1

a，b，c を複素数とするとき，次のことは正しいか．正しいものは証明し，正しくないものについては反例（成り立たない例）をあげよ．

（1）　ab，bc，ca がすべて 0 ならば，a，b，c はすべて 0 である．

（2）　$a+b$，$b+c$，$c+a$ がすべて実数ならば，a，b，c はすべて実数である．

（3）　$a^2+b^2+c^2=0$ ならば a，b，c はすべて 0 である．

（4）　$a+b+c=0$，$ab+bc+ca=0$ ならば，$a^3=b^3=c^3$ である．

1970

解 答

（1）　$a=0, b=0, c=1$ のとき，ab, bc, ca は 0 となるが，a, b, c は 0 ではないため，偽である．

（2）　$a=c+fi, b=g+hi, c=j+ji$ とする．$a+b, b+c, c+a$ が実数であるから，$f+h=0, h+k=0, k+f=0$ となり，これを満たす f, h, k の組み合わせは，$(f, h, k)=(0, 0, 0)$ となる．

よって，$a+b, b+c, c+a$ がすべて実数であるとき，a, b, c は実数となる．

（3）　$a^2 \geqq 0, b^2 \geqq 0, c^2 \geqq 0$ であるから，$a^2+b^2+c^2=0$ となるには，$a^2=0, b^2=0, c^2=0$ でなければならないから，$a=b=c=0$ となる．

（4）　$abc=d$ とすると，解と係数の関係から，a, b, c は $x^3-d=0$ の解となる．よって，$a=b=c$ となる．

2

a，b が実数で $|a|+|b|<1$ のとき，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 根の絶対値は，ともに 1 より小さいことを証明せよ．

1970

解 答

$x^2+ax+b=0$ の解を α, β とする．$\begin{cases}\alpha+\beta=a \\ \alpha\beta=b\end{cases}$，$\begin{cases}|a|=|\alpha+\beta| \\ |b|=|\alpha\beta|\end{cases}$

また，$1>|a|+|b|=|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$ である．

（i）　2 根の絶対値がともに 1 以上と仮定すると，明らかに矛盾する．

（ii）　2 根の絶対値のうち，一方が 1 以上であると仮定すると，$1>|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$

（I）　$\alpha>1$ とすると，$-1<\beta<0$ である．$|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=\alpha+\beta-\alpha\beta=(1-\beta)\alpha+\beta$

ここで，$(1-\alpha)<1$ より，$\alpha<\dfrac{1}{1-\beta}$ である．また，$-1<\beta<0$ より，$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ となるが，これは $\alpha>1$ に矛盾する．

（II）　$\alpha<-1$ となると，$0<\beta<1$ である．$|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=-(\alpha+\beta)-\alpha\beta=-(1+\beta)\alpha-\beta$ であり，$-(1+\beta)\alpha<1$ より，$\alpha<-\dfrac{1}{1+\beta}$ となるが，$0<\beta<1$ より，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ となるため，矛盾する．

(I), (II) より，2 根の絶対値が 1 以上と仮定すると矛盾が生じるため，2 根の絶対値はともに 1 よりも小さいことが示された．　□

3

座標平面で点 P は x 軸上を正の方向へ，点 Q は y 軸上を正の方向へ，点 R は傾き（勾配）1 の直線上を上方へ，それぞれ一定の速さ a，b，c で動いている．3 点 P，Q，R はつねに一直線上にあり，ある時刻に P の位置は $(4,\ 0)$，Q の位置は $(0,\ 2)$，R の位置は $(2,\ 1)$ であった．このとき a，b，c の値の比を求めよ．

1970

解 答

名大数学過去問研究会

P，Q，R が x 軸上で一直線になるときを t_1 とする．このとき，P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ 0)$，R$(1,\ 0)$ である．
P，Q，R が y 軸上で一直線になるときを t_0 とする．このとき，P$(0,\ 0)$，Q$(0,\ y)$，R$(0,\ -1)$ である．
また，P$(4,\ 0)$，Q$(0,\ 2)$，R$(2,\ 1)$ となるときを t_2 とする．

P　t_0 から t_2 における距離の変化は，4 ……①
Q　t_1 から t_2 における距離の変化は，2 ……②
R　t_0 から t_2 における距離の変化は，$2\sqrt{2}$ ……③
R　t_1 から t_2 における距離の変化は，$\sqrt{2}$ ……④

①，③から，P と R の速度の比は，$a:c=4:2\sqrt{2}$ である．
②，④から，Q と R の速度の比は，$b:c=2:\sqrt{2}$ である．
したがって，$a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$ となる．

4

次の (1)，(2) を証明せよ．

（1）　$\sin x$ は，x の整式としては表わせない．

（2）　$f(x)$ は実数全体を定義域とする微分できる関数で，$f(1)=0$ である．このとき

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1} & (x \fallingdotseq 1 \text{ のとき}) \\ f'(1) & (x=1 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおけば，$g(x)$ は連続関数である．

1970

解答

（1）　$\sin x=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ と仮定する．（a_k は任意の実数）

このとき，$(\sin x)^4=\sin x$ であるので，$(\sin x)^{(4l)}=\sin x$（l は整数）となる．ここで，$4l>n$ となる l を考えると，$(\sin x)^{(4l)}=\sin x=0$ となるため，これは矛盾である．したがって，$\sin x$ は x の整式で表すことは出来ない．

（2）　平均値の定理から，

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$$

を満たす c が存在する位置について，場合分けを行う．

(i)　$x>1$ のとき，$1<c<x$ の位置に存在する．したがって，$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となる．

(ii)　$x<1$ のとき，$x<c<1$ の位置に存在する．したがって，$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となる．

よって，(i)，(ii) から，$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となるから，$g(x)$ は連続関数である．

1

n は 2 以上の自然数で，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\sum_{k=0}^{n} x^k \leqq n + x^{n+1}$ を証明せよ．

1971

解答

(i)　$n=2$ のとき

$$
\begin{aligned}
&x^3+2-(x^2+x+1)\\
&=x^3-x^2-x+1\\
&=x^2(x-1)-(x-1)\\
&=(x+1)(x-1)^2 \qquad \geqq 0
\end{aligned}
$$

より，成立．

(ii)　$n=2, 3, \cdots, n$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{l} x^k \leqq l + x^{l+1}$$

が成立すると仮定する．

$n=l+1$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leqq (l+1) + x^{l+2}$$

が成立することを示せばよい．

$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leqq l + x^{l+1} + x^{l+2}$ であり，$0 \leqq x \leqq 1$ より，$0 \leqq x^{l+1} \leqq 1$ であるから，$l + x^{l+1} + x^{l+2} \leqq (l+1) + x^{l+2}$ が成立する．

(i)，(ii) から，すべての自然数 n について，$\sum_{k=0}^{n} x^k \leqq n + x^{n+1}$ が成立する．　□

2

放物線 $y=x^2$ 上の異なる 3 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ における法線が 1 点で交わるとき，$x_1+x_2+x_3=0$ であることを証明せよ．（曲線上の 1 点で，接線に垂直な直線を，その点における曲線の法線という）

1971

解答

$(x_1,\ y_1)$ における $y=x^2$ の法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2x_1}(x-x_1)-{x_1}^2 \qquad \cdots\cdots①$$

同様にして，$(x_2,\ y_2)$ における場合は，

$$y=-\frac{1}{2x_2}(x-x_2)+{x_2}^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①，② を連立して，

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2x_1}x+{x_1}^2+\frac{1}{2}&=-\frac{1}{2x_2}x+{x_2}^2+\frac{1}{2}\\
-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)x&={x_2}^2-{x_1}^2\\
x&=2({x_1}^2-{x_2}^2)\cdot\left(\frac{x_1x_2}{x_2-x_1}\right)\\
&=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1x_2}{x_2-x_1}\\
&=-2x_1x_2(x_1+x_2)
\end{aligned}
$$

したがって，交点 $(x,\ y)=(-2x_1x_2(x_1+x_2),\ {x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2+\frac{1}{2})$ である．

$(x_3,\ y_3)$ における法線も同じ点で交わるから，

$$\begin{aligned}
{x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2+\frac{1}{2}&=-\frac{1}{2x_3}\{-2x_1x_2(x_1+x_2)\}+{x_2}^2+\frac{1}{2}\\
{x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2&=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_3}+x_3^2\\
0&=x_3^3-x_3({x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2)+x_1x_2(x_1+x_2)\\
0&=(x_3+x_2+x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)
\end{aligned}$$

ここで，$x_3 \fallingdotseq x_1$, $x_3 \fallingdotseq x_1$ であるから，$x_3+x_2+x_1=0$ である．（証明終了）

$\boxed{3}$

$\boxed{a}$

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

（2）　$\displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x^3}dx$ を求め，$t \to +\infty$ のときの極限値を求めよ．

$\boxed{b}$　数字 0 を記した札が n 枚，数字 1, 2, ……, 9 を記した札がそれぞれ m 枚ある．この中から任意に 1 枚を取り出し，その札の数字だけの賞金を受ける．ただし数字 0 の札を引いたときは，その札を戻したうえ，もう 1 回だけ引きなおして，賞金を受けるものとする．

（1）　賞金の期待値を求めよ．

（2）　期待値を 3 以下にするには，比 $\dfrac{n}{m}$ をどの程度に大きくすればよいか．

1971

解 答

$\boxed{a}$

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ より，x について微分して，$y'=\dfrac{1-3\log x}{x^4}$，$y''=\dfrac{4(3\log x-2)}{x^5}$ である．
増減表は以下の通りになる．

$\boxed{b}$

（1）

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{9} k\,\frac{m}{9m+n}\\
&=\frac{1}{2}\times 9\times 10\,\frac{m}{9m+n}\\
&=\frac{45m}{9m+n}
\end{aligned}$$

期待値を $E(X)$ とすると，

$$\begin{aligned}
E(X)&=\frac{45m}{9m+n}+\frac{n}{9m+n}\times\frac{45m}{9m+n}\\
&=\frac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}
\end{aligned}$$

（答）　$E(X)=\dfrac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}$

（2）　$m \fallingdotseq 0$ であるから，$E(X)=\dfrac{45\left(9+2\dfrac{n}{m}\right)}{\left(9+\dfrac{n}{m}\right)^2}$ と表すことができる．

$\dfrac{n}{m}=t$ とし，$f(t)=\dfrac{45(9+2t)}{(9+t)^2}$ と定めると，$f(t)\leqq 3$ から，

$$\begin{aligned} f(t) &\leqq 3 \\ \frac{45(9+2t)}{(9+t)^2} &\leqq 3 \\ 15(9+2t) &\leqq (t+9)^2 \\ t^2+18t+81-135-30t &\geqq 0 \\ t^2-12t-54 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$t>0$ より，これを解いて，$t\geqq 6+3\sqrt{10}$ であるから，比 $\dfrac{n}{m}$ は $6+3\sqrt{10}$ 以上にすればよい．

（答）　$\underline{\underline{6+3\sqrt{10}}}$

1

次のおのおのについて解答せよ．

（1）　4 辺形 $ABCD$ と 1 点 P がある．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

が成立するならば，この 4 辺形はどんな 4 辺形か．

（2）　$x_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{1+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{1+x_n}\right)$$

1972

解 答

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，四角形 ABCD は平行四辺形となる．

（2）　$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ とする。$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ となり，増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	

$f(t)$ は $t \leqq 0$ において, 狭義単調増加である．$x_1+x_2+\cdots+x_n=t$ とすると，$\dfrac{t}{1+t} \leqq \dfrac{x_k}{1+x_k}$ $(k=1, 2, \cdots, h)$ であるから,

$$\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}$$

を満たす．よって，題意は示された．　□

2

$f(z)$ は，複素数を係数とする z の 1 次式であって，$f(f(f(z)))=z$ がつねに成り立つものとする．このような $f(z)$ をすべて求めよ．

1972

解 答

$$\begin{aligned}
f(z)&=(a+bi)z+c\\
f(f(z))&=(a+bi)\{(a+bi)z+c\}+c\\
&=(a^2-b^2+2abi)z+c(a+1+bi)\\
f(f(f(z)))&=(a+bi)^2\{(a+bi)z+c\}+c\{(a+bi)+1\}\\
&=(a+bi)^3z+c\{(a+bi)^3+(a+bi)+1\}
\end{aligned}$$

ここで，$f(f(f(z)))=z$ から，$\begin{cases}(a+bi)^3=1\\ c\{(a+bi)^2+(a+bi)+1\}=0\end{cases}$ を満たす．よって，$c=0$ である．

また，$(a^3+3a^2bi-3ab^2-b^2i)=1$ より，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0\\ a^3-3ab^2=1\end{cases}$ であり，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0\\ a(a^2-3b^2)=1\end{cases}$ である．

よってここで場合分けを行う．

(i)　$b=0$ のとき，$a^3=1$ であり，a は実数より $a=1$

（ii）　$3a^2=b^2$ のとき，$a(-8a^2)=1$ であり，a, b は実数より，$a=-\frac{1}{2}$，$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である．

（答）　$f(z)=z, \left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

3

次の数列 a_1，a_2，……，a_n，…… の収束，発散を調べ，解答欄の表に番号を記入せよ．またその理由を述べよ．

（1）　$a_n=\frac{1}{n}\sin n$

（2）　$a_n=n^2\sin\frac{1}{n}$

（3）　$a_n=n\cos\frac{n\pi}{4}$

（4）　$a_n=\sqrt{2n}-n$

（5）　$a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$

（6）　$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$

1972

解答

（1）　$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，$-\frac{1}{n}<\frac{\sin n}{n}<\frac{1}{n}$ であり，$\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$ と $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ から，はさみうちの原理より，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．したがって，0 に収束する．

（2）　$\lim_{n\to\infty} n^2\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} n\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n=\infty$ より，発散する．

（3）　$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{n}{4}\pi$ は振動するから，$\lim_{n\to\infty} n\cos\frac{n}{4}\pi$ も振動する．

（4）　$a_n=\frac{(\sqrt{2n}-n)(\sqrt{2n}+n)}{\sqrt{2n}+n}=\frac{n^2-2n}{n+\sqrt{2n}}=\frac{n-2}{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ より，発散する．

（5）　$\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n^2}$ より，

$$0<a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n^2}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，はさみうちの原理から，$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．したがって，0 に収束する．

（6）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\\&=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2\end{aligned}$$

したがって，$\log 2$ に収束する．

4

平面上の点 $P(x_0,\ y_0)$ を通って，放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線が引けるための必要十分条件は ${x_0}^2>y_0$ であることを証明せよ．またこのとき，この 2 本の接線の接点を Q，R として，3 角形 PQR の面積を x_0，y_0 で表せ．

1972

解 答

$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$$
\begin{aligned}
y &= 2t(x-t)+t^2 \\
&= 2tx-t^2
\end{aligned}
$$

であり，これが $(x_0,\ y_0)$ を通るとき，$t^2-2tx_0+y_0=0$ を満たし，これが異なる 2 解を持つ条件は，この二次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}={x_0}^2-y_0>0$ であるから，${x_0}^2>y_0$ となる．

また, $\mathrm{Q}(x_0+\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，$\mathrm{R}(x_0-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となるから, 三角形PQRの面積は, $\mathrm{P'}(0,\ 0)$，$\mathrm{Q'}(\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，$\mathrm{R'}(-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となる．

ここで，三角形の面積を S とすると，

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\left|-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|-2(2{x_0}^2-2y_0)\sqrt{{x_0}^2-y_0}\right| \\
&= 2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

（答）（面積）$=2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}}$

1

すべての複素数 z に対して $|z|^2+az+\overline{a}\overline{z}+1\geqq 0$ となる複素数 a の集合を求め，これを複素平面上に図示せよ．ただし $\overline{a}$，$\overline{z}$ はそれぞれ a，z の共役複素数を表す．

1973

解答

$|z|^2+az+\overline{az}+1\leqq 0$ より，$z\cdot\overline{z}+az+\overline{az}+1\leqq 0$

ここで，$z=\alpha+\beta i,\ a=\gamma+\delta i$ とする．

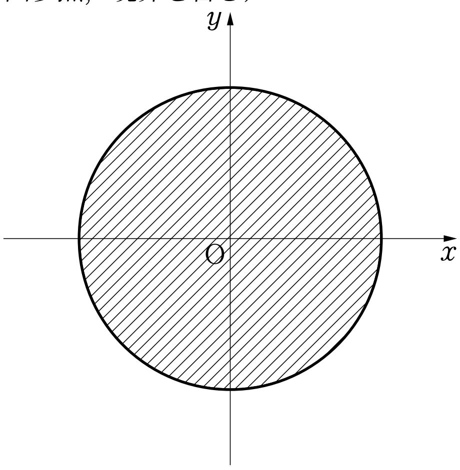
$$\alpha^2+\beta^2+(\gamma+\delta i)(\alpha+\beta i)+(\gamma-\delta i)(\alpha-\beta i)+1\leqq 0$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\gamma-\delta i)(\alpha-\beta i)+1\leqq 0$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i+(\alpha\gamma-\delta\beta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)i+1\leqq 0$$
$$\alpha^2+\beta^2+2(\alpha\gamma-\beta\delta)+1\leqq 0$$

この不等式は，任意の α,β に対して成立するから，

$$(\alpha+\gamma)^2-\gamma^2+(\beta-\delta)^2-\delta^2+1\leqq 0$$
$$(\alpha+\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+1-\gamma^2-\delta^2\leqq 0$$

より，$\gamma^2+\delta^2\geqq 1$ のとき，任意の α,β に対してこの不等式は成立する．

よって，$x^2+y^2\leqq 1$ の部分（下図参照，境界を含む）



である．

2

n を定まった正の整数とし，$1\leqq k\leqq n$ なる整数 k のおのおのに，$1\leqq r\leqq n$ なる整数 r を対応させる関数 $r=f(k)$ があって，$k_1<k_2$ ならばつねに $f(k_1)\leqq f(k_2)$ であるとする．このとき，$f(m)=m$ となる整数 m が存在することを証明せよ．

1973

解答

$r=f(k)$ について，$k_1<k_2$ ならば，$f(k_1)\leqq f(k_2)$ より，$f(k)$ は広義単調増加関数であるから，

$$\begin{cases} f(1)\leqq f(2)\leqq\cdots\leqq f(k)\leqq\cdots\leqq f(n) \\ 1\leqq\cdots\leqq r\leqq\cdots\leqq n \end{cases}$$

となる．ここで，$f(m)=m$ となる m が存在しないと仮定する．

(i)　$m=1$ のとき，$f(1)\neq 1$ より，$f(1)\geqq 2$

(ii)　$m=1,2,\cdots,l$ のとき，$f(m)\neq m$ が成立すると仮定すると，$f(l)\neq l$ と，$f(l)\geqq f(l-1)$ より，$f(l)\geqq l+1$ となる．

(i)，(ii) から，$1,2,\cdots,n$ の自然数 m について，$f(m)\geqq m+1$ が成立する．

ここで，$1 \leqq f(n) \leqq n$ より，$f(n) \geqq n+1$ となることはできないため，少なくとも1つは $f(m)=m$ となる自然数 m が存在する． □

3

a が1でない実数のとき，方程式 $x^2+ax=\sin x$ はちょうど2つの実根をもつことを証明せよ．

1973

解答

$x^2+ax-\sin x=0$ より，$f(x)=x^2+ax-\sin x$ とする．$f'(x)=2x+a-\cos x$，$f''(x)=2+\sin x$ である．

(i)　$a>1$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$		$+$			$+$
$f'(x)$	↘	0	↗	$a-1$	↗

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↗

(ii)　$a=1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

(iii)　$a<1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f''(x)$					
$f'(x)$	$-$	$a-1$	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↗

ここで，任意の a に対して，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ となるから，中間値の定理と(i)，(ii)，(iii)より，$a \fallingdotseq 1$ のとき，$x^2+ax=\sin x$ はちょうど2つの実根を持つ． □

4

関数 $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ が正の第2次導関数をもつとき，曲線 $y=f(x)$ の上に点 P をとって，P における接線とこの曲線および2直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれた部分の面積を最小にするには，点 P をどのようにとればよいか．

1973

解答

$f''(x)>0$ である．Pにおける接線は，

$$\begin{aligned} y &= f'(p)(x-p)+f(p) \\ &= \int_a^b |f(x)-f'(p)(x-p)+f(p)|\,dx \end{aligned}$$

ここで，$f(x)$ の部分は，pによらない定数となるから，

$$S(p)=\int_a^b f'(p)(x-p)+f(p)\,dx$$

が最大となる p を求めればよい．

$$S(p)=\left[\ \frac{1}{2}f'(p)x^2+(f(p)-f'(p))\cdot p\right]_a^b$$

$\dfrac{1}{2}f'(p)(b^2-a^2)+(f(p)-f'(p)\cdot p)(b-a)$

$$\begin{aligned}S'(p)&=\frac{1}{2}f''(p)(b^2-a^2)+(f'(p)-f'(p)-f''(p)\cdot p)(b-a)\\&=\frac{1}{2}f''(p)(b-a)\{(b+a)-2p\}\end{aligned}$$

ここで，$f''(p)>0,\ (b-a)\geqq 0$ より，

p	a	$\cdots$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

増減表より，$S(p)_{\text{Max}}$ となるのは，$p=\dfrac{a+b}{2}$ のときである．

したがって，求める点 P は $(x,\ y)=\left(\dfrac{a+b}{2},\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$　　（答）$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$

$\boxed{1}$

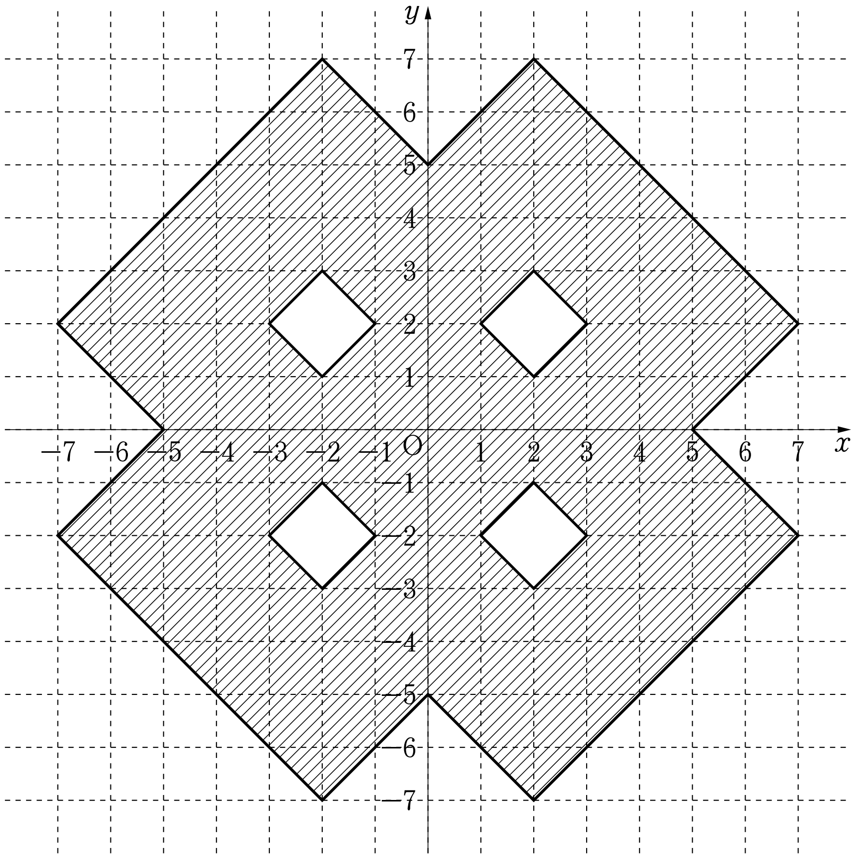
次の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ．

$$1 < ||x|-2|+||y|-2| < 5$$

1974

解 答

$1 < ||x|-2|+||y|-2| < 5$ について考える．$|x|, |y|$ はともに偶関数のため，第 1 象限について考え，それを線対称に第 2，3，4 象限に対応させればよい．したがって，下図のようになる．



$\boxed{2}$

底辺 a，高さ h の 2 等辺三角形がある．

（1）　この 3 角形の内接円の半径 r を a と h を用いて表せ．

（2）　n が 0 でない整数で，$ah^n = 1$ を満たしながら a，h が変化するとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{r}{a}$ を求めよ．

1974

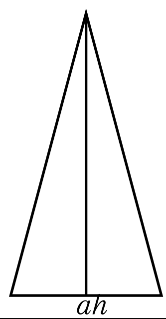
解 答

（1）　この三角形の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$\frac{1}{2}ah = r\left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$$

$$r = \frac{ah}{2\left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}\right)}$$



（答）　$r = \dfrac{ah}{2\left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}\right)}$

（2）　$ah^n = 1$ より，$h^n = \dfrac{1}{a}$，したがって，$h = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

3

$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$p \neq q$ である p，q に対して

$$|\log(p+1) - \log(q+1)| < |p-q|$$

が成立することを証明せよ．

次に，k を $0 < k < 1$ である定数とすると $|\log(p+1) - \log(q+1)| < k|p-q|$ が成立しないような $p \geqq 0$、$q \geqq 0$，$p \neq q$ が存在することを示せ．ここで log は自然対数を表すものとする．

1974

解答

条件式から $p > q$ としても一般性を失わない．ここで，$\dfrac{\log(p+1) - \log(q+1)}{p-q} < 1$ を示せばよい．

ここで，平均値の定理から，$f(x) = \log(x+1)$ とすると，

$$\frac{\log(p+1) - \log(q+1)}{p-q} = \frac{1}{c+1} \quad \cdots\cdots ①$$

となる c が，$q < c < p$ の範囲に存在する．

$\dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{q+1}$ ……②であるから，$\dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{q+1} \leqq 1$ を満たし，$\dfrac{1}{c+1} < 1$ である．

したがって，$|\log(p+1) - \log(q+1)| < |p-q|$ となる．□

また，$0 < k < 1$ であることから，$k = \dfrac{1}{1+r}$ $(r > 0)$ とおける．このとき，$c = \dfrac{1}{1+r}$ となる c が存在することを示せば良い．

$p = r + \alpha, q = r - \alpha$ とすると，$\dfrac{1}{r+1+\alpha} < \dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{r+1-\alpha}$ となる．

ここで，$\displaystyle\lim_{\alpha \to 0}$ を考えると，はさみうちの原理から，$\dfrac{1}{c+1} = \dfrac{1}{r+1} = k$ となるため，等号が成立するような $p \geqq 0, q \geqq 0, p \neq q$ となる p, q が存在することが示された．したがって，題意を満たす p, q が存在することが示された．□

4

$f(x)$，$g(x)$ を $x \geqq 0$ で定義された正の値をとる連続関数で，$g(x)$ は増加関数であるとする．このとき

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad T(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$$

に対して次の (1)，(2) を証明せよ．

（1）　すべての $x > 0$ に対して $T(x) \leqq g(x)S(x)$ である．

（2）　$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は $x > 0$ で増加関数である．ここで一般に関数 $h(x)$ が増加関数であるとは，$x_1 < x_2$ ならば $h(x_1) \leqq h(x_2)$ が成立することをいう．

1974

解答

（1）　$f(x) = g(x)S(x) - T(x)$ とする．

$$f(x) = g(x)S(x) - T(x)$$

$$f(x) = g(x)\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)f(t)\,dt$$

$$f'(x) = g'(x)\int_0^x f(t)\,dt + g(x)f(x) - g(x)f(x)$$

$$= g'(x)\int_0^x f(t)\,dt$$

ここで，$g(x)$ は増加関数より，$g'(x) > 0$ であり，$f(x)$ は正の値を取るから，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt > 0$ である．

したがって，$f'(x)=g'(x)\int_0^x f(t)\,dt>0$

よって，$x>0$ において，$g(x)S(x)-T(x)\geqq 0$ であるから，$g(x)S(x)\geqq T(x)$ が示された．

（2）

$$\begin{aligned}\frac{T(x)}{S(x)}\,dx &= \frac{T'(x)S(x)-T(x)S'(x)}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)\{g(x)S(x)-T(x)\}}{S^2(x)}\end{aligned}$$

$f(x)>0$ かつ (1) から，$g(x)S(x)-T(x)\geqq 0$ より，$\dfrac{T(x)}{S(x)}\,dx\geqq 0$ であるから，$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は増加関数となる． □

1

次のおのおのを証明せよ．

（1）　$\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ．

（2）　$\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi+\cos\dfrac{8}{9}\pi+\cos\dfrac{10}{9}\pi+\cos\dfrac{14}{9}\pi+\cos\dfrac{16}{9}\pi$ の値を求めよ．

1975

解答

（1）　$2^{\frac{2}{3}}=2\sqrt{2}<3$ より，$\log_2 3>\dfrac{3}{2}$ ……①

となる．また，$3^{\frac{2}{3}}=3\sqrt{3}>4$ より，$\log_3 4<\dfrac{3}{2}$ ……②

となる．

①，② より，$\log_3 4<\log_2 3$．（証明終了）

（2）　$\cos 5\theta=\cos 4\theta$ を満たす θ を考える．$-1<\cos\theta<1$ の範囲において，$0<\theta<\pi$ である．

$5\theta=\pm 4\theta\pm 2n\pi$ より，$\theta=\dfrac{2}{9}n\pi$，$2n\pi$ であり，$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$，$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ から，

$$16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$
$$16\cos^5\theta-8\cos^4\theta-20\cos^3\theta+8\cos^2\theta+5\cos\theta-1=0$$
$$(\cos\theta-1)(16\cos^4\theta+8\cos^3\theta-12\cos^2\theta-4\cos\theta+1)=0$$

ここで，解と係数の関係より，

$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{6}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=0$$

が成り立ち，また，

$$\begin{aligned}&\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi+\cos\frac{10}{9}\pi+\cos\frac{14}{9}\pi+\cos\frac{16}{9}\pi\\&=2\left(\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi\right)\\&=0\end{aligned}$$

（答）　$\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi+\cos\dfrac{8}{9}\pi+\cos\dfrac{10}{9}\pi+\cos\dfrac{14}{9}\pi+\cos\dfrac{16}{9}\pi=0$

2

次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　1 から 10 までの 10 個の整数から相異なる 5 個をとり，その積を a，残りの 5 個の積を b とする。$a\neq b$ を証明せよ．

（2）　また，1 から 10 までの 10 個の整数のうちの相異なる 5 個の積として表される整数のうちで，$\sqrt{10!}$ より小さいものの個数を p，$\sqrt{10!}$ より大きいものの個数を q とする．$p=q$ を証明せよ．

1975

解答

（1）　1〜10 までの 10 個の整数のうち，7 の倍数を含むものは 7 のみだから，a または b のどちらか一方は 7 の倍数となるが，もう一方は 7 の倍数とはならないため，$a\neq b$ となる．

（2）　1〜10 までの 10 個の整数から 5 個を選び，その積を c，残りの 5 個の積を d とする．ここで，対称性から $c<d$ としても一般性を失わない．このとき，$c\cdot d=10!$ である．

ここで，$c<d$ から，$c^2<10!<d^2$ となる．よって，$c<\sqrt{10!}<d$ と表すことができるため，c は $\sqrt{10!}$ よりも小さく，d は $\sqrt{10!}$ よりも大きいことがわかる．

ここで，c の個数と d の個数は一致するため，$p=q$ となる．（証明終了）

3

三角形 ABC において，$\angle C=n\angle B$ ならば，$b<c<nb$ であることを証明せよ．ただし $b=CA$, $c=AB$ とし、n は 2 以上の整数とする．

1975

解答

$\angle \mathrm{B}=\beta$ とする．$\dfrac{\sin n\beta}{c}=\dfrac{\sin\beta}{b}$ より，$c=\dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}b$.

ここで，$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{C}=\pi$ より，$(n+1)\beta=\pi-\angle \mathrm{A}$，$(n+1)\beta<\pi$，$\beta<\dfrac{\pi}{n+1}$

さらに

$$\begin{aligned} f(\beta)&=\sin n\beta-\sin\beta \\ &=2\cos\frac{(n+1)\beta}{2}\sin\frac{(n-1)\beta}{2} \end{aligned}$$

であり，$\cos\dfrac{(n+1)\beta}{2}>\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ かつ，$\sin\dfrac{n-1}{2}\beta>0$ より，$\sin n\beta>\sin\beta$ となるから，$b<c$ となる．

$g(\beta)=\sin n\beta-n\sin\beta$ とすると，$g'(\beta)=n\cos n\beta-n\cos\beta=n(\cos n\beta-\cos\beta)$ である．

$n\beta>\beta$ かつ，$\dfrac{n}{n+1}\pi<\pi$ より，増減表は以下のようになる．

β	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+1}\pi$
$g'(\beta)$		$-$	
$g(\beta)$	(0)	↘	

よって，$g(\beta)$ は 0 から $\dfrac{n}{n+1}\pi$ において単調減少かつ，$g(0)=0$ より，$g(\beta)=\sin n\beta-n\sin\beta<0$, $\sin n\beta<n\sin\beta$ である．

したがって，$\dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}<n$ より，$c<nb$ となる．よって，$b<c<nb$. □

4

曲線 $y=x^2(x+1)$ と直線 $y=k^2(x+1)$ $(0\leqq k\leqq 1)$ とで囲まれる部分の面積が最小となるように k の値を定めよ．

1975

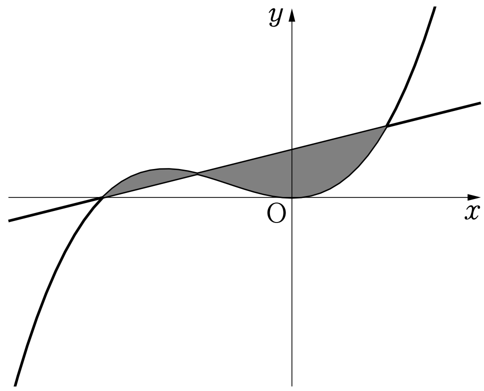
解答

$y=x^2(x+1)$ と $y=k^2(x+1)$ の交点を求める．

$$\begin{aligned} k^2(x+1)&=x^2(x+1) \\ (x^2-k^2)(x+1)&=0 \\ (x-k)(x+k)(x+1)&=0 \end{aligned}$$

より，$x=k, -k, -1$ である．$0\leqq k\leqq 1$ より，$-1<-k<k$ である．

$$\begin{aligned} S(k)&=\int_{-k}^{k}\{k^2(x+1)-x^2(x+1)\}\,dx+\int_{-1}^{-k}\{x^2(x+1)-k^2(x+1)\}\,dx \\ &=\int_{-k}^{k}(k^2-x^2)\,dx+\int_{-1}^{-k}\{x^2(x+1)-k^2(x+1)\}\,dx \\ &=\Big[k^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-k}^{k}+\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}k^2x-k^2x\Big]_{-1}^{-k} \\ &=\frac{4}{3}k^3+\Big\{\Big(\frac{1}{4}k^4-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3+k^3\Big)-\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}k^2+k^2\Big)\Big\} \\ &=\frac{4}{3}k^3+\frac{1}{4}k^4+\frac{1}{6}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{12} \\ &=\frac{1}{4}k^4+\frac{3}{2}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{12} \end{aligned}$$



したがって,

$$S'(k) = k^3 + \frac{9}{2}k^2 - k$$
$$= k\left(k^2 + \frac{9}{2}k - 1\right)$$

k	0	$\cdots$	$\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$	1	$\cdots$
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘		↗	

増減表より，$S(k)$ を最小とする k は $k = \dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$ である.

（答）$k = \dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$

5

a　1つのさいころを n 回つづけて投げ，投げた順に出た目の数の積をつくっていくものとする. このとき，次の (1), (2) を解答せよ.

（1）　目の数の積が k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ にはじめて 4 となる確率 p を求めよ.

（2）　目の数の積が n 回目までのどこかで 4 となる確率を求めよ.

b　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とする．$0 < a < 1$ であるどんな a に対しても

$$\int_0^a f(x)dx \leqq a\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ．ここで $f(x)$ が増加関数であるとは，$x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成立することをいう.

1975

解答

a

（1）　出た目の積が k 回目までに 4 になるには,

(i)　$k-1$ 回目までにすべて 1 を出し，k 回目に 4 を出す

(ii)　$k-1$ 回目までに 1 回だけ 2 を出し，k 回目に 2 を出す

のいずれかであればよい.

[1] のとき，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

[2] のとき，$(k-1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6} = (k-1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

（2）

$$S_n = \frac{1}{6} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$\frac{1}{6}S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n + n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$
$$\frac{5}{6}S_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$
$$\frac{5}{6}S_n = \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$
$$S_n = \frac{6}{25} - \frac{6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{n}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$= \frac{6}{25} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left\{\frac{6}{5} + n\right\}$$

（答）　$\underline{\underline{\dfrac{6}{25}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left\{\dfrac{6}{5}+n\right\}}}$

$\boxed{b}$

$f(x)$ が単調増加関数であるから，$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ の面積は，$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx \geqq (1-a)f(a)$ の関係にある．すなわち，$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq af(a)$ より，$f(a) \leqq \dfrac{1}{1-a}\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ が成り立つ.

$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，$f(a) \leqq \dfrac{1}{1-a}\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ が成立.

$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,dx \\
(1-a)\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx + a\int_0^a f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_0^1 f(x)\,fx
\end{aligned}$$

□

1

次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　1 より大きい自然数 n について，不等式 $2^n < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n}$ を証明せよ．

（2）　実数 x_1，x_2，……，x_n が $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots\cdots + x_n{}^2 = 1$ を満たすとき，$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots\cdots + nx_n{}^2$ の最大値と最小値を求めよ．

1976

解 答

（1）　$2^n < \dfrac{2n!}{(n!)^2} < 2^{2n} \cdots (*)$ とする．

(i)　$n = 2$ のとき，$4 < 6 < 16$ より成立．

(ii)　$n = k$ のとき，$\dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2k}$

$n = k+1$ のとき，$2^{k+1} < \dfrac{2(k+1)!}{\{(k+1)!\}^2}$　　$2^{k+1} < 2 \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2\dfrac{2(k+1)}{k+1} \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2}$ より成立．

また，$2\dfrac{2(k+1)}{k+1} \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2} < 4 \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2(k+1)}$ より成立．

(i)，(ii) より，2 以上のすべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．□

（2）　$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = 1$ より，x_k $(k < n)$ について考えると，$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots + kx_k{}^2 + (k+1)x_{k+1}{}^2 + \cdots + x_n{}^2$ となり，$x_k{}^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}{}^2 = 0$ であるとき，$x_k{}^2 = 0$ かつ $x_{k+1}{}^2 = \alpha$ であり，その他の x_l $(l = 1, 2, \cdots, k, k+1, \cdots, n)$ を変化させないときを比べると，$x_k{}^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}{}^2 = 0$ の方が，$x_k{}^2 = 0$ かつ $x_{k+1}{}^2 = \alpha$ のときよりも小さくなるから，帰納的に，$1 \leqq x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots + nx_n{}^2 \leqq n$ となる．□

2

平面上の 3 点 $A(0,\ a)$，$B(b,\ 0)$，$C(c,\ 0)$ $(a > 0,\ c > 0,\ b < 0)$ を頂点とする 3 角形 ABC の内部に点 P があり，正数 l，m，n について $l\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ が成り立っている．

（1）　線分 AP の延長と辺 BC との交点 D の座標を求めよ．

（2）　線分 BD と線分 CD の長さの比を求めよ．

1976

解 答

（1）　$l(-\overrightarrow{\mathrm{AP}}) + m(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) + n(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) = 0$

$(l+m+n)\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{m+n}{l+m+n} \cdot \dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$

よって，AP の延長と BC との交点 D の座標は，$\mathrm{D}\left(\dfrac{mb+nc}{m+n},\ 0\right)$

（2）　線分 BD と線分 CD の長さの比は $\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = n : m$ となる．

3

x^3 の係数が 1 であるような 3 次関数 $f(x)$ のうちで，定積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$ を最小にするものを決定し，そのときの I の値を求めよ．

1976

解 答

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．このとき，I を計算すると，

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\{x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx \\
&= 2\Big[\,\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}(a^2+2b)x^5+\frac{1}{3}(2bc+b^2)x^3+c^2x\Big]_0^1 \\
&= 2\left\{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}(a^2+2b)+\frac{1}{3}(2bc+b^2)+c^2\right\}
\end{aligned}$$

である．

$g(b)=\dfrac{1}{3}b^2+\dfrac{2}{5}b$ とする．このとき，$g'(b)=\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{5}$ であり，$g(b)$ は $b=-\dfrac{3}{5}$ のとき最小値をとる．

$$\begin{aligned}
h(a,\,c) &= \frac{1}{5}a^2+\frac{2}{3}ac+c^2 \\
&= \left(c+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{4}{45}a^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

であるから，$(a,\,c)=(0,\,0)$ のとき，最小値 0 をとる．

I を最小にする $f(x)=x^3-\dfrac{2}{5}x$ であり，そのときの I は $I=2\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{25}\right)=\dfrac{8}{175}$

（答）$\underline{\underline{I=\dfrac{8}{175}}}$

1

5 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(0) + b\{f(c) + f(-c)\}$$

が成り立つように $f(x)$ に無関係な定数 a，b，c を定めよ．

1978

解答

$f(x) = dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$ とする．

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i)dx \\
&= \int_{-1}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)dx \\
&= 2\int_{0}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}ex^5 + \frac{1}{3}gx^3 + ix\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}e + \frac{2}{3}g + 2i
\end{aligned}$$

また，$af(0) = ai$，　$b\{f(c) + f(-c)\} = 2b(ec^4 + gc^2 + i)$ である．

2 式の係数をそれぞれ比較して，$\begin{cases} 2bc^4 &= \dfrac{2}{5} \\ 2bc^2 &= \dfrac{2}{3} \\ (a+2b) &= 2 \end{cases}$

これをそれぞれ解いて，　　（答）　$(a, b, c) = \left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{5}{9}, \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$（符号任意）

2

A，B 2 人が次のような規則でさいころを投げるものとする．さいころを投げて 1 の目が出れば次回も同じ人が続けて投げ，1 以外の目が出れば次回は他方が投げることにする．第 1 回目は A が投げる．n 回目に A が投げる確率を p_n とするとき，次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

1978

解答

（1）　n 回目に A が投げる確率が p_n であるため，n 回目 B が投げる確率は $(1 - p_n)$ と表される．

同じ人が続けて投げる確率を α とすると，$\alpha = \dfrac{1}{6}$ である．推移図より，

$$\begin{tikzcd} p_n \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & p_{n+1} \\ 1-p_n \arrow[ur, "1-\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

$p_{n+1} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}(1 - p_n) = -\dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}$ である．　　（答）　$p_{n+1} = -\dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}$

（2）

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

（答）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$

3

p，q は区間 $a \leqq x \leqq b$ $(0 < a < b)$ で $px + q \geqq \log x$ を満たすものとする．このとき，定積分

$$I = \int_a^b (px + q - \log x)dx$$

が最小となるような p および q を求めよ．また，そのときの I の値を求めよ．

1978

解 答

I が最小値となるのは，$y = px + q$ が $y = \log x$ と $x = t$ $(a < t < b)$ で接するときであるので，

$$\begin{aligned} px + q &= \frac{1}{t}(x - t) + \log t \\ &= \frac{1}{t}x + \log t - 1 \\ \therefore \quad p &= \frac{1}{t},\ q = \log t - 1 \end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\frac{1}{t}x + \log t - 1 - \log x\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2t}x^2 + (\log t - 1)x - x\log x + x\right]_a^b \\ &= \left\{\frac{1}{2t}b^2 + (\log t - 1)b - b\log b + b\right\} - \left\{\frac{1}{2t}a^2 + (\log t - 1)a - a\log a + a\right\} \\ &= \frac{1}{2t}(b^2 - a^2) + \log t(b - a) - b\log b + a\log a \end{aligned}$$

ここで，I が最小となる t は，

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{2t^2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{t}(b - a) \\ &= -\frac{1}{2t^2}\left\{(b^2 - a^2) - 2t(b - a)\right\} \\ &= -\frac{1}{2t^2}(b - a)(b + a - 2t) \end{aligned}$$

であるから，

$$t < \frac{a+b}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dI}{dt} < 0$$
$$t > \frac{a+b}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dI}{dt} > 0$$

より，$t = \dfrac{a+b}{2}$ のとき，I は最小となる．したがって，$p = \dfrac{2}{a+b}$，$q = \log\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + 1$

（答）　$I = (a+b)(b^2 - a^2) + (b - a)\log\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - b\log b + a\log a$

1

数列 x_1, x_2, ……, x_n…… が $x_{n+1}=2x_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，数 a を適当に定めれば，すべての $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して不等式 $|x_n-2^n\cdot a|\leqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを証明せよ．

1979

解答

$$x_{n+1}+\frac{1}{3\cdot 2^n}=2\left(x_n+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$$
$$x_n+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}=\left(x_1+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}$$

ここで，$x_1=b$ とすると，$x_n=\left(b+\dfrac{1}{3}\right)2^{n-1}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$ である．

また，$a=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{3}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}|x_n-2^n\cdot a|&=\left|\left(b+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}-\left(b+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}\right|\\&=\left|-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right|\leqq\frac{1}{3}\end{aligned}$$

したがって，すべての $n=1, 2, \cdots$ に対して，不等式

$$|x_n-2^n\cdot a|\leqq\frac{1}{3}$$

が成立することが示された．　□