第六章　一些特殊的图

第一节 二部图

一. 二部图的定义

引例： 有4个工人a_1,a_2,a_3,a_4,有4项任务b_1,b_2,b_3,b_4

其中工人a_1熟悉b_1,b_2,b_3,工人a_2熟悉b_2,b_3,

工人a_3熟悉b_4,工人a_4熟悉b_3,b_4

问：该如何分配工人，才可以使每个人均有任务做，且每项任务均有人完成？

一. 二部图的定义

1、若存在无向图$G=\langle V,E\rangle$的顶点集V的一个划分，$V=V_1\cup V_2$，$V_1\cap V_2=\varnothing$，使得G中任何一条边的两个端点分别在V_1和V_2中，则称G为**二部图**（或**偶图**）。

其中V_1,V_2称互补顶点子集，G记为

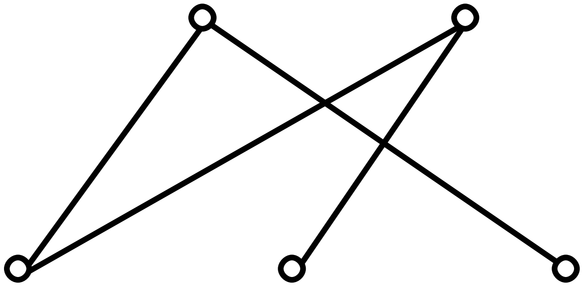
$G=\langle V_1,V_2,E\rangle$。

2. 完全二部图（或完全偶图）

若V_1中任一顶点与V_2中每一顶点均有且只有一条边相关联，则称此二部图G为**完全二部图**（或**完全偶图**）。

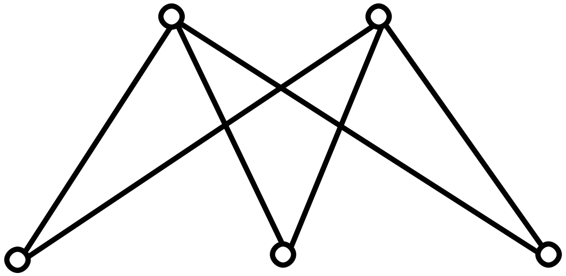
若$|V_1| = n$，$|V_2| = m$，则记完全二部图为$K_{n,m}$。

例1、



(1)

二部图

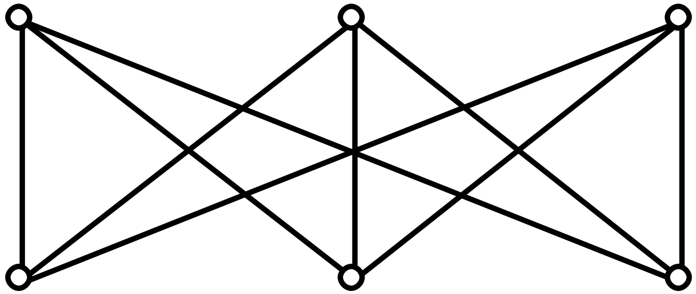


(2)

二部图

完全二部图 $K_{2,3}$

例1、



(3)

二部图

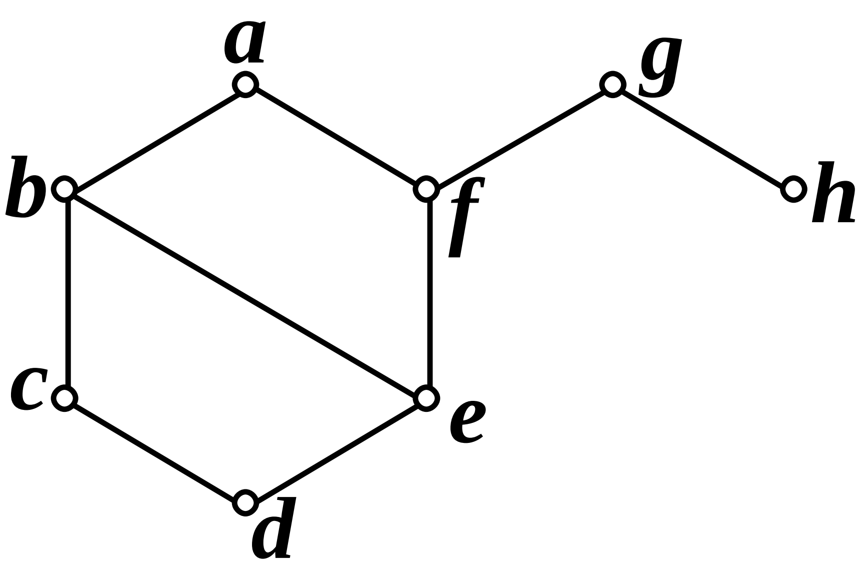
完全二部图 $K_{3,3}$

二. 二部图的判定定理

一个无向图$G=\langle V,E\rangle$是二部图当且仅当G中无奇数长度的回路。

例2. 判断以下是否二部图。

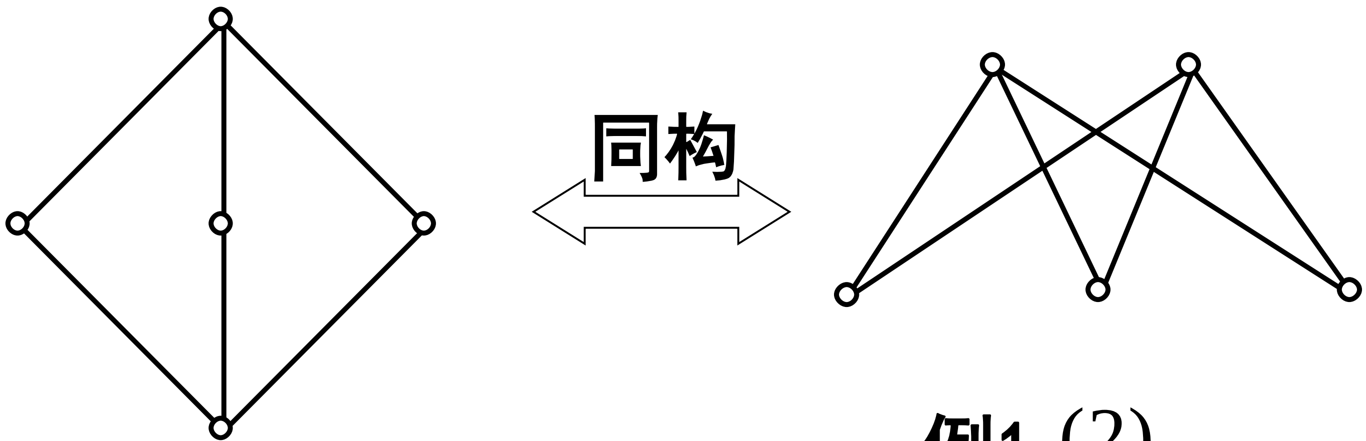
(1)



二部图

图(1)中所有的回路长度均为偶数。

例2. 判断以下是否二部图。



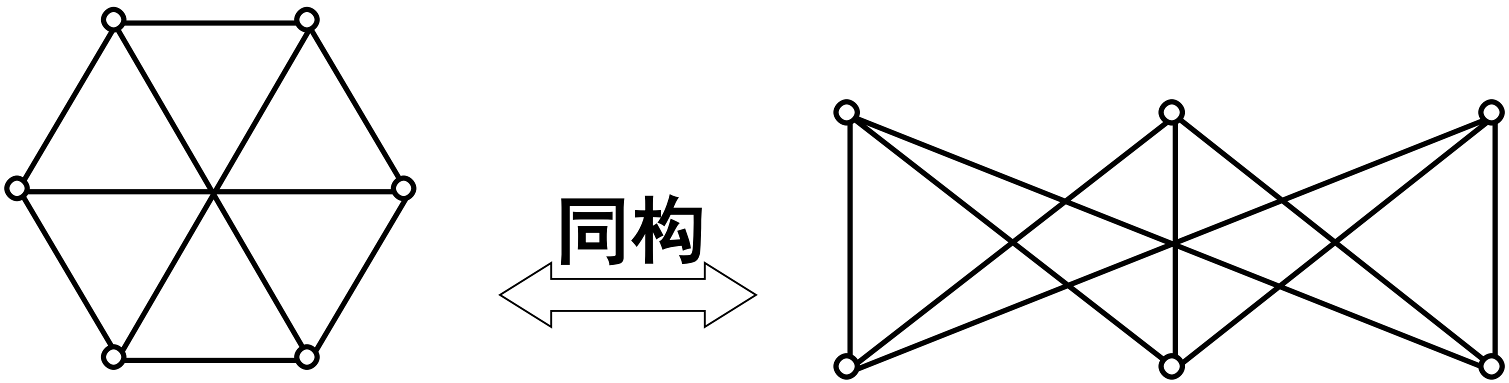
例1 (2)

(2)

二部图

以上二图均为 $K_{2,3}$ 。

例2. 判断以下是否二部图。

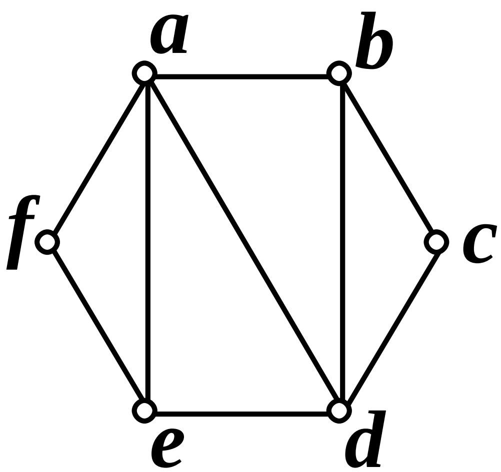


(3)　　　　例1 (3)

二部图

以上二图均为 $K_{3,3}$

例2. 判断以下是否二部图。



(4)

不是二部图，因图中存在长为3的回路$bcdb$。

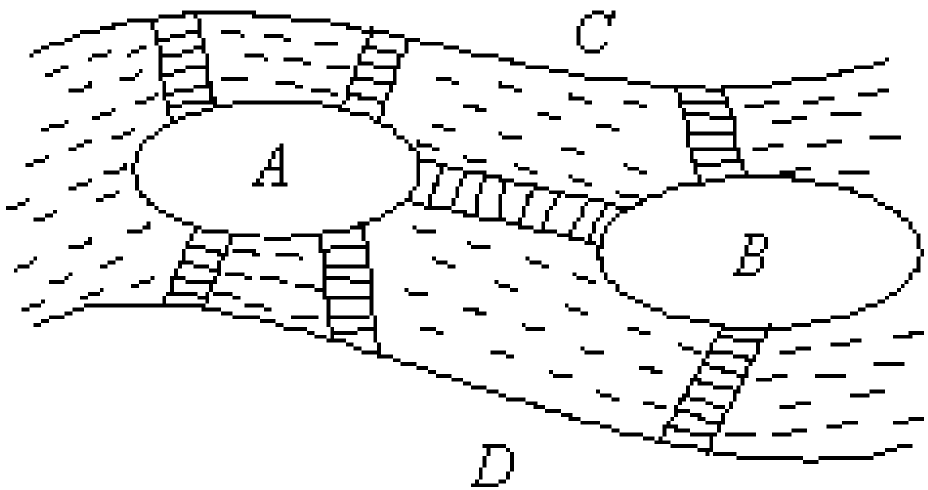
第二节 欧拉图

一. 欧拉图的定义

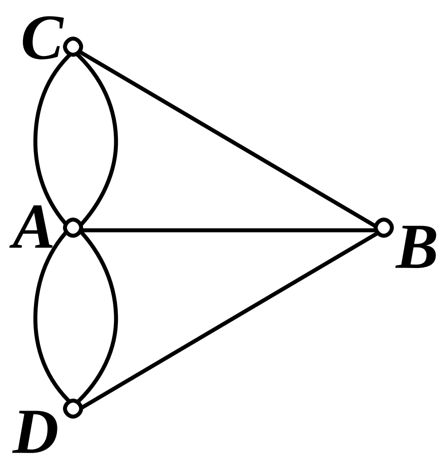
二. 欧拉图的判定

一. 问题的提出

1736年，瑞士数学家欧拉，哥尼斯堡七桥问题

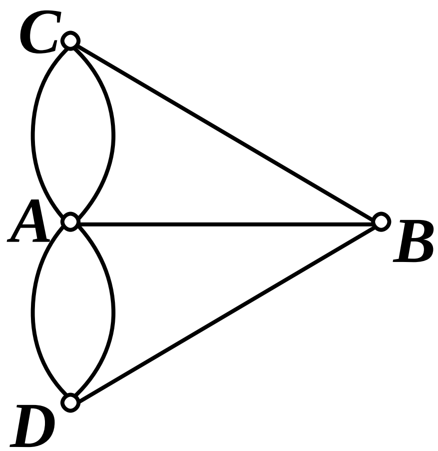


(1)



(2)

思考：散步者如何不重复的走完七座桥，最后回到出发点?



(2)

七桥问题是否有解，
相当于左图是否存在经过图中每条边一次且仅一次的简单回路？

1736　欧拉指出这样的回路不存在。

什么样的连通图才存在经过每条边一次且仅一次的简单回路？

二. 欧拉图的定义

欧拉通路 ——通过图中每条边一次

且仅一次，并且过每一顶点的通路。

欧拉回路 ——通过图中每条边一次

且仅一次，并且过每一顶点的回路。

欧拉图 ——存在欧拉回路的图。

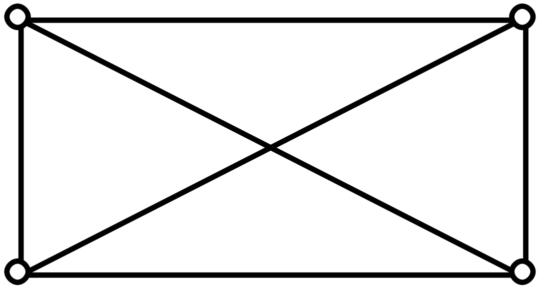
说明：上述定义对无向图和有向图都适用.
规定平凡图为欧拉图.

三. 无向图是否具有欧拉通路或回路的判定

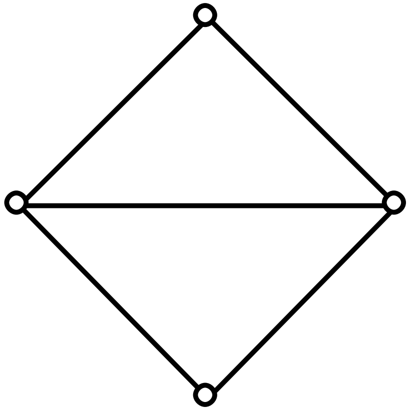
G 有欧拉通路，但无欧拉回路 $\Leftrightarrow$ G 连通，G 中只有两个奇度顶点(它们分别是欧拉通路的两个端点)。

G有欧拉回路(G为欧拉图) $\Leftrightarrow$ G连通，G中均为偶度顶点。

例1. 以下图形能否一笔画成？

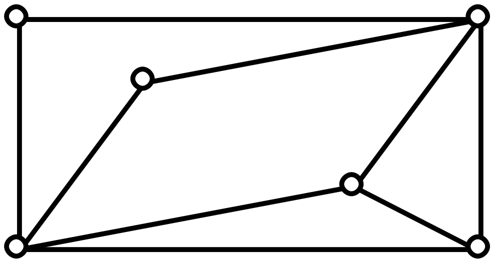


(1)

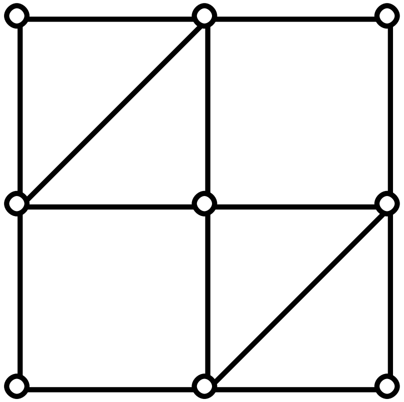


(2)

例1. 以下图形能否一笔画成？



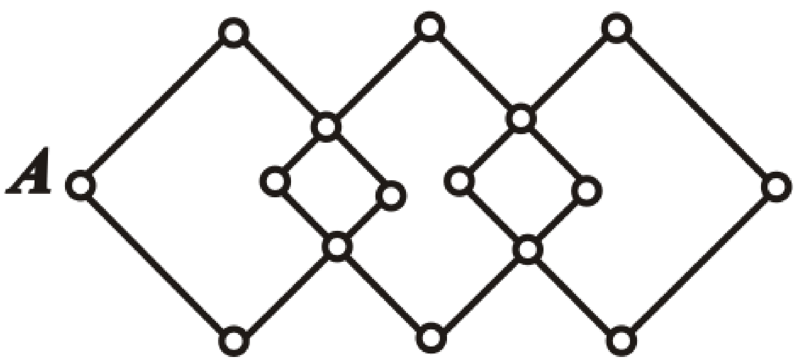
(3)

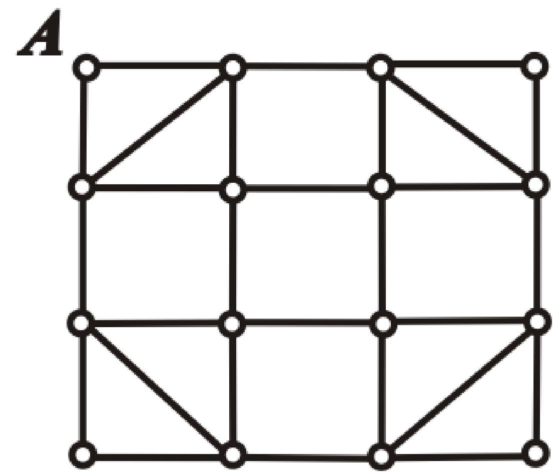


(4)

例2 下面两个图都是欧拉图.

从A点出发, 如何走出一条欧拉回路?





例3. 两只蚂蚁比赛问题。

两只蚂蚁甲、乙分别处在图 G 中的顶点 a,b 处，并设图中各边长度相等。甲提出同乙比赛：从它们所在顶点出发，走过图中所有边最后到达顶点 c 处。如果它们速度相同，问谁最先到达目的地？

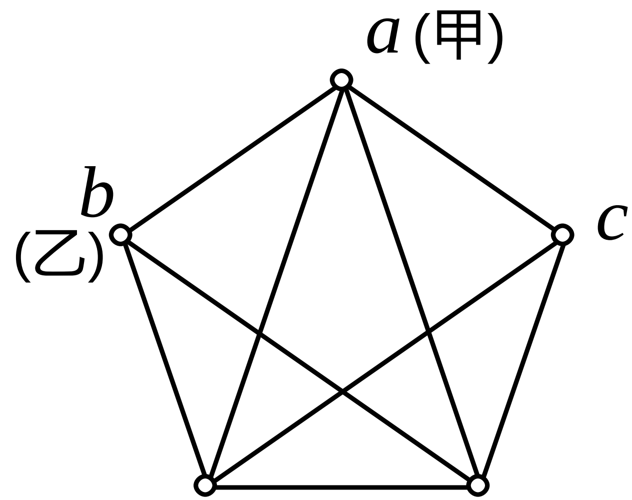


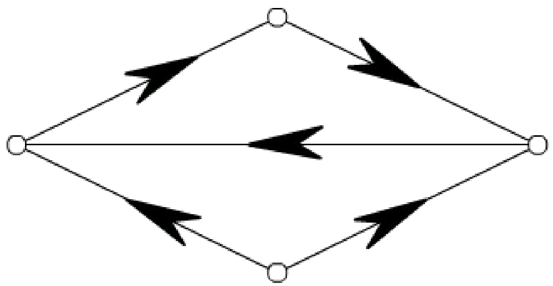
图 G

四. 有向图是否具有欧拉通路或回路的判定

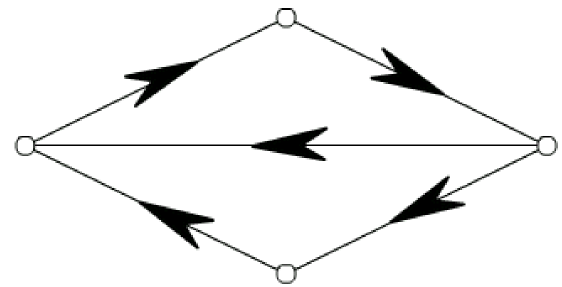
D有欧拉通路但无欧拉回路 $\Leftrightarrow D$ 连通，除两个顶点外，其余顶点的入度均等于出度，这两个特殊的顶点中，一个顶点的入度比出度大1（终点），另一个顶点的入度比出度小1（始点）。

D有欧拉回路（D为欧拉图）$\Leftrightarrow D$连通，D中所有顶点的入度等于出度。

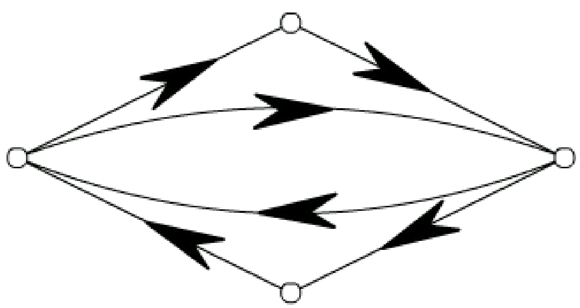
例3. 判断以下有向图是否欧拉图。



(1)



(2)



(3)

例4.（1）n 为何值时，无向完全图 K_n 是欧拉图？

解：由于K_n的每个顶点的度数均为$n-1$，

故当n为奇数时，K_n为欧拉图。

（2）n为何值时，无向完全图K_n仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路？

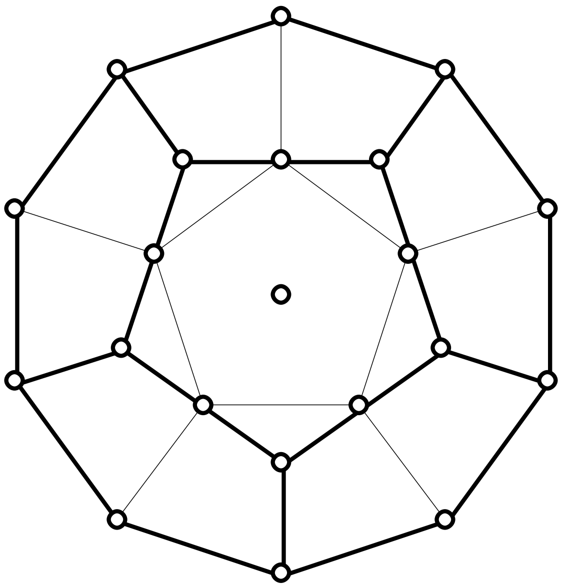
解：要使 K_n仅存在欧拉通路，K_n中只能有2个奇度顶点，而不含偶度顶点(因每个顶点均为$n-1$度)，故只有K_2符合要求。

第三节　哈密顿图

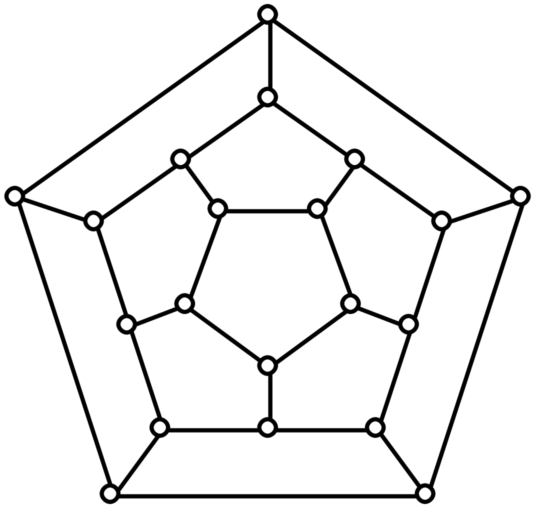
一. 问题的提出

1859年，英国数学家哈密顿，周游世界游戏。

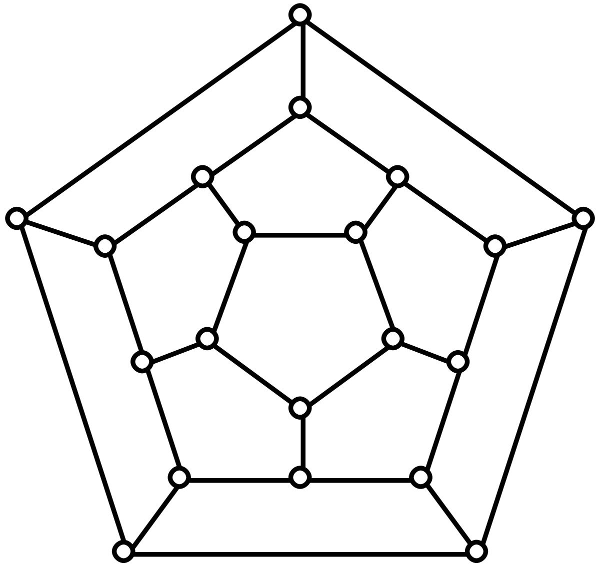
他用一个正十二面体的20个顶点代替20个城市，要求沿着正十二面体的棱，从一个城市出发，经过每个城市恰好一次，然后回到出发点，这个游戏曾风靡一时，它有若干个解，称为哈密顿图。



(1)



(2)



(2)

对于连通图，在图中是否存在经过所有顶点一次且仅一次的通路和回路？

二. 哈密顿图

哈密顿通路 ——通过图中每个顶点一次且仅一次的通路。

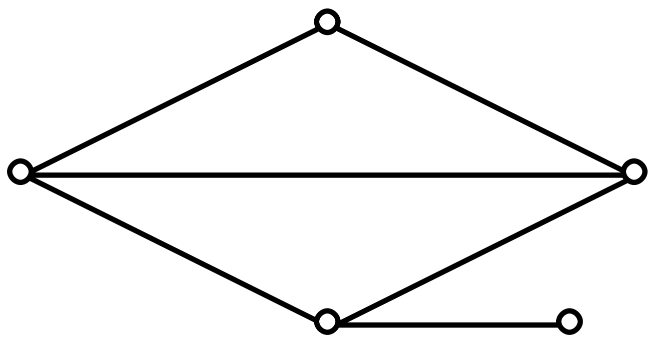
哈密顿回路 ——通过图中每个顶点一次且仅一次的回路。

哈密顿图 ——存在哈密尔顿回路的图。

三. 哈密顿图的判定

至今尚未找到一个判别哈密尔顿回路和通路的充分必要条件

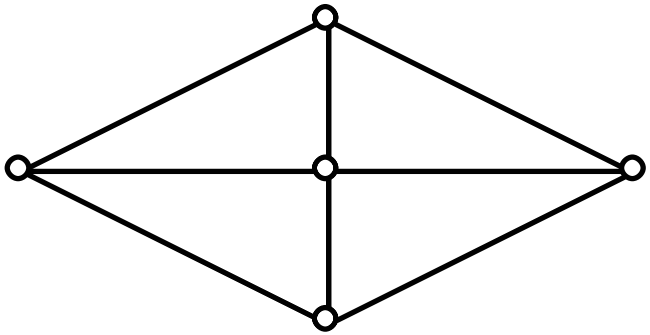
例1. 判断下图是否具有哈密顿回路，通路。



(1)

解：存在哈密顿通路，但不存在哈密顿回路。

例1. 判断下图是否具有哈密尔顿回路，通路。



(2)

解：是哈密尔顿图，

存在哈密尔顿回路和通路。

例2. 今有 a,b,c,d,e,f,g 七个人，已知下列事实：

a 会讲英语；b 会讲英语和汉语；

c 会讲英语、意大利语和俄语；

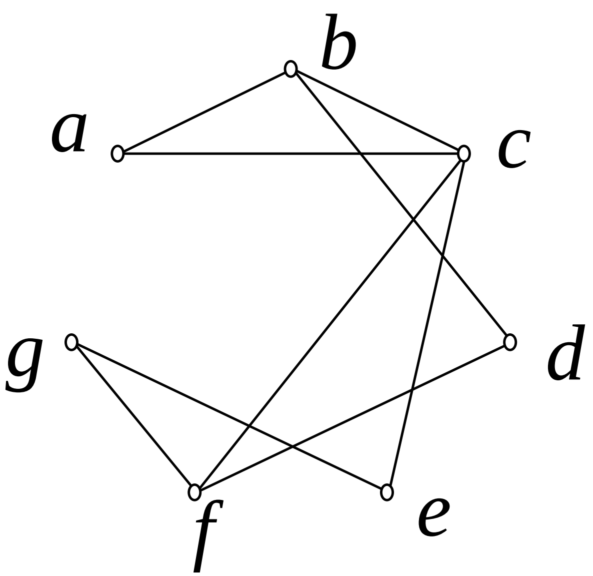
d会讲日语和汉语；e 会讲德语和意大利语；

f 会讲法语、日语和俄语；g会讲法语和德语。

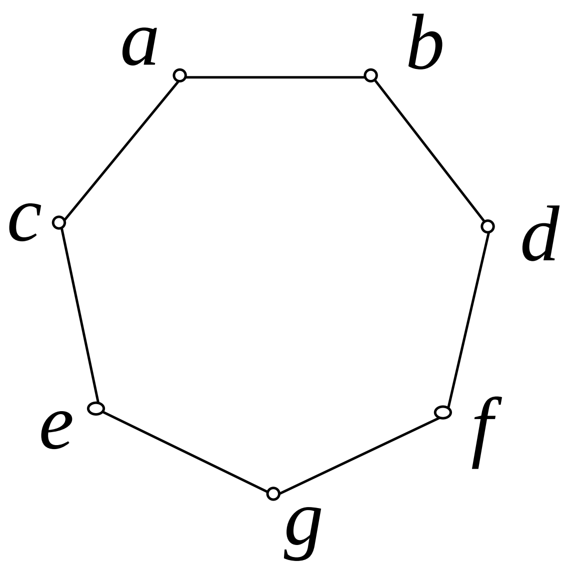
试问这七个人应如何排座位，才能使每个人

都能和他身边的两个人交谈？

解： 用七个顶点表示七个人，若两人之间有共同语言就连一条边，这样得到无向图 G ，再求G 的哈密尔顿回路。



图G



G的哈一回路