1

a，b，c を複素数とするとき，次のことは正しいか．正しいものは証明し，正しくないものについては反例（成り立たない例）をあげよ．

（1）　ab，bc，ca がすべて 0 ならば，a，b，c はすべて 0 である．

（2）　$a+b$，$b+c$，$c+a$ がすべて実数ならば，a，b，c はすべて実数である．

（3）　$a^2+b^2+c^2=0$ ならば a，b，c はすべて 0 である．

（4）　$a+b+c=0$，$ab+bc+ca=0$ ならば，$a^3=b^3=c^3$ である．

1970

1

放物線 $y=x^2$ 上の異なる 3 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ における法線が 1 点で交わるとき，$x_1+x_2+x_3=0$ であることを証明せよ．（曲線上の 1 点で，接線に垂直な直線を，その点における曲線の法線という）

1971

$(x_1,\ y_1)$ における $y=x^2$ の法線の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2x_1}(x-x_1)-{x_1}^2 \qquad \cdots\cdots①$$

同様にして，$(x_2,\ y_2)$ における場合は，

$$y=-\frac{1}{2x_2}(x-x_2)+{x_2}^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①，② を連立して，

$$-\frac{1}{2x_1}x+{x_1}^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2x_2}x+{x_2}^2+\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)x={x_2}^2-{x_1}^2$$

$$x=2({x_1}^2-{x_2}^2)\cdot\left(\frac{x_1x_2}{x_2-x_1}\right)$$

$$=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)\cdot\frac{x_1x_2}{x_2-x_1}$$

$$=-2x_1x_2(x_1+x_2)$$

したがって，交点 $(x,\ y)$=$\left(-2x_1x_2(x_1+x_2),\ {x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2+\frac{1}{2}\right)$ である．

$(x_3,\ y_3)$ における法線も同じ点で交わるから，

$${x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2x_3}\{-2x_1x_2(x_1+x_2)\}+{x_2}^2+\frac{1}{2}$$

$${x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_3}+x_3^2$$

$$0=x_3^3-x_3({x_1}^2+x_1x_2+{x_2}^2)+x_1x_2(x_1+x_2)$$

$$0=(x_3+x_2+x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

ここで，$x_3 \fallingdotseq x_1$, $x_3 \fallingdotseq x_1$ であるから，$x_3+x_2+x_1=0$ である．（証明終了）

2

a

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

（2）　$\displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x^3}dx$ を求め，$t\to+\infty$ のときの極限値を求めよ．

b　数字 0 を記した札が n 枚，数字 1, 2, ……, 9 を記した札がそれぞれ m 枚ある．この中から任意に 1 枚を取り出し，その札の数字だけの賞金を受ける．ただし数字 0 の札を引いたときは，その札を戻したうえ，もう 1 回だけ引きなおして，賞金を受けるものとする．

（1）　賞金の期待値を求めよ．

（2）　期待値を 3 以下にするには，比 $\dfrac{n}{m}$ をどの程度に大きくすればよいか．

1971

a

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ より，x について微分して，$y'=\dfrac{1-3\log x}{x^4}$，$y''=\dfrac{4(3\log x-2)}{x^5}$ である．

増減表は以下の通りになる．

b

（1）

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{9} k\,\frac{m}{9m+n}\\
&=\frac{1}{2}\times 9\times 10\,\frac{m}{9m+n}\\
&=\frac{45m}{9m+n}
\end{aligned}$$

期待値を $E(X)$ とすると，

$$\begin{aligned}
E(X)&=\frac{45m}{9m+n}+\frac{n}{9m+n}\times\frac{45m}{9m+n}\\
&=\frac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}
\end{aligned}$$

（答）　$\underline{\underline{E(X)=\dfrac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}}}$

（2）　$m \fallingdotseq 0$ であるから，$E(X)=\dfrac{45\left(9+2\dfrac{n}{m}\right)}{\left(9+\dfrac{n}{m}\right)^2}$ と表すことができる．

$\dfrac{n}{m}=t$ とし，$f(t)=\dfrac{45(9+2t)}{(9+t)^2}$ と定めると，$f(t) \leqq 3$ から，

$$\begin{aligned}
f(t)&\leqq 3\\
\frac{45(9+2t)}{(9+t)^2}&\leqq 3\\
15(9+2t)&\leqq (t+9)^2\\
t^2+18t+81-135-30t&\geqq 0\\
t^2-12t-54&\geqq 0
\end{aligned}$$

$t>0$ より，これを解いて，$t \geqq 6+3\sqrt{10}$ であるから，比 $\dfrac{n}{m}$ は $6+3\sqrt{10}$ 以上にすればよい．

（答）　$\underline{\underline{6+3\sqrt{10}}}$

1

次のおのおのについて解答せよ．

（1）　4 辺形 $ABCD$ と 1 点 P がある．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

が成立するならば，この 4 辺形はどんな 4 辺形か．

（2）　$x_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{1+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{1+x_n}\right)$$

1972

解 答

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，四角形 ABCD は平行四辺形となる．

（2）　$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ とする。$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ となり，増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	

$f(t)$ は $t \leqq 0$ において, 狭義単調増加である．$x_1+x_2+\cdots+x_n=t$ とすると，$\dfrac{t}{1+t} \leqq \dfrac{x_k}{1+x_k}$ $(k=1, 2, \cdots, h)$ であるから,

$$\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}$$

を満たす．よって，題意は示された．　□

2

$f(z)$ は，複素数を係数とする z の 1 次式であって，$f(f(f(z)))=z$ がつねに成り立つものとする．このような $f(z)$ をすべて求めよ．

1972

解 答

$$\begin{aligned}
f(z)&=(a+bi)z+c\\
f(f(z))&=(a+bi)\{(a+bi)z+c\}+c\\
&=(a^2-b^2+2abi)z+c(a+1+bi)\\
f(f(f(z)))&=(a+bi)^2\{(a+bi)z+c\}+c\{(a+bi)+1\}\\
&=(a+bi)^3z+c\{(a+bi)^3+(a+bi)+1\}
\end{aligned}$$

ここで，$f(f(f(z)))=z$ から，$\begin{cases}(a+bi)^3=1\\ c\{(a+bi)^2+(a+bi)+1\}=0\end{cases}$ を満たす．よって，$c=0$ である．

また，$(a^3+3a^2bi-3ab^2-b^2i)=1$ より，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0\\ a^3-3ab^2=1\end{cases}$ であり，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0\\ a(a^2-3b^2)=1\end{cases}$ である．

よってここで場合分けを行う．

(i)　$b=0$ のとき，$a^3=1$ であり，a は実数より $a=1$

(ii)　$3a^2=b^2$ のとき，$a(-8a^2)=1$ であり，a, b は実数より，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

（答）　$f(z)=z,\ \left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

3

次の数列 a_1，a_2，……，a_n，…… の収束，発散を調べ，解答欄の表に番号を記入せよ．またその理由を述べよ．

（1）　$a_n=\dfrac{1}{n}\sin n$

（2）　$a_n=n^2\sin\dfrac{1}{n}$

（3）　$a_n=n\cos\dfrac{n\pi}{4}$

（4）　$a_n=\sqrt{2n}-n$

（5）　$a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}$

（6）　$a_n=\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{2n}$

1972

解答

（1）　$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，$-\dfrac{1}{n}<\dfrac{\sin n}{n}<\dfrac{1}{n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ から，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．したがって，0 に収束する．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}n\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n=\infty$ より，発散する．

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{n}{4}\pi$ は振動するから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\cos\frac{n}{4}\pi$ も振動する．

（4）　$a_n=\dfrac{(\sqrt{2n}-n)(\sqrt{2n}+n)}{\sqrt{2n}+n}=\dfrac{n^2-2n}{n+\sqrt{2n}}=\dfrac{n-2}{1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ より，発散する．

（5）　$\dfrac{1}{(n+k)^2}<\dfrac{1}{n^2}$ より，

$$0<a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n^2}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ である．したがって，0 に収束する．

（6）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\\&=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2\end{aligned}$$

したがって，$\log 2$ に収束する．

4

平面上の点 $P(x_0,\ y_0)$ を通って，放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線が引けるための必要十分条件は ${x_0}^2>y_0$ であることを証明せよ．またこのとき，この 2 本の接線の接点を Q，R として，3 角形 PQR の面積を x_0，y_0 で表せ．

1972

解 答

$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t)+t^2 \\ &= 2tx-t^2 \end{aligned}$$

であり，これが $(x_0,\ y_0)$ を通るとき，$t^2-2tx_0+y_0=0$ を満たし，これが異なる2解を持つ条件は，この二次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}={x_0}^2-y_0>0$ であるから，${x_0}^2>y_0$ となる．

また, $\mathrm{Q}(x_0+\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，$\mathrm{R}(x_0-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となるから, 三角形PQRの面積は, P'$(0,\ 0)$，Q'$(\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，R'$(-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となる．

ここで，三角形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-2(2{x_0}^2-2y_0)\sqrt{{x_0}^2-y_0}\right| \\ &= 2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

（答） （面積）$=2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}}$

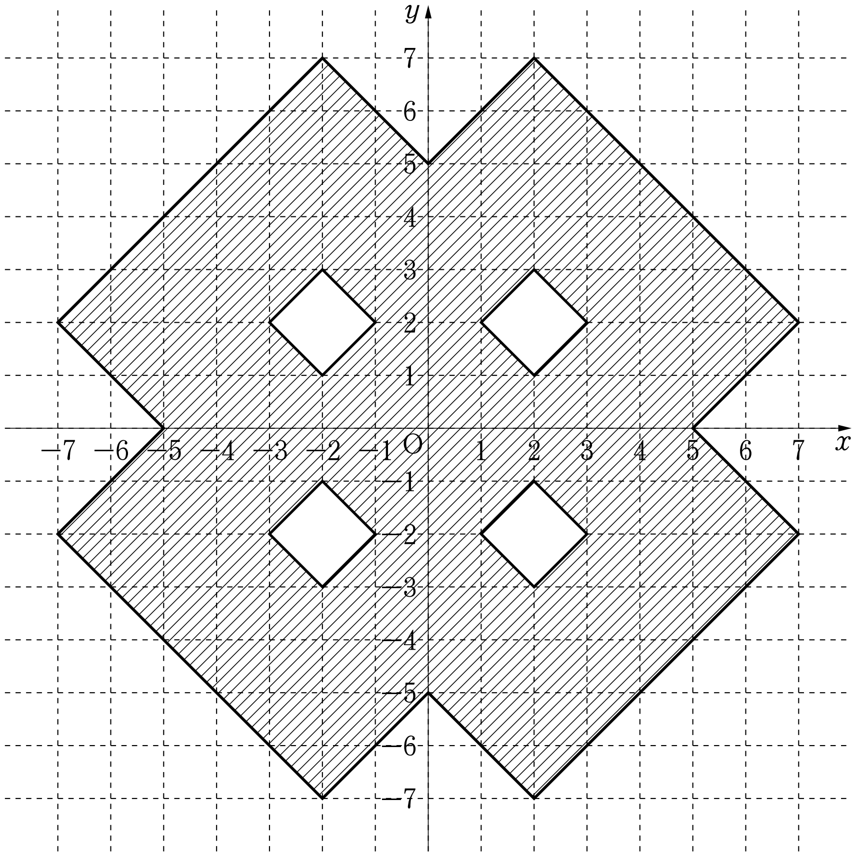
1

次の不等式を満たす点$(x,\ y)$が存在する範囲を図示せよ．

$$1 < ||x|-2|+||y|-2| < 5$$

1974

$1 < ||x|-2|+||y|-2| < 5$ について考える．$|x|, |y|$ はともに偶関数のため，第1象限について考え，それを線対称に第2，3，4象限に対応させればよい．したがって，下図のようになる．



2

底辺a，高さhの2等辺三角形がある．

（1）　この3角形の内接円の半径rをaとhを用いて表せ．

（2）　nが0でない整数で，$ah^n=1$を満たしながらa，hが変化するとき，$\lim_{a\to\infty}\dfrac{r}{a}$を求めよ．

1974

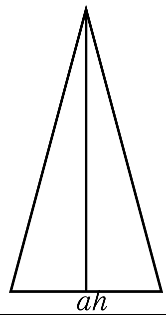
解答

（1）　この三角形の面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}ah$$

$$\frac{1}{2}ah=r\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)$$

$$r=\frac{ah}{2\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)}$$



（答）$r=\dfrac{ah}{2\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)}$

（2）　$ah^n=1$より，$h^n=\dfrac{1}{a}$，したがって，$h=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

3

$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$p \neq q$ である p，q に対して
$$|\log(p+1)-\log(q+1)| < |p-q|$$
が成立することを証明せよ．

次に，k を $0<k<1$ である定数とすると $|\log(p+1)-\log(q+1)| < k|p-q|$ が成立しないような $p \geqq 0$、$q \geqq 0$，$p \neq q$ が存在することを示せ．ここで $\log$ は自然対数を表すものとする．

1974

解答

条件式から $p>q$ としても一般性を失わない．ここで，$\dfrac{\log(p+1)-\log(q+1)}{p-q}<1$ を示せばよい．

ここで，平均値の定理から，$f(x)=\log(x+1)$ とすると，
$$\frac{\log(p+1)-\log(q+1)}{p-q} = \frac{1}{c+1} \quad \cdots\cdots①$$
となる c が，$q<c<p$ の範囲に存在する．

$\dfrac{1}{p+1} < \dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{q+1}$ …… ② であるから，$\dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{q+1} \leqq 1$ を満たし，$\dfrac{1}{c+1}<1$ である．

したがって，$|\log(p+1)-\log(q+1)| < |p-q|$ となる．□

また，$0<k<1$ であることから，$k=\dfrac{1}{1+r}$ $(r>0)$ とおける．このとき，$c=\dfrac{1}{1+r}$ となる c が存在することを示せば良い．

$p=r+\alpha, q=r-\alpha$ とすると，$\dfrac{1}{r+1+\alpha} < \dfrac{1}{c+1} < \dfrac{1}{r+1-\alpha}$ となる．

ここで，$\lim\limits_{\alpha\to 0}$ を考えると，はさみうちの原理から，$\dfrac{1}{c+1} = \dfrac{1}{r+1} = k$ となるため，等号が成立するような $p \geqq 0, q \geqq 0, p \neq q$ となる p, q が存在することが示された．したがって，題意を満たす p, q が存在することが示された．□

4

$f(x)$，$g(x)$ を $x \geqq 0$ で定義された正の値をとる連続関数で，$g(x)$ は増加関数であるとする．このとき
$$S(x)=\int_0^x f(t)dt, \quad T(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$
に対して次の (1)，(2) を証明せよ．

（1）　すべての $x>0$ に対して $T(x) \leqq g(x)S(x)$ である．

（2）　$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は $x>0$ で増加関数である．ここで一般に関数 $h(x)$ が増加関数であるとは，$x_1<x_2$ ならば $h(x_1) \leqq h(x_2)$ が成立することをいう．

1974

解答

（1）　$f(x)=g(x)S(x)-T(x)$ とする．
$$f(x)=g(x)S(x)-T(x)$$
$$f(x)=g(x)\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x g(t)f(t)\,dt$$
$$f'(x)=g'(x)\int_0^x f(t)\,dt+g(x)f(x)-g(x)f(x)$$
$$=g'(x)\int_0^x f(t)\,dt$$

ここで，$g(x)$ は増加関数より，$g'(x)>0$ であり，$f(x)$ は正の値を取るから，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt>0$ である．

したがって，$f'(x)=g'(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt>0$

よって，$x>0$ において，$g(x)S(x)-T(x) \geqq 0$ であるから，$g(x)S(x) \geqq T(x)$ が示された．

（2）

$$\begin{aligned}\frac{T(x)}{S(x)}\,dx &= \frac{T'(x)S(x)-T(x)S'(x)}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)g(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)g(x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt - \displaystyle\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)\{g(x)S(x)-T(x)\}}{S^2(x)}\end{aligned}$$

$f(x)>0$ かつ (1) から，$g(x)S(x)-T(x)\geqq 0$ より，$\dfrac{T(x)}{S(x)}\,dx\geqq 0$ であるから，$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は増加関数となる．□

1

次のおのおのを証明せよ．

（1）　$\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ．

（2）　$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi+\cos\frac{10}{9}\pi+\cos\frac{14}{9}\pi+\cos\frac{16}{9}\pi$ の値を求めよ．

1975

（1）　$2^{\frac{2}{3}}=2\sqrt{2}<3$ より，$\log_2 3>\frac{3}{2}$ …… ①

となる．また，$3^{\frac{2}{3}}=3\sqrt{3}>4$ より，$\log_3 4<\frac{3}{2}$ …… ②

となる．

①，② より，$\log_3 4<\log_2 3$.　（証明終了）

（2）　$\cos 5\theta=\cos 4\theta$ を満たす θ を考える．$-1<\cos\theta<1$ の範囲において，$0<\theta<\pi$ である．

$5\theta=\pm 4\theta\pm 2n\pi$ より，$\theta=\frac{2}{9}n\pi$，$2n\pi$ であり，$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$，$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ から，

$$16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$
$$16\cos^5\theta-8\cos^4\theta-20\cos^3\theta+8\cos^2\theta+5\cos\theta-1=0$$
$$(\cos\theta-1)(16\cos^4\theta+8\cos^3\theta-12\cos^2\theta-4\cos\theta+1)=0$$

ここで，解と係数の関係より，

$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{6}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=0$$

が成り立ち，また，

$$\begin{aligned}&\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi+\cos\frac{10}{9}\pi+\cos\frac{14}{9}\pi+\cos\frac{16}{9}\pi\\&=2\left(\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi\right)\\&=0\end{aligned}$$

（答）　$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi+\cos\frac{10}{9}\pi+\cos\frac{14}{9}\pi+\cos\frac{16}{9}\pi=0$

2

次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　1 から 10 までの 10 個の整数から相異なる 5 個をとり，その積を a，残りの 5 個の積を b とする。$a\neq b$ を証明せよ．

（2）　また，1 から 10 までの 10 個の整数のうちの相異なる 5 個の積として表される整数のうちで，$\sqrt{10!}$ より小さいものの個数を p，$\sqrt{10!}$ より大きいものの個数を q とする．$p=q$ を証明せよ．

1975

（1）　1〜10 までの 10 個の整数のうち，7 の倍数を含むものは 7 のみだから，a または b のどちらか一方は 7 の倍数となるが，もう一方は 7 の倍数とはならないため，$a\neq b$ となる．

（2）　1〜10 までの 10 個の整数から 5 個を選び，その積を c，残りの 5 個の積を d とする．ここで，対称性から $c<d$ としても一般性を失わない．このとき，$c\cdot d=10!$ である．

ここで，$c<d$ から，$c^2<10!<d^2$ となる．よって，$c<\sqrt{10!}<d$ と表すことができるため，c は $\sqrt{10!}$ よりも小さく，d は $\sqrt{10!}$ よりも大きいことがわかる．

ここで，c の個数と d の個数は一致するため，$p=q$ となる．　（証明終了）

3

a　1つのさいころをn回つづけて投げ，投げた順に出た目の数の積をつくっていくものとする．このとき，次の(1)，(2)を解答せよ．

（1）　目の数の積がk回目$(1 \leqq k \leqq n)$にはじめて4となる確率pを求めよ．

（2）　目の数の積がn回目までのどこかで4となる確率を求めよ．

b　$f(x)$を$0 \leqq x \leqq 1$で連続な増加関数とする．$0 < a < 1$であるどんなaに対しても

$$\int_0^a f(x)dx \leqq a\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ．ここで$f(x)$が増加関数であるとは，$x_1 < x_2$ならばつねに$f(x_1) \leqq f(x_2)$が成立することをいう．

1975

a

（1）　出た目の積がk回目までに4になるには，

［1］　$k-1$回目までにすべて1を出し，k回目に4を出す

［2］　$k-1$回目までに1回だけ2を出し，k回目に2を出す

のいずれかであればよい．

［1］のとき，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

［2］のとき，$(k-1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6} = (k-1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

（2）

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{6} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
\frac{1}{6}S_n &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n + n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\
\frac{5}{6}S_n &= \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\
\frac{5}{6}S_n &= \frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\
S_n &= \frac{6}{25} - \frac{6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{n}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= \frac{6}{25} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left\{\frac{6}{5}+n\right\}
\end{aligned}
$$

（答）　$\dfrac{6}{25} - \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left\{\dfrac{6}{5}+n\right\}$

b

$f(x)$が単調増加関数であるから，$\int_a^1 f(x)dx$と$\int_0^a f(x)dx$の面積は，$\int_a^1 f(x)dx \geqq (1-a)f(a)$の関係にある．すなわち，$\int_0^a f(x)dx \leqq af(a)$より，$f(a) \leqq \dfrac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx$が成り立つ．

$\dfrac{1}{a}\int_0^a f(x)dx \leqq f(a)$より，$f(a) \leqq \dfrac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)dx$が成立．

$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,dx \\
(1-a)\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx + a\int_0^a f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_0^1 f(x)\,fx
\end{aligned}
$$

□

1

x^3 の係数が 1 であるような 3 次関数 $f(x)$ のうちで，定積分 $I=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ を最小にするものを決定し，そのときの I の値を求めよ．

1976

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．このとき，I を計算すると，

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\{x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2\}\,dx\\&=\int_{-1}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx\\&=2\int_{0}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx\\&=2\Big[\,\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}(a^2+2b)x^5+\frac{1}{3}(2bc+b^2)x^3+c^2x\Big]_0^1\\&=2\left\{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}(a^2+2b)+\frac{1}{3}(2bc+b^2)+c^2\right\}\end{aligned}$$

である．

$g(b)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{5}b$ とする．このとき，$g'(b)=\frac{2}{3}b+\frac{2}{5}$ であり，$g(b)$ は $b=-\frac{3}{5}$ のとき最小値をとる．

$$\begin{aligned}h(a,\,c)&=\frac{1}{5}a^2+\frac{2}{3}ac+c^2\\&=\left(c+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{4}{45}a^2\geqq 0\end{aligned}$$

であるから，$(a,\,c)=(0,\,0)$ のとき，最小値 0 をとる．

I を最小にする $f(x)=x^3-\frac{2}{5}x$ であり，そのときの I は $I=2\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{25}\right)=\frac{8}{175}$

（答）　$I=\frac{8}{175}$

1

5 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(0) + b\{f(c) + f(-c)\}$$

が成り立つように $f(x)$ に無関係な定数 a，b，c を定めよ．

1978

$f(x) = dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$ とする．

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i)dx \\
&= \int_{-1}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)dx \\
&= 2\int_{0}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}ex^5 + \frac{1}{3}gx^3 + ix\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}e + \frac{2}{3}g + 2i
\end{aligned}$$

また，$af(0) = ai$，　$b\{f(c) + f(-c)\} = 2b(ec^4 + gc^2 + i)$ である．

2 式の係数をそれぞれ比較して，$\begin{cases} 2bc^4 & = \dfrac{2}{5} \\ 2bc^2 & = \dfrac{2}{3} \\ (a + 2b) & = 2 \end{cases}$

これをそれぞれ解いて，　　**（答）** $(a, b, c) = \left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{5}{9}, \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$（符号任意）

2

A，B 2 人が次のような規則でさいころを投げるものとする．さいころを投げて 1 の目が出れば次回も同じ人が続けて投げ，1 以外の目が出れば次回は他方が投げることにする．第 1 回目は A が投げる．n 回目に A が投げる確率を p_n とするとき，次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

（2）　$\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

1978

（1）　n 回目に A が投げる確率が p_n であるため，n 回目 B が投げる確率は $(1 - p_n)$ と表される．

$$\begin{tikzcd} p_n \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & p_{n+1} \\ 1 - p_n \arrow[ur, "1-\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

同じ人が続けて投げる確率を α とすると，$\alpha = \dfrac{1}{6}$ である．推移図より，

$p_{n+1} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}(1 - p_n) = -\dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}$ である．　　**（答）** $p_{n+1} = -\dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}$

（2）

$$\begin{aligned}
p_{n+1} - \frac{1}{2} &= -\frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right) \\
p_n - \frac{1}{2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\
p_n &= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

（答） $\lim_{n\to\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$

3

p，q は区間 $a \leqq x \leqq b\ (0 < a < b)$ で $px + q \geqq \log x$ を満たすものとする．このとき，定積分

$$I = \int_a^b (px + q - \log x)dx$$

が最小となるような p および q を求めよ．また，そのときの I の値を求めよ．

1978

解 答

I が最小値となるのは，$y = px + q$ が $y = \log x$ と $x = t\ (a < t < b)$ で接するときであるので，

$$\begin{aligned} px + q &= \frac{1}{t}(x - t) + \log t \\ &= \frac{1}{t}x + \log t - 1 \\ \therefore \quad p &= \frac{1}{t},\ q = \log t - 1 \end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\frac{1}{t}x + \log t - 1 - \log x\right)dx \\ &= \Big[\, \frac{1}{2t}x^2 + (\log t - 1)x - x\log x + x \Big]_a^b \\ &= \left\{\frac{1}{2t}b^2 + (\log t - 1)b - b\log b + b\right\} - \left\{\frac{1}{2t}a^2 + (\log t - 1)a - a\log a + a\right\} \\ &= \frac{1}{2t}(b^2 - a^2) + \log t(b - a) - b\log b + a\log a \end{aligned}$$

ここで，I が最小となる t は，

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{2t^2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{t}(b - a) \\ &= -\frac{1}{2t^2}\left\{(b^2 - a^2) - 2t(b - a)\right\} \\ &= -\frac{1}{2t^2}(b - a)(b + a - 2t) \end{aligned}$$

であるから，

$$t < \frac{a+b}{2} \text{ のとき } \quad \frac{dI}{dt} < 0$$
$$t > \frac{a+b}{2} \text{ のとき } \quad \frac{dI}{dt} > 0$$

より，$t = \dfrac{a+b}{2}$ のとき，I は最小となる．したがって，$p = \dfrac{2}{a+b}$，$q = \log\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + 1$

（答）　$I = (a + b)(b^2 - a^2) + (b - a)\log\left(\dfrac{a+b}{2}\right) - b\log b + a\log a$

1

数列 x_1, x_2, ……, x_n…… が $x_{n+1}=2x_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，数 a を適当に定めれば，すべての $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して不等式 $|x_n-2^n\cdot a|\leqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを証明せよ．

1979

解 答

$$x_{n+1}+\frac{1}{3\cdot 2^n}=2\left(x_n+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$$
$$x_n+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}=\left(x_1+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}$$

ここで，$x_1=b$ とすると，$x_n=\left(b+\dfrac{1}{3}\right)2^{n-1}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$ である．

また，$a=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{3}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}|x_n-2^n\cdot a|&=\left|\left(b+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}-\left(b+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}\right|\\&=\left|-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right|\leqq\frac{1}{3}\end{aligned}$$

したがって，すべての $n=1, 2, \cdots$ に対して，不等式

$$|x_n-2^n\cdot a|\leqq\frac{1}{3}$$

が成立することが示された．　□