https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=677

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 7

20 listopada 2024 r.

Zajęcia 26 listopada 2024 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L7.1. 1 punkt Niech dane będa parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n)$$

zachodzi

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1,$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(2024) \prod_{i=0}^{j-1} (x_k - f(i)) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$

gdzie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją spełniającą warunek $f(0) = 2024$.

L7.2. 1 punkt Używając postaci Newtona, podaj wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

a)

x_k	-5	-1	2	4
y_k	1	-7	50	-242

b)

x_k	4	-5	0	2	-1
y_k	-242	1	246	50	-7

c)

x_k	-6	-4	-1	3	5	6
y_k	-2036	-2032	-2026	-2018	-2014	1977

Uwaga. Na pewno zauważysz, że rozwiązując podpunkty **b)** oraz **c)** nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

L7.3. 1 punkt Ile i jakich operacji arytmetycznych należy wykonać, aby dla danych parami różnych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ obliczyć ilorazy różnicowe

$$f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, x_1, \ldots, x_n]? \tag{1}$$

Podaj pseudokod algorytmu wyznaczającego ilorazy różnicowe (1), którego złożoność pamięciowa wynosi $O(n)$.

L7.4. **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \qquad (n = 4, 5, \ldots, 20)$$

dla x_k $(0 \le k \le n)$ będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla *węzłów Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $t_{nk}^{[a,b]}$ $(0 \le k \le n;\ n \in \mathbb{N})$ oznacza węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ $(a < b)$. Podaj jawny wzór dla tych węzłów. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \left(x - t_{n0}^{[a,b]}\right) \left(x - t_{n1}^{[a,b]}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - t_{nn}^{[a,b]}\right) \right| ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

L7.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Funkcję $f(x) = \sin(x/2)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n + 1$ różnych punktach przedziału $[9, 10]$. Znajdź wartość n, dla której

$$\max_{x\in[9,10]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-15}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi $[9, 10]$?

L7.7. $\boxed{\text{1 punkty}}$ Język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się m.in. procedura `Interp_Newton(x,f)` znajdująca dla wektora `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ parami różnych liczb rzeczywistych i wektora `f`$:= [f_0, f_1, \ldots, f_n]$ współczynniki b_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ postaci Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_n \in \Pi_n$ spełniającego warunki $L_n(x_i) = f_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie żaden z elementów wektorów `x` oraz `f` nie może być co do modułu większy niż 2024. Czy jeśli warunek ten nie jest spełniony, to procedura ta może być nadal użyteczna? Odpowiedź **uzasadnij**.

L7.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f, że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0,\ x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\le n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad M(x_j) = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0,\ x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

L7.9. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech p_n będzie wielomianem stopnia $n > 1$ interpolującym daną funkcję f w węzłach $t_{nj} := \cos\dfrac{\pi j}{n}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Udowodnij, że $p_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}'' b_k^n \cdot T_k(x)$, gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa, a

$$b_k^n := \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' f(t_{nj})\, T_k(t_{nj}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Jak użyć algorytmu Clenshawa do obliczenia współczynników b_k^n $(k = 0, 1, \ldots, n)$? Ile to kosztuje?

Uwaga. Jeśli potrafisz podać i uzasadnić algorytm wyznaczania współczynników b_k^n $(0 \le k \le n)$ w czasie $O(n \log n)$, to przygotuj rozwiązanie przy pomocy systemu LaTeX i dostarcz je prowadzącemu — być może dostaniesz dodatkowe punkty.

(–) Paweł Woźny