第三节 一阶逻辑等值式与前束范式

内容：一阶逻辑等值式，前束范式。

重点：掌握基本等值式，

(量词否定等值式，量词辖域收缩与扩张等值式，

量词分配等值式)的内容。

一般：使用基本等值式进行等值演算。

了解：前束范式的定义和求法。

一. 一阶逻辑等值式

定义：若 $A \leftrightarrow B$ 为逻辑有效式，记 $A \Leftrightarrow B$

已有的等值式

- 命题公式中的24个等值式及代换实例
- 由换名规则所得的公式与原公式等值

1. 量词否定等值式

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

2. 量词辖域收缩与扩张等值式

(1) $\forall x\big(A(x) \vee B\big) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$

(2) $\forall x\big(A(x) \wedge B\big) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$

(3) $\boxed{\forall x\big(A(x) \to B\big) \Leftrightarrow \exists x A(x) \to B}$

(4) $\forall x\big(B \to A(x)\big) \Leftrightarrow B \to \forall x A(x)$

1. 量词否定等值式

(1) $\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$

(2) $\neg\exists A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

2. 量词辖域收缩与扩张等值式

(5) $\exists x\left(A(x) \vee B\right) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$

(6) $\exists x\left(A(x) \wedge B\right) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$

(7) $\boxed{\exists x\left(A(x) \rightarrow B\right) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B}$

(8) $\exists x\left(B \rightarrow A(x)\right) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$

3. 量词分配等值式

(1) $\forall x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\Leftrightarrow\left(\forall xA(x)\wedge\forall xB(x)\right)$

(2) $\exists x\left(A(x)\vee B(x)\right)\Leftrightarrow\left(\exists xA(x)\vee\exists xB(x)\right)$

例1、 “今天所有的人既唱歌又跳舞”与

“今天所有的人唱歌并且今天所有的人跳舞”

有相同含义。

“有些人将去旅游或探亲”与

“有些人将去旅游或有些人将去探亲”有相同含义。

注意：$\forall x\left(A(x)\vee B(x)\right)\not\Leftrightarrow\left(\forall xA(x)\vee\forall xB(x)\right)$

$\exists x\left(A(x)\wedge B(x)\right)\not\Leftrightarrow\left(\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)\right)$

4. 多个量词间的次序排列等值式

(1) $\forall x\forall yA(x,y)\Leftrightarrow\forall y\forall xA(x,y)$

(2) $\exists x\exists yA(x,y)\Leftrightarrow\exists y\exists xA(x,y)$

例2.设个体域为{a,b,c},消去下面公式中的量词。

(1) $\forall x\left(F(x)\to G(x)\right)$

解： $\forall x(F(x)\to G(x))$

$\Leftrightarrow (F(a)\to G(a))\wedge(F(b)\to G(b))\wedge(F(c)\to G(c))$

(2) $\forall x\left(F(x)\vee\exists yG(y)\right)$

解： $\forall x\left(F(x)\vee\exists yG(y)\right)$ 先收缩化简

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\vee\exists yG(y)$ 若不收缩辖域，过程较长

$\Leftrightarrow (F(a)\wedge F(b)\wedge F(c))\vee(G(a)\vee G(b)\vee G(c))$

例2、设个体域为{a,b,c},消去下面公式中的量词。

(3) $\exists x\forall yF(x,y)$

解： $\exists x\underline{\forall yF(x,y)}$

$$\Leftrightarrow \exists x(F(x,a)\wedge F(x,b)\wedge F(x,c))$$

$$\Leftrightarrow (F(a,a)\wedge F(a,b)\wedge F(a,c))$$
$$\vee(F(b,a)\wedge F(b,b)\wedge F(b,c))$$
$$\vee(F(c,a)\wedge F(c,b)\wedge F(c,c))$$

例3、证明下列各式等值。

(1) $\neg\exists x\left(M(x)\wedge F(x)\right)\Leftrightarrow\forall x\left(M(x)\rightarrow\neg F(x)\right)$

证明： $\neg\exists x\left(M(x)\wedge F(x)\right)$

$$\Leftrightarrow\forall x\neg\left(M(x)\wedge F(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\forall x\left(\neg M(x)\vee\neg F(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\forall x\left(M(x)\rightarrow\neg F(x)\right)$$

例3、证明下列各式等值。

(2) $\neg\forall x\left(F(x)\to G(x)\right)\Leftrightarrow\exists x\left(F(x)\land\neg G(x)\right)$

证明：$\neg\forall x\left(F(x)\to G(x)\right)$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg\left(F(x)\to G(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\exists x\neg\left(\neg F(x)\lor G(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow\exists x\left(F(x)\land\neg G(x)\right)$$

$$(3)\ \neg\forall x\forall y\big(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)\big)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\big(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y)\big)$$

证明：$\neg\forall x\forall y\big(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)\big)$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg\forall y\big(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)\big)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg\big(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)\big)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg\big(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,y)\big)$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\big((F(x)\wedge G(y))\wedge\neg H(x,y)\big)$$

二. 前束范式

前束范式：形式 $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$

例如：$\forall x\exists y\big(F(x)\to G(x,y)\big)$，$F(x)\to G(x,y)$

$\exists x\forall y\exists z\big(F(x,y,z)\to G(y)\big)$等都是前束范式，

而 $\forall x\big(F(x)\to\exists yG(x,y)\big)$

$\exists x\big(F(x)\wedge\forall yG(x,y)\big)$等都不是前束范式。

例4、求下列公式的前束范式。

（1）$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

解：$\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow\forall x\big(F(x)\wedge\neg G(x)\big)$ $\forall$对$\wedge$的分配

例4、求下列公式的前束范式。

(2) $\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x)$

解：$\forall xF(x)\vee\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall x\neg G(x)$ 量词否定等值式

$\Leftrightarrow\forall xF(x)\vee\forall y\neg G(y)$ 换名规则

$\Leftrightarrow\forall x\big(F(x)\vee\forall y\neg G(y)\big)$ 量词辖域的扩张

$\Leftrightarrow\forall x\forall y\big(F(x)\vee\neg G(y)\big)$ 量词辖域的扩张

例4、求下列公式的前束范式。

(3) $\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)$

解： $\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)\Leftrightarrow\neg\forall xF(x)\vee\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\exists x\neg F(x)\vee\exists xG(x)$ **量词否定等值式**

$\Leftrightarrow\exists x(\neg F(x)\vee G(x))$ **量词分配等值式**

本题也可以先用换名规则

$\forall xF(x)\rightarrow\exists xG(x)\Leftrightarrow\forall yF(y)\rightarrow\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow\exists y(F(y)\rightarrow\exists xG(x))$

$\Leftrightarrow\exists y\exists x(F(y)\rightarrow G(x))$ **前束范式不唯一**

例4、求下列公式的前束范式。

(4) $\exists xF(x) \to \forall xG(x)$

换名规则

解：$\exists xF(x) \to \forall xG(x) \Leftrightarrow \exists xF(x) \to \forall yG(y)$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \to \forall yG(y)) \Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \to G(y))$

本题也可先用等值演算

$\exists xF(x) \to \forall xG(x) \Leftrightarrow \neg\exists xF(x) \vee \forall xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall x\neg F(x) \vee \forall xG(x) \Leftrightarrow \forall x\neg F(x) \vee \forall yG(y)$

$\Leftrightarrow \forall x(\neg F(x) \vee \forall yG(y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg F(x) \vee G(y)) \Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \to G(y))$

苏格拉底三段论的正确性

“凡是人都要死的. 苏格拉底是人. 所以苏格拉底是要死的.”

设$F(x)$：x是人，$G(x)$：x是要死的，a：苏格拉底.

$$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\wedge F(a)\rightarrow G(a)$$

设前件为真，即$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$与$F(a)$都为真.

由于$\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$为真，故$F(a)\rightarrow G(a)$为真.

由$F(a)$ 与$F(a)\rightarrow G(a)$为真，根据假言推理得证$G(a)$为真.

课堂练习：求下列各式的前束范式

(1) $\exists xF(x)\wedge\forall xG(x)$

(2) $\forall xF(x)\rightarrow\exists yG(y)$

本节小结

- 一阶逻辑等值的概念
- 重要等值式
- 前束范式