1

数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える．毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれ駒を進めるとする．ただし，点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする．

（1）　k 回目に硬貨を投げたあと，駒が点 1 にある確率を求めよ．

（2）　k 回目に硬貨を投げたあと，駒がある点 X_k の期待値 $E[X_k]$ を求めよ．

1900

解答

（1）　k 回目に駒が l にいる確率を $P_k(l)$ とする．題意より，

$$\begin{aligned} P_{k+1}(2) &= P_k(2) + \frac{1}{2}P_k(1) \\ P_{k+1}(1) &= \frac{1}{2}P_k(0) \\ P_{k+1}(0) &= \frac{1}{2}P_k(1) \\ P_{k+1}(-1) &= P_k(-1) + \frac{1}{2}P_k(0). \end{aligned}$$

［1］　$k = 2m-1$ のとき

$$\begin{aligned} P_{2m-1}(-1) &= \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \\ &= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \\ P_{2m-1}(0) &= 0 \\ P_{2m-1}(1) &= 2\left(\frac{1}{4}\right)^m \\ P_{2m-1}(2) &= \frac{1}{3}\left\{1 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \end{aligned}$$

［2］　$k = 2m$ のとき

$$\begin{aligned} P_{2m-1}(-1) &= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \\ P_{2m-1}(0) &= \left(\frac{1}{4}\right)^m \\ P_{2m-1}(1) &= 0 \\ P_{2m-1}(2) &= \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \end{aligned}$$

（答）　$\therefore P_k(1) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{4}\right)^m & (k：奇数) \\ 0 & (k：偶数) \end{cases}$

（2）　fjoa