集合论 简介

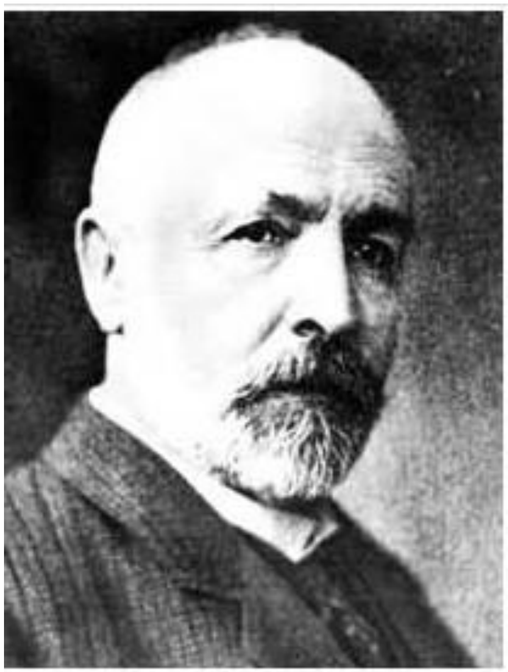
集合论部分

集合是数学中最为基本的概念，又是数学各分支、自然科学及社会科学各领域的最普遍采用的描述工具。

集合论是离散数学的重要组成部分，是现代数学中占有独特地位的一个分支。

集合论部分

集合论是研究集合一般性质的数学分支，它的创始人是康托尔($G, Cantor$，1845－1918)。



德国数学家，

生于俄国圣彼得堡。

集合论部分

在现代数学中，每个对象(如数，函数等)本质上都是集合，都可以用某种集合来定义，数学的各个分支，本质上都是在研究某一种对象集合的性质。

集合论的特点是研究对象的广泛性，它也是计算机科学与工程的基础理论和表达工具，而且在程序设计，数据结构，形式语言，关系数据库，操作系统等都有重要应用。

本课程在第三，四章中介绍集合论的内容。

集合论部分

- 第3章 集合的基本概念和运算
- 第4章 二元关系和函数

3.1　集合的基本概念

一. 集合的概念与表示

二. 幂集

一. 集合的概念与表示

1. **集合**———一些确定的对象的整体。

集合用大写的字母标记

其中的对象称元素，用小写字母标记

$$A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$$

表示集合 A 含有元素 $a_1,a_2,\cdots a_n$

注意：

（1）$a \in A$或$a \notin A$

（2）集合中的元素均不相同

$\{a,b,c\},\{a,b,b,c\},\{c,a,b\}$

确定性
无序性
互异性

表示同一个集合。

（3）集合的元素可以是任何类型的事物，

一个集合也可以作为另一个集合的元素。

例如：$A=\left\{a,\{b,c\},b,\{b\}\right\}$

抽象性

隶属关系的层次结构

例

$A=\{ a, \{b,c\}, d, \{\{d\}\} \}$

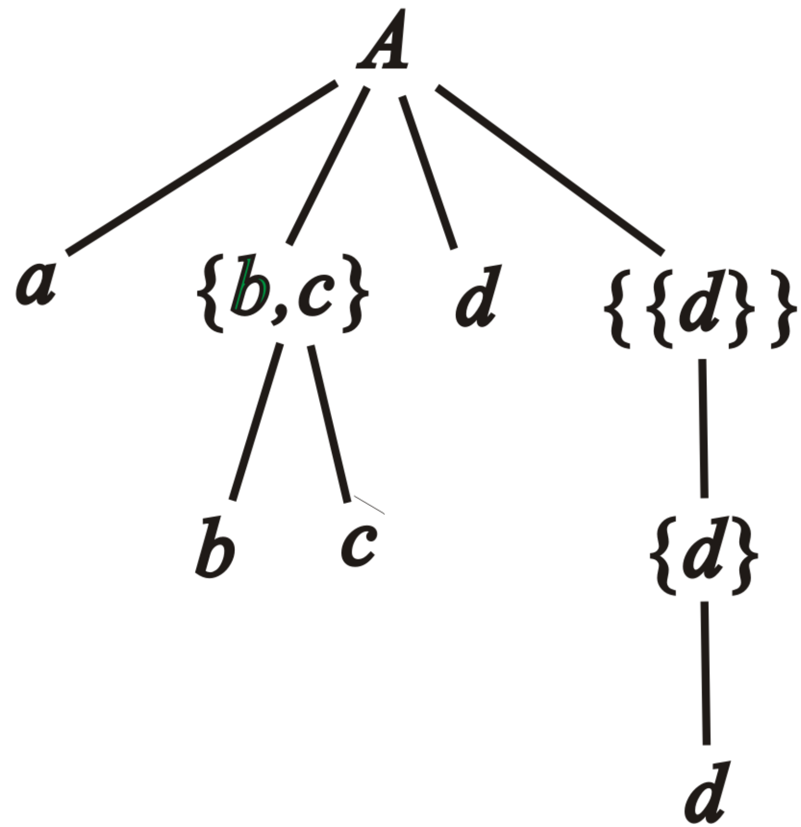
$\{b,c\}\in A$

$b\notin A$

$\{\{d\}\}\in A$

$\{d\}\notin A$

$d\in A$



2. 集合的表示法

（1） 列举法(将元素一一列出)

例如：$A=\{2,3,4,5\}$

（2） 描述法(用谓词概括元素的属性)

$$A=\left\{x \mid P(x)\right\}$$

例如：$B=\{x \mid x\in Z \wedge 2\le x\le 5\}$

3. 常见的集合

N, Z, Q, R, C

4. 集合间的关系

(1) B为 A 的子集，记 $B \subseteq A$

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \to x \in A)$$

$$B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

B为A的真子集，记$B \subset A$

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$$

$$B \not\subset A \Leftrightarrow B \not\subseteq A \vee B = A$$

4. 集合间的关系

（2）对任意集合A有 $A \subseteq A$

（3）两集合A, B相等，记作 $A = B$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

5、空集$\varnothing$　　不含任何元素的集合

实例　$\{x \mid x^2+1=0 \wedge x \in \mathrm{R}\}$ 就是空集

定理　　空集是任何集合的子集

$$\varnothing \subseteq A \Leftrightarrow \forall x\,(x \in \varnothing \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow T$$

推论 空集是唯一的.

证明 假设存在$\varnothing_1$和$\varnothing_2$,

则$\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ 且$\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$，因此$\varnothing_1 = \varnothing_2$

6.全集 E

相对性

在给定问题中，全集包含任何集合，即$\forall A\ (A \subseteq E)$

$$\varnothing \subseteq A \subseteq E\,(A\text{ 为任一集合})$$

例1.选择适当的谓词表示下列集合。

(1) 小于5的非负整数集

解：$\{x \mid x \in N \wedge x < 5\}$

(2) 奇整数集合

解：$\{x \mid x = 2n + 1 \wedge n \in Z\}$

(3) 10的整倍数集合，

解：$\{x \mid x = 10n \wedge n \in Z\}$

(4) $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

解：$\{x \mid x\text{是素数} \wedge 2 < x < 20\}$

例2. 用列举法表示下列集合。

(1) $S_1 = \{x \mid x = 2 \vee x = 5\}$

解： $S_1 = \{2, 5\}$

(2) $S_2 = \{x \mid x\text{是十进制的数字}\}$

解： $S_2 = \{0, 1, 2, \cdots 9\}$

(3) $S_3 = \{x \mid x \in Z \wedge 5 < x \leq 10\}$

解： $S_3 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

(4) $S_4 = \left\{\left\langle x, y \right\rangle \mid x = 0 \wedge (y = 1 \vee y = 2)\right\}$

解： $S_4 = \left\{\left\langle 0, 1 \right\rangle, \left\langle 0, 2 \right\rangle\right\}$

例3. 确定下面命题的真值：

(1)$\varnothing \subseteq \varnothing$ 真值1

(2)$\varnothing \in \varnothing$ 真值0

(3)$\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$ 真值1

(4)$\varnothing \in \{\varnothing\}$ 真值1

(5)$\{a,b\} \subseteq \left\{a,b,c,\{a,b,c\}\right\}$ 真值1

(6)$\{a,b\} \in \left\{a,b,c,\{a,b,c\}\right\}$ 真值0

(7)$\{a,b\} \subseteq \left\{a,b,\left\{\{a,b\}\right\}\right\}$ 真值1

(8)$\{a,b\} \in \left\{a,b,\left\{\{a,b\}\right\}\right\}$ 真值0

二. 幂集

1. n 元集（n个元素的集合）的m元($m \leq n$)子集。

例如：$A=\{a,b,c\}$为3元集。

0元子集：$\varnothing$（只有一个），

1元子集：$\{a\},\{b\},\{c\}$ (共$C_3^1=3$个)，

2元子集：$\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}$ (共 $C_3^2=3$个)，

3元子集：$\{a,b,c\}$ (共$C_3^3=1$个)。

一般，n 元集共有子集 $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$个。

2.集合 A 的幂集

记 $\boldsymbol{P(A)}$ —— A 的全体子集为元素的集合。

例4. $A=\{a,b,c\}$，求$P(A)$。

解：$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},$

$$\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

若A有 n个元素，则$P(A)$有 2^n 个元素。

第二节　集合的基本运算

一. 集合的基本运算

二. 文氏图（John Venn）

三. 集合的运算律

一. 集合的基本运算

并集 $A\bigcup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

交集 $A\bigcap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

相对补集

$A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$ **B对A的相对补集**

绝对补集

$\sim A=E-A=\{x\mid x\in E\wedge x\notin A\}$ **(其中E 为全集),**

A对E的相对补集称为A的绝对补集

对称差

$$A\oplus B=(A-B)\bigcup(B-A)=(A\bigcup B)-(A\bigcap B)$$

运算顺序： ~和幂集优先，其他由括号确定

并集和交集运算可加以推广

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

例1、设 $E=\{1,2,3,4,5\}$**,** $A=\{1,4\}$**,**

$B=\{1,2,5\}$ **,** $C=\{2,4\}$**，求出以下集合。**

(1) $A\cap B$ $\{1\}$

(2) $B-C$ $\{1,5\}$

(3) $\sim A$ $\{2,3,5\}$

(4) $B\cup\sim A$ $\{1,2,3,5\}$

例1、设 $E=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,4\}$，

$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$，求出以下集合。

(5) $A\oplus B$ $\{2,4,5\}$

(6) $\sim(A\bigcup B)$ $\{3\}$

(7) $(A\bigcap B)\bigcup\sim C$ $\{1,3,5\}$

(8) $(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$ $\{1,4\}$

例2

分别对条件(1)到(5)，确定 X 集合与下述那些集合相等。

$S_1 = \{ 1, 2, \ldots, 8, 9 \}$, $S_2 = \{ 2, 4, 6, 8 \}$,

$S_3 = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$, $S_4 = \{ 3, 4, 5 \}$, $S_5 = \{ 3, 5 \}$

(1) 若 $X \cap S_3 = \varnothing$, 则 $X = S_2$

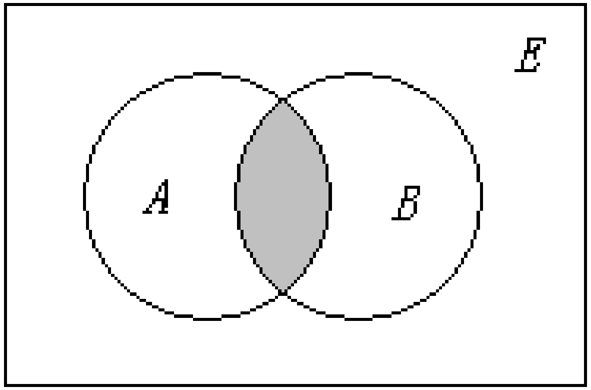
(2) 若 $X \subseteq S_4$, $X \cap S_2 = \varnothing$, 则 $X = S_5$

(3) 若 $X \subseteq S_1$， $X \nsubseteq S_3$, 则 $X = S_1, S_2, S_4$

(4) 若 $X - S_3 = \varnothing$, 则 $X = S_3, S_5$

二. 文氏图 (*John Venn*)

1. 文氏图



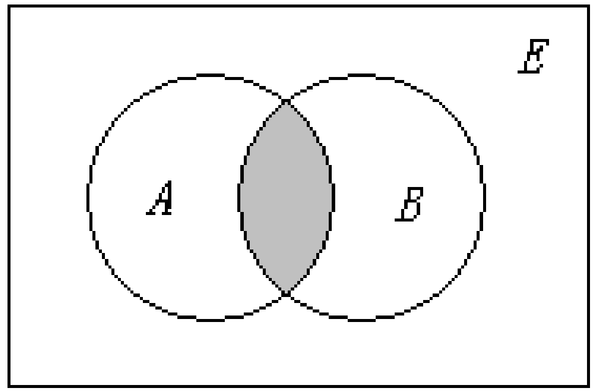
$A \cap B$

（1）用大矩形表示全集E

（2）矩形内的圆表示集合

二. 文氏图 (*John Venn*)

1. 文氏图

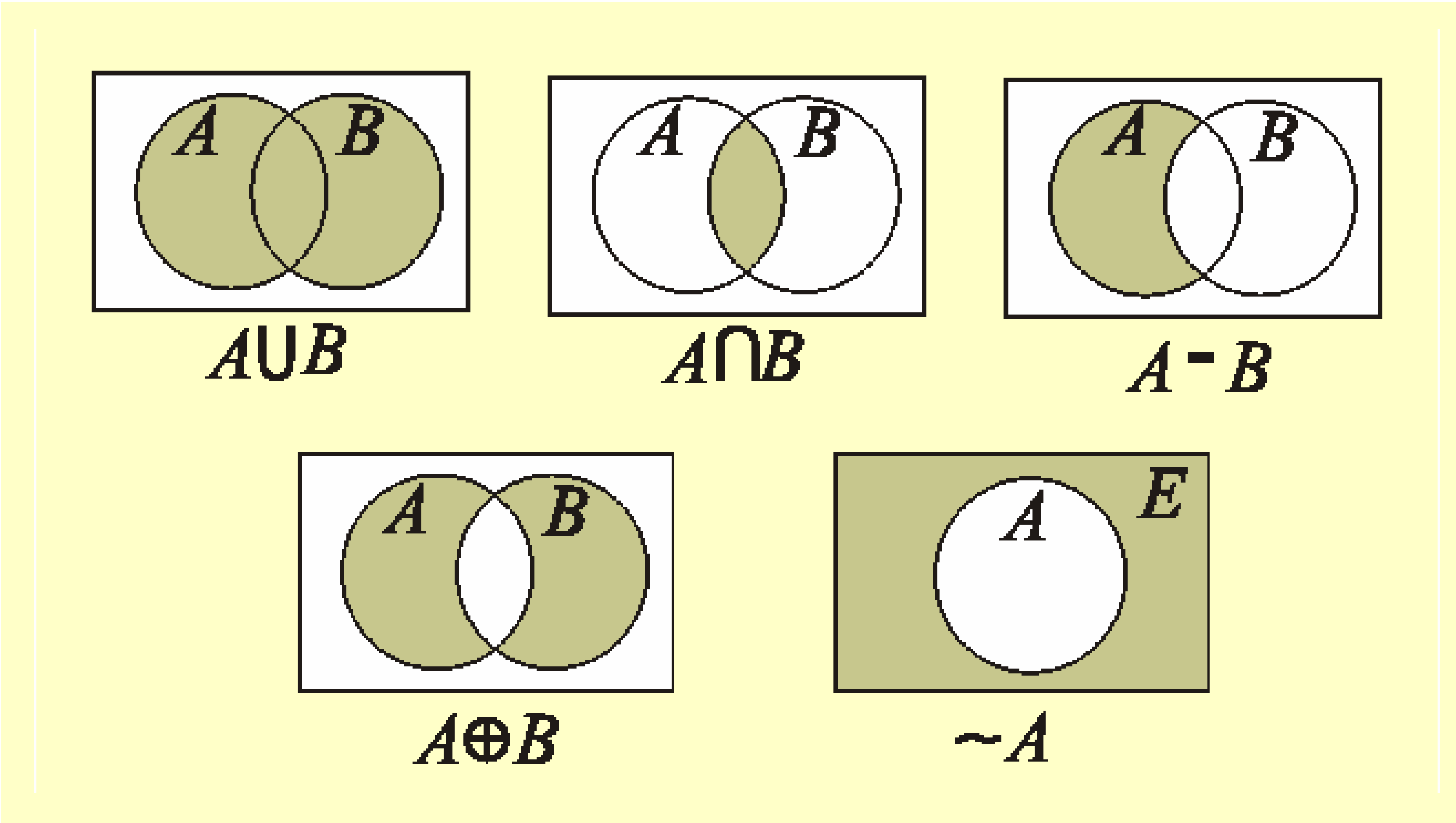


$A \cap B$

(3) 除特殊情形外，一般表示两个集合的圆是相交的

(4) 圆中的阴影的区域表示新组成的集合。

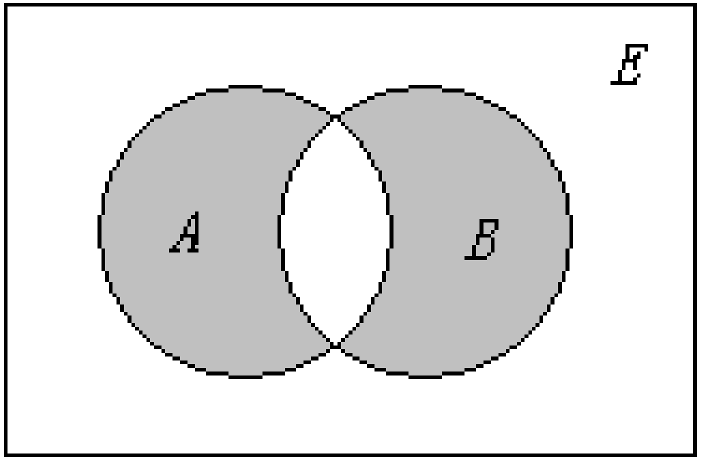
文氏图表示



2. 用文氏图表示集合的有关运算

例3. 用文氏图表示下列集合。

(1) $A \oplus B$

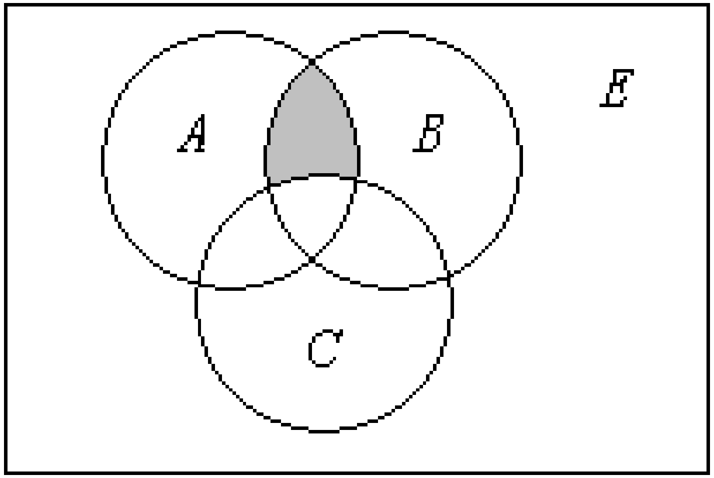


$A \oplus B$

2. 用文氏图表示集合的有关运算

例3. 用文氏图表示下列集合。

(2) $(A\cap B)-C$



$(A\cap B)-C$

三. 集合运算律

1、幂等律：$A\cup A=A$，$A\cap A=A$

2、结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

3、交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

4、分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

三.集合运算律

5、同一律： $A\bigcup\varnothing=A$**,** $A\bigcap E=A$

6、零律： $A\bigcup E=E$**,** $A\bigcap\varnothing=\varnothing$

7、互否律： $A\bigcup\sim A=E$**(排中律),**

$A\bigcap\sim A=\varnothing$**(矛盾律)**

8、吸收律： $A\bigcup(A\bigcap B)=A$**,**

$A\bigcap(A\bigcup B)=A$

三. 集合运算律

9. 德•摩根律：

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

$$\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C \qquad \sim\varnothing=E$$

$$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C \qquad \sim E=\varnothing$$

10.双重否定律：

$$\sim(\sim A)=A$$

以上恒等式的证明思路：

欲证$P=Q$，**即证对任意**x，$x\in P\Leftrightarrow x\in Q$

例4. 证明分配律 $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$ 。

证明：对任意 x**，** $x\in A\bigcup(B\bigcap C)$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\vee\left(x\in(B\bigcap C)\right)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A)\vee\left(x\in B\wedge x\in C\right)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\vee x\in B)\wedge(x\in A\vee x\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\bigcup B)\wedge(x\in A\bigcup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

故 $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$

第三节　　集合中元素的计数

集合的基数与有穷集合

集合 A 的基数：集合A中的元素个数，记作 card$A$

有穷集 A： card$A$=$|A|$=n，n为自然数.

有穷集的实例：

$A=\{a,b,c\}$, card$A$=$|A|$=3；

$B=\{x \mid x^2+1=0, x\in R\}$, card$B$=$|B|$=0

无穷集的实例：

N, Z, Q, R, C 等

文氏图法

例1 **有100名程序员，其中47名熟悉FORTRAN语言，35名熟悉PASCAL语言，23名熟悉这两种语言．问有多少人对这两种语言都不熟悉？**

解：设A,B分别表示FORTRAN和PASCAL语言的程序员的集合，则该问题可以用右图来表示．将熟悉两种语言的对应人数23填到A∩B的区域内，不难得到A-B和B-A的人数分别为。

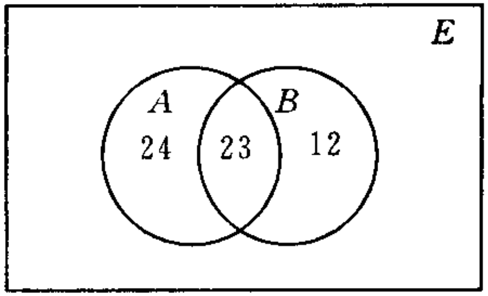


图 3.3

$$|A-B|=|A|-|A\cap B|=47-23=24,$$

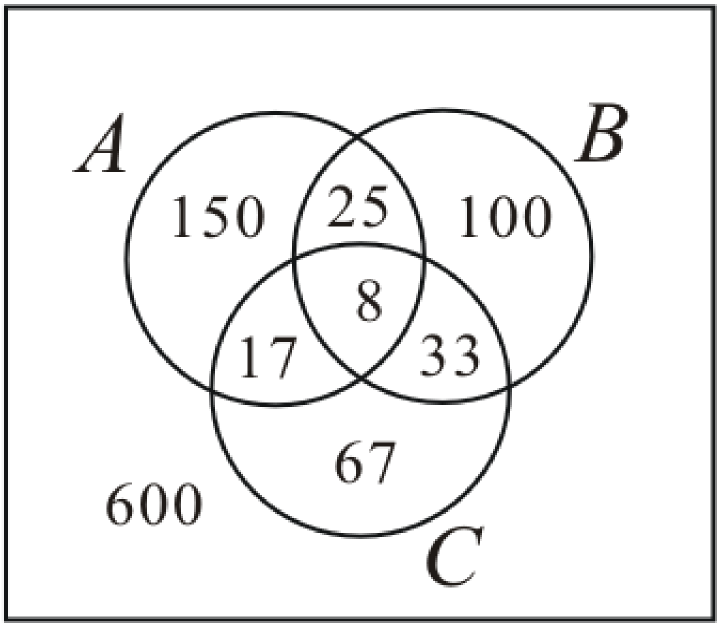
$$|B-A|=|B|-|A\cap B|=35-23=12,$$

从而得到

$$|A\cup B|=24+23+12=59,$$

$$|\sim(A\cup B)|=100-59=41,$$

例2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被 5 和6 整除，也不能被 8 整除的数有多少个？



解：$S=\{x \mid x\in \mathbb{Z}, 1\le x \le 1000\}$，如下定义 S 的 3 个子集 A, B, C：

$A=\{x \mid x\in S, 5 \mid x\}$，

$B=\{x \mid x\in S, 6 \mid x\}$，

$C=\{x \mid x\in S, 8 \mid x\}$

对上述子集计数：

$|S|=1000$,

$|A|=\lfloor 1000/5 \rfloor=200$,

$|B|=\lfloor 1000/6 \rfloor=166$，

$|C|=\lfloor 1000/8 \rfloor=125$,

$|A\cap B|=\lfloor 1000/30 \rfloor=33$,

$|B\cap C| =\lfloor 1000/24 \rfloor=41$,

$|A\cap C|=\lfloor 1000/40 \rfloor=25$,

$|A\cap B\cap C| =\lfloor 1000/120 \rfloor=8$,

$$\therefore \left|A \cup B \cup C\right| = 150+25+8+17+100+33+67=400,$$

1到1000之间不能被5,6,8整除的数共600个。

例3 有24名科技人员，每人至少会1门外语.

会英语：13人； 会日语：5人； 会德语：10人； 会法语：9人

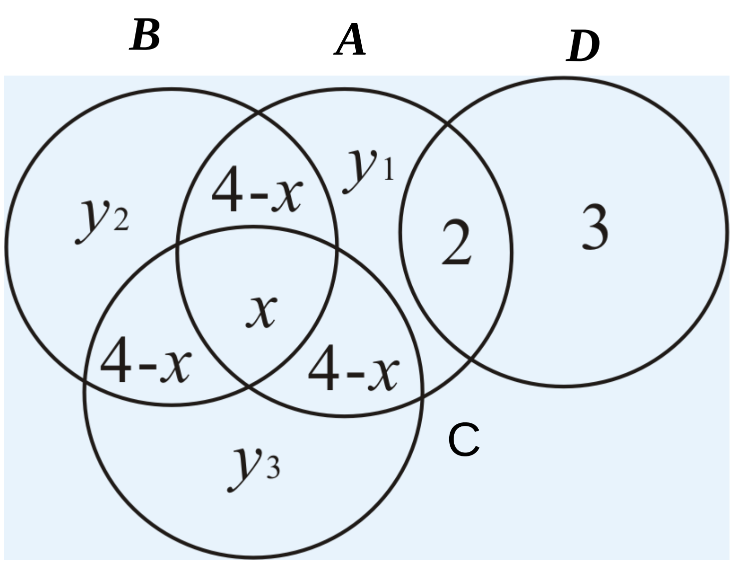
会英日：2人； 会英德：4人； 会英法：4人； 会法德：4人

会日语的不会法语、德语

求：只会 1 种语言人数，会 3 种语言人数

令A、B、C、D分别表示会英、法、德、日语的人的集合。

设同时会三种语言的人为x，只会英、法、德语一种语言的分别为y_1、y_2、y_3人



$$x+2(4-x)+y_1+2=13$$

$$x+2(4-x)+y_2=9$$

$$x+2(4-x)+y_3=10$$

$$x+3(4-x)+y_1+y_2+y_3+5=24$$

$$x=1, y_1=4, y_2=2, y_3=3$$

例4、简要说明：$\varnothing$与$\{\varnothing\}$的区别，

举出它们的元素和子集。

解：$\varnothing$是无任何元素的集合，

子集有$\varnothing$，

$\{\varnothing\}$是以集合为元素的集合，

元素为$\varnothing$，子集有 $\varnothing, \{\varnothing\}$

课堂练习

1. 某市举行中学数学、物理、化学三科竞赛，结果数学和物理均优者10人，物理和化学均优者8人，数学和化学均优者12人，至少有两科优秀者共20人，则三科均优者有__________人。

2. 某校有足球队员38人，篮球队员15人，排球队员20人，三队队员总数为58人，且其中只有3人同时参加3种球队，那么仅仅参加两种球队的队员人数是_____人。