第二节 命题公式及分类

一. 命题公式的定义

二. 命题公式的分类

一、命题公式

通俗地说，命题公式是由**命题常项**，**命题变项**，**联结词**，**括号**等组成的字符串。

1.定义 合式公式 (命题公式, 公式) 递归定义如下：

(1) 单个命题常项或变项 $p,q,r,\ldots,p_i,q_i,r_i,\ldots,0,1$ 是合式公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是合式公式

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式

(4) 只有有限次地应用(1)~(3)形成的符号串才是合式公式

说明：外层括号可以省去

2.合式公式的层次

定义

(1) 若公式A是单个的命题变项, 则称A为0层公式.

(2) 称A是n+1($n \geq 0$)层公式是指下面情况之一:

(*a*) $A=\neg B$, B是n层公式;

(*b*) $A=B \wedge C$, 其中B,C分别为i层和j层公式，且 $n=\max(i, j)$;

(*c*) $A=B \vee C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*d*) $A=B \rightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*);

(*e*) $A=B \leftrightarrow C$, 其中B,C的层次及n同(*b*).

例如 公式

p	0层
$\neg p$	1层
$\neg p \rightarrow q$	2层
$\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$	3层
$((\neg p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (\neg r \vee s)$	4层

练习 $\left(p \wedge \neg\left(\left(p \vee q\right) \wedge \neg r\right)\right) \rightarrow \left(\neg p \leftrightarrow r\right)$

为_5_层公式。

例1、判断以下字符串中哪些是命题公式。

(1) $p \wedge \neg(q \vee \neg r)$

(2) $p \to \neg(q \to \neg r)$

(3) $pq \to r$

(4) $(\neg p \vee q \to r$

(5) $p \vee \to q$

(6) $p \wedge (q \leftrightarrow \neg r)$

解：(1)、(2)、(6)是公式，(3)、(4)、(5)不是。

3、真值表

公式A的解释或赋值

赋值 $\begin{cases} \text{成真赋值（使}A\text{为真的赋值）} \\ \text{成假赋值（使}A\text{为假的赋值）} \end{cases}$

如公式 $A=(p\wedge q)\to r$，**110(**$p=1,q=1,r=0$，按字典序**)**为 A 的成假赋值，**111**，**011**，**010……**等是 A 的成真赋值。

含 $n(n\geq 1)$ 个命题变项的命题公式，共有 2^n 组不同赋值。

A的真值表——指 A在所有赋值之下取值列成的表。

构造A 的真值表步骤：

(1) 列出所有命题变项的所有赋值(2^n个，掌握$n=2,3$)。

(2) 从低到高写出A 的各层次。

(3) 对应每个赋值，计算各层次的值，直至整个公式。

例2、求下列命题公式的真值表。

(1) $\neg(q \to p) \wedge p$

解:

p	q	$q \to p$	$\neg(q \to p)$	$\neg(q \to p) \wedge p$
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0

例2、求下列命题公式的真值表。

(2) $(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$

解：

p	q	$\neg p$	$\neg p \to q$	$q \to \neg p$	$(\neg p \to q) \to (q \to \neg p)$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0

二、分类：重言式、矛盾式，可满足式

1.定义 设A为一个命题公式

(1) 若A无成假赋值，则称A为**重言式**(也称**永真式**)

(2) 若A无成真赋值，则称A为**矛盾式**(也称**永假式**)

(3) 若A不是矛盾式，则称A为**可满足式**

重言式一定是可满足式，反之不真。

$$\text{命题公式}\begin{cases}\text{可满足式}\begin{cases}\text{重言式}\\ \text{其它}\end{cases}\\ \text{矛盾式}\end{cases}$$

2、判定方法:真值表法。

练习：请判断下列命题公式的类型。

(1) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

(2) $\neg(p \vee q \vee r) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

小　结

内容： 命题公式，重言式，矛盾式，可满足公式。

重点： (1) 掌握命题公式的定义及公式的真值表。

(2) 掌握重言式和矛盾式的定义及使用真值表进行判断。