第二节　通路，回路
图的连通性

一. 通路 回路

1. 通路（回路）—— G 中顶点和边的交替序列

$$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_l v_l$$

$e_i = (v_{i-1}, v_i)$(无向图)或 $e_i = \langle v_{i-1}, v_i \rangle$ (有向图)，

v_0 ——起点， v_l——终点，

当 $v_0 = v_l$ 时, Γ为回路。

2. 简单通路，简单回路

简单通路：Γ 中所有边各异。

简单回路：此时，若 $v_0 = v_l$

(回路中的所有边互不相同)

复杂通路 (回路)：Γ 中有边重复出现。

3. 初级通路，初级回路

初级通路 (路径): Γ 中所有顶点各异，所有边各异

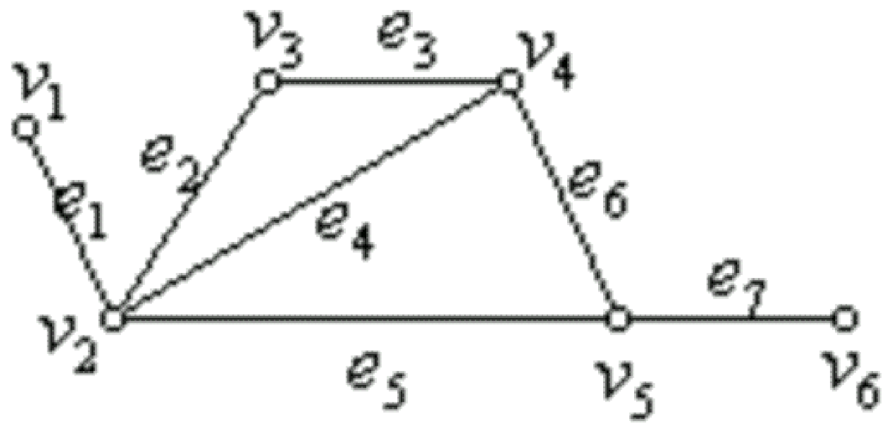
初级回路 (圈)：此时，若 $v_0 = v_l$

初级通路 (回路) $\Rightarrow$ 简单通路 (回路),

但反之不真。

4. 通路，回路 Γ 的长度—— Γ中边的数目。

例1、(1)



图(1)中，从 v_1 到 v_6 的通路有：

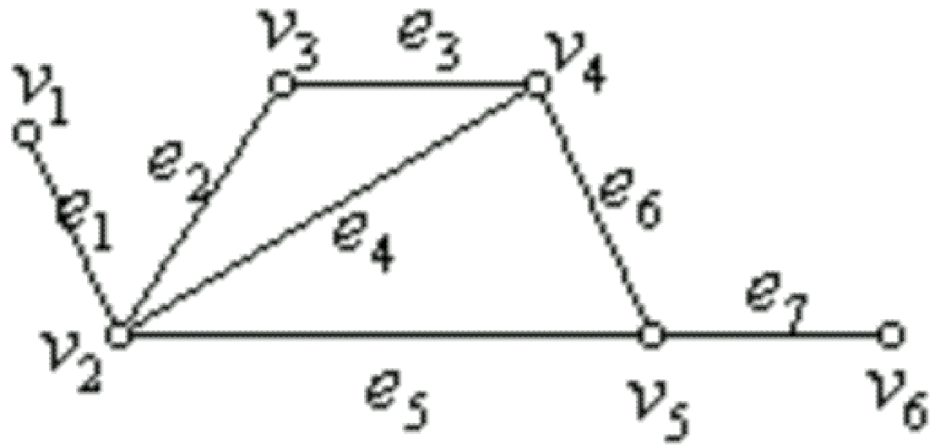
$$\Gamma_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$$ **长度3**

$$\Gamma_2 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$$ **长度6**

$$\Gamma_3 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_4 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$$ **长度6**

…………

例1、(1)



图(1)中，从 v_1 到 v_6 的通路有：

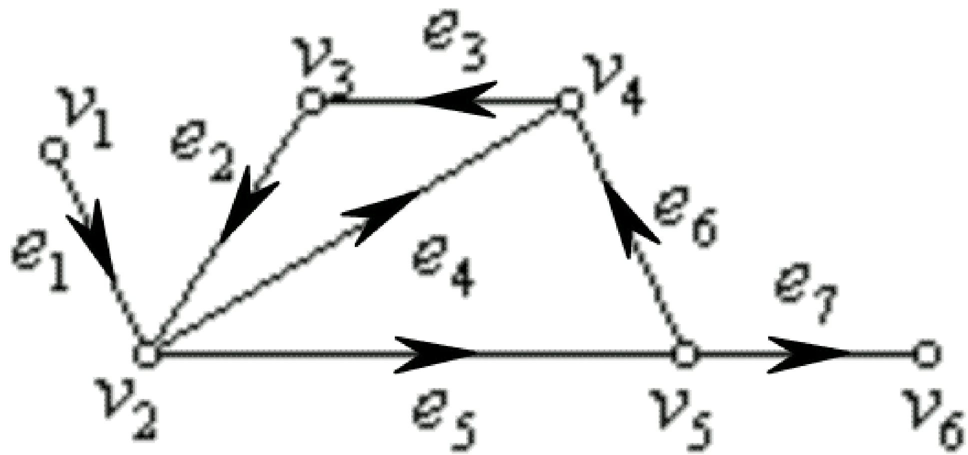
$\Gamma_1 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$ **初级通路**

$\Gamma_2 = v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 v_4 e_4 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$ **简单通路**

$\Gamma_3 = v_1 e_1 v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_4 v_2 e_5 v_5 e_7 v_6$ **复杂通路**

…………

例1、(2)



图(2)中过v_2的回路 (从v_2到v_2)有：

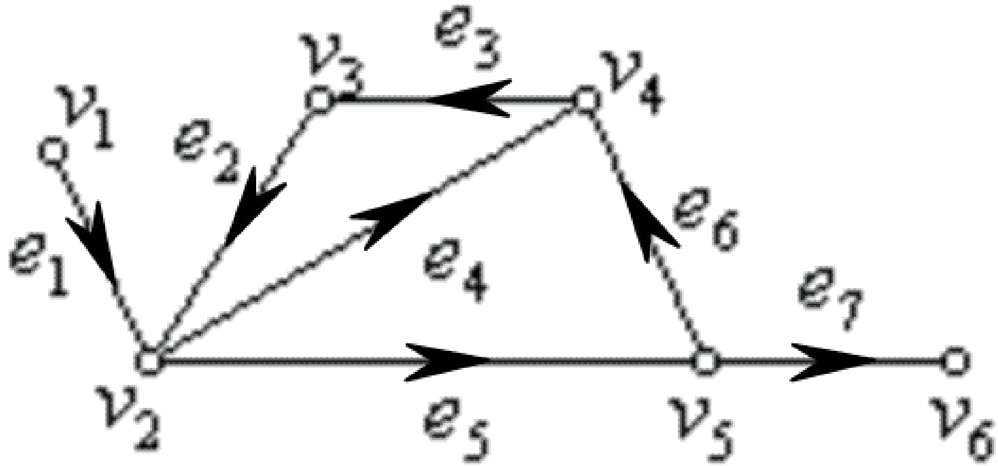
$\Gamma_1 = v_2 e_4 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2$　　长度3

$\Gamma_2 = v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2$　　长度4

$\Gamma_3 = v_2 e_4 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2 e_5 v_5 e_6 v_4 e_3 v_3 e_2 v_2$　　长度7

………….

例1、(2)



图(2)中过v_2的回路 (从v_2到v_2)有:

$\Gamma_1 = v_2e_4v_4e_3v_3e_2v_2$ 初级回路(圈)

$\Gamma_2 = v_2e_5v_5e_6v_4e_3v_3e_2v_2$ 初级回路(圈)

$\Gamma_3 = v_2e_4v_4e_3v_3e_2v_2e_5v_5e_6v_4e_3v_3e_2v_2$ 复杂回路

…………

5. 图中最短的回路

如图：

6.性质

定理5.3 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的通路.

分析：

若通路长度大于n-1，则通路上顶点数大于n，通路上有重复顶点，删除重复顶点之间的回路．重复进行，直到通路长度小于等于n-1为止.

推论 在n阶图G中，若从顶点u到v（$u \neq v$）存在通路，则从u到v存在长度小于等于$n-1$的初级通路.

6.性质

定理5.4 **在一个n阶图G中，若存在v到自身的回路，则一定存在v到自身长度小于等于n的回路.**

推论 **在一个n阶图G中，若存在v到自身的简单回路，则存在v到自身长度小于等于n的初级回路.**

由以上定理可知，在n阶图中，

$$\begin{cases} \text{任何一条初级通路的长度} \le n-1 \\ \text{任何一条初级回路的长度} \le n \end{cases}$$

二. 图的连通性

1.无向图的连通

设无向图$G=\langle V,E\rangle$,

双向

u与v连通: 若u与v之间有通路. 规定u与自身总连通.

连通关系 $R=\{\langle u,v\rangle \mid u,v \in V \text{且} u\sim v\}$是$V$上的等价关系

连通图:任意两点都连通的图. 平凡图是连通图.

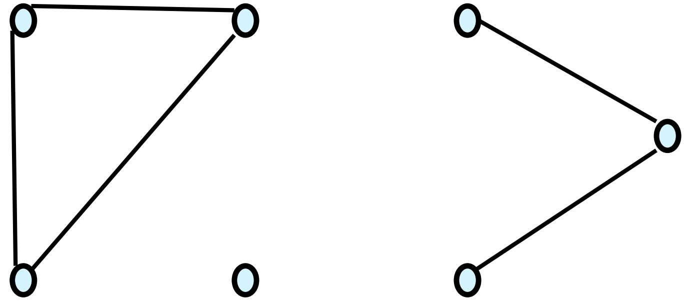
G为非连通图—— G 中至少有两点不连通。

连通分支: V关于连通关系R的等价类的导出子图

设$V/R=\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$, $G[V_1]$, $G[V_2]$, …,$G[V_k]$称为G的连通分支, 其个数记作$p(G)=k$.

G是连通图$\Leftrightarrow p(G)=1$

例



3个连通分支

$p(G)=3$

2. 有向图的连通

设有向图$D=<V,E>$

*u*可达*v*: *u*到*v*有通路. 规定*u*到自身总是可达的.

可达具有自反性和传递性

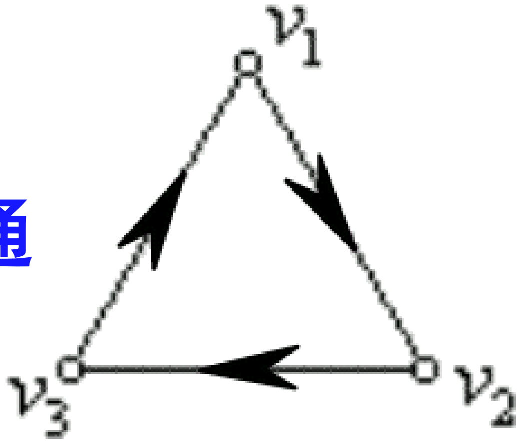
连通

- 强连通 ——D 中任一对顶点都互相可达(双向)
- 单向连通 ——D 中任一对顶点至少一 向可达
- 弱连通 ——略去 D 中有向边的方向后得到的无向图连通

强连通$\Rightarrow$单向连通$\Rightarrow$弱连通

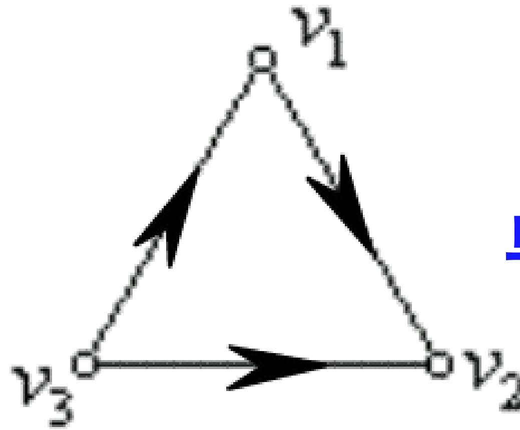
例2

强连通

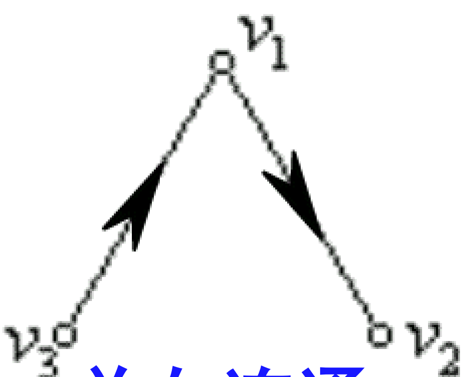


(1)

单向连通

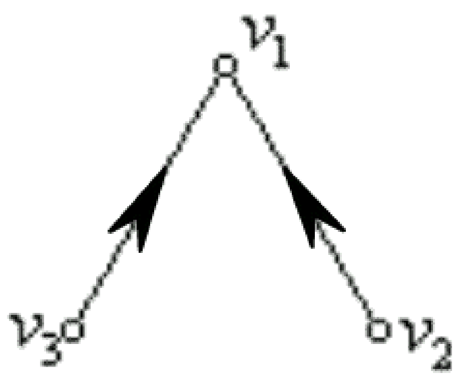


(2)



单向连通

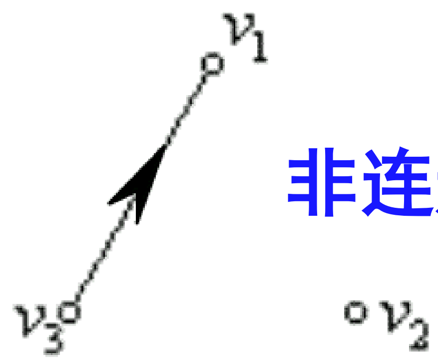
(3)



弱连通

(4)

非连通图



(5)

3. 点割集和边割集

1) 点割集

记 $G-v$: 从G中删除v及关联的边

$G-V'$: 从G中删除V'中所有的顶点及关联的边

$G-e$: 从G中删除e

$G-E'$: 从G中删除E'中所有边

定义5.15 设无向图 $G=<V,E>$,若存在顶点子集 $V'\subset V$,使G删除 V' 后(将其中顶点和关联的边全部删除)，所得子图 $G-V'$ 的连通分支数与G的连通分支数满足 $p(G-V')>p(G)$

而删除 V' 的任何真子集 V'' 后，$p(G-V'')=p(G)$

则V'称为G的一个点割集。

若点割集中只有一个顶点v，则称v为割点。

理解

定义5.15 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图。若子集$V'\subset V$,使G删除V' 后(将其中顶点和关联的边全部删除)，所得子图是**不连通图**，

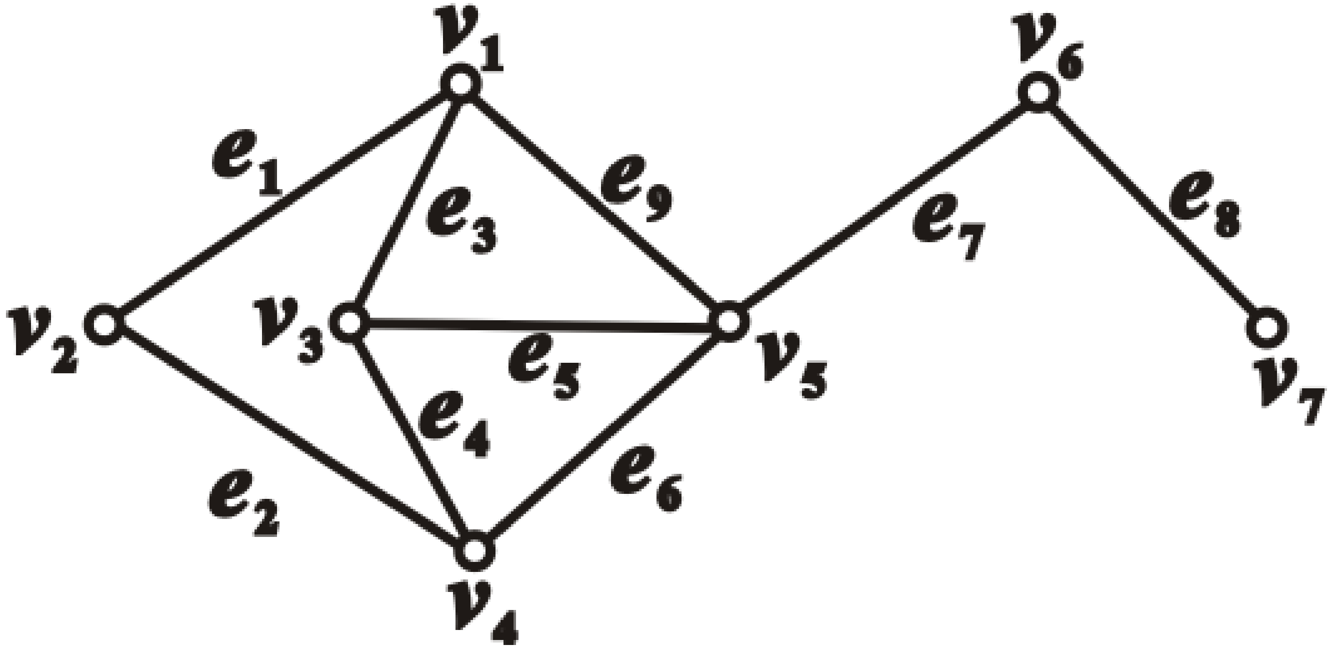
而删除V'的任何真子集V''后，所得子图为**连通图**，

则V'称为G的一个**点割集**。

点割集实例

例 $\{v_1,v_4\}$, $\{v_6\}$是点割集, v_6是割点.

$\{v_2,v_5\}$不是点割集



$\{e_1,e_2\}$，$\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$，$\{e_8\}$等是边割集，e_8是桥，$\{e_7,e_9,e_5,e_6\}$不是边割集

2) 边割集

定义5.15 设无向图 $G=<V,E>$,若存在边子集 $E'\subseteq E$,使G删除 E' 后(将其中的边从G中全部删除)，所得子图 $G-E'$ 的连通分支数与G的连通分支数满足 $p(G-E')>p(G)$ 而删除 E'的任何真子集E''后, $p(G-E'')=p(G)$ 则E' 称为G的一个**边割集**。

若边割集中只有一条边e，则称e为**割边或桥**。

理解

定义5.15 设无向图 $G=<V,E>$ 为连通图,若子集 $E'\subseteq E$,使G删除 E' 后(将其中的边从G中全部删除)，所得子图为不连通的，

而删除 E' 的任何真子集 E'' 后，所得子图为连通图

则 E' 称为G的一个边割集。

小　结

图的通路　回路　连通性

重点：1、通路，回路，简单通路，回路，

初级通路，回路的定义，

2、图的连通性的概念

3、点割集 边割集