第一章　命题逻辑

小结与例题

一、命题与联结词

1、基本概念

命题与真值；简单命题和复合命题；

命题常项和变项；五个联结词 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$，

真值表。

2、应用

（1）选择适当的联结词将命题符号化。

（2）判断命题(简单或复合)的真假。

二、命题公式及分类

1、基本概念

命题公式的定义；公式的赋值；

重言式，矛盾式，可满足式。

2、应用

（1）求给定公式的真值表，及成真赋值，成假赋值。

（2）用真值表判断给定公式的类型。

三、等值演算

1、基本概念

两个公式等值的含义；等值演算。

2、应用

（1）灵活运用24个重要等值式。

（2）用等值演算判断公式的类型及两个公式是否等值(也可用真值表)。

四、联结词的全功能集

基本概念

联结词的全功能集

五、范式

1、基本概念

简单析取式，简单合取式；

析取范式，合取范式；极小项，极大项；

主析取范式，主合取范式。

五、范式

2、应用

(1) 求给定公式的主析取范式和主合取范式。

(2) 用主析取范式或主合取范式判断两公式是否等值。

(3) 用主析取范式或主合取范式求公式的成真或成假赋值。

(4) 用主析取范式或主合取范式判断公式的类型。

六、组合电路

会设计组合电路并化简为最简展开式

步骤：1. 构造输入输出表(初始状态不唯一)

2. 写出主析取范式

3. 化简(奎因-莫可拉斯基方法)

七、推理理论

1、基本概念。

推理，推理规则，推理定律；构造证明法。

2、应用。

(1) 判断推理是否正确：
- 真值表法
- 等值演算法
- 主析取范式法(主合取范式法)。

(2) 用8条推理定律构造推理的证明。

例1、判断下列各语句中，命题，简单命题，复合命题，真命题，假命题，真值待定的命题各有哪些？

(1) $2x+3>0$,

(2) 2是素数或是合数，

(3) 若$2+2=4$，则5是偶数，

(4) 只有4是奇数，5才能被3整除。

(5) 明年5月1日是晴天。

例1、判断下列各语句中，命题，简单命题，复合命题，真命题，假命题，真值待定的命题各有哪些？

解：命题有(2)—(5)，

其中(5)是简单命题，(2)，(3)，(4)是复合命题，

(2)，(4)为真命题，(3)为假命题，(5)真值待定。

例2、 设p、q的真值为0，r、s的真值为1，试求下列命题的真值。

(1) $p\vee(q\vee r)$

(2) $(p\leftrightarrow q)\wedge(\neg r\vee s)$

解： $p\vee(q\vee r)$

$\Leftrightarrow 0\vee(0\vee 1)$

$\Leftrightarrow 1$

解： $(p\leftrightarrow q)\wedge(\neg r\vee s)$

$\Leftrightarrow (0\leftrightarrow 0)\wedge(\neg 1\vee 1)$

$\Leftrightarrow 1\wedge(0\vee 1)$

$\Leftrightarrow 1\wedge 1$

$\Leftrightarrow 1$

例2、 设 p、q 的真值为0，r、s 的真值为1，

试求下列命题的真值。

(3) $(p \wedge (r \vee s)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (r \wedge s))$

解： $(p \wedge (r \vee s)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (r \wedge s))$

$\Leftrightarrow (0 \wedge (1 \vee 1)) \rightarrow ((0 \vee 0) \wedge (1 \wedge 1))$

$\Leftrightarrow 0 \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow 1$

例2、 设 p、q 的真值为0，r、s 的真值为1，

试求下列命题的真值。

(4) $\neg(p \vee (q \to (r \wedge \neg p))) \to (r \vee \neg s)$

解： $\neg(p \vee (q \to (r \wedge \neg p))) \to (r \vee \neg s)$

$\Leftrightarrow \neg(0 \vee (0 \to (1 \wedge \neg 0))) \to (1 \vee \neg 1)$

$\Leftrightarrow 0 \to 1$

$\Leftrightarrow 1$

例3、简化下列命题公式。

(1) $((p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)) \wedge r$

解： $((p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)) \wedge r$

$\Leftrightarrow ((p \to q) \leftrightarrow (p \to q)) \wedge r$

$\Leftrightarrow 1 \wedge r$

$\Leftrightarrow r$

例3、简化下列命题公式。

(2) $p \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$

解： $p \vee (\neg p \wedge (q \vee \neg q))$

$\Leftrightarrow p \vee (\neg p \wedge 1)$

$\Leftrightarrow p \vee \neg p$

$\Leftrightarrow 1$

例3、简化下列命题公式。

(3) $(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

解：$(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow(p\vee\neg p)\wedge(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow 1\wedge(q\wedge r)$

$\Leftrightarrow q\wedge r$

(4) $((p\to q)\wedge p\wedge r)\vee r$

解：$((p\to q)\wedge p\wedge r)\vee r\Leftrightarrow r$

例4、判断下列各命题公式，哪些是重言式，

矛盾式，可满足式？

(1) $(p \wedge q) \wedge r$

(2) $p \to (p \vee q)$

(3) $\neg\left(\left((p \to q) \to p\right) \leftrightarrow q\right)$

解： 可用真值表法，等值演算法，主析取(主合取)

范式等方法判断公式的类型，

(2)为重言式，(3)为矛盾式，(1)，(2)均为可满足式。

例5、求命题公式 $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$ 的主析取范式，主合取范式，成真赋值和成假赋值。

解：先求主析取范式

$$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee \neg q \vee p$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \big((p \vee \neg p) \wedge \neg q\big)$$

$$\vee \big(p \wedge (q \vee \neg q)\big)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$$

例5、求命题公式 $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$ 的主析取范式，主合取范式，成真赋值和成假赋值。

解：先求主析取范式

$$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$$

$$\Leftrightarrow m_0 \vee m_2 \vee m_3$$

故主合取范式为$(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

$$\Leftrightarrow M_1$$

例5、求命题公式 $(\neg p \to q) \to (\neg q \vee p)$

的主析取范式，主合取范式，成真赋值和成假赋值。

解： 成真赋值为极小项角码对应的二进制数，

即00，10，11。

成假赋值为极大项角码对应的二进制数，

即01。

例6、设 $A=(p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee\neg p$

(1) 求 A 的真值表。

(2) 求 A 的主析取范式、主合取范式。

解：

p	q	r	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$\neg p$	A
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

例6、设 $A=(p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee\neg p$

(2) 求 A 的主析取范式、主合取范式。

解： $A\Leftrightarrow(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)$

$\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)$

$\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q\wedge r)$

$\Leftrightarrow m_0\vee m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_5\vee m_7$

例6、设 $A=(p\wedge r)\vee(q\wedge r)\vee\neg p$

(2) 求 A 的主析取范式、主合取范式。

解： $A\Leftrightarrow(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)$

$$\Leftrightarrow M_4\wedge M_6$$

例7、写出对应下面推理的证明。

有红、黄、蓝、白四队参加足球联赛。如果红队第三，则当黄队第二时，蓝队第四；或者白队不是第一，或者红队第三；事实上，黄队第二。因此，如果白队第一，那么蓝队第四。

证明：设 p：红队第三，q：黄队第二，

r：蓝队第四，s：白队第一。

前提：$p \rightarrow (q \rightarrow r), \neg s \vee p, q$　结论：$s \rightarrow r$

前提：$p \to (q \to r), \neg s \vee p, q$

结论：$s \to r$

① $\neg s \vee p$	前提引入
② s	附加前提引入
③ p	①②析取三段论
④ $p \to (q \to r)$	前提引入
⑤ $q \to r$	③④假言推理

前提：$p \to (q \to r), \neg s \vee p, q$

结论：$s \to r$

⑤ $q \to r$ ③④假言推理

⑥ q 前提引入

⑦ r ⑤⑥假言推理

由附加前提证明法知推理正确。

例8、一公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下：

(1) 甲或乙盗窃了笔记本电脑；

(2) 若甲盗窃了笔记本电脑，则作案时间不能发生在午夜前；

(3) 若乙的证词正确，则午夜时屋里灯光未灭；

(4) 若乙的证词不正确，则作案时间发生在午夜之前；

(5) 午夜时屋里灯光灭了。

问是谁盗窃了笔记本电脑。

解：设 p：甲盗窃了笔记本电脑，

q：乙盗窃了笔记本电脑，

r：作案时间发生在午夜前，

s：乙的证词正确，

t：午夜灯光未灭。

前提：$p \vee q$，$p \rightarrow \neg r$，$s \rightarrow t$，

$\neg s \rightarrow r$　$\neg t$

结论：p 或者 q

前提：$p \vee q$，$p \to \neg r$，$s \to t$，$\neg s \to r$，$\neg t$

① $\neg t$	前提引入
② $s \to t$	前提引入
③ $\neg s$	①②拒取式
④ $\neg s \to r$	前提引入
⑤ r	③④假言推理

前提：$p \vee q$，$p \to \neg r$，$s \to t$，$\neg s \to r$，$\neg t$

⑤ r	③④假言推理
⑥ $p \to \neg r$	前提引入
⑦ $\neg p$	⑤⑥拒取式
⑧ $p \vee q$	前提引入
⑨ q	⑦⑧析取三段论

所以是乙盗窃了笔记本电脑。

例9 设 A 是含有 n 个命题变项的公式，判断下面句子是否正确：

（1）若 A 的主析取范式中含 2^n 个极小项，则 A 为重言式

（2）若 A 的主合取范式中含 2^n 个极大项，则 A 为矛盾式

（3）若 A 的主析取范式中不含任何极小项，则 A 的主析取范式为0

（4）若 A 的主合取范式中不含任何极大项，则 A 的主合取范式为0

例10

在某次研讨会的休息时间，3名与会者根据王教授的口音分别作了下述判断

甲说：王教授不是苏州人，是上海人.

乙说：王教授不是上海人，是苏州人.

丙说：王教授既不是上海人，也不是杭州人.

王教授听后说：你们3人中有一个人说对了，有一个人全说错了，还有一个人对错各半.

试判断王教授是哪里人?

课堂练习

1.将下列推理符号化，并推证其结论：

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队取胜；或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名；A队没有成为联赛的第一名；小张守第一垒。因此，小李没向B队投球。

2. 用等值演算的方法求公式 $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$ 的主析取范式，主合取范式，成真赋值和成假赋值。

3. 将下列推理符号化，并推证其结论：

如果小张与小李都是计算机系的学生，则小王是中文系的学生；若小王是中文系学生，则小王喜欢看小说；小王不喜欢看小说；小张是计算机系的学生；所以小李不是计算机系的学生。

4. 某勘探队有3名队员，有一天取得一块矿样，3人判断如下：

甲说：这不是铁，也不是铜。

乙说：这不是铁，是锡。

丙说：这不是锡，是铁。

经实验室鉴定发现，其中一人的两个判断全对，一人判对一半，另一人全错。试根据以上情况，判断矿样的种类。