图的基本概念 特殊的图

习题课

一. 无向图与有向图

1. 基本概念

有向图与无向图的定义；关联与邻接(相邻)；

顶点的度数；零图与平凡图；简单图与多重图；

完全图；子图，补图；图的同构。

2. 运用

（1） 灵活运用握手定理及其推论，

（2） 判断两个图是否同构，

（3） 画出满足某些条件的子图，补图等。

二. 通路，回路，图的连通性

1. 基本概念

通路和回路；

有向图连通的分类。

2. 运用

（1） 判断有向图或无向图中通路(回路)的类型。

（2） 判断有向图连通的类型。

三. 图的矩阵表示

1. 基本概念

无向图的关联矩阵，有向图的关联矩阵和邻接矩阵。

2. 运用

（1） 关联矩阵的行和、顶点度数间的关系。

（2） 由有向图的邻接矩阵的 k 次幂求从一顶点到另一顶点的长度为 k 的通路数。

四. 特殊的图

1. 二部图，完全二部图。

   判定一个图是否二部图或完全二部图。

2. 欧拉图

   判定图是否具有欧拉通路或回路。

3. 哈密顿图

例1、设图 $G=\langle V,E\rangle$，其中$V=\{a,b,c,d,e\}$，E分别由下面给出。判断哪些是简单图，哪些是多重图？

(1) $E=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,e)\}$ 简单图

(2) $E=\{(a,b),(b,e),(e,b),(a,e),(d,e)\}$ 多重图

(3) $E=\{(a,b),(b,e),(e,d),(c,c)\}$ 不是

例1、设图 $G=\langle V,E\rangle$，其中$V=\{a,b,c,d,e\}$，E分别由下面给出。判断哪些是简单图，哪些是多重图？

(4) $E=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,e\rangle\}$

简单图

(5) $E=\{\langle a,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,e\rangle\}$ 多重图

(6) $E=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle e,c\rangle,\langle e,d\rangle\}$ 不是

例2、下列各序列中，可以构成无向简单图的度数序列的有哪些？

(1) $(2,2,2,2,2)$ 可以

(2) $(1,1,2,2,3)$ 不可以

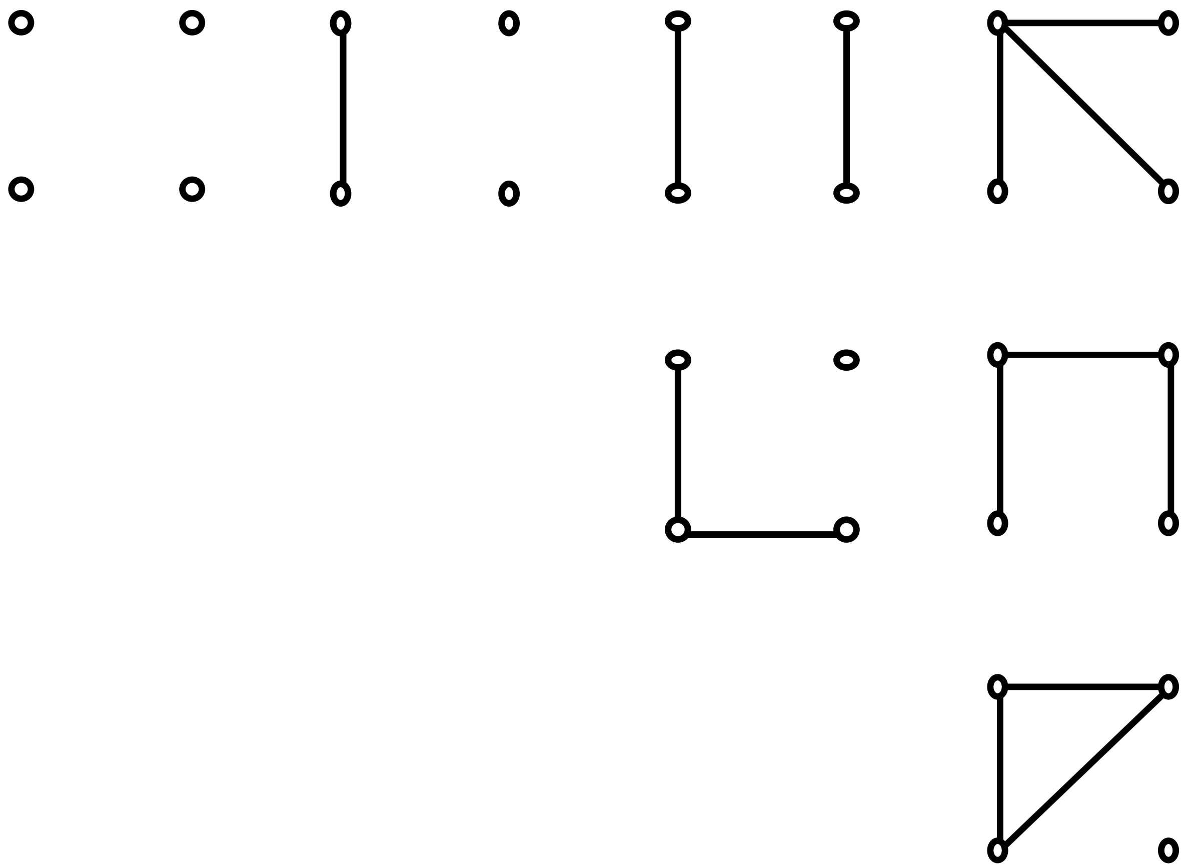
(3) $(1,1,2,2,2)$ 可以

(4) $(0,1,3,3,3)$ 不可以

(5) $(1,3,4,4,5)$ 不可以

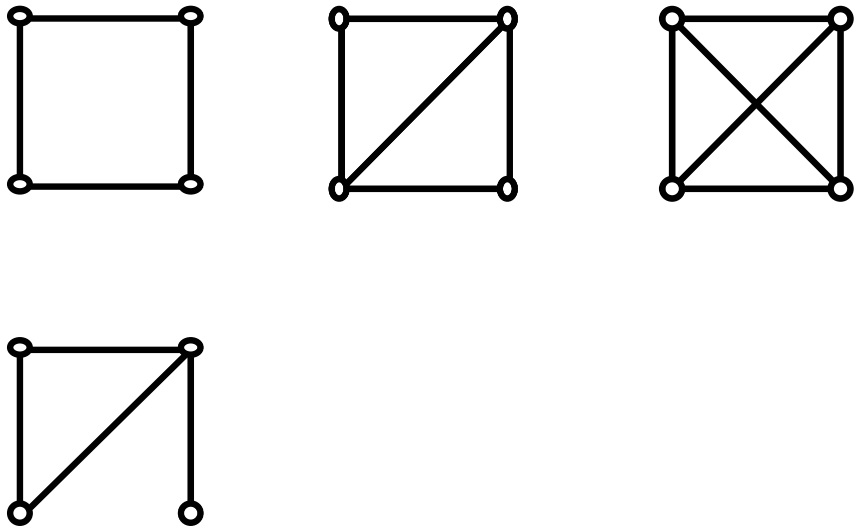
例3、(1) 画出完全图K_4的所有非同构的生成子图。

解：



例3、(1) 画出完全图K_4的所有非同构的生成子图。

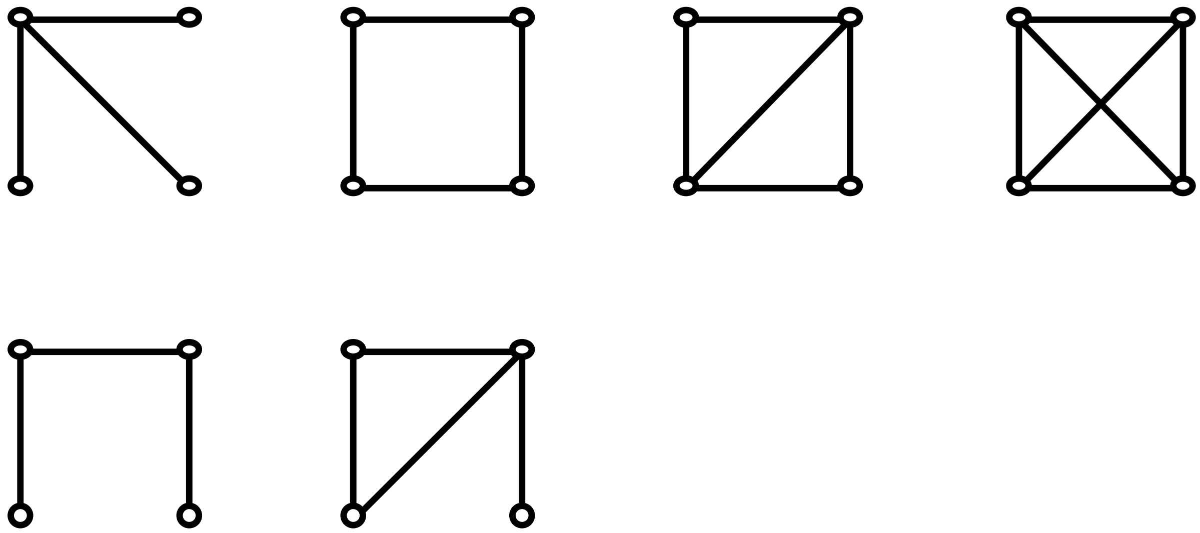
解:



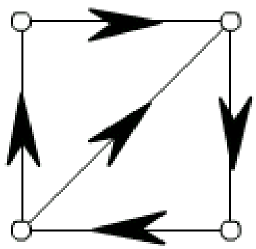
例3、(1) 画出完全图K_4的所有非同构的生成子图。

(2) K_4 的生成子图有几个是连通图？

解：有6个：

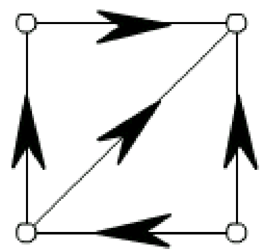


例4、下图所示的六个图中，强连通，单向连通，弱连通的分别有哪些？



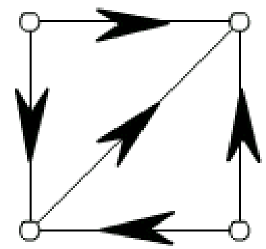
(a)

强连通



(b)

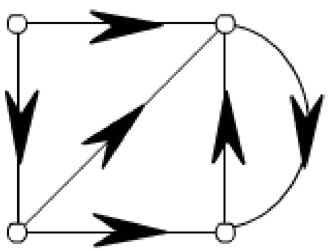
单向连通



(c)

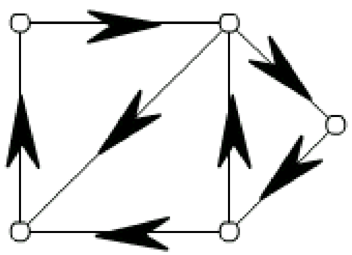
弱连通

例4、下图所示的六个图中，强连通，单向连通，弱连通的分别有哪些？



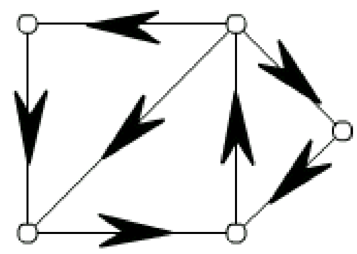
(d)

单向连通



(e)

强连通



(f)

强连通

例5、已知图D 的邻接矩阵，$A(D)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$

$A^2(D)=\begin{bmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}$，$A^3(D)=\begin{bmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{bmatrix}$

(1) $d^+(v_3)=\underline{\quad 2 \quad}$ $d^-(v_1)=\underline{\quad 4 \quad}$

$d(v_2)=\underline{d^+(v_2)+d^-(v_2)=2}$

例5、已知图D的邻接矩阵，$A(D)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$

$$A^2(D)=\begin{bmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}，\quad A^3(D)=\begin{bmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{bmatrix}$$

(2) 从v_1到v_4长度为2的通路数。

解：因$a_{14}^{(2)}=2$，所以从v_1到v_4长度为2的通路数为2。

例5、已知图D 的邻接矩阵，$A(D)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$

$$A^2(D)=\begin{bmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{bmatrix}，\quad A^3(D)=\begin{bmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{bmatrix}$$

(3) 从v_3到 v_1长度为3的通路数。

解： 因$a_{31}^{(3)}=5$，所以从v_3到v_1长度为3的通路数为5。

例5、已知图D 的邻接矩阵，$A(D)=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix}$

$$A^2(D)=\begin{bmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{bmatrix},\quad A^3(D)=\begin{bmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{bmatrix}$$

(4) 过v_4长度为3的回路数。

解： 因$a_{44}^{(3)}=3$，所以过v_4长度为3的回路数为3。

例6、下列各图中各有多少个顶点。

(1) 16条边，每个顶点的度数均为2。

解：设顶点数为 x，

由握手定理，有 $2 \cdot x = 2 \cdot 16$，解得 $x = 16$。

(2) 21条边，3个度数为4的顶点，其余顶点的度数均为3。

解：设顶点数为 x，由握手定理，

有 $4 \cdot 3 + 3 \cdot (x - 3) = 2 \cdot 21$，解得 $x = 13$。

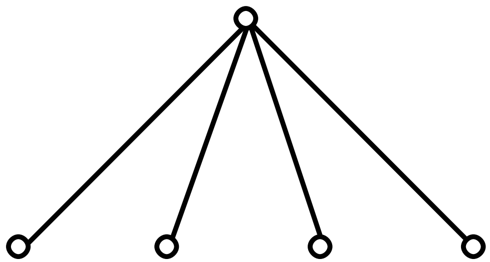
例7、设 G 为9个顶点的无向图，每个顶点的度数不是5就是6。证明G中至少有5个6度顶点或者至少有6个5度顶点。

证明： 由握手定理的推论知，G 中5度顶点的个数只能是0，2，4，6，8这五种情形。

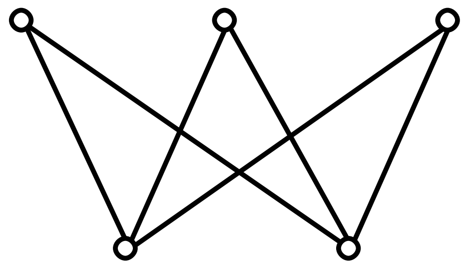
此时6度顶点的个数分别为9，7，5，3，1这五种情形，不论何种情形，均满足结论要求。

例8、画出完全二部图$K_{1,4}$，$K_{3,2}$和$K_{2,4}$。

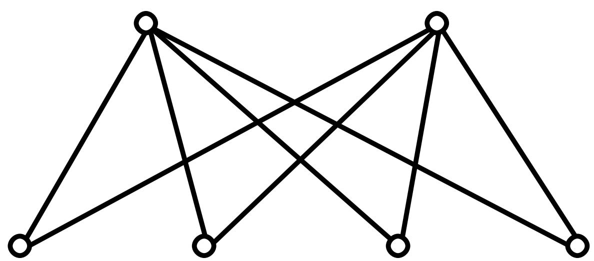
解：



$K_{1,4}$



$K_{3,2}$



$K_{2,4}$

例9、完全二部图$K_{r,s}$中，边数m为多少？

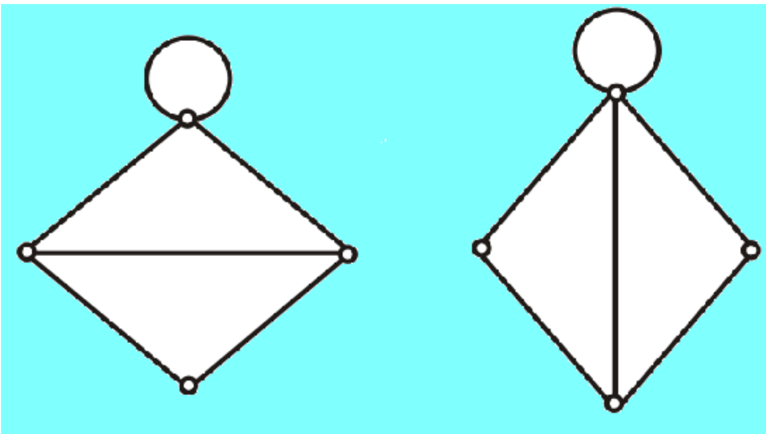
解： $m = rs$

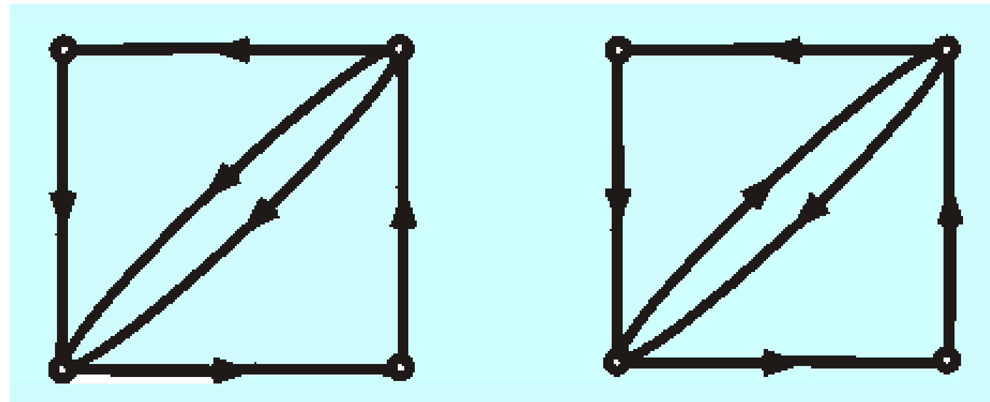
练习题

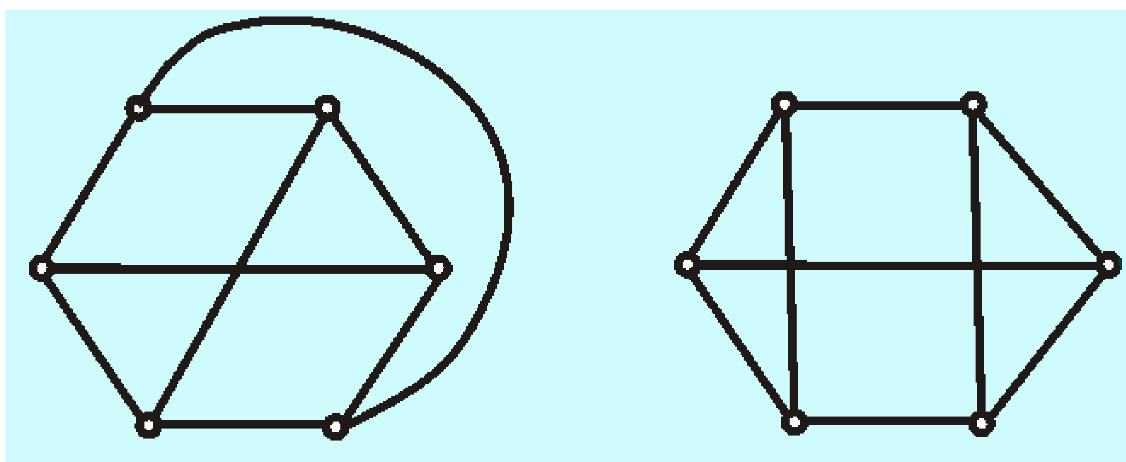
1.若无向图G有12条边，G中有6个3度顶点，其余顶点度数均为2，问G中有多少个顶点？

2.设无向简单连通图G有16条边,有3个4度顶点,4个3度顶点,其余顶点的度数都小于3,问G至少有多少个顶点?

3. 判断下述每一对图是否同构?







4. 下列各组数中不能构成无向图的的度数列的是（　）

（A）1，1，2，3，5　　（B）1，2，3，4，5

（C）1，3，1，3，2　　（D）1，2，3，4，6

5. 下列定义正确的是(　　).

(A)　含平行边或环的图称为多重图

(B)　不含平行边或环的图称为简单图

(C)　含平行边和环的图称为多重图

(D)　不含平行边和环的图称为简单图

6. 设图 $G=<V,E>$ ，其中 $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$

$$E=\{<v_1,v_2>,<v_2,v_4>,<v_3,v_1>,<v_4,v_5>,<v_5,v_2>\}$$

（1）试给出G的图形表示;

（2）求G的邻接矩阵

（3）判断图G是强连通图还是单向连通图还是弱连通图

7.有9个人一起打乒乓球，已知他们每人至少与其中另外3个人各打过一场球，试证明：至少有一人不止和3个人打过球.

证明：用九个顶点 v_i表示9个人，顶点之间的一条边表示这两人打过一场球，可构成一个无向图。若每个人仅和其余3个人各打过一场球，则 $d(v_i)=3$，而此时图G的奇数度顶点是9个，即奇数个，因此与握手定理矛盾，于是，至少有一人不止和三个人打过球。

8．数组{1，2，3，4，4}是一个能构成无向简单图的度数序列，此命题的真值是______.

9．若无向图G中只有两个奇数度顶点，则这两个顶点一定是连通的.

证：用反证法．设G中的两个奇数度顶点分别为u和v．假若u和v不连通.
即它们之间无任何通路，则G至少有两个连通分支G_1，G_2，且u和v分别属于G_1和G_2，于是G_1和G_2各含有一个奇数度顶点．这与握手定理的推论矛盾．因而u和v一定是连通的.

10.有向图D如图所示，回答下列问题：

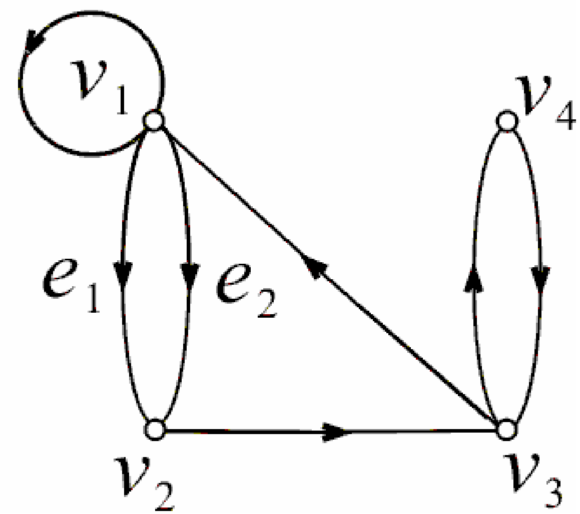
(1) D是哪类连通图?

(2) D中v_1到v_4长度为1, 2, 3, 4的通路各多少条?

(3) D中长度为4的通路（不含回路）有多少条?

(4) D中长度为4的回路有多少条?

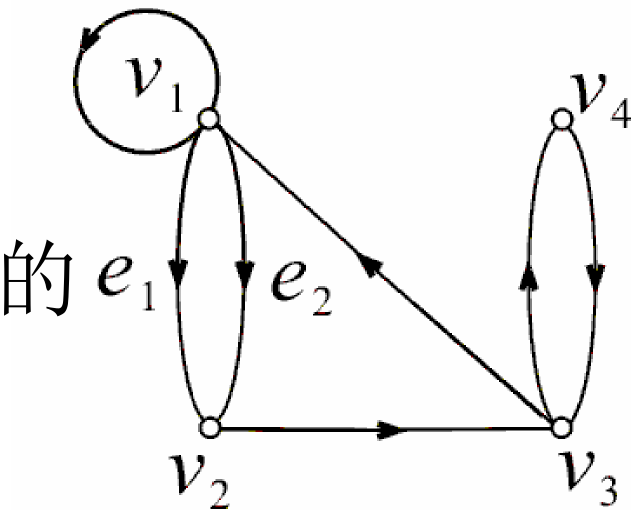
(5) D中长度≤4的通路有多少条? 其中有几条是回路?



（1）D是哪类连通图?

解：D是强连通图。

- 为解(2)—(5)，只需先求D的邻接矩阵的前4次幂。



$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&0&0&1\\1&2&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}3&2&2&2\\1&2&1&0\\2&2&2&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}5&6&4&2\\2&2&2&1\\4&4&3&2\\2&2&2&1\end{bmatrix}$$

(2) D中v_1到v_1长度为1, 2, 3, 4的回路各多少条?

答：v_1到v_1长度为1, 2, 3, 4的回路数分别为1, 1, 3, 5。

(3) D中长度为4的通路（不含回路）有多少条?

答：长度为4的通路(不含回路)为33条.

(4) D中长度为4的回路有多少条?

答：长度为4的回路为11条。

(5) D中长度≤4的通路有多少条？其中有几条是回路?

答：长度≤4的通路88条，其中22条为回路。