第三节　等值演算

一. 两命题公式间的等值关系

二. 重要等值式

三. 等值演算

一、两命题公式间的等值关系

1、定义： 设 A, B 为两命题公式，若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 是等值的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

2、判定

判断两公式 A, B 是否等值，即判断 $A \leftrightarrow B$ 是否重言式 。

真值表法

例1、判断A, B两公式是否等值。

(1) $A = \neg(p \vee q)$，$B = \neg p \vee \neg q$

解：作真值表如下：

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

表 1

例1、判断A, B两公式是否等值。

(2) $A = p \leftrightarrow q$，$B = (p \to q) \wedge (q \to p)$

解：作真值表如下：

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

表 2

二、重要等值式 P9

1、双重否定律 $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

2、等幂律 $A \vee A \Leftrightarrow A$，$A \wedge A \Leftrightarrow A$

3、交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

4、结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

5、分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

二、重要等值式

6、德•摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

7、吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

$$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$$

8、零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$

9、同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$，$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$

10、互否律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$(排中律),

$A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$(矛盾律)

二、重要等值式

11、蕴涵等值式 $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

12、等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$

13、假言易位 $A \to B \Leftrightarrow \neg B \to \neg A$

14、等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$

15、归谬论 $(A \to B) \wedge (A \to \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

三、等值演算

由已知的等值式推演出另外一些等值式的过程.

定理1：置换规则(P10)

如果$A \Leftrightarrow B$，则：$\phi(A) \Leftrightarrow \phi(B)$

设 $\phi(A)$为含公式 A 的命题公式,$\phi(B)$是用公式 B 置换了$\phi(A)$中所有的 A 后得到的命题公式,

若 $A \Leftrightarrow B$，则 $\phi(A) \Leftrightarrow \phi(B)$

例2. 验证下列等值式。

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

解： $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow p \rightarrow (\neg q \vee r)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ 结合律

$\Leftrightarrow \neg (p \wedge q) \vee r$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$ 蕴涵等值式

例2、验证下列等值式。

(2) $\left(p\wedge(q\wedge r)\right)\vee\left(\neg p\wedge(q\wedge r)\right)\Leftrightarrow q\wedge r$

解： $\left(p\wedge(q\wedge r)\right)\vee\left(\neg p\wedge(q\wedge r)\right)$

$\Leftrightarrow\left((q\wedge r)\wedge p\right)\vee\left((q\wedge r)\wedge\neg p\right)$ 交换律

$\Leftrightarrow(q\wedge r)\wedge(p\vee\neg p)$ 分配律

$\Leftrightarrow(q\wedge r)\wedge 1$ 排中律

$\Leftrightarrow q\wedge r$ 同一律

(3) $q\vee\neg\big((\neg p\vee q)\wedge p\big)\Leftrightarrow 1$

解： $q\vee\neg\big((\neg p\vee q)\wedge p\big)$

$\Leftrightarrow q\vee\neg\big((\neg p\wedge p)\vee(q\wedge p)\big)$ 分配律

$\Leftrightarrow q\vee\neg\big(0\vee(q\wedge p)\big)$ 矛盾律

$\Leftrightarrow q\vee\neg(q\wedge p)$ 同一律

$\Leftrightarrow q\vee(\neg q\vee\neg p)$ 德•摩根律

$\Leftrightarrow (q\vee\neg q)\vee\neg p$ 结合律

$\Leftrightarrow 1\vee\neg p$ 排中律

$\Leftrightarrow 1$ 零律

考虑问题:能否利用等值式来化简，或判断公式的类型(重言，矛盾，可满足)。

判断一个公式是否重言式，矛盾式，可满足式，或者判断两个命题公式是否等值，有两种方法，即**真值表法**和**等值演算法**。

例3.用两种方法证明:

$$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

[证法一] 用真值表法

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

由最后两列真值完全相同，于是命题成立。

例3. 用两种方法证明：

$$\neg(p\wedge q)\to(\neg p\vee q)\Leftrightarrow\neg p\vee q$$

［证法二］用等值式法

$$\neg(p\wedge q)\to(\neg p\vee q)$$

$\Leftrightarrow\neg\big(\neg(p\wedge q)\big)\vee(\neg p\vee q)$ 蕴涵等值式

$\Leftrightarrow(p\wedge q)\vee(\neg p\vee q)$ 双重否定律

$\Leftrightarrow(\neg p\vee q)\vee(p\wedge q)$ 交换律

$\Leftrightarrow\neg p\vee\big(q\vee(p\wedge q)\big)$ 结合律

$\Leftrightarrow\neg p\vee q$ 吸收律

例4. 判断下列公式的类型

（1） $(p \vee \neg p) \to ((q \wedge \neg q) \wedge r)$

$\Leftrightarrow 1 \to ((q \wedge \neg q) \wedge r)$ **排中律**

$\Leftrightarrow 1 \to (0 \wedge r)$ **矛盾律**

$\Leftrightarrow 1 \to 0$ **零律**

$\Leftrightarrow 0$

（2） $(p \to q) \wedge \neg p$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge \neg p$ **蕴涵等值式**

$\Leftrightarrow \neg p$ **吸收律**

课堂练习：判断下列公式的类型

(1) $q \wedge \neg(p \rightarrow q)$

(2) $((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \wedge r$

(3) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

小 结

(1) 掌握两公式等值的定义。

(2) 掌握24个重要等值式，并能利用其进行等值演算。

(3) 利用等值验算判断命题公式的类型。