第三节　图的矩阵表示

- 无向图的关联矩阵
- 有向图的关联矩阵
- 有向图的邻接矩阵
- 有向图的可达矩阵

一. 无向图的关联矩阵

定义 设无向图$G=\langle V,E\rangle$, $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,

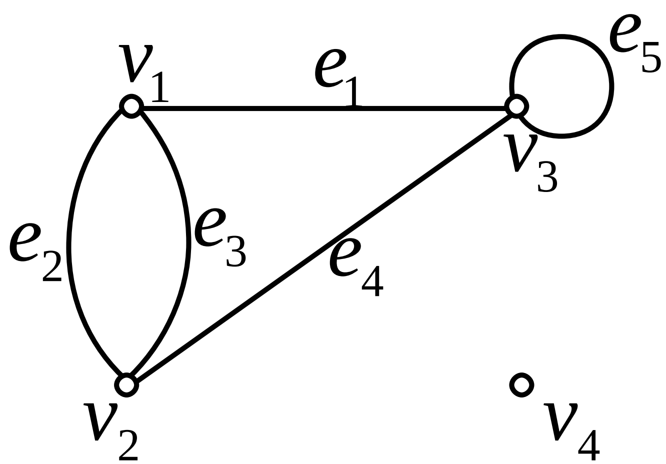
$E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$,

令m_{ij}为v_i与e_j的关联次数,

称$(m_{ij})_{n\times m}$为**G的关联矩阵**，记为$M(G)$.

$$\text{其中} m_{ij}=\begin{cases} 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联} \\ 1 & v_i\text{与}e_j\text{关联1次} \\ 2 & v_i\text{与}e_j\text{关联2次(即}e_j\text{是以}v_i\text{为端点的环)} \end{cases}$$

例1、无向图 G (下图所示)，求 $M(G)$。



解：$M(G)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. 性质

每一列恰好有两个1或一个2

(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2$,即$M(G)$各列元素之和为2,

这说明每条边关联两个顶点

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i)$,即$M(G)$的第$i$行元素

之和为v_i的度数

(3) $$2m = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$$

握手定理

2. 性质

(4) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = 0$，当且仅当 v_i 为孤立点。

(5) 若第 j 列与第 k 列相同，则说明e_j与 e_k 为平行边。

二. 有向图的关联矩阵

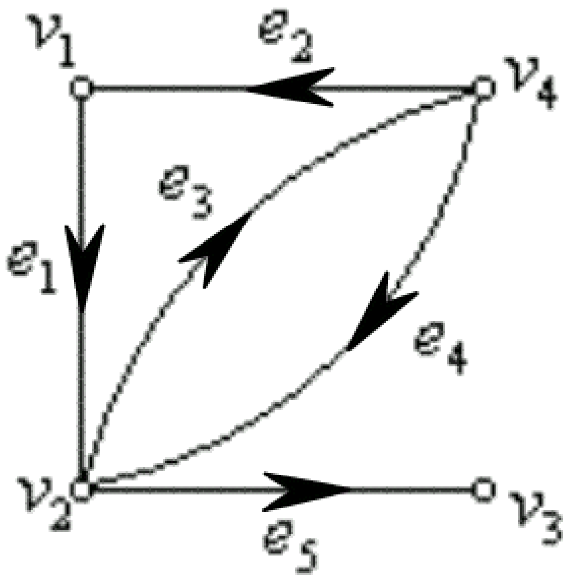
1、设无环有向图$D=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$

$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$，D的关联矩阵

$$M(D)=(m_{ij})_{n\times m}$$

其中 $m_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{为}e_j\text{的始点}\\ 0 & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1 & v_i\text{为}e_j\text{的终点}\end{cases}$

例2、有向图D(下图所示)，求$M(D)$。



$$M(D)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

性质

(1) 每一列恰好有一个1和一个-1

(2) 第i行1 的个数等于$d^+(v_i)$, -1 的个数等于$d^-(v_i)$

(3) 1的总个数等于-1的总个数, 且都等于m

(4) 矩阵中各元素之和为0.

三. 有向图的邻接矩阵

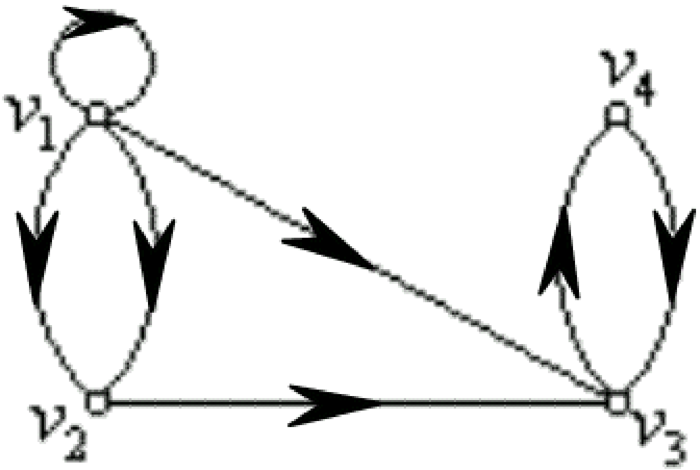
1、设有向图$D=\langle V,E\rangle$，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，

$|E|=m$，D的邻接矩阵 $A(D)=\left(a_{ij}^{(1)}\right)_{n\times n}$ ，

其中 $a_{ij}^{(1)}$ 指 v_i 邻接到 v_j 的边的条数（非负整数）。

注：v_i为始点，v_j为终点

例3、有向图 D (下图所示)，求 $A(D)$ 。



解：$A(D)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. 性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^+(v_i)$, 第$i$行元素之和为$v_i$ 的出度

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^-(v_j)$, 第$j$列元素之和为$v_j$ 的入度

(3) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} d^+(v_i) = m$(各顶点出度之和为边数)

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ **为D中环的个数。**

3、求D中长度为l的通路数和回路数

(1) 令$A^2(D) = A(D) \bullet A(D)$　　**矩阵乘法**

$$= (a_{ij}^{(2)})_{n\times n} \quad \text{其中}\ a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)}$$

$a_{ij}^{(2)}$**表示从**v_i**到**v_j**长度为2的通路数**$(i \neq j)$

或回路数$(i = j)$**。**

3、求D中长度为l的通路数和回路数

考虑$A^l(D)$，简记为A^l。

$$A^l = A^{l-1} \bullet A = (a_{ij}^{(l)})_{n \times n}$$ 其中 $$a_{ij}^{(l)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(l-1)} a_{kj}^{(1)}$$

$a_{ij}^{(l)}$表示从v_i到v_j长度为l的通路数$(i \neq j)$或回路数$(i = j)$。

$\sum_{i,j} a_{ij}^{(l)}$为D中长度为l的通路总数，其中$\sum_i a_{ii}^{(l)}$为D中长度为l的回路总数。

3、求D中长度为l的通路数和回路数

(2) 设$B_r = A + A^2 + \cdots + A^r \quad (r \geq 1)$

则B_r**中元素**$b_{ij}^{(r)}$**为**D**中**v_i**到**v_j**长度小于等于**r

的通路总数，$\sum_{i,j} b_{ij}^{(r)}$ **为**D**中长度小于等于**r **的**

通路总数，其中$\sum_{i} b_{ii}^{(r)}$**为**D**中长度小于等于**r

的回路总数。

定理 设A为n阶有向图D的邻接矩阵, 则$A^l(l\geq 1)$中元素

$a_{ij}^{(l)}$为D中v_i到v_j长度为 l 的通路数,

$a_{ii}^{(l)}$为v_i到自身长度为 l 的回路数,

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数,

$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的回路总数.

例4、在例3的有向图D中求A^2, A^3, A^4。

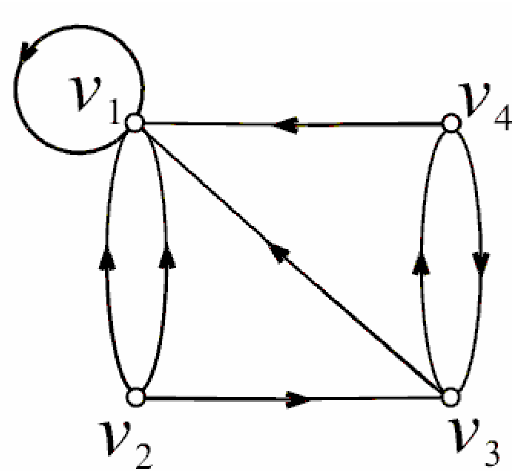
解: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

例 5　问在有向图*D*中

(1) 长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) 长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



例5

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

长度	通路	回路
1	8	1
2	11	3
3	14	1
4	17	3
合计	50	8

四. 有向图的可达矩阵

设$D=\langle V,E\rangle$为有向图,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，

令$p_{ii}=1$，$i=1,2,\cdots,n$

$$p_{ij}=\begin{cases}1 & v_i\text{可达}v_j\\0 & \text{否则}\end{cases}\ (i\neq j)$$ **可达矩阵** $P=(p_{ij})_{n\times n}$

性质:

$P(D)$主对角线上的元素全为1.

D强连通当且仅当$P(D)$的元素全为1.

有向图的可达矩阵实例

例

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$