图　论

- 图论是一个古老的数学分支，它起源于游戏难题的研究。
- 图论的内容十分丰富，应用得相当广泛，许多学科，诸如运筹学、信息论、控制论、网络理论、博弈论、化学、生物学、物理学、社会科学、语言学、计算机科学等，都以图作为工具来解决实际问题和理论问题。
- 随着计算机科学的发展，图论在以上各学科中的作用越来越大，同时图论本身也得到了充分的发展。

图论部分

- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图
- 第7章 树

第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路, 回路和图的连通性

5.3 图的矩阵表示

5.4 最短路径

5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

内容：有向图，无向图的基本概念。

重点：1、有向图，无向图的定义，

2、图中顶点，边，关联与相邻，顶点度数等基本概念，

3、各顶点度数与边数的关系

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$ 及推论，

4、简单图，完全图，子图，补图的概念，

5、图的同构的定义。

一、图的概念

1.定义

多重集合: 元素可以重复出现的集合

无序积 $A\&B=\{(a,b)|a\in A\wedge b\in B\}$

无向图 $G=\langle V,E\rangle$

$E\subseteq V\&V$， E 中元素为无向边，简称边。

边集E为$V\&V$的多重子集,其元素称为无向边,简称边.

有向图 $D=\langle V,E\rangle$

$E\subseteq V\times V$， E 中元素为有向边，简称边。

边集E为$V\times V$的多重子集，其元素称为有向边，简称边.

$$图\begin{cases}无向图G=\langle V,E\rangle \quad V记为V(G),E记为E(G)\\ 有向图D=\langle V,E\rangle \quad V记为V(D),E记为E(D)\end{cases}$$

2. 图的表示法

有向图，无向图的顶点都用小圆圈表示。

无向边 (a,b)

——连接顶点 a,b **的线段。**

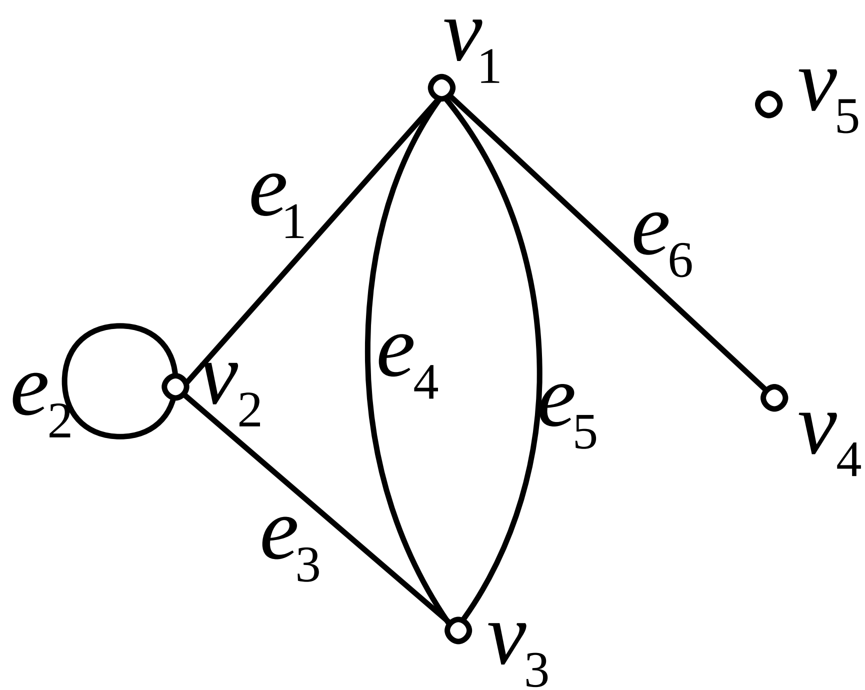
有向边 $\langle a,b\rangle$

——以 a **为始点，以** b **为终点的有向线段。**

例1.（1）无向图 $G=\langle V,E\rangle$**，** $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_2),(v_2,v_3),(v_1,v_3),(v_1,v_3),(v_1,v_4)\}$$

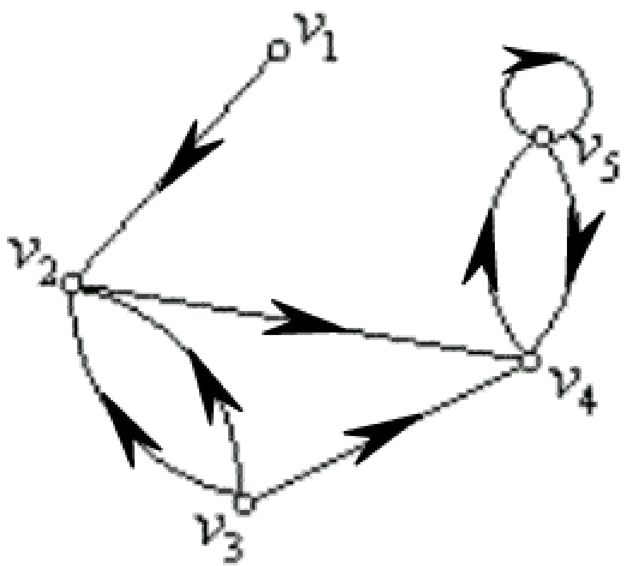
图形表示如右：



例1. (2) 有向图 $D=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$$E=\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_3,v_2\rangle,\langle v_3,v_2\rangle,\langle v_3,v_4\rangle,$$
$$\langle v_2,v_4\rangle,\langle v_4,v_5\rangle,\langle v_5,v_4\rangle,\langle v_5,v_5\rangle\}$$

图形表示如右：



3. 相关概念

(1) 有限图—— V, E**都是有限集的图。**

$\boldsymbol{n}$**阶图——** $|V| = n$**的图。**

空图: V=∅

零图: E=∅

平凡图: 1 阶零图

(2) 关联 (边与点关系)——设边 $e = (u, v)$ **(或** $\langle u, v \rangle$ **)，则称** e **与** u **(或** v **)关联。**

(2)

$$\text{无向图关联的次数}\begin{cases}0 & v\text{与}e\text{不关联}\\ 1 & v\text{与}e\text{关联1次}\\ 2 & v\text{与}e\text{关联2次}(e\text{为环})\end{cases}$$

相邻 $\begin{cases}\text{点的相邻——两点间有边，称此两点相邻}\\ \text{边的相邻——两边有公共端点，称此两边相邻}\end{cases}$

孤立点——无边关联的点。

环——一条边关联的两个顶点重合，称此边为环（即两顶点重合的边）。

(3) 悬挂点——只有一条边与其关联的点，所对应的边叫悬挂边。

(4) 平行边——关联于同一对顶点的若干条边称为平行边。平行边的条数称为重数。

多重图——含有平行边的图。

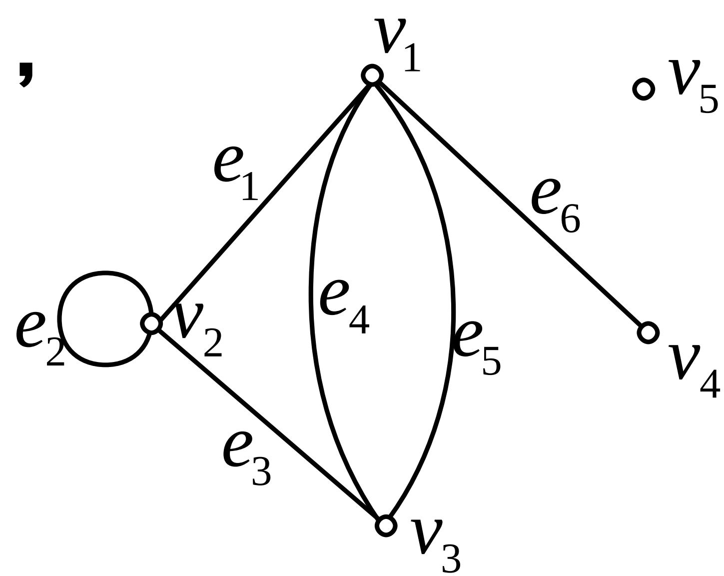
简单图——不含平行边和环的图。

注意:简单图是极其重要的概念

如例1的(1)中,

e_1与v_1, v_2关联的次数均为1,

e_2与v_2关联的次数为2,



边e_1, e_4, e_5, e_6都是相邻的,

v_5为孤立点, v_4为悬挂点,

e_6为悬挂边, e_2为环, e_4, e_5为平行边, 重数2,

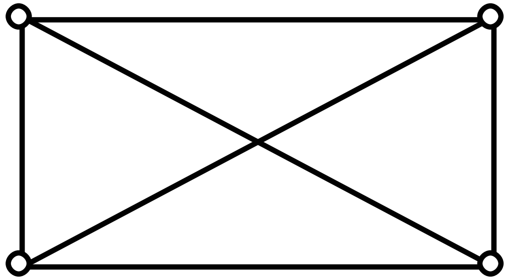
G为多重图。

4. 完全图

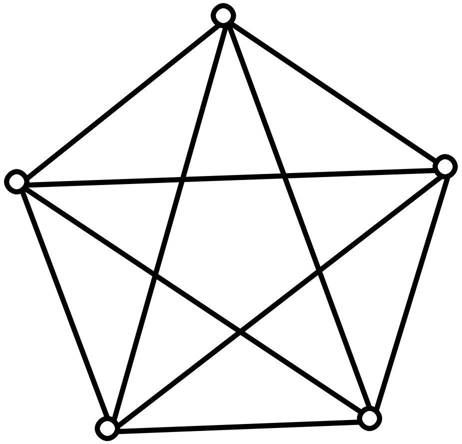
设$G=\langle V,E\rangle$为n阶无向简单图，若G中每个顶点都与其余$n-1$个顶点相邻，则称G为$\boldsymbol{n}$阶无向完全图，记作K_n。

若有向图D的任一对顶点$u,v(u\neq v)$，既有有向边$\langle u,v\rangle$又有有向边$\langle v,u\rangle$，则称D为有向完全图。

例如：



K_4



K_5

二. 顶点的度数，握手定理

1. 顶点的度数

无向图$G=\langle V,E\rangle$，v_i**的度数记**$d(v_i)$，**指与**v_i**相关联的边的条数。**

有向图$G=\langle V,E\rangle$，v_i **的度数** $d(v_i)$

$d^+(v_i)$：称v_i作为边的始点的次数之和为v_i的出度

$d^-(v_i)$：称v_i作为边的终点的次数之和为v_i的入度

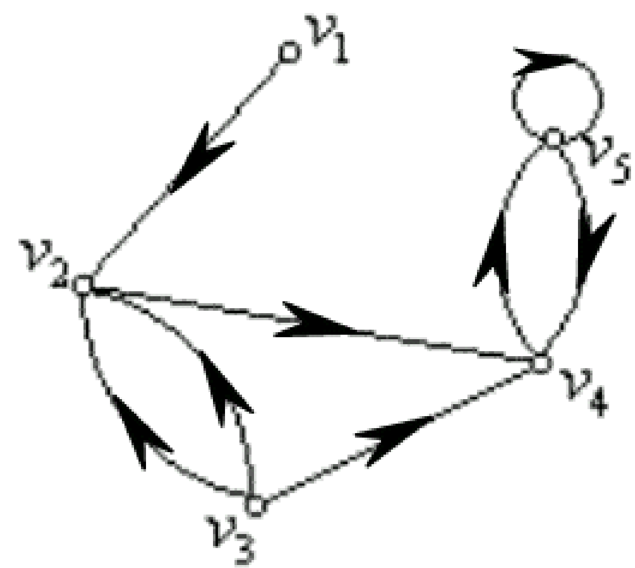
$d(v_i)=d^+(v_i)+d^-(v_i)$

最大度 $\Delta(G)=\max\left\{d(v)\middle|v\in V\right\}$

最小度 $\delta(G)=\min\left\{d(v)\middle|v\in V\right\}$

对有向图相应地还有 $\Delta^{+}(D)$ $\Delta^{-}(D)$ $\delta^{+}(G)$ $\delta^{-}(G)$

如例1的(2)中，



$$d(v_2)=d^{+}(v_2)+d^{-}(v_2)$$
$$=1+3=4$$

$$d(v_1)=d^{+}(v_1)+d^{-}(v_1)$$
$$=1+0=1$$

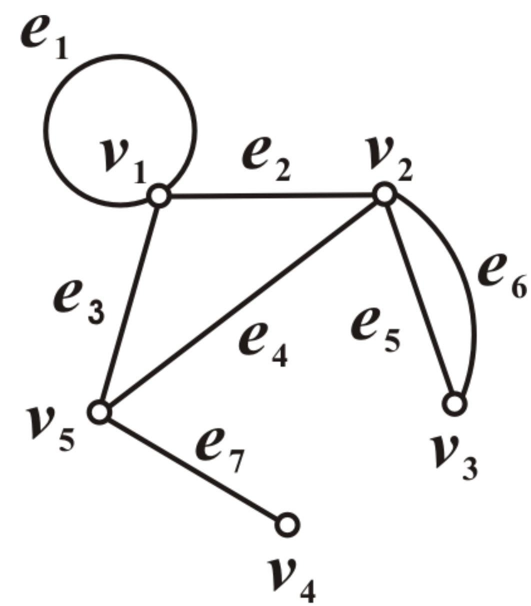
$$d(v_5)=d^{+}(v_5)+d^{-}(v_5)=2+2=4$$

2. 图的度数列

设无向图G的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

G的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

如右图度数列:4,4,2,1,3

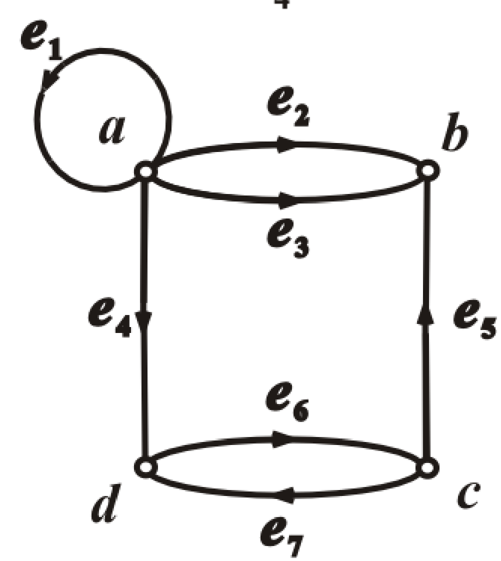


设有向图D的顶点集$V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

D的度数列: $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$

D的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$

D的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$



如右图度数列:5,3,3,3

出度列:4,0,2,1

入度列:1,3,1,2

3. 握手定理

定理1：设图$G=\langle V,E\rangle$为无向图或有向图，

$V=\{v_1,v_1,\cdots,v_n\}$，$|E|=m$（m为边数），

则 $$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$$

推论：任何图中，奇度顶点个数必为偶数.

定理2：设$D=\langle V,E\rangle$为有向图，$V=\{v_1,v_1,\cdots,v_n\}$

$|E|=m$，则 $$\sum_{i=1}^{n} d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n} d^-(v_i)=m$$

例2.(1) $(3,3,2,3)$, $(5,2,3,1,4)$能成为图的度数序列吗？为什么？

解. 不可能. 它们都有奇数个奇度顶点.

(2) 已知图G中有10条边，4个3度顶点，其余顶点的度数均小于3，问G中至少有多少个顶点？为什么？

解. 设G有n个顶点. 由握手定理,

$$4\times3+2\times(n-4)\geq2\times10$$

解得 $n\geq8$

三. 子图 补图

1.定义 设$G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$是两个图

(1) 若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$, 则称G'为G的子图, G为G'的母图，记作$G'\subseteq G$

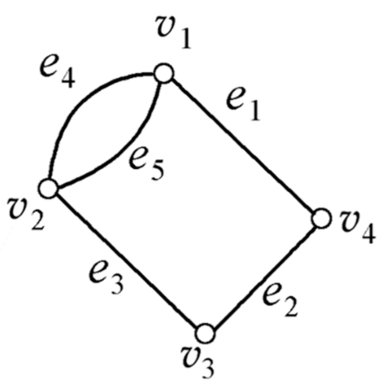
(2) 若$G'\subseteq G$ 且$V'=V$，则称G'为G的生成子图

(3) 若$V'\subset V$ 或$E'\subset E$，称G'为G的真子图

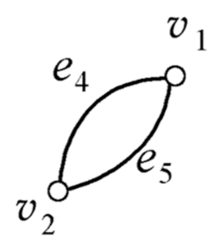
(4) 设$V'\subseteq V$ 且$V'\neq\varnothing$, 以V'为顶点集, 以两端点都在V'中的所有边为边集的G的子图称作V'的导出子图，记作 $G[V']$

(5) 设$E'\subseteq E$且$E'\neq\varnothing$, 以E'为边集, 以E'中边关联的所有顶点为顶点集的G的子图称作E'的导出子图, 记作 $G[E']$

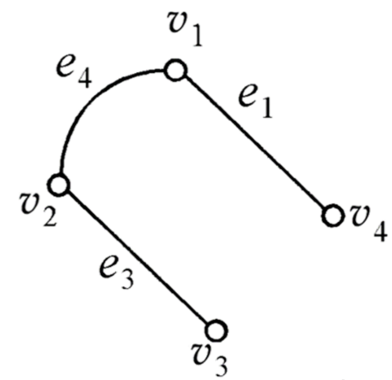
导出子图实例



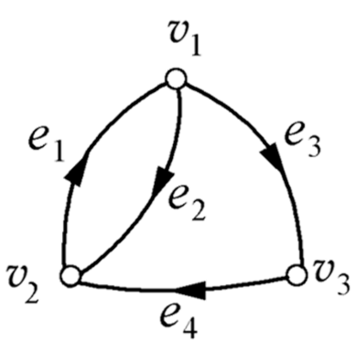
G



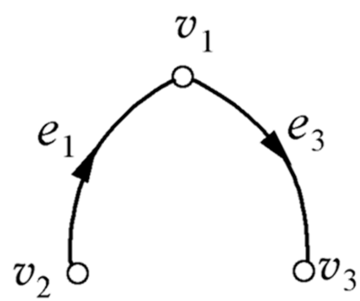
$G[\{v_1,v_2\}]$



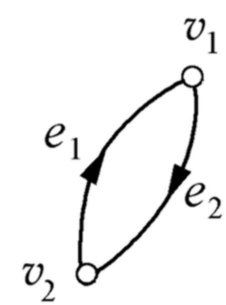
$G[\{e_1,e_3,e_4\}]$



D

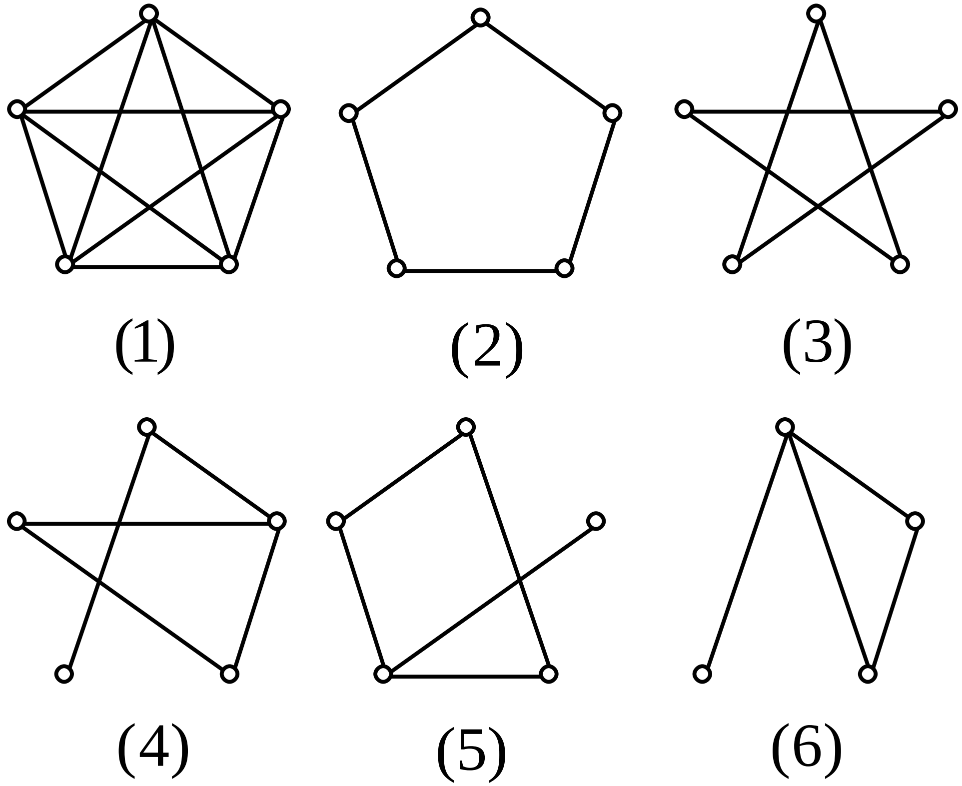


$D[\{e_1,e_3\}]$



$D[\{v_1,v_2\}]$

例3



上图中，(1)一(6)都是(1)的子图，

其中(2)一(6)为真子图，(1)一(5)为生成子图。

2.补图

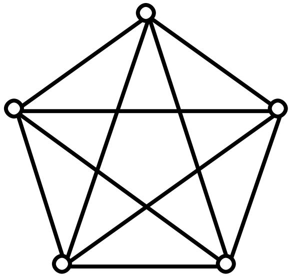
设$G=\langle V,E\rangle$为无向完全图，$G_1=\langle V,E_1\rangle$，

$G_2=\langle V,E_2\rangle$为无向简单图，其中$E_1\cap E_2=\varnothing$，

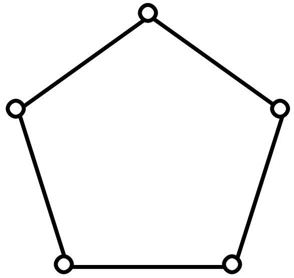
$E_1\cup E_2=E$，则称G_1，G_2相对于G互为补图，

记$G_1=\overline{G}_2$，$G_2=\overline{G}_1$。

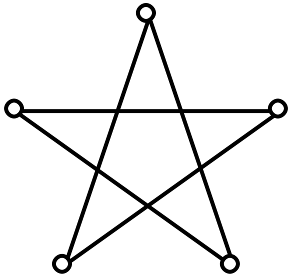
如例3中，



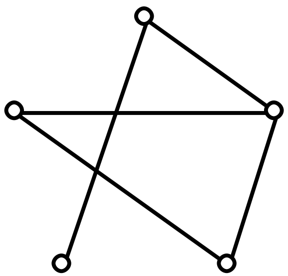
(1)



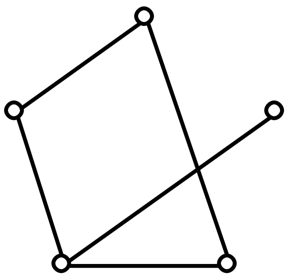
(2)



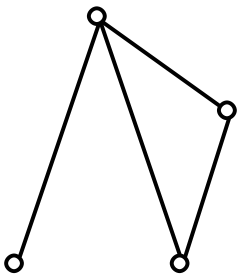
(3)



(4)



(5)



(6)

四. 图的同构

定义 设$G_1=<V_1,E_1>$, $G_2=<V_2,E_2>$为两个无向图, 若存在双射函数 $f: V_1\to V_2$, 使得对于任意的

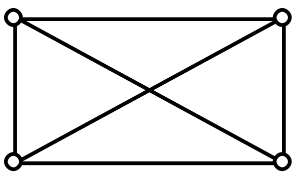
$v_i,v_j\in V_1$,

$$(v_i,v_j)\in E_1 \text{当且仅当} (f(v_i),f(v_j))\in E_2$$

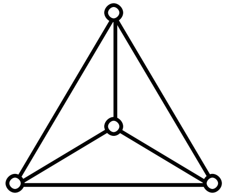
并且(v_i,v_j) 与 $(f(v_i),f(v_j))$ 的重数相同，则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$. (对有向图类似可定义同构)

简单理解：两个图的边和顶点一一对应，且有关联关系.

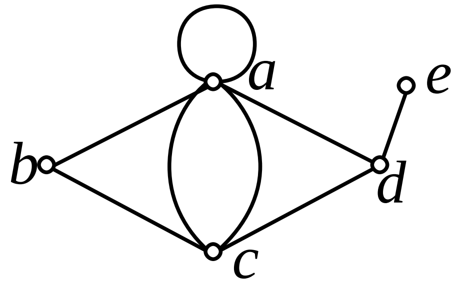
例4



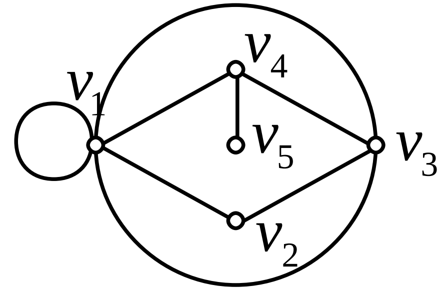
(1)



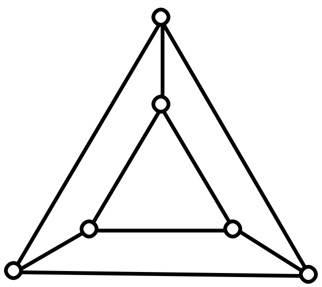
(2)



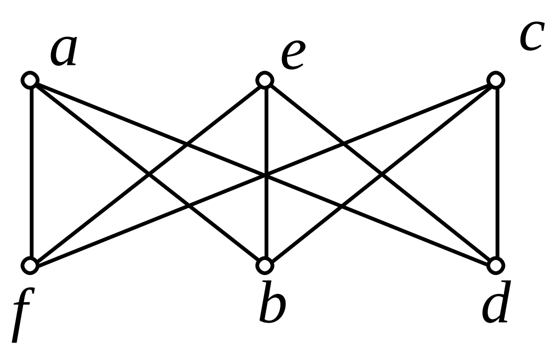
(3)



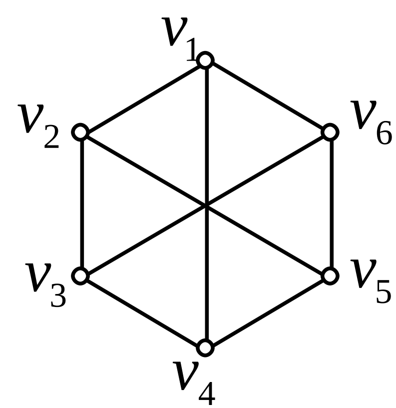
(4)



(5)



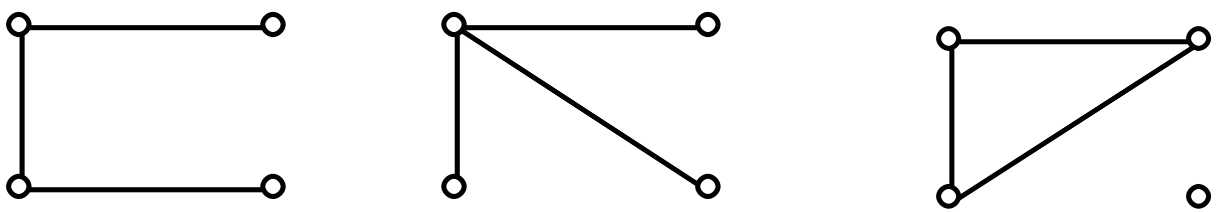
(6)



(7)

例5. (1) 画出4个顶点，3条边的所有非同构的无向简单图。

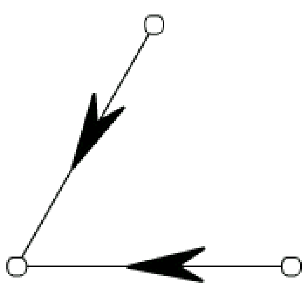
解：只有如下3个图：



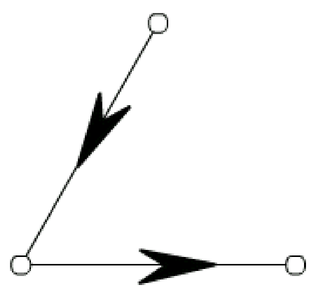
(1.1) (1.2) (1.3)

例5.(2) 画出3个顶点，2条边的所有非同构的有向简单图。

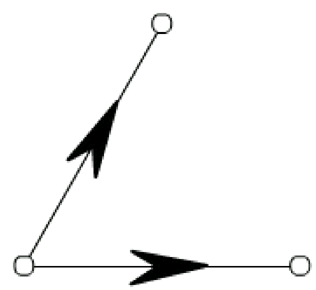
解：只有如下4个图：



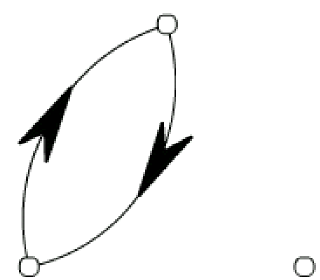
(2.1)



(2.2)



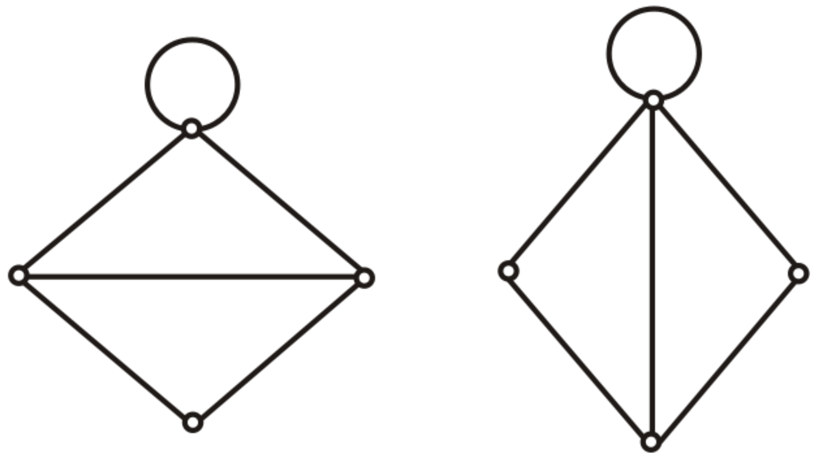
(2.3)



(2.4)

例6. 判断下述每一对图是否同构：

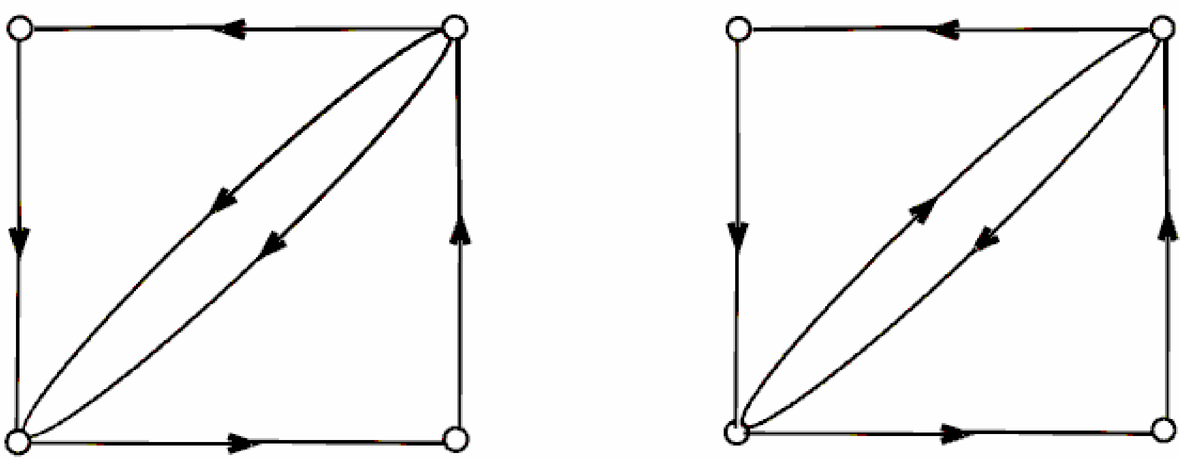
(1)



度数列不同

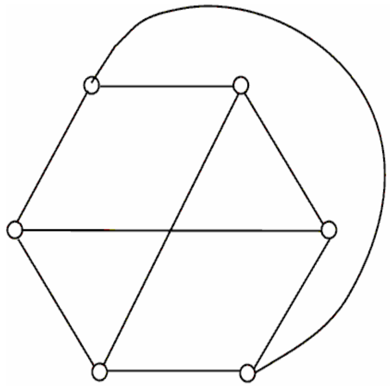
不同构

(2)

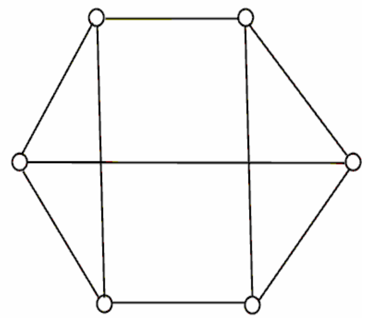


不同构　　入(出)度列不同

(3)



(1)



(2)

不同构(左边没有三角形,右边有三角形)

注意:度数列相同

说明:

能找到多条同构的必要条件，但它们都不是充分条件:

① 边数相同，顶点数相同

② 度数列相同(不计度数的顺序)

③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同，等等

若破坏必要条件，则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的算法