




图论



➤图论是一个古老的数学分支，它起源于**游戏难题**的研究。

➤图论的内容十分丰富，应用得相当广泛，许多学科，诸如运筹学、信息论、控制论、网络理论、博弈论、化学、生物学、物理学、社会科学、语言学、计算机科学等，都以图作为工具来解决实际问题 and 理论问题。

➤随着计算机科学的发展，图论在以上各学科中的作用越来越大，同时图论本身也得到了充分的发展。



图论部分

- 第5章 图的基本概念
- 第6章 特殊的图
- 第7章 树



第5章 图的基本概念

5.1 无向图及有向图

5.2 通路, 回路和图的连通性

5.3 图的矩阵表示

5.4 最短路径

5.1 无向图及有向图

- 无向图与有向图
- 顶点的度数
- 握手定理
- 简单图
- 完全图
- 子图
- 补图

内容：有向图，无向图的基本概念。

重点：1、有向图，无向图的定义，

2、图中顶点，边，关联与相邻，顶点
度数等基本概念，

3、各顶点度数与边数的关系

$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m \text{ 及推论,}$$

4、简单图，完全图，子图，补图的概念，

5、图的同构的定义。

一、图的概念

1.定义

多重集合: 元素可以重复出现的集合

无序积 $A \& B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

无向图 $G = \langle V, E \rangle$

$E \subseteq V \& V$, E 中元素为无向边, 简称边。

边集 E 为 $V \& V$ 的多重子集, 其元素称为**无向边**, 简称**边**。

有向图 $D = \langle V, E \rangle$

$E \subseteq V \times V$, E 中元素为有向边, 简称边。

边集 E 为 $V \times V$ 的多重子集, 其元素称为**有向边**, 简称**边**。

图 $\begin{cases} \text{无向图 } G = \langle V, E \rangle & V \text{ 记为 } V(G), E \text{ 记为 } E(G) \\ \text{有向图 } D = \langle V, E \rangle & V \text{ 记为 } V(D), E \text{ 记为 } E(D) \end{cases}$

2. 图的表示法

有向图，无向图的顶点都用小圆圈表示。

无向边 (a, b)

——连接顶点 a, b 的线段。

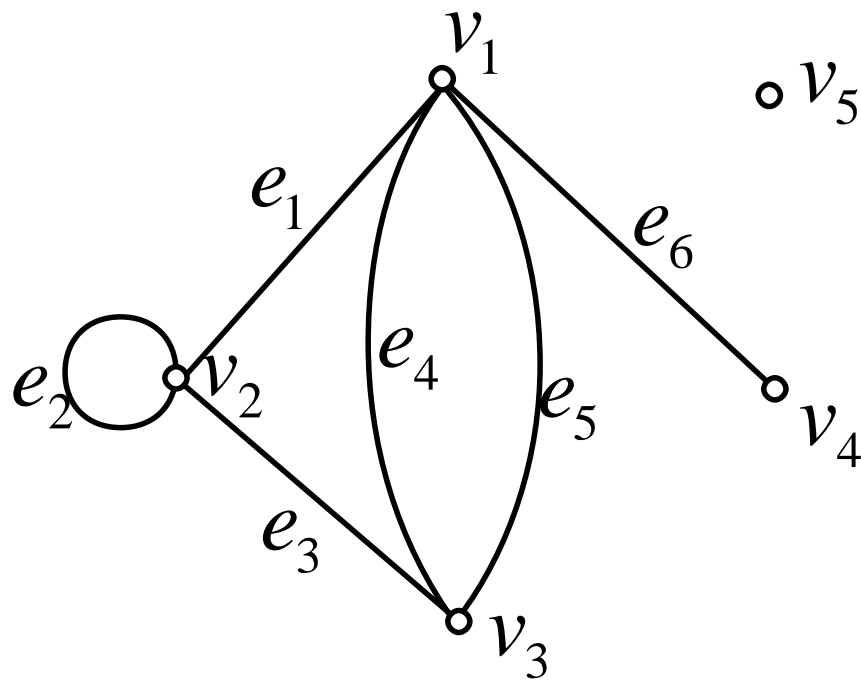
有向边 $\langle a, b \rangle$

——以 a 为始点，以 b 为终点的有向线段。

例1. (1) 无向图 $G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$$

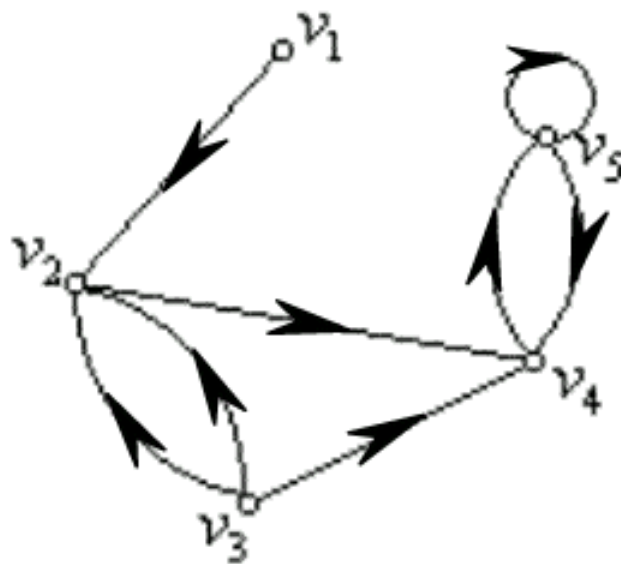
图形表示如右：



例1. (2) 有向图 $D = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$$E = \{ \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \\ \langle v_2, v_4 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_5, v_4 \rangle, \langle v_5, v_5 \rangle \}$$

图形表示如右：



3. 相关概念

(1) 有限图—— V, E 都是有限集的图。

n 阶图—— $|V| = n$ 的图。

空图: $V = \emptyset$

零图: $E = \emptyset$

平凡图: 1 阶零图

(2) 关联 (边与点关系)——设边 $e = (u, v)$ (或 $\langle u, v \rangle$), 则称 e 与 u (或 v) 关联。

(2)

无向图关联的次数 $\begin{cases} 0 & v \text{ 与 } e \text{ 不关联} \\ 1 & v \text{ 与 } e \text{ 关联1次} \\ 2 & v \text{ 与 } e \text{ 关联2次 (} e \text{ 为环)} \end{cases}$

相邻 $\begin{cases} \text{点的相邻——两点间有边, 称此两点相邻} \\ \text{边的相邻——两边有公共端点, 称此两边相邻} \end{cases}$

孤立点——无边关联的点。

**环——一条边关联的两个顶点重合, 称此边
为环 (即两顶点重合的边)。**

(3) 悬挂点——只有一条边与其关联的点，所对应的边叫悬挂边。

(4) 平行边——关联于同一对顶点的若干条边称为平行边。平行边的条数称为重数。

多重图——含有平行边的图。

简单图——不含平行边和环的图。

注意：简单图是极其重要的概念

如例1的(1)中,

e_1 与 v_1, v_2 关联的次数均为1,

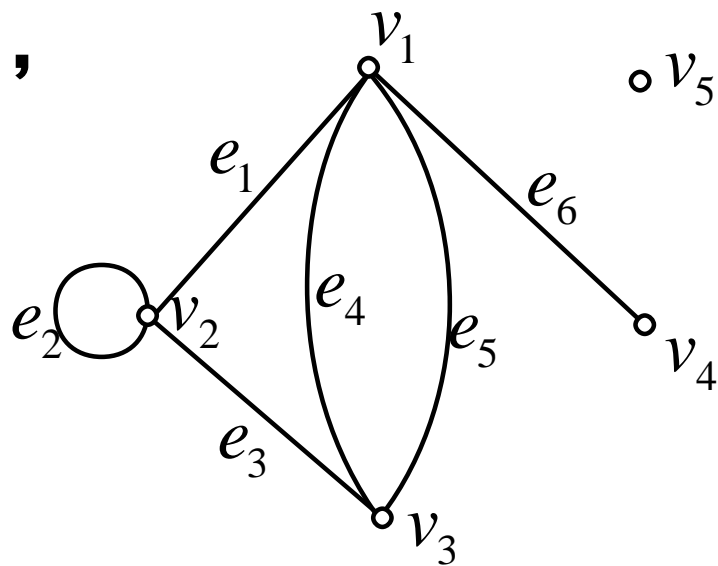
e_2 与 v_2 关联的次数为2,

边 e_1, e_4, e_5, e_6 都是相邻的,

v_5 为孤立点, v_4 为悬挂点,

e_6 为悬挂边, e_2 为环, e_4, e_5 为平行边, 重数2,

G 为多重图。

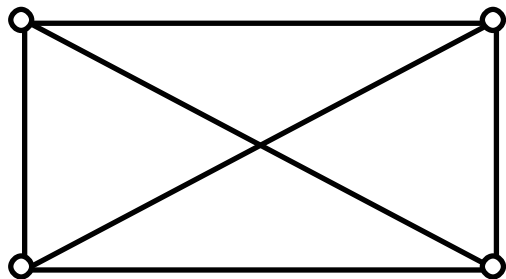


4. 完全图

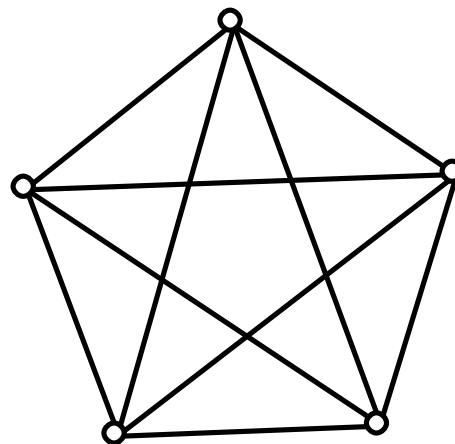
设 $G = \langle V, E \rangle$ 为 n 阶无向简单图，若 G 中每个顶点都与其他 $n-1$ 个顶点相邻，则称 G 为 n 阶无向完全图，记作 K_n 。

若有向图 D 的任一对顶点 $u, v (u \neq v)$ ，既有有向边 $\langle u, v \rangle$ 又有有向边 $\langle v, u \rangle$ ，则称 D 为有向完全图。

例如：



K_4



K_5

二. 顶点的度数, 握手定理

1. 顶点的度数

无向图 $G = \langle V, E \rangle$, v_i 的度数记 $d(v_i)$, 指与 v_i 相关联的边的条数。

有向图 $G = \langle V, E \rangle$, v_i 的度数 $d(v_i)$

$d^+(v_i)$: 称 v_i 作为边的始点的次数之和为 v_i 的出度

$d^-(v_i)$: 称 v_i 作为边的终点的次数之和为 v_i 的入度

$$d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i)$$

最大度 $\Delta(G) = \max \{d(v) | v \in V\}$

最小度 $\delta(G) = \min \{d(v) | v \in V\}$

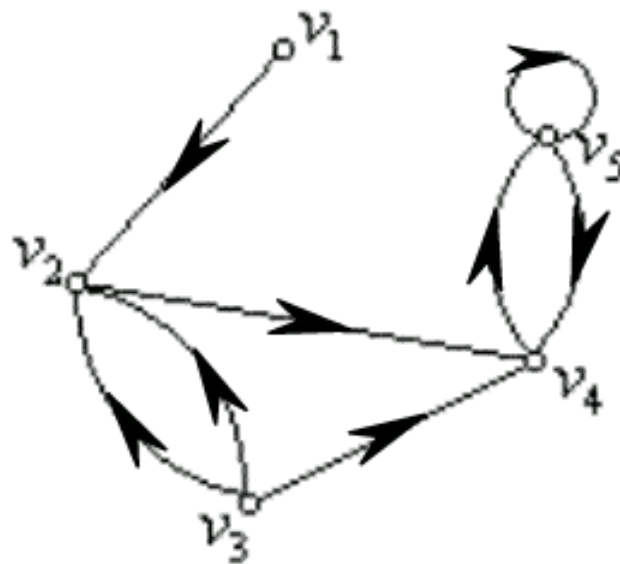
对有向图相应地还有 $\Delta^+(D)$ $\Delta^-(D)$ $\delta^+(G)$ $\delta^-(G)$

如例1的(2)中,

$$\begin{aligned} d(v_2) &= d^+(v_2) + d^-(v_2) \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(v_1) &= d^+(v_1) + d^-(v_1) \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$d(v_5) = d^+(v_5) + d^-(v_5) = 2 + 2 = 4$$

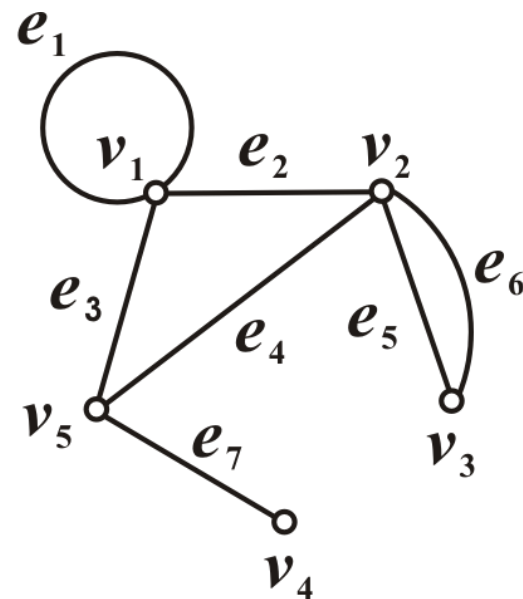


2. 图的度数列

设无向图 G 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

G 的度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

如右图度数列: 4, 4, 2, 1, 3



设有向图 D 的顶点集 $V=\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

D 的度数列: $d(v_1), d(v_2), \dots, d(v_n)$

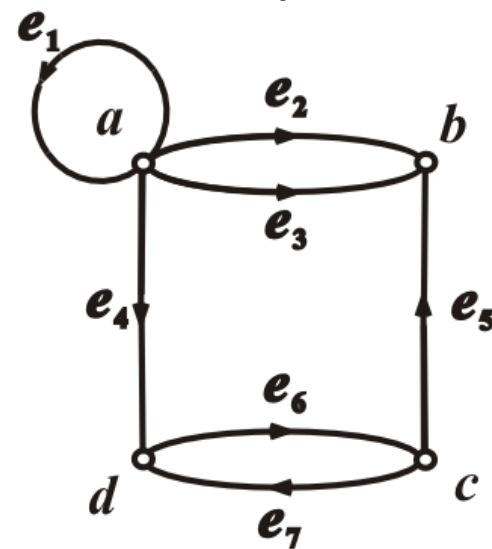
D 的出度列: $d^+(v_1), d^+(v_2), \dots, d^+(v_n)$

D 的入度列: $d^-(v_1), d^-(v_2), \dots, d^-(v_n)$

如右图度数列: 5, 3, 3, 3

出度列: 4, 0, 2, 1

入度列: 1, 3, 1, 2



3. 握手定理

定理1: 设图 $G = \langle V, E \rangle$ 为无向图或有向图,

$V = \{v_1, v_1, \dots, v_n\}$, $|E| = m$ (m 为边数),

则
$$\sum_{i=1}^n d(v_i) = 2m$$

推论: 任何图中, 奇度顶点个数必为偶数.

定理2: 设 $D = \langle V, E \rangle$ 为有向图, $V = \{v_1, v_1, \dots, v_n\}$

$|E| = m$, 则
$$\sum_{i=1}^n d^+(v_i) = \sum_{i=1}^n d^-(v_i) = m$$

例2.(1) $(3, 3, 2, 3), (5, 2, 3, 1, 4)$ 能成为图的度数序列吗? 为什么?

解. 不可能. 它们都有奇数个奇度顶点.

(2) 已知图 G 中有10条边, 4个3度顶点, 其余顶点的度数均小于3, 问 G 中至少有多少个顶点? 为什么?

解. 设 G 有 n 个顶点. 由握手定理,

$$4 \times 3 + 2 \times (n - 4) \geq 2 \times 10$$

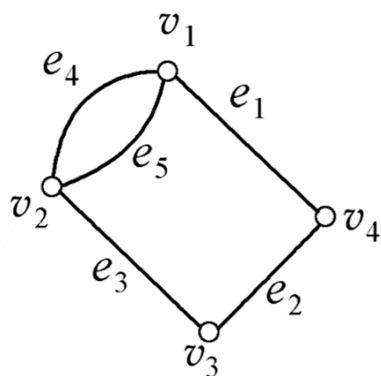
解得 $n \geq 8$

三. 子图 补图

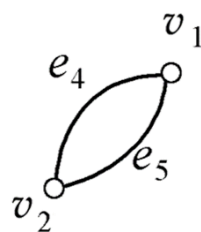
1.定义 设 $G=\langle V,E\rangle$, $G'=\langle V',E'\rangle$ 是两个图

- (1) 若 $V'\subseteq V$ 且 $E'\subseteq E$, 则称 G' 为 G 的**子图**, G 为 G' 的**母图**, 记作 $G'\subseteq G$
- (2) 若 $G'\subseteq G$ 且 $V'=V$, 则称 G' 为 G 的**生成子图**
- (3) 若 $V'\subset V$ 或 $E'\subset E$, 称 G' 为 G 的**真子图**
- (4) 设 $V'\subseteq V$ 且 $V'\neq\emptyset$, 以 V' 为顶点集, 以两端点都在 V' 中的**所有边**为边集的 G 的子图称作 **V' 的导出子图**, 记作 $G[V']$
- (5) 设 $E'\subseteq E$ 且 $E'\neq\emptyset$, 以 E' 为边集, 以 E' 中边关联的所有顶点为顶点集的 G 的子图称作 **E' 的导出子图**, 记作 $G[E']$

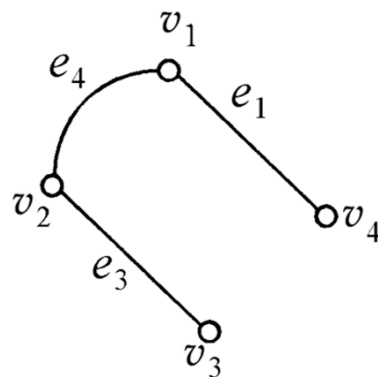
导出子图实例



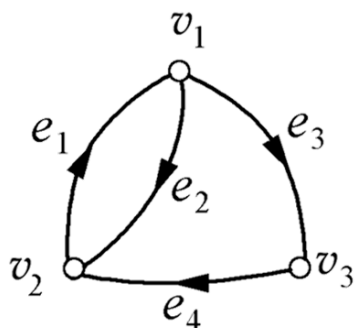
G



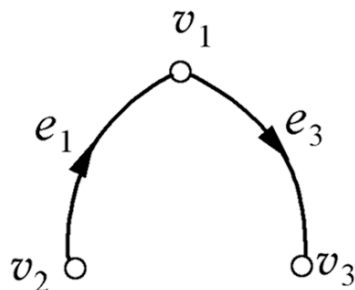
$G[\{v_1, v_2\}]$



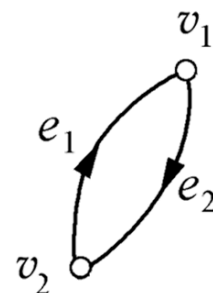
$G[\{e_1, e_3, e_4\}]$



D

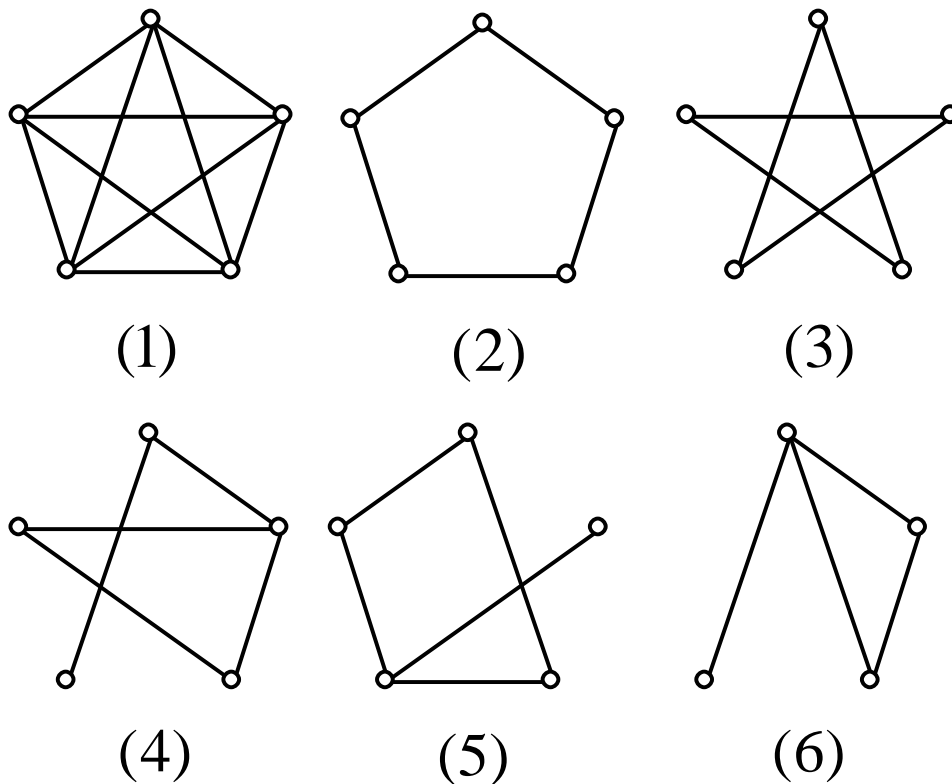


$D[\{e_1, e_3\}]$



$D[\{v_1, v_2\}]$

例3

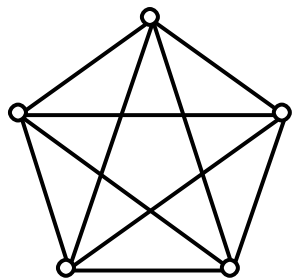


上图中，(1)－(6)都是(1)的子图，
其中(2)－(6)为真子图，(1)－(5)为生成子图。

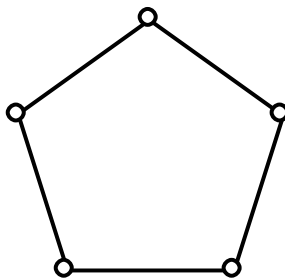
2.补图

设 $G = \langle V, E \rangle$ 为**无向完全图**, $G_1 = \langle V, E_1 \rangle$,
 $G_2 = \langle V, E_2 \rangle$ 为无向简单图, 其中 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$,
 $E_1 \cup E_2 = E$, 则称 G_1 , G_2 相对于 G 互为**补图** ,
记 $G_1 = \bar{G}_2$, $G_2 = \bar{G}_1$ 。

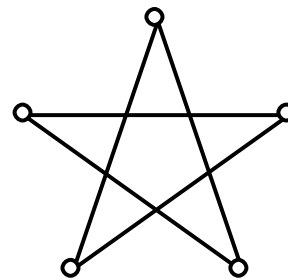
如例3中，



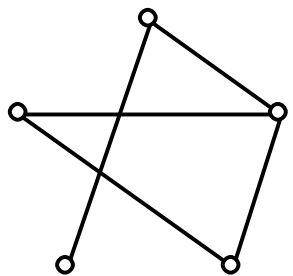
(1)



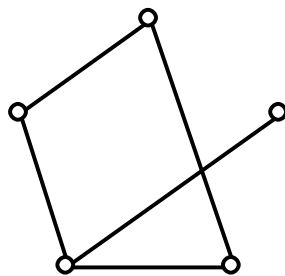
(2)



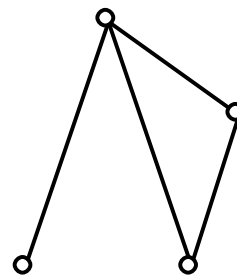
(3)



(4)



(5)



(6)

四. 图的同构

定义 设 $G_1=\langle V_1, E_1 \rangle$, $G_2=\langle V_2, E_2 \rangle$ 为两个无向图, 若存在双射函数 $f: V_1 \rightarrow V_2$, 使得对于任意的

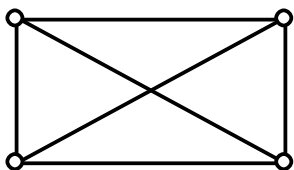
$$v_i, v_j \in V_1,$$

$$(v_i, v_j) \in E_1 \text{ 当且仅当 } (f(v_i), f(v_j)) \in E_2$$

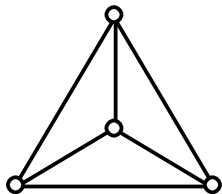
并且 (v_i, v_j) 与 $(f(v_i), f(v_j))$ 的重数相同, 则称 G_1 与 G_2 是**同构**的, 记作 $G_1 \cong G_2$. (对有向图类似可定义同构)

简单理解: 两个图的边和顶点**一一对应**, 且有关联关系.

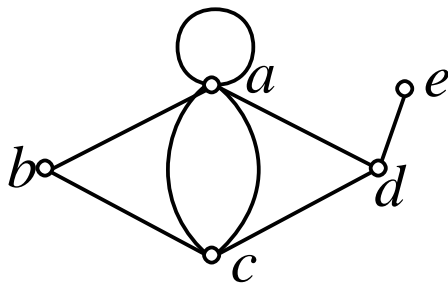
例4



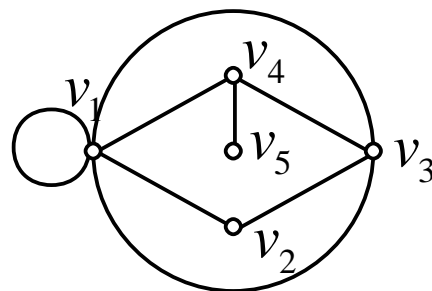
(1)



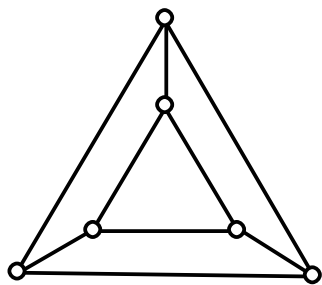
(2)



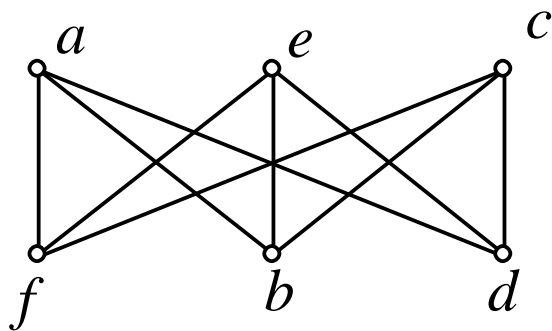
(3)



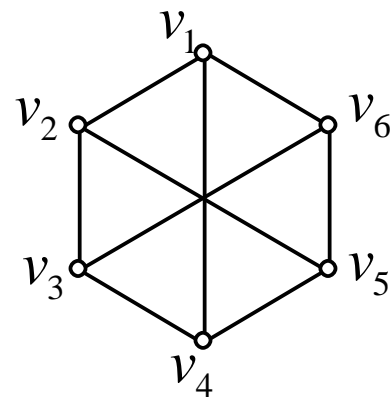
(4)



(5)



(6)



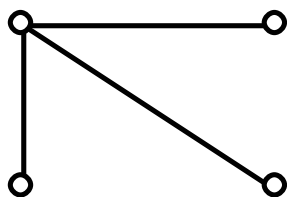
(7)

例5. (1) 画出4个顶点，3条边的所有非同构的无向简单图。

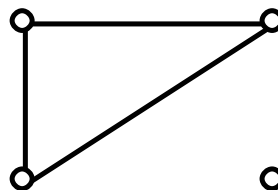
解：只有如下3个图：



(1.1)



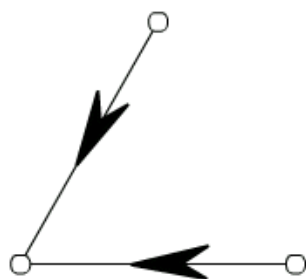
(1.2)



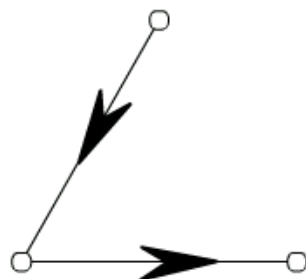
(1.3)

例5. (2) 画出3个顶点，2条边的所有非同构的有向简单图。

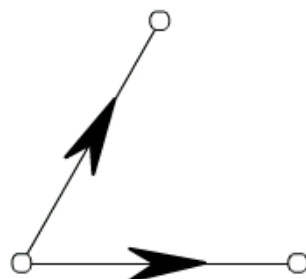
解：只有如下4个图：



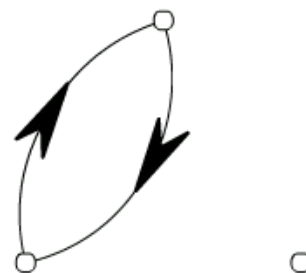
(2.1)



(2.2)



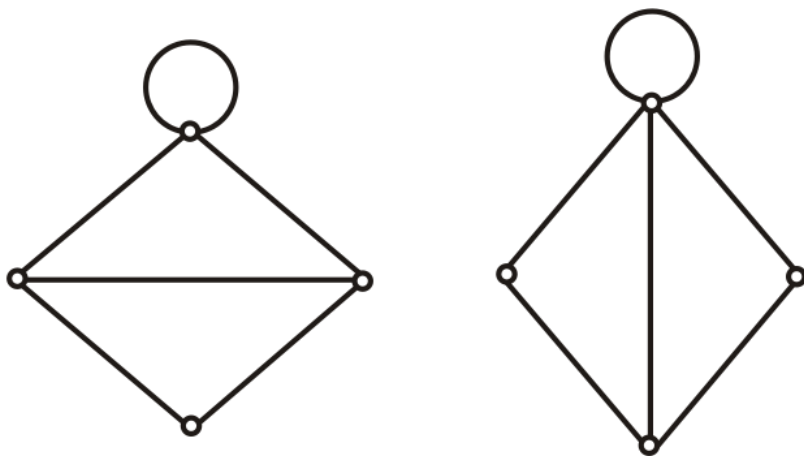
(2.3)



(2.4)

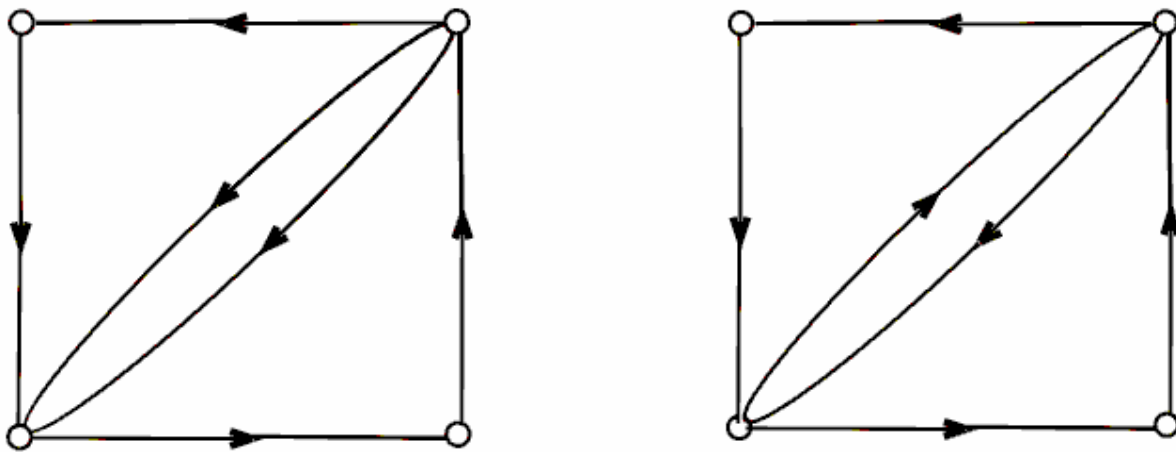
例6. 判断下述每一对图是否同构:

(1)



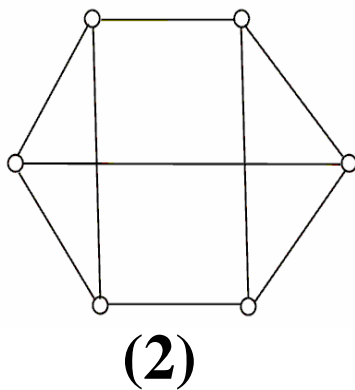
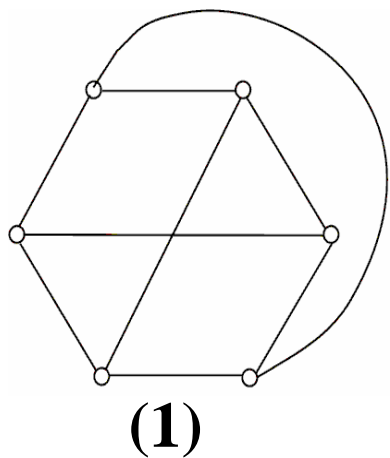
度数列不同
不同构

(2)



不同构 入(出)度列不同

(3)



不同构(左边没有三角形, 右边有三角形)

注意: 度数列相同

说明:

能找到多条同构的必要条件, 但它们都不是充分条件:

① 边数相同, 顶点数相同

② 度数列相同(不计度数的顺序)

③ 对应顶点的关联集及邻域的元素个数相同, 等等

若破坏必要条件, 则两图不同构

至今没有找到判断两个图同构的算法