第二节 一阶逻辑合式公式及解释

内容：合式公式，解释，逻辑有效式，

矛盾式，可满足式。

重点： (1) 掌握合式公式的概念，

(2) 掌握量词的辖域，约束变项，

自由变项的概念，

(3) 掌握逻辑有效式，矛盾式，

可满足式的概念。

一、一阶逻辑中的合式公式

1、字母表

（1）个体常项：$a,b,c,\cdots.a_i,b_i,c_i,\cdots,i\geq 1$

（2）个体变项：$x,y,z,\cdots.x_i,y_i,z_i,\cdots,i\geq 1$

（3）函数符号：$f,g,h,\cdots.f_i,g_i,h_i,\cdots,i\geq 1$

（4）谓词符号：$F,G,H,\cdots.F_i,G_i,H_i,\cdots,i\geq 1$

（5）量词符号：$\forall,\exists$

（6）联结词符：$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow$

（7）括号和逗号：（ ， ） ，

2、项的递归定义 将函数引入

（1） 个体常项和变项是项。

(2) 若 $\varphi(x_1, x_2, \cdots x_n)$是任意$n$ 元函数，

$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则 $\varphi(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 是项。

(3) 只有有限次地使用 (1) (2) 生成的符号串才是项

例如：$a, b, x, y, f(x, y) = x + y, g(x, y) = 2x - y + 1,$

$h(x, y) = x \bullet y, f\left(a, g(x, y)\right) = a + (2x - y + 1)$

等都是项。

3、原子公式 将函数引入谓词

设 $R(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 是任意 n 元谓词，

$t_1, t_2, \cdots, t_n$ 是项，则称 $R(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 为原子公式

例如：一元谓词 $F(x), G(y)$

二元谓词 $H(x, y), L(f, g)$

均为原子公式。

原子公式不含量词及联结词

4、合式公式的递归定义 引入了量词和联结词

（1） 原子公式是合式公式；

（2） 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式；

(3) 若A, B是合式公式，则$(A \wedge B), (A \vee B)$, $(A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$也是合式公式；

（4） 若 A是合式公式，则$\forall x A, \exists x A$也是合式公式；

（5） 只有有限次地应用(1)—(4)构成的符号串才是合式公式(也称谓词公式)，简称公式。

5、约束出现，自由出现

在合式公式$\forall xA, \exists xA$中，

称 x 为指导变项，

称 A 为相应量词的辖域，

约束出现：在辖域中，x的所有出现称为约束出现，即x受相应量词指导变项的约束。

自由出现：A中不是约束出现的其他变项的出现，称为自由出现。

例1、指出下列各合式公式中的指导变项，量词的辖域，个体变项的自由出现和约束出现。

(1) $\forall x\big(F(x)\to\exists yH(x,y)\big)$

(2) $\exists xF(x)\wedge G(x,y)$

(3) $\forall x\forall y\big(R(x,y)\vee L(y,z)\big)\wedge\exists xH(x,y)$

5.闭式(封闭的合式公式) ——

无自由出现的个体变项的合式公式。

例如：$\forall x\left(F(x) \rightarrow G(x)\right)$

$\exists x \forall y\left(F(x) \vee G(x, y)\right)$ 都是闭式。

而 $\forall x\left(F(x) \rightarrow G(x, y)\right)$

$\exists z \forall y L(x, y, z)$ 都不是闭式。

分析：在一个合式公式中，有的个体变项可以约束出现，也可以自由出现，容易混淆。

⇒ 采用规则，使公式中无既自由出现、又约束出现的变项。

换名规则：

将量词辖域中某个约束出现的个体变项及对应的指导变项，改成公式中未曾出现过的个体变项符号，公式中其余部分不变。

例如：$\exists x F(x) \wedge G(x, y)$

换成 $\exists z F(z) \wedge G(x, y)$

二、合式公式的解释

对公式中各种变项(个体变项，函数变项，谓词变项)，指定特殊的常项去代替，就构成了公式的一个**解释**。

1、**解释** I 由以下4部分组成：

(1) 非空个体域 D

(2) D 中一部分特定元素；

(3) D 上一些特定的函数；

(4) D上一些特定的谓词；

例2. 给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特定函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x \cdot y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$为 $x=y$

在解释N

(1) $\forall x F\left(g(x,a),x\right)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\forall x(x \cdot 0 = x)$　　真值为0

例2、给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N上特定函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\cdot y$

4) D_N上特定谓词$F(x,y)$为 $x=y$

在解释N下，下面哪些公式为真？哪些公式为假？

(2) $\forall x \forall y \Big(F\big(f(x,a), y \big) \to F\big(f(y,a), x \big) \Big)$

解：在解释N 下，公式化为：

$\forall x \forall y (x+0=y \to y+0=x)$ **真值为1**

例2、给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N 2) D_N 中特定元素 $a=0$

3) D_N 上特定函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x \bullet y$

4) D_N 上特定谓词 $F(x,y)$为 $x=y$

在解释N下，下面哪些公式为真？哪些公式为假？

(3) $\forall x \forall y \exists z F\left(f(x,y),z\right)$

解：在解释 N 下，公式化为：

$\forall x \forall y \exists z(x+y=z)$ 真值为1

例2、给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　2) D_N 中特定元素$a=0$

3) D_N 上特定函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x\bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$ 为 $x=y$

在解释 N 下，下面哪些公式为真？哪些公式为假？

(4) $\forall x\forall yF\left(f(x,y),g(x,y)\right)$

解：在解释 N 下，公式化为：

$\forall x\forall y(x+y=x\bullet y)$ 真值为0

例2. 给定解释 N 如下：

1) 个体域为自然数集合D_N　2) D_N 中特定元素$a=0$

3) D_N 上特定函数 $f(x,y)=x+y, g(x,y)=x \bullet y$

4) D_N 上特定谓词$F(x,y)$ 为 $x=y$

在解释 N下，下面哪些公式为真？哪些公式为假？

(5) $F\big(f(x,y), f(y,z)\big)$

解：在解释 N下，公式化为：

$x+y=y+z$　真值不确定(不是命题)

赋值：若给定解释I，对**自由出现**的个体变项指定个体域中的一个元素，则称之为在解释I下的一个赋值

闭式在任何解释之下都变成命题

在给定的解释和赋值下，任何公式都是命题

注意：

闭式：只需考虑解释，**不用考虑赋值**

非闭式：非闭式要判断公式的真假，必须考虑解释和赋值

2. 逻辑有效式(永真式)，矛盾式(永假式)， 可满足式

逻辑有效式（永真式）——

在任何解释和该解释下的任何赋值下都为真的合式公式。

矛盾式（永假式）——

在任何解释和该解释下的任何赋值下都为假的合式公式。

可满足式——

至少存在一种解释和该解释下的一个赋值使其为真的合式公式。

有一些公式，可以利用命题公式的结论。

代换实例——

设 A_0 是含 n 个命题变项 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 的命题公式，将 n 个谓词 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 取代 $p_1, p_2, \cdots p_n$ 所得的谓词公式称为 A_0 的代换实例。

例如：$F(x) \to G(x), \exists x F(x) \to G(x)$,

$\forall x F(x) \to \exists x G(x)$ 等都是 $p \to q$

的代换实例。

命题公式中重言式，矛盾式的代换实例在谓词公式中仍是重言式，矛盾式。

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，哪些是矛盾式。

(1) $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$

解: 设 I 是任意的解释，设其个体域为 D。

若存在 $x_0 \in D$, $F(x_0)$为假，则$\forall x F(x)$为假，

从而$\forall x F(x) \to \exists x F(x)$为真；

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，

哪些是矛盾式。

(1) $\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$

解：设 I **是任意的解释，设其个体域为**D**。**

若对任意$x \in D$**，都有**$F(x)$**为真，**

则 $\forall xF(x), \exists xF(x)$ **均为真，**

所以$\forall xF(x) \rightarrow \exists xF(x)$ **为真。**

由以上，原公式是逻辑有效的。

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，

哪些是矛盾式。

(2) $\forall xF(x) \rightarrow \left(\forall x\exists yG(x,y) \rightarrow \forall xF(x)\right)$

解：原公式是命题公式 $p \rightarrow (q \rightarrow p)$的代换实例，

而且

$p \rightarrow (q \rightarrow p) \Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee p) \Leftrightarrow 1$ (重言式)，

所以原公式是逻辑有效的。

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，

哪些是矛盾式。

(3) $\forall x F(x) \to \left(\forall x F(x) \vee \exists y G(y)\right)$

解：原公式是命题公式 $p \to (p \vee q)$的代换实例，

而且

$p \to (p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \vee (p \vee q) \Leftrightarrow 1$ (重言式)，

所以原公式是逻辑有效的。

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，

哪些是矛盾式。

(4) $\neg\big(F(x,y)\to R(x,y)\big)\wedge R(x,y)$

解：原公式是命题公式$\neg(p\to q)\wedge q$的代换实例，

而且

$$\neg(p\to q)\wedge q\Leftrightarrow\neg(\neg p\vee q)\wedge q$$

$$\Leftrightarrow p\wedge\neg q\wedge q\Leftrightarrow 0$$ (矛盾式)，

所以原公式是矛盾式。

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，

哪些是矛盾式。

(5) $\forall x\exists yF(x,y)\rightarrow\exists x\forall yF(x,y)$

解：取解释 I **如下：**

（1）个体域为自然数集N.

（2） $F(x,y)$为$x=y$.

此时，前件为 $\forall x\exists y(x=y)$ **，为真；**
后件为 $\exists x\forall y(x=y)$ **，为假，因此在此解释下，**
蕴含式为假。
原公式不是逻辑有效式。

例3、判断下列公式中哪些是逻辑有效式，

哪些是矛盾式。

(5) $\forall x \exists y F(x,y) \to \exists x \forall y F(x,y)$

解：若解释 I' 为：　　　　闭式，只需考虑解释

（1）个体域为自然数集N.

（2）$F(x,y)$ 为 $x \le y$.

此时，前件为 $\forall x \exists y(x \le y)$，为真；
后件为 $\exists x \forall y(x \le y)$，为真，因此在此解释下，
蕴含式为真。
原公式不是矛盾式。
综上，原公式是非逻辑有效式的可满足式。

(6) $\exists x F(x,y)$　　非闭式，考虑解释和赋值

取解释I：个体域N，$F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_1：$\sigma_1(y)=1$.

在I和σ_1下，$\exists x(x<1)$，真命题.

取解释I'：个体域N, $F(x,y)$为$x<y$. 赋值σ_2：$\sigma_2(y)=0$.

在I'和σ_2下，$\exists x(x<0)$，假命题

是非逻辑有效式的可满足式.

本节小结

(1) 合式公式的概念

(2) 量词的辖域，约束变项，自由变项

(3) 逻辑有效式，矛盾式，可满足式