5.4　最短路径　着色

一. 带权图及其最短路径问题

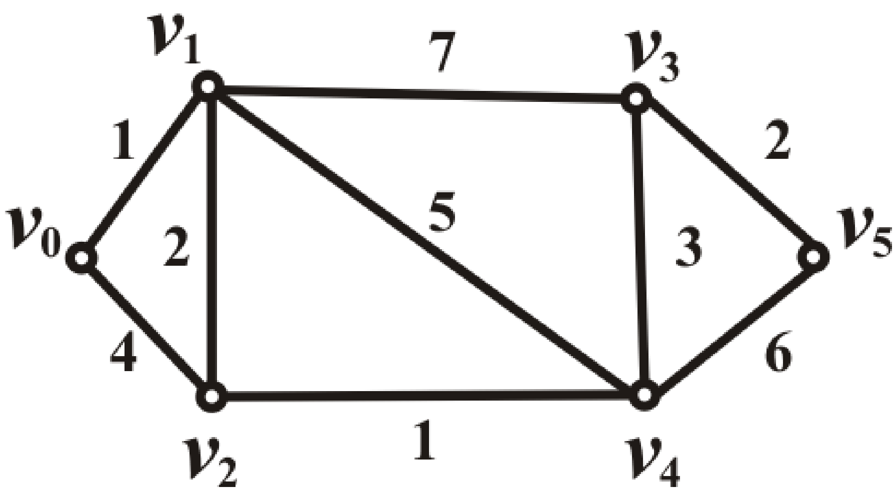
带权图：对于有向图或无向图的每条边附加一个实数 $w(e)$，则得带权图。

$w(e)$ 为边 e 上的权(当 $e = <v_i, v_j>$ 或 $e = (v_i, v_j)$ 时，权记作 w_{ij})，记作：$G = <V, E, W>$

若 v_i, v_j 不相邻, 记 $w_{ij} = \infty$.

通路L的权: L的所有边的权之和, 记作w(L).

u和v之间的最短路径: u和v之间权最小的通路.



例 $L_1=v_0v_1v_3v_5$, $w(L_1)=10$,

$L_2=v_0v_1v_4v_5$, $w(L_2)=12$,

$L_3=v_0v_2v_4v_5$, $w(L_3)=11$.

1.最短路径问题：

$G=<V,E,W>$为带权图，且G中各边带的权均大于等于0，从顶点u到顶点v的所有通路中求带权最小的通路问题，称为最短路径问题。

目前，公认的求最短路径的算法是Dijkstra标号法，其基本思想为

- 把图中所有顶点分成两组
  - 第一组包括已经确定最短路径的顶点
  - 第二组包括尚未确定最短路径的顶点

按照最短路径长度递增的顺序逐个把第二组的顶点加到第一组中去

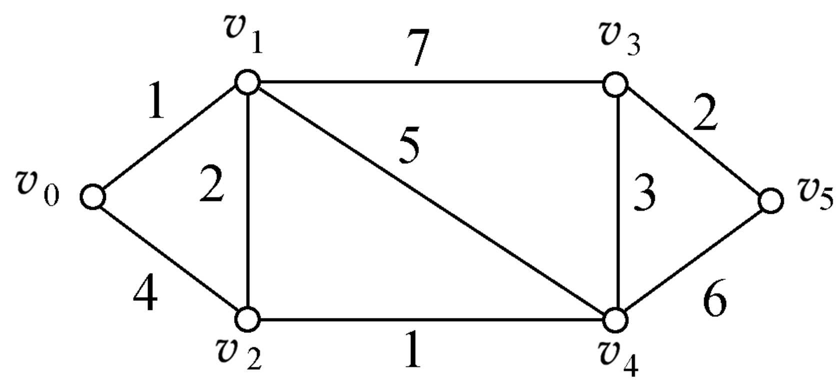
•直至从$v1$出发可以到达的所有顶点都包括进第一组中。

Dijkstra算法的具体做法思路：

- 一开始第一组只包括顶点$v1$，第二组包括其他所有顶点；
- **$v1$对应的距离值为0**
- 然后，每次从第二组的顶点中选一个其距离值为最小的顶点 v_m，加入到第一组中；
- 每往第一组加入一个顶点 v_m，就要对第二组各顶点的距离值进行一次修正
- 修改后再选距离值最小的顶点加入到第一组中
- 如此进行下去，直到图中所有顶点都包括在第一组中，或者再也没有可以加入到第一组的顶点存在。

Dijkstra标号法实例

例 求v_0到v_5的最短路径



t	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	$(0, \lambda)^*$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
2		$(1, v_0)^*$	$(4, v_0)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$	$(+\infty, \lambda)$
3			$(3, v_1)^*$	$(8, v_1)$	$(6, v_1)$	$(+\infty, \lambda)$
4				$(8, v_1)$	$(4, v_2)^*$	$(+\infty, \lambda)$
5				$(7, v_4)^*$		$(10, v_4)$
6						$(9, v_3)^*$

v_0到v_5的最短路径: $v_0 v_1 v_2 v_4 v_3 v_5$, $d(v_0, v_5)=9$

注意：

1.最短路径**可能不唯一**

2.若已经求出了顶点u到顶点v的最短路径，则从u到此路径上其余个顶点的最短路径都求出了。

标号法(E.W.Dijkstra, 1959)

设带权图$G=\langle V,E,W\rangle$, 其中$\forall e\in E$, $w(e)\geq 0$.

设$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, 求v_1到其余各顶点的最短路径

1. 令 $l_1\leftarrow 0$, $p_1\leftarrow\lambda$, $l_j\leftarrow +\infty$, $p_j\leftarrow\lambda$, $j=2,3,\ldots,n$,
   $P=\{v_1\}$, $T=V-\{v_1\}$, $k\leftarrow 1$, $t\leftarrow 1$. / λ表示空
2. 对所有的$v_j\in T$且$(v_k,v_j)\in E$
   令$l\leftarrow\min\{l_j, l_k+w_{kj}\}$,
   若$l=l_k+w_{kj}$, 则令$l_j\leftarrow l$, $p_j\leftarrow v_k$.
3. 求$l_i=\min\{l_j | v_j\in T_t\}$.
   令$P\leftarrow P\cup\{v_i\}$, $T\leftarrow T-\{v_i\}$, $k\leftarrow i$.
4. 令$t\leftarrow t+1$,
   若$t<n$, 则转2.

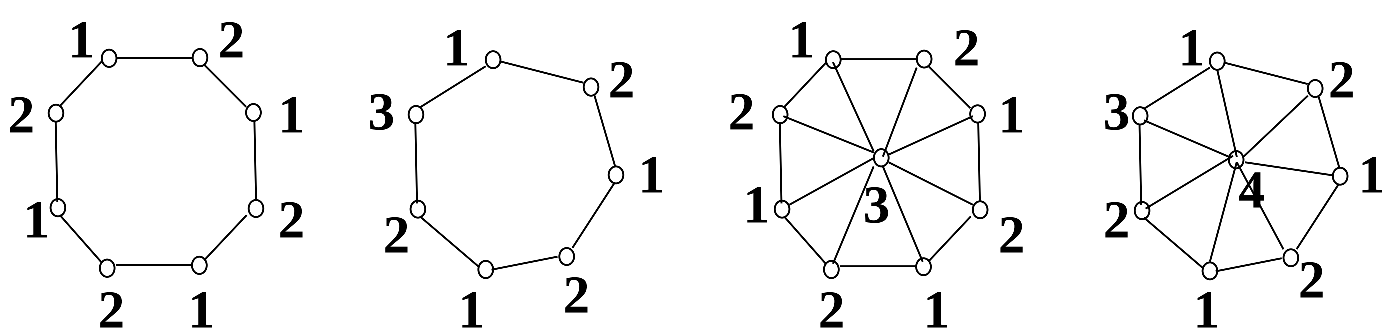
二. 着色

定义 设无向图G无环, 对G的每个顶点涂一种颜色, 使**相邻的顶点涂不同的颜色**，称为图G的一种**点着色**,简称**着色**.

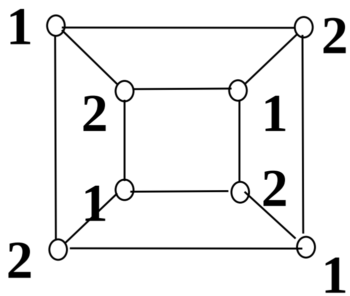
若能用k种颜色给G顶点着色，则称G是**k-可着色**的.

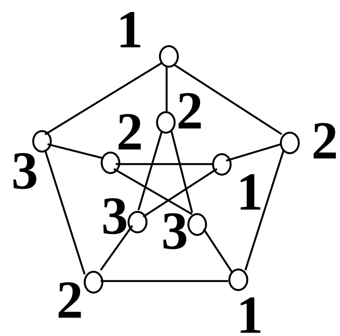
图的着色问题: 用**尽可能少**的颜色给图着色.

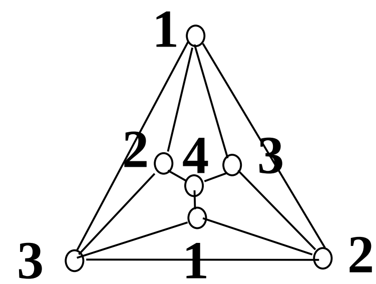
例1



例2







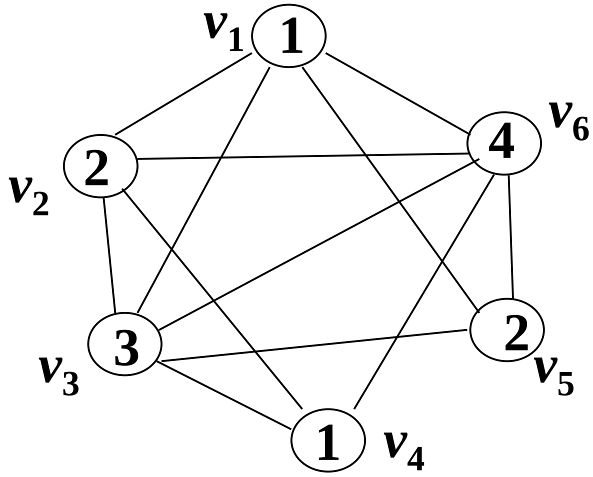
应用：在有冲突的情况下分配资源

- 有n项工作, 每项工作需要一天的时间完成. 有些工作由于需要相同的人员或设备不能同时进行, 问至少需要几天才能完成所有的工作?

分析:

- 有的工作用相同的人(设备)--不同时进行（不同色）
- 不用相同的人(设备)的工作---可同时进行，减少工作时间
- 顶点—工作，若两工作用相同的人(设备),则用一边连接相应的顶点(相邻的顶点不同色，代表不同时进行)
- 工作的安排：对应点着色
- 所需工作的最少的天数=着色所需要的最少的颜色数

例3 学生会下设6个委员会, 第一委员会={张, 李, 王}, 第二委员会={李, 赵, 刘}, 第三委员会={张, 刘, 王}, 第四委员会={赵, 刘, 孙}, 第五委员会={张, 王}, 第六委员会={李, 刘, 王}. 每个月每个委员会都要开一次会, 为了确保每个人都能参加他所在的委员会会议, 这6个会议至少要安排在几个不同时间段?



至少要4个时段

第1时段:一,四

第2时段:二,五

第3时段:三

第4时段:六

•用6个顶点代表6个委员会，若两委员会有共同的人，则顶点之间连一条边

•同一颜色的顶点不相邻，说明没有共同的人，则可以安排在同一时间开会