

doi:10.3969/j.issn.1673-3142.2013.03.005

# 基于多项式理论智能车辆轨迹规划

马川, 曹凯

(255091 山东省 淄博市 山东理工大学 交通与车辆工程学院)

**[摘要]** 运动规划问题是智能车辆关键技术之一,它可以分成路径规划和轨迹规划两部分。运动规划的目的是使智能车辆能够在复杂道路环境中平稳快速地行驶。针对智能车辆轨迹规划实时性及灵活性问题,基于多项式理论及微分平坦理论提出一种实时轨迹规划方法。首先,对智能车辆这一非线性系统的微分平坦性质进行分析并确定其平坦输入和输出,其次,通过一个完全参数化的多项式曲线进行智能车辆轨迹生成,最后,通过与B样条轨迹规划对比仿真验证表明该方法对于智能车辆的实时轨迹规划具有更好的有效性及可执行性。

**[关键词]** 智能车辆; 轨迹规划; 多项式

**[中图分类号]** U469.79 **[文献标志码]** A **[文章编号]** 1673-3142(2013)03-0017-05

## Intelligent Vehicle Trajectory Planning Based on Polynomial Theory

Ma Chuan, Cao Kai

(School of Traffic and Vehicle Engineering, Shandong University of Technology, Zibo City, Shandong Province 255091, China)

**[Abstract]** Motion planning is one of the key technologies of intelligent vehicles, including path planning and trajectory planning. The purpose of motion planning is that the intelligent vehicle can travel steadily and rapidly in complex road environment. For real-time and flexibility of intelligent vehicle trajectory planning, a real-time trajectory planning method is put forward based on polynomials theory and differential flatness theory. First, the differential flatness nature of the nonlinear system of intelligent vehicle is analyzed and its flat input and output are determined; and secondly, the intelligent vehicle's trajectory is generated through a fully parametric polynomial curve; and finally, it is verified that the method for real-time intelligent vehicle trajectory planning has better validity and enforceability by comparing simulation with B-spline trajectory planning.

**[Key words]** intelligent vehicles; trajectory planning; polynomial

## 0 引言

智能车辆运动规划问题是智能车辆智能导航关键技术之一,是其实现智能导航和运动控制的基础。运动规划包括路径规划和轨迹规划,路径规划是指根据智能车辆感知的环境信息,通过某种算法寻找一条从起始状态到达目标状态的无碰撞路径。轨迹规划是在路径规划的基础上,生成满足系统内在约束的运动时间序列,最终得到连接始末状态的可行路径。

智能车辆路径规划按照其研究方法不同主要分为两类:一类是基于环境地图信息的全局路径规划,它是根据先验环境模型找出一条车辆可顺利运行路径,其中涉及环境模型表达和搜寻策略基本问题。环境建模方法主要有文献[1-2]使用的栅格法、文献[3]使用的可视图法及文献[4]使用的自由空间法等方法,搜寻策略则有文献[5]提到

的A\*算法、文献[6]提到的D\*算法及文献[7]提到的拓扑搜索等方法;另外一类是基于智能车辆周围信息的局部路径规划,它是指车辆在运行环境部分未知或者完全未知的情况下,通过其自身传感设备实时获取道路及障碍物等信息并做出决策,实现无碰撞行驶。局部路径规划的主要方法有:文献[8-9]使用的模糊逻辑算法、文献[10-11]使用的人工势场法、文献[12]使用的神经网络算法、文献[13-14]使用的遗传算法等。

很多文献针对智能车辆轨迹规划提出多种解决方法,早期的研究方法主要有文献[15-16]研究的微分几何法、文献[17]研究的输入参数法、文献[18]研究的几何相位法等。虽然这些方法能够实现轨迹规划,但是在其轨迹生成过程中实时应用性较差。随着控制技术的不断发展,很多专家学者提出了一些实时轨迹规划方法<sup>[19-20]</sup>,在路径规划的基础上增加时间序列,但是这些方法不能对其系统的可执行性进行实时验证。不过,文献[21-22]提出的非线性几何控制方法可以有效弥补上

收稿日期:2012-12-17 修回日期:2012-12-31

述轨迹规划方法的不足,这种方法基于系统微分平坦性质实现实时轨迹规划,其优点在于利用微分平坦系统在确定其输入的情况下,不需复杂的运算即可得到期望的规划曲线,并且方便对其约束条件验证。但是,文献[21-22]提出了采用 B 样条曲线进行轨迹生成,该方法存在车辆行为表现出动态变化时无法更合理地确定 B 样条段数的问题。

针对文献[21-22]存在的问题,本文依据智能车辆运动学模型微分平坦性质,运用多项式参数化曲线进行轨迹生成,这种方法只需变换曲线的参数就可以实现车辆不同的轨迹规划行为,从而使智能车辆轨迹规划更具实时性、灵活性。对于智能车辆行驶轨迹的生成,按照现有的道路线形条件规划出一条适合其行驶的轨迹,然后根据轨迹上的点来引导智能车辆行驶,同时,轨迹规划曲线的平坦性保证了智能车辆轨迹生成的可执行性。

## 2 模型建立

### 2.1 车辆模型平坦分析

微分平坦是研究非线性系统过程中提出的一个概念,其意义是通过合适的系统平坦输出解决非线性系统的轨迹生成问题。对于微分平坦系统而言,系统的平坦输出及其导数能表示出该系统的所有状态变量及输入变量,然而目前微分平坦系统的判定还没有一个统一的标准,因此在研究过程中根据实际情况选择系统平坦输出,然后结合系统特性推导出输入变量的表达式。

将智能车辆由一个简化的非完整性系统模型即车辆的运动学模型表示出来如图 1,其中  $l$  是车辆前后轴距, $\delta$  是前轮转向角,状态变量  $x, y, \theta$  表示车辆后轴中点的坐标及车身方向角。

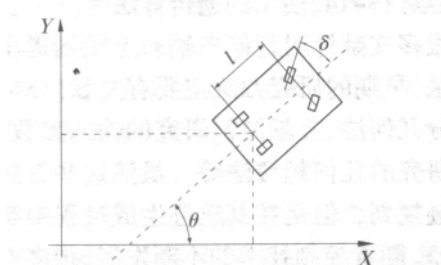


图 1 车辆运动学模型

Fig.1 Vehicle kinematic model

考虑车辆不发生侧向移动,必须满足如下非完整约束:

$$x \sin \theta - y \cos \theta = 0. \quad (1)$$

在车辆每个转向瞬间,其速度  $v$  与瞬时圆弧轨迹相切,存在关系式:  $\theta = v \cdot k$ , 其中  $k = \frac{\tan \delta}{l}$  为瞬时轨迹曲率,由此可得到运动学模型:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \delta \end{cases}. \quad (2)$$

选择其平坦输出为  $z = [x, y]$  输入为  $u = [v, \delta]$  来判定该系统是否具有平坦性,经过简单推导可以得出输入量与输出量的关系式为

$$\begin{cases} v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\ \delta = \arctan \left[ \frac{l(\dot{y} \cdot \ddot{x} - \dot{x} \cdot \ddot{y})}{v^3} \right]. \end{cases} \quad (3)$$

由此可以得出该系统为微分线性系统。

### 2.2 平面曲线模型

对于智能车辆的轨迹规划,具体曲线生成方法的研究是其中关键。由 2.1 车辆模型平坦分析已经确定系统平坦输出,将平坦输出参数化为合适的时间函数,从而生成智能车辆行驶的可行轨迹。

在其平坦输出参数化研究方面,引入微分几何中对于平面曲线的研究方法。在微分几何中,曲线的曲率通过向量分析由其导数表示,弧长则由其积分表示,并且任何正则曲线都可以用弧长对其参数化。Frenet 标架(如图 2)作为微分几何中分析曲线的一个重要工具,是用于给出曲线每个点坐标系的一个活动标架。

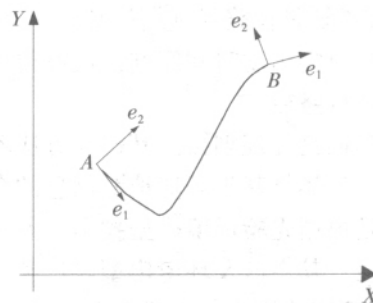


图 2 Frenet 标架

Fig.2 Frenet frame

在坐标系中,智能车辆的位置即其后轴点由向量  $w = [x, y]^T$  表示,假设车辆在行驶过程中速度保持不变,规划曲线由  $w(t_0) = [x_A, y_A]^T$  开始到  $w(t_1)$

$= [x_B, y_B]^T$  结束。曲线的一次导数  $\frac{dw}{dt} = [\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}]^T$ , 对于曲线  $w$  的正则性体现在对于  $\dot{w}$  它的一次导数  $\frac{d\dot{w}}{dt} \neq 0$ 。在  $t \in [t_0, t_1]$  内车辆沿路线行驶曲线长度  $s$  为

$$s = \int_{t_0}^t \|\dot{w}\| dt = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt. \quad (4)$$

对于该正则曲线的反函数为  $t = f^{-1}(s)$ , 通过该曲线函数及其反函数, 所有的后续方程都可以由  $s$  或  $t$  表示。

根据曲线理论, 曲线  $w$  上的每个点都可以用两个正交的单位向量  $e_1$  和  $e_2$  组成的 Frenet 标架表示。单位向量  $e_1$  与曲线相切, 单位向量  $e_2$  与其正交。

曲线上各点的 Frenet 标架是对其相应坐标及方向的具体描述, 它们的公式表示如下:

$$e_1 = \frac{dw}{ds} = \frac{\dot{w}}{\|\dot{w}\|}. \quad (5)$$

$$ke_2 = \frac{d^2w}{ds^2} = \frac{(\dot{w} \times \ddot{w}) \times \dot{w}}{\|\dot{w}\|^4}. \quad (6)$$

式中,  $k$ ——曲线  $w$  的曲率, 它符号的正负取决于向量  $e_2$  方向的选择;  $k_A, k_B$ ——路线起点和终点的曲率, 同时  $\theta_A$  和  $\theta_B$  分别表示 Frenet 标架在路线起始点及终点的方向。

### 3 曲线参数化及特性分析

选择一系列的关键点, 各关键点之间分段曲线插值形成整体二次可导的曲线即为智能车辆规划轨迹, 然后结合公式(3)计算出前轮转向角  $\delta$ , 进而使车辆按照规划路线智能行驶。

根据给定起点  $A$  和终点  $B$  的坐标、起点  $A$  和终点  $B$  的  $\theta_A$  和  $\theta_B$  及曲率  $k_A$  和  $k_B$  来进行多项式曲线插值, 曲率  $k_A$  和  $k_B$  的正负方向根据 Frenet 标架确定, 同时满足  $\theta_A \in [0, 2\pi), \theta_B \in [0, 2\pi), k_A \in R, k_B \in R$ 。对于起点  $A$  处  $\theta_A$  和  $k_A$  表征的是车辆现有的状态, 而对于终点  $B$  处  $\theta_B$  和  $k_B$  表征的则是车辆沿规划路线行驶后所处的状态。

本文中我们选用一条五次多项式曲线作为智能车辆的轨迹规划方法, 即:

$$w(t) = [x(t), y(t)]^T = \begin{cases} x(t) = \sum_{i=0}^{im} \alpha_i t^i \\ y(t) = \sum_{i=0}^{im} \beta_i t^i \end{cases}. \quad (7)$$

其中:  $t \in [0, 1]; im=5$ ;

$$\alpha_0 = x_A; \alpha_1 = \eta_1 \cos \theta_A;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} (\eta_3 \cos \theta_A - \eta_1^2 k_A \sin \theta_A);$$

$$\alpha_3 = 10(x_B - x_A) - (6\eta_1 + \frac{3}{2}\eta_3) \cos \theta_A -$$

$$(4\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_4) \cos \theta_B + \frac{3}{2}\eta_1^2 k_A \sin \theta_A - \frac{1}{2}\eta_2^2 k_B \sin \theta_B;$$

$$\alpha_4 = -15(x_B - x_A) + (8\eta_1 + \frac{3}{2}\eta_3) \cos \theta_A +$$

$$(7\eta_2 - \eta_4) \cos \theta_B - \frac{3}{2}\eta_1^2 k_A \sin \theta_A + \eta_2^2 k_B \sin \theta_B;$$

$$\alpha_5 = 6(x_B - x_A) - (3\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_3) \cos \theta_A -$$

$$(3\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_4) \cos \theta_B + \frac{1}{2}\eta_1^2 k_A \sin \theta_A - \frac{1}{2}\eta_2^2 k_B \sin \theta_B;$$

$$\beta_0 = y_A; \beta_1 = \eta_1 \sin \theta_A;$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} (\eta_3 \sin \theta_A + \eta_1^2 k_A \cos \theta_A)$$

$$\beta_3 = 10(y_B - y_A) - (6\eta_1 + \frac{3}{2}\eta_3) \sin \theta_A -$$

$$(4\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_4) \sin \theta_B - \frac{3}{2}\eta_1^2 k_A \cos \theta_A + \frac{1}{2}\eta_2^2 k_B \cos \theta_B;$$

$$\beta_4 = -15(y_B - y_A) + (8\eta_1 + \frac{3}{2}\eta_3) \sin \theta_A +$$

$$(7\eta_2 - \eta_4) \sin \theta_B + \frac{3}{2}\eta_1^2 k_A \cos \theta_A - \eta_2^2 k_B \cos \theta_B;$$

$$\beta_5 = 6(y_B - y_A) - (3\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_3) \sin \theta_A -$$

$$(3\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_4) \sin \theta_B - \frac{1}{2}\eta_1^2 k_A \cos \theta_A + \frac{1}{2}\eta_2^2 k_B \sin \theta_B。$$

在上面公式中出现了多项式轨迹规划方法中另外一个重要的向量参数  $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4]^T$ , 它的取值范围集合  $U = (R^+ \times R^+ \times R \times R)$ 。

为了反映参数  $\eta$  对于插值曲线的影响, 本文针对其不同取值情况下的轨迹规划进行仿真对比实验。仿真对比实验中, 车辆起点  $A$  坐标  $(0, 0)$  且  $\theta_A = 0, k_A = 0$ , 终点  $B$  坐标  $(60, 5)$  且  $\theta_B = 0, k_B = 0$ 。同时为了方便比较参数  $\eta$  对规划曲线的影响, 得到规划曲线的对称形状, 本文在参数  $\eta$  的取值上令  $\eta_3 = -\eta_4$ , 如图 3。

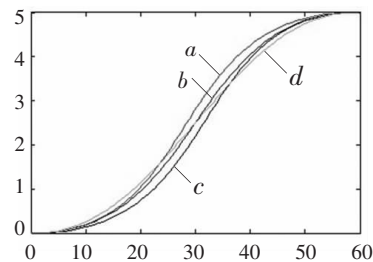


图 3 不同规划曲线图

Fig.3 Different planning curve graph

规划曲线  $b$  的  $\eta$  取值为  $[40 \ 40 \ 400-400]^T$ , 黑规划曲线  $c$  的  $\eta$  取值为  $[50 \ 40 \ 400-400]^T$ , 规划曲线  $a$  的  $\eta$  取值为  $[40 \ 50 \ 400-400]^T$ , 规划曲线  $d$  的  $\eta$  取值为  $[40 \ 40 \ 200-200]^T$ 。规划曲线  $b$  与规划曲线  $c$  差别在于分量  $\eta_1$  取值不同, 规划曲线  $b$  与规划曲线  $a$  差别在于分量  $\eta_2$  取值不同, 规划曲线  $b$  与规划曲线  $d$  差别在于分量  $\eta_3, \eta_4$  取值不同。由此可以得出, 对于整条规划曲线来说, 分量  $\eta_1$  取值主要影响曲线开始时段的形状, 分量  $\eta_2$  取值主要影响曲线结束时段的形状, 而分量  $\eta_3, \eta_4$  取值则主要影响曲线的扭曲度。

#### 4 实例验证

本文通过选定 5 个关键点代入公式(7)中进行智能车辆的轨迹规划, 其中 5 个关键点的参数数据见表 1。将 5 个关键点分别代入多项式曲线, 并且确定各段曲线参数  $\eta$  取值为  $[50 \ 50 \ 0 \ 0]^T$ , 得到如图 4 中  $a$  曲线。

表 1 轨迹关键点数据  
Tab.1 Track key data

	$D_0$	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$
$x/m$	0	50	100	120	105
$y/m$	0	15	25	65	110
$\theta/\text{rad}$	0	0	0.5	1.5	2.5
$k/m^{-1}$	0	0	0.02	0.02	0.02

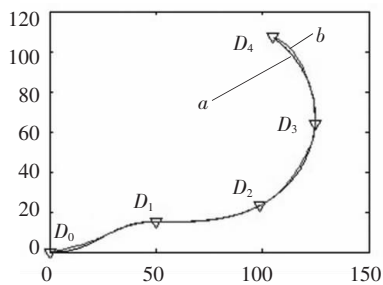


图 4 曲线生成图

Fig.4 Curve generated graph

结合图 4 中  $a$  曲线及表 1 给出的轨迹关键点数据, 可以得出智能车辆在行驶过程中分别表现出 3 种不同的行为。其中, 从  $D_0$  到  $D_1$  段表现的是智能车辆的车道变换行为,  $D_1$  到  $D_2$  段表现的是智能车辆道路回旋曲线轨迹规划行为,  $D_2$  到  $D_3$  段及  $D_3$  到  $D_4$  段则表现的是智能车辆道路圆曲线轨迹规划行为。从图 5 中各段曲线曲率变化就可以验证以上行为,  $K_1$  为  $D_0$  到  $D_1$  段曲线  $a$  曲率变化, 从

其变化趋势及曲线形状上可知, 符合车道变换行为为轨迹变化的基本特性;  $K_2$  为  $D_1$  到  $D_2$  段曲线  $a$  曲率变化, 其曲率逐渐增加与回旋曲线相似;  $K_3$  和  $K_4$  为  $D_2$  到  $D_3$  段及  $D_3$  到  $D_4$  段曲线  $a$  曲率变化, 其曲率基本保持不变, 与圆曲线的基本特性相符。由此可以得出, 多项式曲线能够很好地实现智能车辆不同行为的轨迹规划。

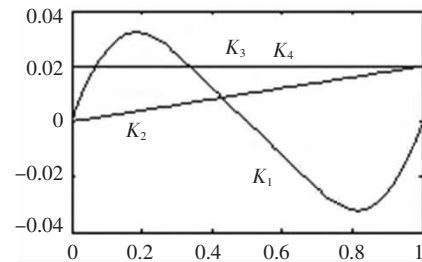


图 5 各段曲线曲率变化图

Fig.5 Paragraphs curve curvature change graph

另外, 为了能够更好体现多项式曲线轨迹规划优势, 结合表 1 数据及  $B$  样条理论进行轨迹规划, 其结果如图 4 中  $b$  曲线。从图 4 中可以看出, 在  $D_0$  到  $D_1$  段车辆车道变换行为方面, 多项式轨迹规划较  $B$  样条轨迹规划更显得平顺缓和, 更接近实际情况;  $D_1$  到  $D_2$  段道路回旋曲线轨迹规划行为方面, 多项式轨迹规划和  $B$  样条轨迹规划相比差别不大;  $D_2$  到  $D_3$  段及  $D_3$  到  $D_4$  段的道路圆曲线轨迹规划行为方面,  $B$  样条轨迹规划不符合圆曲线的基本特性。由此可知, 在车辆变道及道路圆曲线轨迹规划方面, 多项式轨迹规划比  $B$  样条轨迹规划要好。

#### 5 总结

结合平面曲线理论及车辆运动学模型的平坦性给出一个多项式曲线函数用于智能车辆行驶路线的生成, 并且通过变换该曲线参数对规划曲线进行特性分析。最后, 选取关键点及有关参数生成智能车辆轨迹路线, 并且通过分析各段路线曲率变化和  $B$  样条轨迹规划对比验证该多项式曲线可用于智能车辆的轨迹规划。

#### 参考文献

- [1] METEA M B. Planning for intelligence autonomous land vehicles using hierarchieal terrain representation[R]. Proc.of IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation.1987:1947-1952.
- [2] 于红斌, 基于栅格法的机器人快速路径规划[J], 微电子与计算机, 2005, 22(6): 98-100.



- Yu Hongbin. Fast path planning based on grid model of robot [J]. *Microelectronics & Computer*, 2005, 22(6): 98–100.
- [3] PEER. Automatic planning of manipulator movements [J]. *IEEE Transon Sys Man and Cybern*, 1981, 11(11): 681–698.
- [4] BROOKS R A. Solving the find-path problem by good representation of free space [J]. *IEEE Transon Sys Man and Cybern*, 1983, 13(3): 190–197.
- [5] 龚根华. 轮式移动机器人控制系统设计与研究 [D]. 南京: 南京航空航天大学, 2004.
- Gong Genhua. Design and research on the control system of wheeled mobile robot [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2004.
- [6] YAHJA A, SINGH S S. An efficient on-line path planner for outdoor mobile robots [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2000, 32(2–3): 129–143.
- [7] 徐大海. 网络拓扑自动搜索算法研究 [J]. *计算机应用*, 1999(2): 23–27.
- Xu Dahai. Algorithm of network topology search [J]. *Computer Applications*, 1999(2): 23–27.
- [8] NELSON H C, YE Yung Cang. An intelligent mobile vehicle navigator based on fuzzy logic and reinforcement learning [J]. *IEEE Transon Sys Man and Cybern. Part B: Cybernetics*, 1999, 29(2): 314–321.
- [9] 庄晓东, 孟庆春. 动态环境中基于模糊概念的机器人路径搜索方法 [J]. *机器人*, 2001, 23(5): 397–399.
- Zhuang Xiaodong, Meng Qingchun. A method of robot's path searching in dynamic enviroment based on fuzzy concept [J]. *Robot*, 2001, 23(5): 397–399.
- [10] KHATIB O. Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots [J]. *Int. J. Robotics Research*, 1986, 5(1): 90–98.
- [11] 张育. 基于V距离势场的实时滚动路径规划 [J]. *机器人*, 1997, 19(5): 350–355.
- Zhang Yu. Real time rolling path planning baed on V distance field [J]. *Robot*, 1997, 19(5): 350–355.
- [12] 樊长虹, 卢有章, 刘宏, 等. 基于神经网络的移动机器人路径规划 [J]. *计算机工程与应用*, 2004(8): 86–89.
- Fan Changhong, Lu Youzhang, Liu Hong, et al. Path planning for mobile robot based on neural networks [J]. *Computer Engineering and Applications*, 2004(8): 86–89.
- [13] HOLLAND J H. Genetic algorithms and the optimal allocations of trails [J]. *SIAM Journal of Computing*, 1973, 2(2): 88–105.
- [14] 周明. 使用遗传算法规划机器人路径 [J]. *西北工业大学学报*, 1998, 16(4): 581–583.
- Zhou Ming. A simple but efficient method for path planning of mobile robot using genetic algorithm [J]. *Journa of Northwest-ern Polytechnical University*, 1998, 16(4): 581–583.
- [15] YANG E F, GU D B, MITA T, et al. Nonlinear tracking control of a car-like mobile robot via dynamic feedback linearization [J]. *Control 2004*, University of Bath, 2004: 1503–1508.
- [16] KÄUHNE F, LAGES W F, J. M. G. DA SILVA Jr. Model predictive control of a mobile robot using linearization [J]. *Robotics 2004*, 2004, 14(6): 543–559.
- [17] GORINEVSKY D, KAPITANOVSKY A, Goldenberg. Neural network architecture and controller design for automated car parking [R]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 1996, 4: 50–56.
- [18] REYHANOGU M. A general nonholonomic motion planning strategy for caplygin systems [R]. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 1994, 3: 2964 – 2966.
- [19] VERMA A, JUNKINS J. Inverse dynamics approach for real-time determination of feasible aircraft reference trajectories [C]. *AIAA Guidance Control and Navigation Conference*, 1999: 545–554.
- [20] ROSS I M, FAHROO F. Issues in the real-time computation of optimal control [J]. *Mathematical and Computer Modelling*. 2006: 1172–1188.
- [21] NIEUWSTADT V. Trajectory generation for nonlinear control systems [D]. *Cal.Inst.of Tech*; 1997.
- [22] MILAM M B. Real-time optimal trajectory generation for constrained dynamical systems [D]. *Pasadena, California: California Institute of Technology*, 2003.
- [23] 王兴波, 陈希祥. 广义Frenet标架系统及其应用 [J]. *湖南理工学院学报: 自然科学版*, 2006, 19(3): 1–4.
- Wang Xingbo, Chen Xixiang. Generalized frenet frame and its applications [J]. *Journal of Hunan Institiute of Science and Technology: Natural Sciences*, 2006, 19(3): 1–4.

**作者简介** 马川(1987—), 男, 山东理工大学在读硕士, 研究方向: 智能交通道路监控、智能车辆运动规划及控制。E-mail: machuan20082006@126.com

曹凯(1959—), 男, 博士、山东理工大学副教授, 主要从事智能控制及应用、全球定位系统(GPS)及地理信息系统(GIS)在智能交通系统中应用、复杂系统建模和交通网络均衡分析等方面的研究。