

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 4

30 października 2024 r.

Zajęcia 5 listopada 2024 r.  
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

**L4.1.** **1 punkt** Niech  $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$  będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji  $f$  ciągłej w przedziale  $[a_0, b_0]$ , niech ponadto  $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ ,  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$  oraz  $e_n := \alpha - m_{n+1}$ .

(a) Wykaż, że  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

(b) Ile wynosi długość przedziału  $[a_n, b_n]$  ( $n = 0, 1, \dots$ )?

(c) Wykaż, że

$$(1) \quad |e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0).$$

(d) Czy może zdarzyć się, że  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$ , gdzie  $N$  jest dowolną ustaloną liczbą naturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

**L4.2.** **1 punkt** Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero  $\alpha$  z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba  $\varepsilon > 0$ ?

**L4.3.** **Włącz komputer!** **1 punkt** Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji  $f(x) = x - 0.49$  i wartości początkowych  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$ . Porównaj wartości błędów  $|e_n|$  ( $1 \leq n \leq 5$ ) z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Skomentuj wyniki.

**L4.4.** **Włącz komputer!** **1 punkt** Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji  $f(x) = x^2 - \arctg(x + 2)$  z błędem bezwzględnym nie większym niż  $10^{-6}$ . *Wskazówka:* Naskicuj wykresy funkcji  $g(x) = x^2$  i  $h(x) = \arctg(x + 2)$ .

**L4.5.** **Włącz komputer!** **2 punkty** Przybliżenie odwrotności liczby  $R > 0$  można obliczać bez wykonywania dzielenia za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

dla odpowiednio dobranej wartości  $x_0$ .

(a) Sprawdź, że powyższy wzór można zinterpretować jako wykonanie kroku metody Newtona dla pewnej funkcji  $f$ .

(b) Udowodnij, że jeśli  $x_n \in (0, R^{-1})$ , to  $x_{n+1} \in (x_n, R^{-1})$ .

- (c) Udowodnij, że dla dowolnego  $x_0 \in (0, R^{-1})$  zachodzi  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{R}$ . Dla jakiego doboru punktów początkowych powyższa metoda jest zbieżna?
- (d) Sprawdź eksperymentalnie (dla różnych wartości  $R$  oraz  $x_0$ ), ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej.
- L4.6.** Włącz komputer! 1 punkt Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  ( $a > 0$ ) jedynie za pomocą operacji  $+$ ,  $-$  i  $\cdot$ , czyli bez wykonywania dzielenia. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie**, w tym zbadaj m.in. jak warto dobierać  $x_0$  oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.
- L4.7.** Włącz komputer! 1 punkt Niech będzie  $(*) a = m 2^c$ , gdzie  $c$  jest liczbą całkowitą, a  $m$  – ułamkiem z przedziału  $[\frac{1}{2}, 1)$ . **Biorąc pod uwagę postać  $(*)$** , zaproponuj efektywną metodę obliczania  $\sqrt{a}$ , otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji  $f$ . **Ustal eksperymentalnie** dla jakich wartości  $x_0$  metoda jest zbieżna.
- L4.8.** 2 punkty Niech  $f \in C^2(\mathbb{R})$ . Załóżmy, że  $f'(x) > 0$  i  $f''(x) > 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$ . Ponadto, niech  $\alpha$  będzie pierwiastkiem równania  $f(x) = 0$ . Wykaż, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego  $x_0$ .
- L4.9.** Włącz komputer! 1 punkt  $r$ -krotne zero  $\alpha$  funkcji  $f(x)$  jest pojedynczym zerem funkcji  $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$ . Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji  $g(x)$ ? **Wykonując odpowiednie testy numeryczne**, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?

(–) Paweł Woźny