

1

a, b, c を複素数とすると、次のことは正しいか。正しいものは証明し、正しくないものについては反例（成り立たない例）をあげよ。

- (1) ab, bc, ca がすべて 0 ならば、 a, b, c はすべて 0 である。
- (2) $a+b, b+c, c+a$ がすべて実数ならば、 a, b, c はすべて実数である。
- (3) $a^2+b^2+c^2=0$ ならば a, b, c はすべて 0 である。
- (4) $a+b+c=0, ab+bc+ca=0$ ならば、 $a^3=b^3=c^3$ である。

1970

解答

- (1) $a=0, b=0, c=1$ のとき、 ab, bc, ca は 0 となるが、 a, b, c は 0 ではないため、偽である。
- (2) $a=c+fi, b=g+hi, c=j+ji$ とする。 $a+b, b+c, c+a$ が実数であるから、 $f+h=0, h+k=0, k+f=0$ となり、これを満たす f, h, k の組み合わせは、 $(f, h, k) = (0, 0, 0)$ となる。
よって、 $a+b, b+c, c+a$ がすべて実数であるとき、 a, b, c は実数となる。
- (3) $a^2 \geq 0, b^2 \geq 0, c^2 \geq 0$ であるから、 $a^2+b^2+c^2=0$ となるには、 $a^2=0, b^2=0, c^2=0$ でなければならないから、 $a=b=c=0$ となる。
- (4) $abc=d$ とすると、解と係数の関係から、 a, b, c は $x^3-d=0$ の解となる。よって、 $a=b=c$ となる。

2

a, b が実数で $|a|+|b|<1$ のとき、2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 根の絶対値は、ともに 1 より小さいことを証明せよ。

1970

解答

$$x^2+ax+b=0 \text{ の解を } \alpha, \beta \text{ とする。} \begin{cases} \alpha+\beta=a \\ \alpha\beta=b \end{cases}, \begin{cases} |\alpha|=|\alpha+\beta| \\ |\beta|=|\alpha\beta| \end{cases}$$

また、 $1>|a|+|b|=|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$ である。

- (i) 2 根の絶対値がともに 1 以上と仮定すると、明らかに矛盾する。
- (ii) 2 根の絶対値のうち、一方が 1 以上であると仮定すると、 $1>|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$
 - (I) $\alpha>1$ とすると、 $-1<\beta<0$ である。 $|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=\alpha+\beta-\alpha\beta=(1-\beta)\alpha+\beta$
ここで、 $(1-\alpha)<1$ より、 $\alpha<\frac{1}{1-\beta}$ である。また、 $-1<\beta<0$ より、 $\frac{1}{2}<\alpha<1$ となるが、これは $\alpha>1$ に矛盾する。
 - (II) $\alpha<-1$ となると、 $0<\beta<1$ である。 $|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=-(\alpha+\beta)-\alpha\beta=-(1+\beta)\alpha-\beta$ であり、 $-(1+\beta)\alpha<1$ より、 $\alpha<-\frac{1}{1+\beta}$ となるが、 $0<\beta<1$ より、 $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ となるため、矛盾する。

(I), (II) より、2 根の絶対値が 1 以上と仮定すると矛盾が生じるため、2 根の絶対値はともに 1 よりも小さいことが示された。□

3

座標平面で点 P は x 軸上を正の方向へ、点 Q は y 軸上を正の方向へ、点 R は傾き（勾配）1 の直線上を上方へ、それぞれ一定の速さ a, b, c で動いている。3 点 P, Q, R はつねに一直線上にあり、ある時刻に P の位置は $(4, 0)$ 、 Q の位置は $(0, 2)$ 、 R の位置は $(2, 1)$ であった。このとき a, b, c の値の比を求めよ。

1970

解答

P, Q, R が x 軸上で一直線になるときを t_1 とする. このとき, $P(x, 0)$, $Q(0, 0)$, $R(1, 0)$ である.
 P, Q, R が y 軸上で一直線になるときを t_0 とする. このとき, $P(0, 0)$, $Q(0, y)$, $R(0, -1)$ である.
 また, $P(4, 0)$, $Q(0, 2)$, $R(2, 1)$ となるときを t_2 とする.

P t_0 から t_2 における距離の変化は, 4 …… ①

Q t_1 から t_2 における距離の変化は, 2 …… ②

R t_0 から t_2 における距離の変化は, $2\sqrt{2}$ …… ③

R t_1 から t_2 における距離の変化は, $\sqrt{2}$ …… ④

①, ③ から, P と R の速度の比は, $a : c = 4 : 2\sqrt{2}$ である.

②, ④ から, Q と R の速度の比は, $b : c = 2 : \sqrt{2}$ である.

したがって, $a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$ となる.

4

次の (1), (2) を証明せよ.

(1) $\sin x$ は, x の整式としては表わせない.

(2) $f(x)$ は実数全体を定義域とする微分できる関数で, $f(1) = 0$ である. このとき

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1} & (x \neq 1 \text{ のとき}) \\ f'(1) & (x = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおけば, $g(x)$ は連続関数である.

1970

解答

(1) $\sin x = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ と仮定する. (a_k は任意の実数)

このとき, $(\sin x)^4 = \sin x$ であるので, $(\sin x)^{(4l)} = \sin x$ (l は整数) となる. ここで, $4l > n$ となる l を考えると, $(\sin x)^{(4l)} = \sin x = 0$ となるため, これは矛盾である. したがって, $\sin x$ は x の整式で表すことは出来ない.

(2) 平均値の定理から,

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c)$$

を満たす c が存在する位置について, 場合分けを行う.

(i) $x > 1$ のとき, $1 < c < x$ の位置に存在する. したがって, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c)$ となる.

(ii) $x < 1$ のとき, $x < c < 1$ の位置に存在する. したがって, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c)$ となる.

よって, (i), (ii) から, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(c)$ となるから, $g(x)$ は連続関数である.

1

n は 2 以上の自然数で, $0 \leq x \leq 1$ のとき, $\sum_{k=0}^n x^k \leq n + x^{n+1}$ を証明せよ.

1971

解答

(i) $n = 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 & x^3 + 2 - (x^2 + x + 1) \\
 &= x^3 - x^2 - x + 1 \\
 &= x^2(x-1) - (x-1) \\
 &= (x+1)(x-1)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

より, 成立.

(ii) $n = 2, 3, \dots, n$ のとき,

$$\sum_{k=0}^l x^k \leq l + x^{l+1}$$

が成立すると仮定する.

 $n = l+1$ のとき,

$$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leq (l+1) + x^{l+2}$$

が成立することを示せばよい.

$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leq l + x^{l+1} + x^{l+2}$ であり, $0 \leq x \leq 1$ より, $0 \leq x^{l+1} \leq 1$ であるから, $l + x^{l+1} + x^{l+2} \leq (l+1) + x^{l+2}$ が成立する.

(i), (ii) から, すべての自然数 n について, $\sum_{k=0}^n x^k \leq n + x^{n+1}$ が成立する. □

2

放物線 $y = x^2$ 上の異なる 3 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) における法線が 1 点で交わる時, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ であることを証明せよ. (曲線上の 1 点で, 接線に垂直な直線を, その点における曲線の法線という)

1971

解答

 (x_1, y_1) における $y = x^2$ の法線の方程式は,

$$y = -\frac{1}{2x_1}(x - x_1) - x_1^2 \quad \dots\dots ①$$

同様に, (x_2, y_2) における場合は,

$$y = -\frac{1}{2x_2}(x - x_2) + x_2^2 \quad \dots\dots ②$$

①, ② を連立して,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2x_1}x + x_1^2 + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2x_2}x + x_2^2 + \frac{1}{2} \\
 -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)x &= x_2^2 - x_1^2 \\
 x &= 2(x_1^2 - x_2^2) \cdot \left(\frac{x_1 x_2}{x_2 - x_1}\right) \\
 &= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \cdot \frac{x_1 x_2}{x_2 - x_1} \\
 &= -2x_1 x_2 (x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$

したがって, 交点 $(x, y) = (-2x_1 x_2 (x_1 + x_2), x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2})$ である.

(x_3, y_3) における法線も同じ点で交わるから,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2x_3} \{-2x_1x_2(x_1 + x_2)\} + x_2^2 + \frac{1}{2} \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 &= \frac{x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_3} + x_3^2 \\ 0 &= x_3^3 - x_3(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + x_1x_2(x_1 + x_2) \\ 0 &= (x_3 + x_2 + x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{aligned}$$

ここで, $x_3 \neq x_1, x_3 \neq x_2$ であるから, $x_3 + x_2 + x_1 = 0$ である.

(証明終了)

3

a

(1) $y = \frac{\log x}{x^3}$ ($x > 0$) の増減を調べ, グラフの概形をかけ.

(2) $\int_1^t \frac{\log x}{x^3} dx$ を求め, $t \rightarrow +\infty$ のときの極限値を求めよ.

b

数字 0 を記した札が n 枚, 数字 1, 2, …, 9 を記した札がそれぞれ m 枚ある. この中から任意に 1 枚を取り出し, その札の数字だけの賞金を受ける. ただし数字 0 の札を引いたときは, その札を戻したうえ, もう 1 回だけ引きなおして, 賞金を受けるものとする.

(1) 賞金の期待値を求めよ.

(2) 期待値を 3 以下にするには, 比 $\frac{n}{m}$ をどの程度に大きくすればよいか.

1971

解答

a

(1) $y = \frac{\log x}{x^3}$ より, x について微分して, $y' = \frac{1 - 3\log x}{x^4}$, $y'' = \frac{4(3\log x - 2)}{x^5}$ である.
増減表は以下の通りになる.

b

(1)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^9 k \frac{m}{9m+n} \\ &= \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \frac{m}{9m+n} \\ &= \frac{45m}{9m+n} \end{aligned}$$

期待値を $E(X)$ とすると,

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{45m}{9m+n} + \frac{n}{9m+n} \times \frac{45m}{9m+n} \\ &= \frac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \underline{\underline{E(X) = \frac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}}}$$

(2) $m \neq 0$ であるから, $E(X) = \frac{45\left(9 + 2\frac{n}{m}\right)}{\left(9 + \frac{n}{m}\right)^2}$ と表すことができる.

$\frac{n}{m} = t$ とし, $f(t) = \frac{45(9+2t)}{(9+t)^2}$ と定めると, $f(t) \leq 3$ から,

$$f(t) \leq 3$$

$$\frac{45(9+2t)}{(9+t)^2} \leq 3$$

$$15(9+2t) \leq (t+9)^2$$

$$t^2 + 18t + 81 - 135 - 30t \geq 0$$

$$t^2 - 12t - 54 \geq 0$$

$t > 0$ より, これを解いて, $t \geq 6 + 3\sqrt{10}$ であるから, 比 $\frac{n}{m}$ は $6 + 3\sqrt{10}$ 以上にすればよい.

(答) $6 + 3\sqrt{10}$

1

次のおのおのについて解答せよ.

- (1) 4 辺形
- $ABCD$
- と 1 点
- P
- がある.

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DP}$$

が成立するならば, この 4 辺形はどんな 4 辺形か.

- (2)
- $x_k \geq 0$
- (
- $k = 1, 2, \dots, n$
-) のとき, 次の不等式を証明せよ.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n} \geq \frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{1 + x_1} + \frac{x_2}{1 + x_2} + \dots + \frac{x_n}{1 + x_n} \right)$$

1972

解答

$$(1) \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{DP}$$

$$\overrightarrow{AP} + (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 0$$

ここで, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であるから, 四角形 $ABCD$ は平行四辺形となる.

- (2)
- $f(t) = \frac{t}{1+t}$
- とする.
- $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$
- となり, 増減表は以下のようになる.

t	0
$f'(t)$		+	
$f(t)$	0	↗	

$f(t)$ は $t \leq 0$ において, 狭義単調増加である. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = t$ とすると, $\frac{t}{1+t} \leq \frac{x_k}{1+x_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) であるから,

$$\frac{t}{1+t} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{t}{1+t} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1+x_k}$$

を満たす. よって, 題意は示された. \square

2

$f(z)$ は, 複素数を係数とする z の 1 次式であって, $f(f(f(z))) = z$ がつねに成り立つものとする. このような $f(z)$ をすべて求めよ.

1972

解答

$$f(z) = (a + bi)z + c$$

$$f(f(z)) = (a + bi)\{(a + bi)z + c\} + c$$

$$= (a^2 - b^2 + 2abi)z + c(a + 1 + bi)$$

$$f(f(f(z))) = (a + bi)^2\{(a + bi)z + c\} + c\{(a + bi) + 1\}$$

$$= (a + bi)^3 z + c\{(a + bi)^3 + (a + bi) + 1\}$$

ここで, $f(f(f(z))) = z$ から, $\begin{cases} (a + bi)^3 = 1 \\ c\{(a + bi)^3 + (a + bi) + 1\} = 0 \end{cases}$ を満たす. よって, $c = 0$ である.

また, $(a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i) = 1$ より, $\begin{cases} b(3a^2 - b^2) = 0 \\ a^3 - 3ab^2 = 1 \end{cases}$ であり, $\begin{cases} b(3a^2 - b^2) = 0 \\ a(a^2 - 3b^2) = 1 \end{cases}$ である.

よってここで場合分けを行う.

- (i)
- $b = 0$
- のとき,
- $a^3 = 1$
- であり,
- a
- は実数より
- $a = 1$

(ii) $3a^2 = b^2$ のとき, $a(-8a^2) = 1$ であり, a, b は実数より, $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ である.

$$(\text{答}) \quad f(z) = z, \left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$$

3

次の数列 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ の収束, 発散を調べ, 解答欄の表に番号を記入せよ. またその理由を述べよ.

(1) $a_n = \frac{1}{n} \sin n$

(2) $a_n = n^2 \sin \frac{1}{n}$

(3) $a_n = n \cos \frac{n\pi}{4}$

(4) $a_n = \sqrt{2n} - n$

(5) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$

(6) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

1972

解答

(1) $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ より, $-\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n}$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ から, はさみうちの原理より, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である. したがって, 0 に収束する.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n \sin \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ より, 発散する.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{n}{4} \pi$ は振動するから, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{n}{4} \pi$ も振動する.

(4) $a_n = \frac{(\sqrt{2n} - n)(\sqrt{2n} + n)}{\sqrt{2n} + n} = \frac{n^2 - 2n}{n + \sqrt{2n}} = \frac{n - 2}{1 + \sqrt{\frac{2}{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ より, 発散する.

(5) $\frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{n^2}$ より,

$$0 < a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{2n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ より, はさみうちの原理から, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である. したがって, 0 に収束する.

(6)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 = \log 2 \end{aligned}$$

したがって, $\log 2$ に収束する.

4

平面上の点 $P(x_0, y_0)$ を通って, 放物線 $y = x^2$ に 2 本の接線が引けるための必要十分条件は $x_0^2 > y_0$ であることを証明せよ. またこのとき, この 2 本の接線の接点を Q, R として, 3 角形 PQR の面積を x_0, y_0 で表せ.

1972

解答

$y = x^2$ の $x = t$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + t^2 \\ &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

であり、これが (x_0, y_0) を通るとき、 $t^2 - 2tx_0 + y_0 = 0$ を満たし、これが異なる 2 解を持つ条件は、この二次方程式の判別式を D とすると、 $\frac{D}{4} = x_0^2 - y_0 > 0$ であるから、 $x_0^2 > y_0$ となる。

また、 $Q(x_0 + \sqrt{x_0^2 - y_0}, 2x_0^2 - y_0 + 2\sqrt{x_0^2 - y_0})$, $R(x_0 - \sqrt{x_0^2 - y_0}, 2x_0^2 - y_0 - 2\sqrt{x_0^2 - y_0})$ となるから、三角形 PQR の面積は、 $P(0, 0)$, $Q'(\sqrt{x_0^2 - y_0}, 2x_0^2 - 2y_0 + 2\sqrt{x_0^2 - y_0})$, $R'(-\sqrt{x_0^2 - y_0}, 2x_0^2 - 2y_0 - 2\sqrt{x_0^2 - y_0})$ となる。

ここで、三角形の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} | -\sqrt{x_0^2 - y_0} \times (2x_0^2 - 2y_0 + 2\sqrt{x_0^2 - y_0}) - \sqrt{x_0^2 - y_0} \times (2x_0^2 - 2y_0 - 2\sqrt{x_0^2 - y_0}) | \\ &= \frac{1}{2} | -2(2x_0^2 - 2y_0)\sqrt{x_0^2 - y_0} | \\ &= 2(x_0^2 - y_0)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \underline{\underline{(\text{面積}) = 2(x_0^2 - y_0)^{\frac{3}{2}}}}$$

1

すべての複素数 z に対して $|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z} + 1 \geq 0$ となる複素数 a の集合を求め、これを複素平面上に図示せよ。ただし \bar{a} , \bar{z} はそれぞれ a , z の共役複素数を表す。

1973

解答

$$|z|^2 + az + \bar{a}\bar{z} + 1 \leq 0 \text{ より, } z \cdot \bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + 1 \leq 0$$

ここで, $z = \alpha + \beta i$, $a = \gamma + \delta i$ とする.

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\gamma + \delta i)(\alpha + \beta i) + (\gamma - \delta i)(\alpha - \beta i) + 1 \leq 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\gamma - \delta i)(\alpha - \beta i) + 1 \leq 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)i + (\alpha\gamma - \delta\beta) - (\alpha\delta + \beta\gamma)i + 1 \leq 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2(\alpha\gamma - \beta\delta) + 1 \leq 0$$

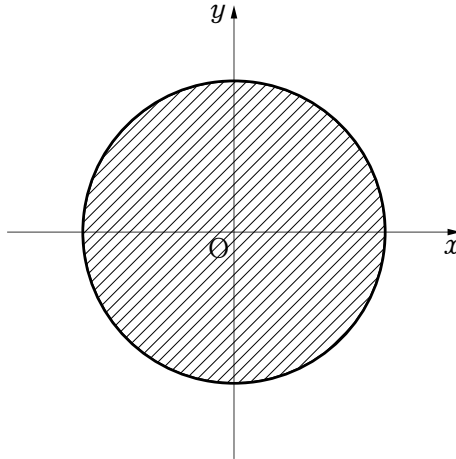
この不等式は, 任意の α, β に対して成立するから,

$$(\alpha + \gamma)^2 - \gamma^2 + (\beta - \delta)^2 - \delta^2 + 1 \leq 0$$

$$(\alpha + \gamma)^2 + (\beta - \delta)^2 + 1 - \gamma^2 - \delta^2 \leq 0$$

より, $\gamma^2 + \delta^2 \geq 1$ のとき, 任意の α, β に対してこの不等式は成立する.

よって, $x^2 + y^2 \leq 1$ の部分 (下図参照, 境界を含む)



である.

2

n を定まった正の整数とし, $1 \leq k \leq n$ なる整数 k のおのにおに, $1 \leq r \leq n$ なる整数 r を対応させる関数 $r = f(k)$ があって, $k_1 < k_2$ ならばつねに $f(k_1) \leq f(k_2)$ であるとする. このとき, $f(m) = m$ となる整数 m が存在することを証明せよ.

1973

解答

$r = f(k)$ について, $k_1 < k_2$ ならば, $f(k_1) \leq f(k_2)$ より, $f(k)$ は広義単調増加関数であるから,

$$\begin{cases} f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k) \leq \cdots \leq f(n) \\ 1 \leq \cdots \leq r \leq \cdots \leq n \end{cases}$$

となる. ここで, $f(m) = m$ となる m が存在しないと仮定する.

(i) $m = 1$ のとき, $f(1) \neq 1$ より, $f(1) \geq 2$

(ii) $m = 1, 2, \dots, l$ のとき, $f(m) \neq m$ が成立すると仮定すると, $f(l) \neq l$ と, $f(l) \geq f(l-1)$ より, $f(l) \geq l+1$ となる.

(i), (ii) から, $1, 2, \dots, n$ の自然数 m について, $f(m) \geq m+1$ が成立する.

ここで、 $1 \leq f(n) \leq n$ より、 $f(n) \geq n+1$ となることはできないため、少なくとも 1 つは $f(m) = m$ となる自然数 m が存在する。□

3

a が 1 でない実数のとき、方程式 $x^2 + ax = \sin x$ はちょうど 2 つの実根をもつことを証明せよ。

1973

解答

$x^2 + ax - \sin x = 0$ より、 $f(x) = x^2 + ax - \sin x$ とする。 $f'(x) = 2x + a - \cos x$, $f''(x) = 2 + \sin x$ である。

(i) $a > 1$ のとき

x	...	a	...	0	...
$f''(x)$		+			+
$f'(x)$			↘	↗	↗

x	...	a	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+	+
$f(x)$			↘	↗	↗

(ii) $a = 1$ のとき

x	...	0	...
$f''(x)$		+	+
$f'(x)$		-	+

x	...	0	...
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

(iii) $a < 1$ のとき

x	...	0	...	a	...
$f''(x)$					
$f'(x)$		-	$a-1$	-	+

x	...	0
$f'(x)$		-		-	+
$f(x)$		↘	0	↘	↗

ここで、任意の a に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ となるから、中間値の定理と (i), (ii), (iii) より、 $a \neq 1$ のとき、 $x^2 + ax = \sin x$ はちょうど 2 つの実根を持つ。□

4

関数 $f(x)$ ($a \leq x \leq b$) が正の第 2 次導関数をもつとき、曲線 $y = f(x)$ の上に点 P をとって、 P における接線とこの曲線および 2 直線 $x = a$, $x = b$ とで囲まれた部分の面積を最小にするには、点 P をどのようにとればよいか。

1973

解答

$f''(x) > 0$ である。 P における接線は、

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p) + f(p) \\ &= \int_a^b |f(x) - f'(p)(x-p) + f(p)| dx \end{aligned}$$

ここで、 $f(x)$ の部分は、 p によらない定数となるから、

$$S(p) = \int_a^b f'(p)(x-p) + f(p) dx$$

が最大となる p を求めればよい.

$$S(p) = \left[\frac{1}{2} f'(p) x^2 + (f(p) - f'(p)) \cdot p \right]_a^b$$

$$\frac{1}{2} f'(p)(b^2 - a^2) + (f(p) - f'(p) \cdot p)(b - a)$$

$$\begin{aligned} S'(p) &= \frac{1}{2} f''(p)(b^2 - a^2) + (f'(p) - f'(p) - f''(p) \cdot p)(b - a) \\ &= \frac{1}{2} f''(p)(b - a)\{(b + a) - 2p\} \end{aligned}$$

ここで, $f''(p) > 0$, $(b - a) \geq 0$ より,

p	a	\dots	$\frac{a+b}{2}$	\dots	b
$S'(p)$		+	0	-	
$S(p)$		\nearrow		\searrow	

増減表より, $S(p)_{\text{Max}}$ となるのは, $p = \frac{a+b}{2}$ のときである.

したがって, 求める点 P は $(x, y) = \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right)$

(答) $P\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$

1

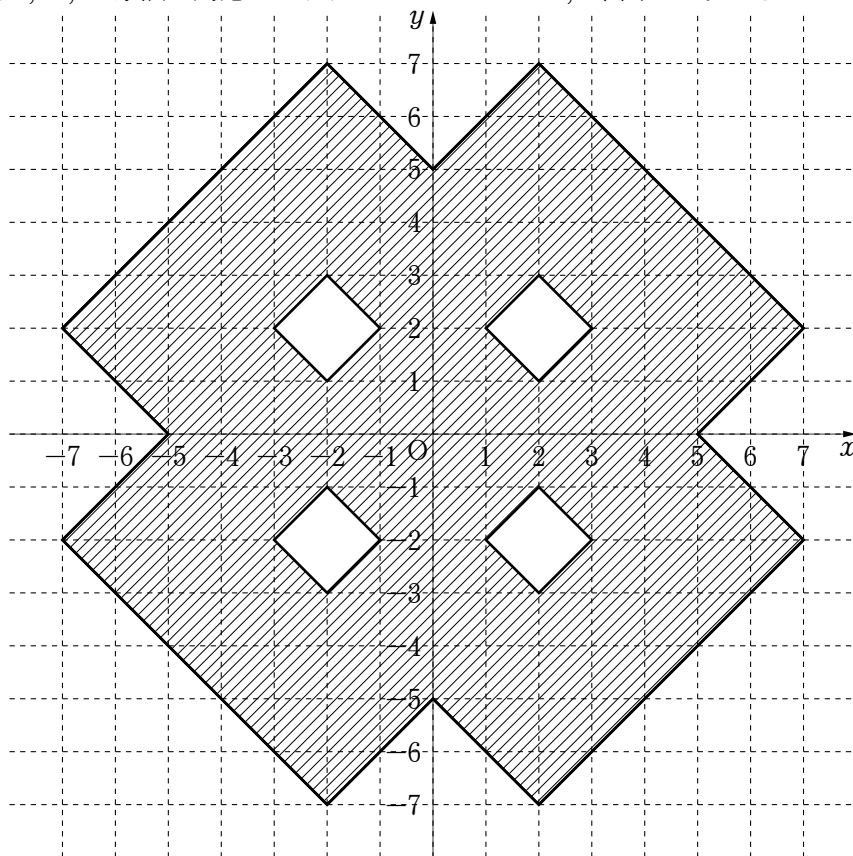
次の不等式を満たす点 (x, y) が存在する範囲を図示せよ.

$$1 < ||x| - 2| + ||y| - 2| < 5$$

1974

解答

$1 < ||x| - 2| + ||y| - 2| < 5$ について考える. $|x|, |y|$ はともに偶関数のため, 第 1 象限について考え, それを線対称に第 2, 3, 4 象限に対応させればよい. したがって, 下図のようになる.



2

底辺 a , 高さ h の 2 等辺三角形がある.(1) この 3 角形の内接円の半径 r を a と h を用いて表せ.(2) n が 0 でない整数で, $ah^n = 1$ を満たしながら a, h が変化するとき, $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{r}{a}$ を求めよ.

1974

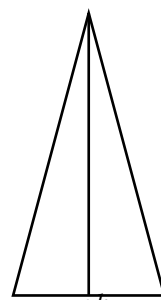
解答

(1) この三角形の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$\frac{1}{2}ah = r \left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \right)$$

$$r = \frac{ah}{2 \left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \right)}$$



(答) $r = \frac{ah}{2 \left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \right)}$

$$(2) \quad ah^n = 1 \text{ より, } h^n = \frac{1}{a}, \text{ したがって, } h = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

3

$p \geq 0, q \geq 0, p \neq q$ である p, q に対して

$$|\log(p+1) - \log(q+1)| < |p - q|$$

が成立することを証明せよ。

次に, k を $0 < k < 1$ である定数とすると $|\log(p+1) - \log(q+1)| < k|p - q|$ が成立しないような $p \geq 0, q \geq 0, p \neq q$ が存在することを示せ. ここで \log は自然対数を表すものとする.

1974

解答

条件式から $p > q$ としても一般性を失わない. ここで, $\frac{\log(p+1) - \log(q+1)}{p - q} < 1$ を示せばよい.

ここで, 平均値の定理から, $f(x) = \log(x+1)$ とすると,

$$\frac{\log(p+1) - \log(q+1)}{p - q} = \frac{1}{c+1} \quad \dots\dots ①$$

となる c が, $q < c < p$ の範囲に存在する.

$\frac{1}{p+1} < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{q+1} \dots\dots ②$ であるから, $\frac{1}{c+1} < \frac{1}{q+1} \leq 1$ を満たし, $\frac{1}{c+1} < 1$ である.

したがって, $|\log(p+1) - \log(q+1)| < |p - q|$ となる. \square

また, $0 < k < 1$ であることから, $k = \frac{1}{1+r}$ ($r > 0$) とおける. このとき, $c = \frac{1}{1+r}$ となる c が存在することを示せば良い.

$p = r + \alpha, q = r - \alpha$ とすると, $\frac{1}{r+1+\alpha} < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{r+1-\alpha}$ となる.

ここで, $\lim_{\alpha \rightarrow 0}$ を考えると, はさみうちの原理から, $\frac{1}{c+1} = \frac{1}{r+1} = k$ となるため, 等号が成立するような $p \geq 0, q \geq 0, p \neq q$ となる p, q が存在することが示された. したがって, 題意を満たす p, q が存在することが示された. \square

4

$f(x), g(x)$ を $x \geq 0$ で定義された正の値をとる連続関数で, $g(x)$ は増加関数であるとする. このとき

$$S(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad T(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt$$

に対して次の (1), (2) を証明せよ.

(1) すべての $x > 0$ に対して $T(x) \leq g(x)S(x)$ である.

(2) $\frac{T(x)}{S(x)}$ は $x > 0$ で増加関数である. ここで一般に関数 $h(x)$ が増加関数であるとは, $x_1 < x_2$ ならば $h(x_1) \leq h(x_2)$ が成立することをいう.

1974

解答

(1) $f(x) = g(x)S(x) - T(x)$ とする.

$$f(x) = g(x)S(x) - T(x)$$

$$f(x) = g(x) \int_0^x f(t) dt - \int_0^x g(t)f(t) dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \int_0^x f(t) dt + g(x)f(x) - g(x)f(x) \\ &= g'(x) \int_0^x f(t) dt \end{aligned}$$

ここで, $g(x)$ は増加関数より, $g'(x) > 0$ であり, $f(x)$ は正の値を取るから, $\int_0^x f(t) dt > 0$ である.

したがって, $f'(x) = g'(x) \int_0^x f(t) dt > 0$

よって, $x > 0$ において, $g(x)S(x) - T(x) \geq 0$ であるから, $g(x)S(x) \geq T(x)$ が示された.

(2)

$$\begin{aligned} \frac{T(x)}{S(x)} dx &= \frac{T'(x)S(x) - T(x)S'(x)}{S^2(x)} \\ &= \frac{f(x)g(x) \int_0^x f(t) dt - f(x) \int_0^x f(t)g(t) dt}{S^2(x)} \\ &= \frac{f(x)g(x) \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t)g(t) dt}{S^2(x)} \\ &= \frac{f(x)\{g(x)S(x) - T(x)\}}{S^2(x)} \end{aligned}$$

$f(x) > 0$ かつ (1) から, $g(x)S(x) - T(x) \geq 0$ より, $\frac{T(x)}{S(x)} dx \geq 0$ であるから, $\frac{T(x)}{S(x)}$ は増加関数となる. □

1

次のおのをおのを証明せよ.

(1) $\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ.(2) $\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi + \cos \frac{10}{9}\pi + \cos \frac{14}{9}\pi + \cos \frac{16}{9}\pi$ の値を求めよ.

1975

解答

(1) $2^{\frac{2}{3}} = 2\sqrt[3]{2} < 3$ より, $\log_2 3 > \frac{3}{2}$ …… ①となる. また, $3^{\frac{2}{3}} = 3\sqrt[3]{3} > 4$ より, $\log_3 4 < \frac{3}{2}$ …… ②

となる.

①, ② より, $\log_3 4 < \log_2 3$.

(証明終了)

(2) $\cos 5\theta = \cos 4\theta$ を満たす θ を考える. $-1 < \cos \theta < 1$ の範囲において, $0 < \theta < \pi$ である. $5\theta = \pm 4\theta \pm 2n\pi$ より, $\theta = \frac{2}{9}n\pi$, $2n\pi$ であり, $\cos 5\theta = 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta$, $\cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$ から,

$$16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1$$

$$16\cos^5 \theta - 8\cos^4 \theta - 20\cos^3 \theta + 8\cos^2 \theta + 5\cos \theta - 1 = 0$$

$$(\cos \theta - 1)(16\cos^4 \theta + 8\cos^3 \theta - 12\cos^2 \theta - 4\cos \theta + 1) = 0$$

ここで, 解と係数の関係より,

$$\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{6}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi = 0$$

が成り立ち, また,

$$\begin{aligned} & \cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi + \cos \frac{10}{9}\pi + \cos \frac{14}{9}\pi + \cos \frac{16}{9}\pi \\ &= 2\left(\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{(答)} \quad \underline{\underline{\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi + \cos \frac{10}{9}\pi + \cos \frac{14}{9}\pi + \cos \frac{16}{9}\pi = 0}}$$

2

次の(1), (2)を解答せよ.

(1) 1 から 10 までの 10 個の整数から相異なる 5 個をとり, その積を a , 残りの 5 個の積を b とする. $a \neq b$ を証明せよ.(2) また, 1 から 10 までの 10 個の整数のうちの相異なる 5 個の積として表される整数のうちで, $\sqrt{10!}$ より小さいものの個数を p , $\sqrt{10!}$ より大きいものの個数を q とする. $p = q$ を証明せよ.

1975

解答

(1) 1~10 までの 10 個の整数のうち, 7 の倍数を含むものは 7 のみだから, a または b のどちらか一方は 7 の倍数となるが, もう一方は 7 の倍数とはならないため, $a \neq b$ となる.(2) 1~10 までの 10 個の整数から 5 個を選び, その積を c , 残りの 5 個の積を d とする. ここで, 対称性から $c < d$ としても一般性を失わない. このとき, $c \cdot d = 10!$ である.ここで, $c < d$ から, $c^2 < 10! < d^2$ となる. よって, $c < \sqrt{10!} < d$ と表すことができるため, c は $\sqrt{10!}$ よりも小さく, d は $\sqrt{10!}$ よりも大きいことがわかる.

ここで、 c の個数と d の個数は一致するため、 $p = q$ となる。

(証明終了)

3

三角形 ABC において、 $\angle C = n\angle B$ ならば、 $b < c < nb$ であることを証明せよ。ただし $b = CA$ 、 $c = AB$ とし、 n は 2 以上の整数とする。

1975

解答

$\angle B = \beta$ とする。 $\frac{\sin n\beta}{c} = \frac{\sin \beta}{b}$ より、 $c = \frac{\sin n\beta}{\sin \beta} b$ 。

ここで、 $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ より、 $(n+1)\beta = \pi - \angle A$ 、 $(n+1)\beta < \pi$ 、 $\beta < \frac{\pi}{n+1}$
さらに

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \sin n\beta - \sin \beta \\ &= 2 \cos \frac{(n+1)\beta}{2} \sin \frac{(n-1)\beta}{2} \end{aligned}$$

であり、 $\cos \frac{(n+1)\beta}{2} > \cos \frac{\pi}{2} = 0$ かつ、 $\sin \frac{n-1}{2}\beta > 0$ より、 $\sin n\beta > \sin \beta$ となるから、 $b < c$ となる。

$g(\beta) = \sin n\beta - n\sin \beta$ とすると、 $g'(\beta) = n\cos n\beta - n\cos \beta = n(\cos n\beta - \cos \beta)$ である。

$n\beta > \beta$ かつ、 $\frac{n}{n+1}\pi < \pi$ より、増減表は以下のようになる。

β	0	...	$\frac{n}{n+1}\pi$
$g'(\beta)$		-	
$g(\beta)$	(0)	\searrow	

よって、 $g(\beta)$ は 0 から $\frac{n}{n+1}\pi$ において単調減少かつ、 $g(0) = 0$ より、 $g(\beta) = \sin n\beta - n\sin \beta < 0$ 、 $\sin n\beta < n\sin \beta$ である。

したがって、 $\frac{\sin n\beta}{\sin \beta} < n$ より、 $c < nb$ となる。よって、 $b < c < nb$ 。□

4

曲線 $y = x^2(x+1)$ と直線 $y = k^2(x+1)$ ($0 \leq k \leq 1$) とで囲まれる部分の面積が最小となるように k の値を定めよ。

1975

解答

$y = x^2(x+1)$ と $y = k^2(x+1)$ の交点を求める。

$$k^2(x+1) = x^2(x+1)$$

$$(x^2 - k^2)(x+1) = 0$$

$$(x-k)(x+k)(x+1) = 0$$

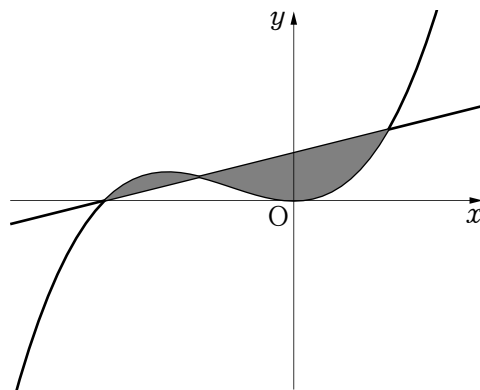
より、 $x = k, -k, -1$ である。 $0 \leq k \leq 1$ より、 $-1 < -k < k$ である。

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_{-k}^k \{k^2(x+1) - x^2(x+1)\} dx + \int_{-1}^{-k} \{x^2(x+1) - k^2(x+1)\} dx \\ &= \int_{-k}^k (k^2 - x^2) dx + \int_{-1}^{-k} \{x^2(x+1) - k^2(x+1)\} dx \\ &= \left[k^2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-k}^k + \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}k^2x - k^2x \right]_{-1}^{-k} \\ &= \frac{4}{3}k^3 + \left\{ \left(\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^3 + k^3 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}k^2 + k^2 \right) \right\} \\ &= \frac{4}{3}k^3 + \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{6}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4}k^4 + \frac{3}{2}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{12} \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} S'(k) &= k^3 + \frac{9}{2}k^2 - k \\ &= k\left(k^2 + \frac{9}{2}k - 1\right) \end{aligned}$$

k	0	...	$\frac{-9+\sqrt{85}}{4}$	1	...
$S'(k)$		-	0	+	
$S(k)$		↘		↗	



増減表より, $S(k)$ を最小とする k は $k = \frac{-9+\sqrt{85}}{4}$ である.

(答) $k = \frac{-9+\sqrt{85}}{4}$

5

a

1つのさいころを n 回つづけて投げ, 投げた順に出た目の数の積をつくっていくものとする. このとき, 次の (1), (2) を解答せよ.

(1) 目の数の積が k 回目 ($1 \leq k \leq n$) にはじめて 4 となる確率 p を求めよ.

(2) 目の数の積が n 回目までのどこかで 4 となる確率を求めよ.

b

$f(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とする. $0 < a < 1$ であるどんな a に対しても

$$\int_0^a f(x) dx \leq a \int_0^1 f(x) dx$$

が成り立つことを証明せよ. ここで $f(x)$ が増加関数であるとは, $x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) \leq f(x_2)$ が成立することをいう.

1975

解答

a

(1) 出た目の積が k 回目までに 4 になるには,

(i) $k-1$ 回目までにすべて 1 を出し, k 回目に 4 を出す

(ii) $k-1$ 回目までに 1 回だけ 2 を出し, k 回目に 2 を出す

のいずれかであればよい.

[1] のとき, $\left(\frac{1}{6}\right)^k$

[2] のとき, $(k-1)\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = (k-1)\left(\frac{1}{6}\right)^k$

(2)

$$S_n = \frac{1}{6} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$\frac{1}{6}S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n + n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$$\frac{5}{6}S_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$$\frac{5}{6}S_n = \frac{1}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \right\} - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$

$$S_n = \frac{6}{25} - \frac{6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{n}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$= \frac{6}{25} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \left\{ \frac{6}{5} + n \right\}$$

(答) $\underline{\underline{\frac{6}{25} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^n \left\{\frac{6}{5} + n\right\}}}$

b

$f(x)$ が単調増加関数であるから, $\int_a^1 f(x) dx$ と $\int_0^a f(x) dx$ の面積は, $\int_a^1 f(x) dx \geq (1-a)f(a)$ の関係にある. すなわち, $\int_0^a f(x) dx \leq af(a)$ より, $f(a) \leq \frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx$ が成り立つ.

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \leq f(a) \text{ より, } f(a) \leq \frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \text{ が成立.}$$

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \leq f(a) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx &\leq \frac{1}{1-a} \int_a^1 f(x) dx \\ (1-a) \int_0^a f(x) dx &\leq a \int_a^1 f(x) dx \\ \int_0^a f(x) dx &\leq a \int_a^1 f(x) dx + a \int_0^a f(x) dx \\ \int_0^a f(x) dx &\leq a \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

□

1

次の (1), (2) を解答せよ.

(1) 1 より大きい自然数 n について, 不等式 $2^n < \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n}$ を証明せよ.(2) 実数 x_1, x_2, \dots, x_n が $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ を満たすとき, $x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + nx_n^2$ の最大値と最小値を求めよ.

1976

解答

(1) $2^n < \frac{2n!}{(n!)^2} < 2^{2n} \dots (*)$ とする.(i) $n = 2$ のとき, $4 < 6 < 16$ より成立.(ii) $n = k$ のとき, $\frac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2k}$ $n = k+1$ のとき, $2^{k+1} < \frac{2(k+1)!}{\{(k+1)!\}^2}$ $2^{k+1} < 2 \cdot \frac{2k!}{(k!)^2} < 2 \cdot \frac{2(k+1)}{k+1} \cdot \frac{2k!}{(k!)^2}$ より成立.また, $2 \cdot \frac{2(k+1)}{k+1} \cdot \frac{2k!}{(k!)^2} < 4 \cdot \frac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2(k+1)}$ より成立.(i), (ii) より, 2 以上のすべての自然数 n に対して, $(*)$ は成立する. \square (2) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ より, x_k ($k < n$) について考えると, $x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + kx_k^2 + (k+1)x_{k+1}^2 + \dots + x_n^2$ となり, $x_k^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}^2 = 0$ であるとき, $x_k^2 = 0$ かつ $x_{k+1}^2 = \alpha$ であり, その他の x_l ($l = 1, 2, \dots, k, k+1, \dots, n$) を変化させないときを比べると, $x_k^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}^2 = 0$ の方が, $x_k^2 = 0$ かつ $x_{k+1}^2 = \alpha$ のときよりも小さくなるから, 帰納的に, $1 \leq x_1^2 + 2x_2^2 + \dots + nx_n^2 \leq n$ となる. \square

2

平面上の 3 点 $A(0, a)$, $B(b, 0)$, $C(c, 0)$ ($a > 0$, $c > 0$, $b < 0$) を頂点とする 3 角形 ABC の内部に点 P があり, 正数 l, m, n について $l\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ が成り立っている.(1) 線分 AP の延長と辺 BC との交点 D の座標を求めよ.(2) 線分 BD と線分 CD の長さの比を求めよ.

1976

解答

(1) $l(-\overrightarrow{AP}) + m(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) + n(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) = 0$

$$(l+m+n)\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{m+n}{l+m+n} \cdot \frac{m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}}{m+n}$$

よって, AP の延長と BC との交点 D の座標は, $D\left(\frac{mb+nc}{m+n}, 0\right)$ (2) 線分 BD と線分 CD の長さの比は $BD : CD = n : m$ となる.

3

 x^3 の係数が 1 であるような 3 次関数 $f(x)$ のうちで, 定積分 $I = \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx$ を最小にするものを決定し, そのときの I の値を求めよ.

1976

解答

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とする. このとき, I を計算すると,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx \\
 &= \int_{-1}^1 \{x^6 + 2ax^5 + (a^2 + 2b)x^4 + (2ab + 2c)x^3 + (2ac + b^2)x^2 + 2bcx + c^2\} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \{x^6 + (a^2 + 2b)x^4 + (2ac + b^2)x^2 + c^2\} dx \\
 &= 2 \int_0^1 \{x^6 + (a^2 + 2b)x^4 + (2ac + b^2)x^2 + c^2\} dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{5}(a^2 + 2b)x^5 + \frac{1}{3}(2ac + b^2)x^3 + c^2x \right]_0^1 \\
 &= 2 \left\{ \frac{1}{7} + \frac{1}{5}(a^2 + 2b) + \frac{1}{3}(2ac + b^2) + c^2 \right\}
 \end{aligned}$$

である.

$g(b) = \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{5}b$ とする. このとき, $g'(b) = \frac{2}{3}b + \frac{2}{5}$ であり, $g(b)$ は $b = -\frac{3}{5}$ のとき最小値をとる.

$$\begin{aligned}
 h(a, c) &= \frac{1}{5}a^2 + \frac{2}{3}ac + c^2 \\
 &= \left(c + \frac{1}{3}a\right)^2 + \frac{4}{45}a^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

であるから, $(a, c) = (0, 0)$ のとき, 最小値 0 をとる.

I を最小にする $f(x) = x^3 - \frac{2}{5}x$ であり, そのときの I は $I = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{25}\right) = \frac{8}{175}$

(答) $\underline{\underline{I = \frac{8}{175}}}$

1

空間に 5 点 $O(0, 0, 0)$, $A(3, 1, 5)$, $B(1, 2, 4)$, $C(2, -1, -1)$, $D(3, 1, 2)$ がある. 2 点 A, B を通る直線上に動点 P をとり, 2 点 C, D を通る直線上に動点 Q をとる.

- (1) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$ を満たす点 R 全体の集合はどのような図形を表すか.
 (2) 線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

1977

解答

- (1) 直線 AB 上の点 P を以下のように表す.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 1-t \\ 5-2t \end{pmatrix}$$

直線 CD 上の点 Q を以下のように表す.

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-s \\ -1-2s \\ -1-3s \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1+2t+s \\ 2-t+2s \\ 6-3t+3s \end{pmatrix} \text{ であり, 点 } R(x, y, z) \text{ に対して, } \begin{cases} x = 1+2t+s \\ y = 2-t+2s \\ z = 6-3t+3s \end{cases} \text{ から, } s, t \text{ を消去する.}$$

$$x+2y = 5+5s, \quad 3y-z = 6s, \quad x+2y = 5+5\frac{3y-z}{6}, \quad 6x+12y = 30+5(3y-z)$$

よって, \overrightarrow{OR} は $6x-3y+5z = 30$ となるような平面上を動く.

- (2) $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OR}|$ より, 点と平面の距離公式から, $|\overrightarrow{OR}| = \frac{|-30|}{\sqrt{36+9+25}} = \frac{30}{\sqrt{70}} = \frac{3}{7}\sqrt{70}$

(答) $\frac{3}{7}\sqrt{70}$

2

3 けたの素数 p の百の位の数字を a , 十の位の数字を b , 一の位の数字を c とする. このとき, 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は整数解をもたないことを証明せよ.

1977

解答

条件式から, $\begin{cases} 100a+10b+c = p \cdots \cdots \textcircled{1} \\ ax^2+bx+c = 0 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ であり, $\textcircled{1}-\textcircled{2}$ より, $(10-x)(10+x)a + (10-x)b = p$

$(10-x)\{(10+x)a+b\} = p$ が導かれる.

これが素数となるためには,

- (i) $10-x=1$ のとき, つまり, $(10+x)a+b = p$ となると, $x=9$, $19a+b = p$ であり, $100a+10b+c = 19a+b$ となり, 矛盾する.
 (ii) $10-x=p$ のとき, つまり, $(10+x)a+b = 1$ となると, $(20-p)a+b = 1$ であり, $\textcircled{1}$ より, $p = 100a+10b+1 \geq 11$ である. したがって, $20-p \leq -91$ となり, $-91a+b \leq 0$ となるから, 矛盾する.

(i), (ii) より, 題意は示された. □

3

関数 $y = \frac{1}{x}$ のグラフ上の 2 点を結ぶ線分の中点となるような点全体の集合を図示せよ.

1977

解答

$S\left(s, \frac{1}{s}\right), T\left(t, \frac{1}{t}\right)$ とする. 2 点の中点は, $\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s+t}{2st}\right)$ であり, (x, y) とすると, $x = \frac{s+t}{2}, y = \frac{s+t}{2st}$ である.

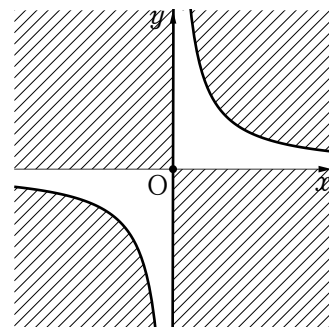
(i) $s \neq -t$ のとき, $st = \frac{x}{y}, s+t = 2x t^2 - 2xt + \frac{x}{y} = 0$ が異なる 2 つの実数解を持てば良いから,

$$\begin{aligned}x^2 - \frac{x}{y} &> 0 \\x^2 y^2 - xy &> 0 \\xy(xy - 1) &> 0\end{aligned}$$

より, $xy > 1$ または $xy < 0$ となる.

(ii) $s = -t$ のとき, 中点は原点となる.

(i), (ii) から, 右図の斜線部で境界線を含まない.



4

次の (1), (2) を解答せよ.

(1) a を正数とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^n + a^{2n})$ を求めよ.

(2) xy 平面上に動点 P がある. さいころを投げて, 奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ 1 だけ進み, 偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ 1 だけ進むものとする. 動点 P は最初原点にあるものとし, さいころを 8 回投げたとき, 原点から P までの距離が 6 以下となる確率を求めよ.

1977

解答

(1)

$$\begin{aligned}&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^n + a^{2n}) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \{\log a^n + \log(1 + a^n)\} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log a + \log(1 + a^n)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

(i) $a < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(1 + a^n)^{\frac{1}{n}} = 0$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^n + a^{2n}) = \log a$

(ii) $a = 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2 = 0$

(iii) $a > 1$ のとき,

$$\begin{aligned}&\lim_{n \rightarrow \infty} \log a + \log a + \log\left(1 + \frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\log a + \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{a^n}\right) \\&= 2\log a\end{aligned}$$

となる.

(i), (ii), (iii) より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^n + a^{2n}) = \begin{cases} \log a (a \leq 1) \\ 2\log a (a > 1) \end{cases}$ (答)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(a^n + a^{2n}) = \begin{cases} \log a (a \leq 1) \\ 2\log a (a > 1) \end{cases}$$

(2) 止まるマスに, $(0, 8), (1, 7), (2, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0)$ であり, キョリは,

$4\sqrt{2}, \sqrt{34}, 2\sqrt{10}, 2\sqrt{14}, 8$ のパターンがある. このうち, 6 以下となるのは, $4\sqrt{2}, \sqrt{34}$ であるから,

$$\begin{aligned} & {}_8C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \times {}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= \left\{ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 2 \times \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= 91 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \end{aligned}$$

(答) $\underline{\underline{\frac{91}{128}}}$

5

次の (1), (2) を解答せよ.

(1) $f_n(x) = \int_0^x (x-t) \sin ntdt$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を求めよ.

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における $f_n(x)$ の最大値を a_n とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ を求めよ.

1977

解答

(1)

1

5次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = af(0) + b\{f(c) + f(-c)\}$$

が成り立つように $f(x)$ に無関係な定数 a, b, c を定めよ.

1978

解答

 $f(x) = dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$ とする.

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i) dx \\ &= \int_{-1}^1 (ex^4 + gx^3 + i) dx \\ &= 2 \int_0^1 (ex^4 + gx^3 + i) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{5} ex^5 + \frac{1}{3} gx^3 + ix \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{5} e + \frac{2}{3} g + 2i \end{aligned}$$

また, $af(0) = ai$, $b\{f(c) + f(-c)\} = 2b(ec^4 + gc^2 + i)$ である.

$$2 \text{ 式の係数をそれぞれ比較して, } \begin{cases} 2bc^4 &= \frac{2}{5} \\ 2bc^2 &= \frac{2}{3} \\ (a+2b) &= 2 \end{cases}$$

これをそれぞれ解いて,

$$(\text{答}) \quad (a, b, c) = \left(\frac{8}{9}, \frac{5}{9}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \quad (\text{符号任意})$$

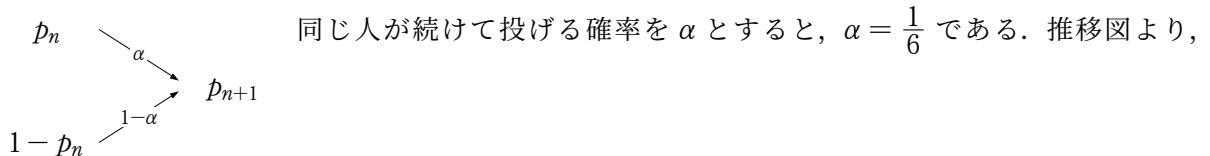
2

A, B 2 人が次のような規則でさいころを投げるものとする. さいころを投げて 1 の目が出れば次回も同じ人が続けて投げ, 1 以外の目が出れば次回は他方が投げることにする. 第 1 回目は A が投げる. n 回目に A が投げる確率を p_n とするとき, 次の (1), (2) を解答せよ.

(1) p_{n+1} を p_n の式で表せ.(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

1978

解答

(1) n 回目に A が投げる確率が p_n であるため, n 回目 B が投げる確率は $(1 - p_n)$ と表される.

$$p_{n+1} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}(1 - p_n) = -\frac{2}{3}p_n + \frac{5}{6} \text{ である.}$$

$$(\text{答}) \quad \underline{\underline{p_{n+1} = -\frac{2}{3}p_n + \frac{5}{6}}}$$

(2)

$$\begin{aligned} p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{2}{3} \left(p_n - \frac{1}{2} \right) \\ p_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\ p_n &= \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}}}$$

3

p, q は区間 $a \leq x \leq b$ ($0 < a < b$) で $px + q \geq \log x$ を満たすものとする. このとき, 定積分

$$I = \int_a^b (px + q - \log x) dx$$

が最小となるような p および q を求めよ. また, そのときの I の値を求めよ.

1978

解答

I が最小値となるのは, $y = px + q$ が $y = \log x$ と $x = t$ ($a < t < b$) で接するときであるので,

$$\begin{aligned} px + q &= \frac{1}{t}(x - t) + \log t \\ &= \frac{1}{t}x + \log t - 1 \\ \therefore p &= \frac{1}{t}, \quad q = \log t - 1 \end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\frac{1}{t}x + \log t - 1 - \log x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2t}x^2 + (\log t - 1)x - x \log x + x \right]_a^b \\ &= \left\{ \frac{1}{2t}b^2 + (\log t - 1)b - b \log b + b \right\} - \left\{ \frac{1}{2t}a^2 + (\log t - 1)a - a \log a + a \right\} \\ &= \frac{1}{2t}(b^2 - a^2) + \log t(b - a) - b \log b + a \log a \end{aligned}$$

ここで, I が最小となる t は,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{2t^2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{t}(b - a) \\ &= -\frac{1}{2t^2} \{ (b^2 - a^2) - 2t(b - a) \} \\ &= -\frac{1}{2t^2}(b - a)(b + a - 2t) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} t < \frac{a+b}{2} \text{ のとき } & \quad \frac{dI}{dt} < 0 \\ t > \frac{a+b}{2} \text{ のとき } & \quad \frac{dI}{dt} > 0 \end{aligned}$$

より, $t = \frac{a+b}{2}$ のとき, I は最小となる. したがって, $p = \frac{2}{a+b}$, $q = \log\left(\frac{a+b}{2}\right) + 1$

$$\text{(答)} \quad I = (a+b)(b^2 - a^2) + (b-a) \log\left(\frac{a+b}{2}\right) - b \log b + a \log a$$

1

数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ が $x_{n+1} = 2x_n + \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) を満たすとき、数 a を適当に定めれば、すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して不等式 $|x_n - 2^n \cdot a| \leq \frac{1}{3}$ が成り立つことを証明せよ。

1979

解答

$$x_{n+1} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} = 2 \left(x_n + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right)$$

$$x_n + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \left(x_1 + \frac{1}{3} \right) 2^{n-1}$$

ここで、 $x_1 = b$ とすると、 $x_n = \left(b + \frac{1}{3} \right) 2^{n-1} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ である。

また、 $a = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{3} \right)$ とすると、

$$\begin{aligned} |x_n - 2^n \cdot a| &= \left| \left(b + \frac{1}{3} \right) 2^{n-1} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} - \left(b + \frac{1}{3} \right) 2^{n-1} \right| \\ &= \left| -\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \right| \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって、すべての $n = 1, 2, \dots$ に対して、不等式

$$|x_n - 2^n \cdot a| \leq \frac{1}{3}$$

が成立することが示された。

□