分别讨论 $n=3$，即 3 个命题变项 p,q,r 的极大项，极小项 。

极小项	成真赋值(二进制数)	对应十进制数	记法
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	000	0	m_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	001	1	m_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	010	2	m_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	011	3	m_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	100	4	m_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	101	5	m_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	110	6	m_6
$p \wedge q \wedge r$	111	7	m_7

极大项	成假赋值(二进制数)	对应十进制数	记法
$p \vee q \vee r$	000	0	M_0
$p \vee q \vee \neg r$	001	1	M_1
$p \vee \neg q \vee r$	010	2	M_2
$p \vee \neg q \vee \neg r$	011	3	M_3
$\neg p \vee q \vee r$	100	4	M_4
$\neg p \vee q \vee \neg r$	101	5	M_5
$\neg p \vee \neg q \vee r$	110	6	M_6
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	111	7	M_7

定理：设 m_i 与 M_i 是命题变项 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 形成的极小项和极大项，则

$$\neg m_i \Leftrightarrow M_i, \neg M_i \Leftrightarrow m_i$$

3、主析取范式，主合取范式

主析取范式

——每个简单合取式都是极小项的析取范式。

主合取范式

——每个简单析取式都是极大项的合取范式。

定理：任何命题公式的主析取范式、主合取范式

都存在且都是唯一的。

两种求法，**等值式法**和**真值表法**。

(一) 利用**等值式法**求命题公式 A 的主析取范式。

步骤：

(1) 求 A 的析取范式 A'，

(2) 如果 A'的某简单合取式 B 中, 既不含 p_i ，也不含$\neg p_i$

利用 $B \Leftrightarrow B \wedge 1 \Leftrightarrow B \wedge (p_i \vee \neg p_i)$

$$\Leftrightarrow (B \wedge p_i) \vee (B \wedge \neg p_i)$$

补充变元 p_i

(3) 消去重复的及永假项。

如：用 p 代替 $p \vee p$，用 0 代替 $p \wedge \neg p$，

用 m_i 代替 $m_i \vee m_i$

(4) 按角码顺序从小到大排序

例3、求公式 $A=((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$ 的主析取范式。

解：由例1的析取范式为 $p\vee(q\wedge\neg r)$

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow p\vee(q\wedge\neg r)\\
&\Leftrightarrow (p\wedge(q\vee\neg q)\wedge(r\vee\neg r))\vee((q\wedge\neg r)\wedge(p\vee\neg p))\\
&\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\\
&\quad\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)\\
&\quad\vee(q\wedge\neg r\wedge p)\vee(q\wedge\neg r\wedge\neg p)
\end{aligned}
$$

例3、求公式 $A=\left(\left(p\vee q\right)\to r\right)\to p$ 的主析取范式。

$$\Leftrightarrow (p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge\neg r)$$

$$\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge\neg r)$$

$$\vee(p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)$$

$$\Leftrightarrow m_7\vee m_6\vee m_5\vee m_4\vee m_6\vee m_2$$

$$\Leftrightarrow m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$$

(二) 利用真值表求命题公式 A 的主析取范式。

步骤：

(1) 列出 A 的真值表，

(2) 找出 A 的所有成真赋值，

(3) 求每个成真赋值对应的十进制数，

即极小项的角码，将极小项按序析取即成。

例4、用真值表求$A=((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$的主析取范式。

解：(1) 列真值表

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\rightarrow r$	A
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

例4、用真值表求$A=((p\vee q)\rightarrow r)\rightarrow p$的主析取范式。

解：(2) 的成真赋值有010，100，101，110，111

(3) 对应的十进制数为2，4，5，6，7

所以的主析取范式为$m_2\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

(三) 利用等值式法求命题公式 A 的主合取范式。

步骤：

(1) 求 A的合取范式 A'；

(2) 利用 $B \Leftrightarrow B \vee 0 \Leftrightarrow B \vee (p_i \wedge \neg p_i)$

$\Leftrightarrow (B \vee p_i) \wedge (B \vee \neg p_i)$ 补充变元 p_i；

(3) 消去重复的及永真项；

(4) 按角码顺序排序

例5、求公式 $A=((p\vee q)\to r)\to p$的主合取范式。

解： 由例1，

$$A\Leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee\neg r)$$ 合取范式

$$\Leftrightarrow((p\vee q)\vee(r\wedge\neg r))\wedge((p\vee\neg r)\vee(q\wedge\neg q))$$

$$\Leftrightarrow(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$$

$$\wedge(p\vee\neg r\vee q)\wedge(p\vee\neg r\vee\neg q)$$

$$\Leftrightarrow(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee q\vee\neg r)$$

$$\wedge(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$$

$$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_3$$

(四) 利用真值表求命题公式的主合取范式。

步骤：

(1) 列出 A 的真值表，

(2) 找出 A 的所有成假赋值，

(3) 求每个成假赋值对应的十进制数，即极大项的角码，将极大项按序合取即成。

例6、用真值表求 $A=((p\vee q)\to r)\to p$的主合取范式。

解：(1) 由例3知 A的真值表，

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\to r$	A
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

例6、用真值表求 $A=((p\vee q)\to r)\to p$ 的主合取范式。

解：(2) A 的成假赋值有000，001，011，

(3) 对应的十进制数为0，1，3。

所以 A 的主合取范式：

$$A\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_3$$

思考：命题公式 A 的主合取范式，主析取范式间有什么联系，能否通过其中一个求另一个？(观察例4，例6)

由例4、例6知：

$$A \Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_3$$

$$\neg A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \neg(\neg A) \\ &\Leftrightarrow \neg(m_0 \vee m_1 \vee m_3) \\ &\Leftrightarrow \neg m_0 \wedge \neg m_1 \wedge \neg m_3 \\ &\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_3 \end{aligned}$$

（五）已知命题公式的主析取范式(主合取范式)，求主合取范式(主析取范式)。

由 A 的主析取范式求 A 的主合取范式步骤：

(1) 写出 A 的主析取范式未出现的极小项，

(2) 写出与(1)中极小项角码相同的极大项，

(3) 由以上极大项合取即成 A 的主合取范式。

例7、(1) 已知命题公式A主析取范式为：

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_6$$

求A的主合取范式。(A含3个命题变项)

解： A **的主合取范式为：**

$$A \Leftrightarrow M_1 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_7$$

(2) 已知命题公式 A 主合取范式为：

$$A \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2$$

求A的主析取范式。(A 含2个命题变项)

解： A **的主析取范式为：**$A \Leftrightarrow m_1 \vee m_3$

三、主范式的用途

1. 判断两命题公式是否等值。

设公式A, B 共含有n 个命题变项，按n 个命题变项求出A和B 的主析取范式A'与B'，
若$A' = B'$（主析取范式相同），则$A \Leftrightarrow B$

2. 判断命题公式的类型。

重言式 ——

- 主析取范式含全部的极小项
- 主合取范式不含任何极大项（主合取范式记为1）

矛盾式 —— 主析取范式不含任何极小项
(主析取范式记为0)
主合取范式含全部的极大项

可满足式 —— 主析取范式至少含一个极小项
主合取范式至少缺一个极大项

3.求成真(假)赋值。

4.求真值表。

例8、已知含3个命题变项的公式：

$$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_6 \vee m_7$$ 和

$$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$$

(1) 判断 A, B 的类型。

解： A 为可满足式，B为矛盾式。

(2) 判断 A, B是否等值。

解： A, B 不等值。

例8、已知含3个命题变项的公式：

$A \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_6 \vee m_7$ **和**

$B \Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6 \wedge M_7$

(3) 求 A **的成真赋值和成假赋值。**

解： A **的成真赋值有000，001，110，111。**

A **的成假赋值有010，011，100，101。**

(4) 求 A **的真值表。**

解：真值表

p	q	r	A
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

例9、求下列公式的主析取范式并判断类型。

$(1) A = ((p \to q) \wedge p) \to q$

解：$A = ((p \to q) \wedge p) \to q$

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee \neg p \vee q$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg p \vee q$ **析取范式**

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow m_2 \vee m_1 \vee m_0 \vee m_3 \vee m_1 \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_2 \vee m_3$

主析取范式含有全部的极小项，公式为重言式。

例9、求下列公式的主析取范式并判断类型。

$$(2) A = (p \rightarrow q) \wedge q$$

解：$A = (p \rightarrow q) \wedge q$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge q$$

$\Leftrightarrow q$ **析取范式**

$$\Leftrightarrow q \wedge (p \vee \neg p)$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow m_3 \vee m_1$$

$$\Leftrightarrow m_1 \vee m_3$$

公式为可满足式。

课堂练习：

用等值演算的方法求下列公式的主析取范式，主合取范式，成真赋值，成假赋值。

(1) $A = (\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

(2) $A = \neg(p \to q) \vee r$

(3) $A = (p \wedge r) \vee q$

小　结

(1) 掌握析取范式和合取范式的定义和求法步骤。

(2) 掌握极小项，极大项的概念及主范式的求法。

第五节 联结词的全功能集

一、联结词 $\bar{\vee},\uparrow,\downarrow$

1、“p,q之间恰有一个成立”称 p,q 的排斥或(异或)，记作 $p\bar{\vee}q$

真值表：

p	q	$p\bar{\vee}q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

由定义知：$p\bar{\vee}q\Leftrightarrow(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$

2、“p并且q的否定”称p,q的与非式，记作$p \uparrow q$

真值表：

p	q	$p \uparrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

3、“p或者q的否定”称p,q的或非式，记作$p\downarrow q$

真值表：

p	q	$p\downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$p\downarrow q \Leftrightarrow \neg(p\vee q)$$

二、全功能集

全功能集：若干个联结词的集合，其余的联结词均可由它们表示。

例如：$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \uparrow, \downarrow\}$, $\{\neg, \uparrow\}$ 等都是全功能集。

例1： 将下面公式化成与之等值的并且仅含$\{\neg, \wedge, \vee\}$中联结词的公式.

$$p \to (q \to r)$$

$$\Leftrightarrow p \to (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$$

$$\Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r$$

例2：将 $p\wedge\neg q$化成只含下列联结词的公式。

(1)$\{\neg,\vee\}$ $\quad p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)$

(2)$\{\neg,\rightarrow\}$ $\quad p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg(p\rightarrow q)$

(3)$\{\uparrow\}$ $\quad p\wedge\neg q\Leftrightarrow p\wedge\neg(q\wedge q)\Leftrightarrow p\wedge(q\uparrow q)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg(p\wedge(q\uparrow q)))\Leftrightarrow\neg(p\uparrow(q\uparrow q))$

$\Leftrightarrow\neg((p\uparrow(q\uparrow q))\wedge(p\uparrow(q\uparrow q)))$

$\Leftrightarrow((p\uparrow(q\uparrow q))\uparrow(p\uparrow(q\uparrow q)))$

(4)$\{\downarrow\}$ $\quad p\wedge\neg q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\Leftrightarrow(\neg p)\downarrow q$

$\Leftrightarrow(\neg(p\vee p))\downarrow q\Leftrightarrow(p\downarrow p)\downarrow q$