第二章　一阶逻辑

-----小结与例题

一. 一阶逻辑的基本概念

1、基本概念

个体，个体域，个体词，个体常项和变项；

谓词；量词，全称量词和存在量词。

2、应用

在一阶逻辑中将命题符号化。

除非有特别说明，均以全总个体域为个体域

在引入特性谓词后，使用全称量词用“$\rightarrow$”，

使用存在量词用“$\wedge$”，

二. 一阶逻辑合式公式及解释

1、基本概念

合式公式；辖域，约束出现，自由出现；

闭式；解释；代换实例；逻辑有效式，

矛盾式，可满足式。

闭式在任何解释之下都变成命题

在给定的解释和赋值下，任何公式都是命题

赋值:给自由出现的个体变项赋值

二. 一阶逻辑合式公式及解释

2、应用

(1) 求某些公式在给定解释下的真值。

(2) 判断某些简单公式的类型。

判断公式类型:代换实例+定义

三. 一阶逻辑等值式

基本概念。

等值式，常用等值式；前束范式。

已有的等值式

- 命题公式中的24个等值式及代换实例
- 由换名规则所得的公式与原公式等值

三. 一阶逻辑等值式

1、量词否定等值式

(1) $\neg\forall xA(x) \Leftrightarrow \exists x\neg A(x)$

(2) $\neg\exists xA(x) \Leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

2、量词辖域收缩与扩张等值式

(1) $\forall x\left(A(x)\vee B\right) \Leftrightarrow \forall xA(x)\vee B$

(2) $\forall x\left(A(x)\wedge B\right) \Leftrightarrow \forall xA(x)\wedge B$

(3) $\boxed{\forall x\left(A(x)\to B\right) \Leftrightarrow \exists xA(x)\to B}$

(4) $\forall x\left(B\to A(x)\right) \Leftrightarrow B\to \forall xA(x)$

2、量词辖域收缩与扩张等值式

(5) $\exists x\big(A(x)\vee B\big)\Leftrightarrow \exists xA(x)\vee B$

(6) $\exists x\big(A(x)\wedge B\big)\Leftrightarrow \exists xA(x)\wedge B$

(7) $\exists x\big(A(x)\to B\big)\Leftrightarrow \forall xA(x)\to B$

(8) $\exists x\big(B\to A(x)\big)\Leftrightarrow B\to \exists xA(x)$

3、量词分配等值式

(1) $\forall x\big(A(x)\wedge B(x)\big)\Leftrightarrow\big(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\big)$

(2) $\exists x\big(A(x)\vee B(x)\big)\Leftrightarrow\big(\exists xA(x)\vee\exists xB(x)\big)$

注意：$\forall x\big(A(x)\vee B(x)\big)\not\Leftrightarrow\big(\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\big)$

$\exists x\big(A(x)\wedge B(x)\big)\not\Leftrightarrow\big(\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\big)$

4、多个量词间的次序排列等值式

(1) $\forall x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xA(x,y)$

(2) $\exists x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x,y)$

例1、在一阶逻辑中将下列命题符号化。

(1) 每一个有理数都是实数。

解：$Q(x)$：x 是有理数，$R(x)$：x是实数，

$$\forall x\big(Q(x) \to R(x)\big)$$

(2) 并非每一个实数都是有理数。

解：$R(x)$：x 是实数，$Q(x)$：x是有理数，

$$\neg\forall x\big(R(x) \to Q(x)\big)$$

例2、将下列命题译成自然语言，并确定其真值。

(个体域为 Z^+ **)**

(1) $\forall x \exists y G(x,y)$，其中$G(x,y): xy = y$

解： 对任意正整数 x，存在正整数 y，

使得$xy = y$。 真值**0**。

(2) $\exists x \forall y F(x,y)$，其中$F(x,y): x + y = y$

解： 存在正整数x，使得对任意的正整数y，

满足 $x + y = y$。真值**0**。

例2、将下列命题译成自然语言，并确定其真值。

(个体域为Z^+)

(3) $\forall x \exists y M(x,y)$，其中$M(x,y): xy=1$

解：对任意正整数x，存在正整数y，

使得$xy=1$。真值0。

(4) $\forall x \exists y N(x,y)$，其中$N(x,y): y=2x$

解：对任意正整数x，存在正整数y，

使得$y=2x$。真值1。

例3、指出下列量词的辖域，并指出各式中的自由出现和约束出现的个体变项。

(1) $\forall x\big(P(x)\leftrightarrow Q(x)\big)\wedge\exists xR(x)\vee S(x)$

解：$\forall x$ 的辖域为 $\big(P(x)\leftrightarrow Q(x)\big)$,

$P(x),Q(x)$ 中的 x 约束出现；

$\exists x$ 的辖域为 $R(x)$，

$R(x)$ 中的 x 约束出现；

$S(x)$ 中的 x 自由出现。

例3、指出下列量词的辖域，并指出各式中的自由出现和约束出现的个体变项

(2) $\forall x\left(F(x)\wedge G(x,y)\right)\rightarrow \forall yF(y)\wedge R(x,y,z)$

解：$\forall x$ 的辖域为 $\left(F(x)\wedge G(x,y)\right)$，

$F(x),G(x,y)$ 中的 x 约束出现，

$G(x,y)$ 中的 y 自由出现；

$\forall y$ 的辖域是 $F(y)$，

$F(y)$ 中的 y 约束出现；

$R(x,y,z)$ 中的 x,y,z 都自由出现。

例4、 设个体域为$A=\{a,b,c\}$将下面谓词公式中的量词消除，写出与之等值的命题公式。

(1) $\forall xP(x)\wedge\exists xR(x)$

解 $\forall xP(x)\wedge\exists xR(x)$

$\Leftrightarrow(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\wedge(R(a)\vee R(b)\vee R(c))$

（2） $\forall x(P(x)\to Q(x))$

解 $\forall x(P(x)\to Q(x))$

$\Leftrightarrow(P(a)\to Q(a))\wedge(P(b)\to Q(b))\wedge(P(c)\to Q(c))$

例4、 设个体域为将下面谓词公式中的量词消除，

写出与之等值的命题公式。

（3）$\forall x \exists y P(x,y)$

解 $\forall x \exists y P(x,y)$

$$\Leftrightarrow (P(a,a) \vee P(a,b) \vee P(a,c)) \wedge$$

$$(P(b,a) \vee P(b,b) \vee P(b,c))$$

$$\wedge (P(c,a) \vee P(c,b) \vee P(c,c))$$

例5. 证明下面公式既不是永真式也不是矛盾式

(1) $\forall x(F(x)\vee G(x))$

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

解:

(1) **解释1: D_1=正整数集, $F(x)$:x是偶数, $G(x)$: x是奇数** 真

解释2: D_2=N, $F(x)$:x是负数, $G(x)$: x是无理数

假

例5. 证明下面公式既不是永真式也不是矛盾式

(1) $\forall x(F(x)\vee G(x))$

(2) $\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$

(2)解释1: D_1=Z，$F(x)$:x是正数，$G(x)$: x是负数，$H(x,y)$:$x>y$

真

解释2: D_2=Z，$F(x)$:x是偶数，$G(x)$: x是奇数，$H(x,y)$:$x>y$

假

习　题

1：在一阶逻辑中将下列命题符号化

（1）没有一个运动员不是强壮的

（2）尽管有的人聪明，但未必一切人都聪明

（3）每个计算机系的学生都学离散数学

（4）所有的人都学习和工作

注：一阶逻辑中命题符号化一定要考虑个体域，如果没有特殊说明，则为全总个体域。

2.谓词公式 $\forall x(P(x) \vee \exists y R(y)) \rightarrow Q(x)$ 中量词 $\forall x$ 的辖域是(　　).

A. $\forall x(P(x) \vee \exists y R(y))$

B. $P(x)$

C. $(P(x) \vee \exists y R(y))$

D. $P(x), Q(x)$

3.谓词公式 $\forall x(P(x) \vee \exists y R(y)) \rightarrow Q(x)$ 中变元 x 是(　　).

A. 自由变元

B. 约束变元

C. 既不是自由变元也不是约束变元

D. 既是自由变元也是约束变元

4.若个体域为整数域，下列公式中真值为1的是 (　　).

A. $\forall x \exists y (x + y = 0)$

B. $\exists y \forall x (x + y = 0)$

C. $\forall x \forall y (x + y = 0)$

D. $\neg \exists x \exists y (x + y = 0)$

5. 设A(x):x是人，B(x):x犯错误，命题“没有不犯错误的人”符号化为 (　　).

A. $\forall x (A(x) \wedge B(x))$

B. $\neg \exists x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$

C. $\neg \exists x (A(x) \wedge B(x))$

D. $\neg \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$

6. 在谓词演算中，下列各式____是正确的。、

A. $\exists x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \exists x A(x, y)$

B. $\exists x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

C. $\exists x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall x \exists y A(x, y)$

D. $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x B(x, y)$

7. 在谓词演算中，下列各式____是不正确的。、

A. $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

B. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

C. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$

D. $\forall x(P(x) \wedge Q) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge Q$

8. $\forall x \exists y P(x, y)$ 的否定是_______.

A. $\forall x \forall y \neg P(x, y)$

B. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$

C. $\forall x \exists y \neg P(x, y)$

D. $\exists x \exists y \neg P(x, y)$

解：因为 $\neg \forall x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists x(\neg \exists y P(x, y))$

$$\Leftrightarrow \exists x \forall y(\neg P(x, y))$$

9：令R(x): x是实数， Q(x):x是有理数。

（1）命题“并非每个实数都是有理数”，其符号化为_______________.

（2）命题“虽然有些实数是有理数，但并非一切实数都是有理数”，其符号化为

______________________________.

10.设G(x):x是金子， F(x):x是闪光的。则命题“金子是闪光的，但闪光的并不一定是金子”可符号化为______________________________.

11.公式 $\forall x(P(x)\to Q(x,y)\vee\exists zR(y,z))\to S(x)$ 中的自由变元为_________,约束变元为__________.

12.个体域为{1,2}，命题$\forall x\exists y(x+y=4)$ 的真值为__________.

13.取个体域为整数集，给定下列公式：

(1) $\forall x \exists y(x \cdot y = 0)$

(2) $\forall x \exists y(x \cdot y = 1)$

(3) $\exists x \exists y(x \cdot y = 2)$

(4) $\forall x \forall y \exists z(x - y = z)$

(5) $x - y = -y + x$

(6) $\forall x \forall y(x \cdot y = y)$

(7) $\forall x(x \cdot y = x)$

(8) $\exists x \forall y(x + y = 2y)$

在上面公式中，真命题的有__________，假命题的有______________.

14.求下列谓词公式的前束范式:

(1) $\forall xP(x) \to \forall xQ(x) \vee \exists yR(y)$

(2) $\forall xF(x) \to \exists yG(x, y)$

(3) $\forall xF(x) \wedge \exists xG(x)$

(4) $\neg\exists x(\neg\forall yG(y,b) \to H(x))$

(5) $\forall xF(x)\to\exists y(G(x,y)\wedge H(x,y))$