1

図1のように2つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える．2点 P，Q が6個の頂点 A，B，C，D，E，F を以下の規則 (a)，(b) に従って移動する．

（1）　時刻0では図2のように点Pは頂点Aに，点Qは頂点Cにいる．

（2）　点P，Qは時刻が1増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

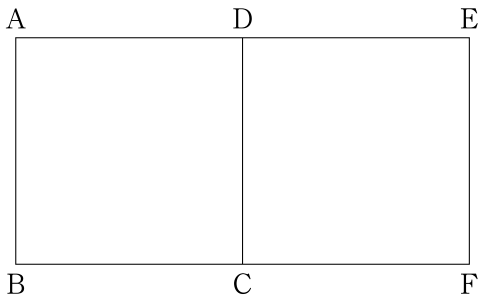
時刻 n まで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す．また時刻 n まで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に2点P，Qがともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める．このとき，次の問に答えよ．

（1）　時刻1での点P，Qの可能な配置を，図2にならって全て図示せよ．

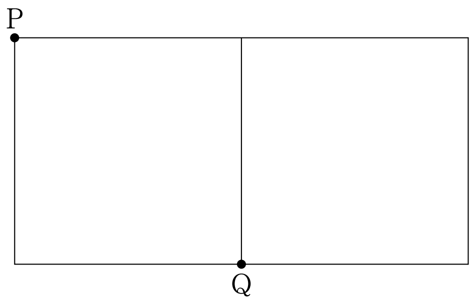
（2）　a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ．

（3）　a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n で表せ．

（4）　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ．



【図1】



【図2】

1900

解答

解答

（1）　時刻1における2点P，Qの可能な配置は，以下の6つの場合のみである．

（2）　(1) の図より，$p_1 = \dfrac{1}{6}$，　$a_1 = \dfrac{1}{2}$，　$b_1 = p_1 - a_1 = \dfrac{1}{3}$.

a_2, b_2 について考える．以下のように，事象 X, Y, Z を定める．

$$\begin{cases} \text{事象 } X : 2\text{点 } P, Q \text{ が正方形の対角線上にいる．} \\ \text{事象 } Y : 2\text{点 } P, Q \text{ が } (A, E), (B, F) \text{ のどちらかの組合せでいる．} \\ \text{事象 } Z : 2\text{点 } P, Q \text{ が同じ頂点にある．} \end{cases}$$

(i)　時刻 k において事象 X の場合

このとき，時刻 $k+1$ で事象 X となるのは $\dfrac{1}{2}$，　事象 Y となるのは $\dfrac{1}{6}$，　事象 Z となるのは $\dfrac{1}{3}$ の確率である．

(ii)　時刻 k において事象 Y の場合

このとき，時刻 $k+1$ で事象 Y となるのは $\dfrac{1}{2}$，　事象 Y となるのは $\dfrac{1}{4}$，　事象 Z となるのは $\dfrac{1}{4}$ の確率である．

(iii)　時刻 k において事象 Z の場合

時刻 n から時刻 $n+1$ になるまでの推移に注目する．

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\text{時刻 } n & & \text{時刻 } n+1 \\
X \arrow[rr] \arrow[drr] & & X \\
Y \arrow[urr] \arrow[rr, dashed] & & Y
\end{tikzcd}
$$