【数学 I 代数】

1

A 市から，B，C 両地を経て D 市へいたる電車道路にそって，甲と乙とが AD 間を往復する．甲は，往きには，ABC 間は電車 CD 間は歩いて，p 時間，帰りには，DCB 間は電車 BA 間は歩いて，q 時間を要した．また乙は，往きには，AB 間は電車 BCD 間は歩いて，r 時間，帰りには，DC 間は電車 CBA 間は歩いて，s 時間を要した．距離は AB 間 $a$km，BC 間 $b$km，CD 間 $c$km で，甲，乙の徒歩の速さはそれぞれ一定，電車の速さも一定とすると，a, b, c, p, q, r, s の間にどのような等式が成り立つか．ただし，電車を待つ時間は所要時間に含めない．

1960

解 答

2

a, b, c は正の定数とする．このとき，

（1）　正数 x, y の和が一定数 h に等しいならば，$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y} \geqq \dfrac{(a+b)^2}{h}$ となることを証明せよ．

（2）　上の結果を使って，正数 x, y, z の和が一定数 k に等しいとき，$\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}$ の最小値を求めよ．

1960

解 答

【数学 I 幾何】

1

定円周上を同一方向に同じ速さで二つの点 P，Q がまわっている．円周上に二定点 A，B をとって，二直線 AP，BQ を作れば，そのなす角は一定に保たれることを証明せよ．

1960

解 答

2

三角形 ABC で $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$, $\mathrm{AB}=c$ $(b<c)$ とする．辺 BC 上に点 M，D，H があって，AM は中線，AD は頂角 A の二等分線，AH は BC への垂線とするとき，線分 BD，BH の長さ，および $\dfrac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MH}}$ を a, b, c で表せ．

1960

解 答

【数学 II】

1

$(x,\ y)$ を座標とする点 P が，原点を中心とする半径 1 の円周上を一様な速さでまわっている．このとき，$u=x(x+y)$, $v=y(x+y)$ なる関係で定まる $(u,\ v)$ を座標とする Q も，ある円の周上を一様な速さでまわっていることを証明せよ．

1960

解 答

2

放物線 $y=x^2$ の上に相異なる三点 A，B，C がある．このとき，

（1）　直線 AB が放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ に接するための条件を，点 A，B の x 座標の間の関係式で表せ．

（2）　二直線 AB，BC が放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ に接するならば，直線 CA もまたこの放物線に接することを証明せよ．

1960

解 答

【数学 III】

1

数列 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ において，一般項 c_n が公差 d なるある等差数列の第 n 項と公比 r なるある等比数列の第 n 項との和として表されるためには，

$$c_{n+2}-(1+r)c_{n+1}+rc_n=d(1-r) \quad (n=1, 2, \cdots)$$

が成り立つことが必要かつ十分である．これを証明せよ．

1960

解 答

2

x 軸および y 軸の上に両端を置いて第一象限内を動く長さ 1 の線分がある．

（1）　この線分と定直線 $x=k$ との交点の中で y 座標が最大になる点を P とする．P の y 座標を求めよ．

（2）　k が 0 から 1 まで変わるとき，点 P の動いて出来る線の方程式を求め，かつ，この線の略図をかけ．

1960

解 答

1

（1）　鋭角三角形 ABC の垂心を H とするとき，3 つの三角形 HBC，HCA，HAB の外接円の大きさの間には，どのような関係があるか。

（2）　$\log_a c + \log_b c = 0$ のとき，$abc + 1 = ab + c$ であることを証明せよ。

（3）　x が増していくとき，$f(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 7$ も増していくことを証明せよ。

1961

解 答

（1）　$\mathrm{AB} = c, \mathrm{BC} = a, \mathrm{CA} = b$ とする．3 つの三角形 HBC，HCA，HAB の外接円の半径をそれぞれ，R_a, R_b, R_c とする．

また，

$$\angle\mathrm{BHC} = \alpha, \angle\mathrm{CHA} = \beta, \angle\mathrm{AHB} = \gamma$$

とすると，

$$\alpha = 180° - A, \beta = 180° - B, \gamma = 180° - C$$

であるから，

$$\sin\alpha = \sin A, \sin\beta = \sin B, \sin\gamma = \sin C$$

である．

したがって，

$$R_A = \frac{a}{2\sin\alpha}, R_B = \frac{b}{2\sin\beta}, R_C = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

であって，△ABC の外接円の半径を R とすると，

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{C}{2\sin C}$$

であるので，

$$R = R_A = R_B = R_C$$

である．

したがって，3 つの三角形 HBC，HCA，HAB の外接円の半径はどれも等しい．　**（証明終了）**

（2）　(i)　$c = 1$ のとき，$\log_a c = 0, \log_b c = 0$ であり，$\log_a c + \log_b c = 0$ かつ，$abc + 1 = ab + c \iff ab + 1 = ab + 1$ である．

よって，$c = 1$ のとき題意は満たされる．

(ii)　$c \neq 1$ のとき，真数条件より $c > 0$ であるから，

$c > 1, 1 > c > 0$ のとき，$\log_a c \neq 0$ であり，

$$\begin{aligned} \log_a c + \log_b c &= 0 \\ \log_a c + \frac{\log_a c}{\log_a b} &= 0 \\ 1 + \frac{1}{\log_a b} &= 0 \\ \log_a b + \log_a a &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$\log_a ab = 0$ であるから，$ab = 1$.

$ab = 1$ のとき，$abc + 1 = c + 1 + ab + c$ より，$c \neq 1$ のとき，題意は満たされる．

よって，(i)，(ii) により題意は示された．　**（証明終了）**

（3）　$f'(x)=3x^2-8x+6=3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}>0$

　　$\therefore$　$f(x)$ は単調増加.

$\boxed{2}$

（1）　平面上で座標の原点を O とし，第 1 象限内にある点 A の座標を $(a,\ b)$ とする。A を通って x 軸の正の部分，y 軸の正の部分とそれぞれ P，Q で交わる直線を引いて，三角形 OPQ の面積が 1 になるようにするには，直線 PQ の傾き（勾配）をどのような値にとればよいか。また，このようなことが可能であるための点 A の存在範囲を求めて，これを図示せよ。

（2）　ある試験で A 組と B 組の全員が受験し，その成績の平均点を少数第 2 位以下を四捨五入して求めたところ，全体では 73.2，A 組では 70.5，B 組では 75.6 であった。A，B 2 組の人数の合計が 100 人ならば，A 組の人数はどのような範囲にあるか。

1961

解 答

（1）　PQ の直線の傾きを m として，$\ell : y=m(x-a)+b$ とおく.（ただし，条件より $m<0$）

このとき，P，Q の座標はそれぞれ，$\mathrm{P}\left(a-\dfrac{b}{m},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(0,\ -am+b)$ となる.

このとき，△OPQ の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(a=\frac{b}{m}\right)(-am+b) \\ &= \frac{1}{2}\left(-a^2m+ab+ab-\frac{b^2}{m}\right) \\ &= -\frac{1}{2m}(a^2m^2-2abm+b^2) \\ &= -\frac{1}{2m}(am-b)^2=1 \end{aligned}$$

よって，$(am-b)^2=-2m$ …… ①

傾き m は,

$$(am-b)^2=-2m \quad (m<0)$$

を満たせばよい.

① $\Longleftrightarrow a^2m^2-2abm+2m+b^2=0$　であり，$m<0$ において，この式が成り立てばよいので,

$$m : y=a^2m^2-2(ab-1)m+b^2$$

とおくと,

$$(m\text{ の軸})<0 \qquad \cdots\cdots②$$

$$y_{lm}>0 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(y=0\text{ についての判別式 }D)\geqq 0 \qquad \cdots\cdots④$$

であればよい.

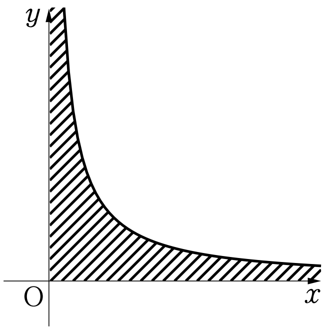
② より，$ab-1<0 \Longleftrightarrow ab<1$

③ より，$b^2>0$

④ より,

$$\begin{aligned} D &= (ab-1)^2-a^2b^2 \\ &= -2ab+1\geqq 0 \qquad 2ab\leqq 1 \qquad \therefore\ ab\leqq\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，上記より求める点 A の存在範囲は下図の斜線部分（ただし x 軸，y 軸の境界を除く）



……(答)

（2）　全体の平均値を U，A 組の平均値を A，B 組の平均値を B とおく．ここで，A 組の人数を a とおくと，

$$U=\frac{a\cdot A+(100-a)\cdot B}{100} \quad \cdots\cdots ⑤$$

条件より，

$$73.15 \leqq U < 73.25$$
$$70.45 \leqq A < 70.55$$
$$75.55 \leqq B < 75.65$$

$$⑤ \iff 100U=a(A-B)+100B \quad \cdots\cdots ⑥$$
$$\iff a=100\frac{U-B}{A-B} \quad \cdots\cdots ⑦$$
$$=100\left(1+\frac{U-A}{A-B}\right) \quad \cdots\cdots ⑧$$

(i)　a が最小値をとるときを考える．

B を固定したとき a が最小となるのは，U が最大であり，A が最小のときである．(∵ ⑦)

このとき，$U-A<2.8$, $-5.2<A-B<-5.1$ である．

よって，$-\dfrac{2.8}{5.1}<\dfrac{U-A}{A-B}$

したがって，

$$\begin{aligned} a &> 100\left(1-\frac{2.8}{5.1}\right) \\ &= 100\cdot\frac{13-4}{13} \\ &= 100\cdot\frac{9}{13} \\ &= 69.2\ldots \end{aligned}$$

(ii)　a が最大値をとるときを考える．

B を固定したとき a が最大値をとるには，U が最小，A が最大の時である．(∵ ⑦)

このとき，$U-A>2.6$, $-5.1<A-B<-5$ である．

よって，$\dfrac{U-A}{A-B}<-\dfrac{2.6}{5.1}$

したがって，

$$\begin{aligned} a &< 100\left(1-\frac{2.6}{5.1}\right) \\ &= 100\left(\frac{7-2}{7}\right) \\ &= 100\cdot\frac{5}{7}=71.4\ldots \end{aligned}$$

(i)，(ii) より，$a=70.71$　　　　（答）　$a=70.71$

3

三角形 PQR で $QR=x$，$RP=y$，$PQ=z$ とし，周の長さ $x+y+z$ は一定とする。この三角形を辺 PQ のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とするとき，次の問に答えよ。

（1）　$x=y$ の場合，V が最大となるのは x，z の比がどのようなときであるか。

（2）　z が一定のとき，V が最大となるのは，$x=y$ の場合であることを証明せよ。

（3）　上の (1)，(2) によって，V が最大となるのは (1) で得た場合であることがわかる。その理由を述べよ。

1961

解 答

4

直線上を動く点があって，時刻 t におけるその座標 x は

$$x=\sin t+3\sin 2t$$

で与えられている。

（1）　時刻 $t=0$ におけるこの点の速度および加速度を求めよ。

（2）　$0 \leqq t \leqq \pi$ のとき，点の動く範囲を求めよ。

（3）　時刻 t における速度を v とするとき $\displaystyle\int_0^\pi v^2 dt$ を計算せよ。

1961

解 答

（1）　求める速度を v，加速度を a とする.

（答）　$v=\dfrac{dx}{dt}=\cos t+6\cos 2t$

（答）　$a=\dfrac{dv}{dt}=-\sin t-12\sin 2t$

（2）

$$\begin{aligned} v &= 6(\cos^2 t-\sin^2 t)+\cos t \\ &= 6(2\cos^2 t-1)+\cos t \\ &= 12\cos^2 t+\cos t-6 \end{aligned}$$

$v=12\cos^2 t+\cos t-6=0$ を解く.

その解における時間 t について $t=\alpha, \beta$ とすると，$\cos\alpha=\dfrac{2}{3}, \cos\beta=-\dfrac{3}{4}$ である.

増減表は以下の通りになる.

（端点 $t=0, \pi$ は省略）

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
v	$+$	0	$-$	0	$+$
x	↗	極大	↘	極小	↗

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \frac{\sqrt{5}}{3}+6\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{3} \\ &= \frac{5\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{\min} &= \frac{\sqrt{7}}{4} + 6\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{3}{4} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{4}\left(1-\frac{9}{2}\right) \\
&= -\frac{7\sqrt{7}}{8}
\end{aligned}
$$

（答）　$-\frac{7\sqrt{7}}{8} \leqq x \leqq \frac{5\sqrt{5}}{3}$

（3）

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} v^2\,dt \\
&= \int_0^{\pi} (\cos t + 6\cos 2t)^2\,dt \\
&= \int_0^{\pi} (\cos^2 t + 12\cos t\cos 2t + 36\cos^2 2t)\,dt \\
&= \int_0^{\pi} \{\frac{1+\cos 2t}{2} + 12\cos t(1-2\sin^2 t) + 36\frac{1+\cos 4t}{2}\}\,dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{37}{2} + 12\cos t + \frac{\cos 2t}{2} + 18\cos 4t - 24\cos t\sin t\right)dt \\
&= \left[\frac{37}{2}t - 8\sin^3 t\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{37}{2}\pi
\end{aligned}
$$

（答）　$\frac{37}{2}\pi$

1

次の各問について空欄に数，式，言葉を記入せよ。

（1）　三角形 ABC の内部に点 P があって，三角形 PBC，PCA，PAB の面積の比が，3 辺 BC，CA，AB の長さの比に等しいとき，P は三角形 ABC の $\boxed{ア}$ である。

（2）　空間で，定線分 AB に対し，$\angle APB$ が鈍角になるような点 P の存在範囲は $\boxed{イ}$ である。

（3）　3 乗すると 8 になる複素数は $\boxed{ウ}$ である。

（4）　x の方程式 $2^x + 2^{-x} = a$ に根があるための a の値の範囲は $\boxed{エ}$ で，そのとき $x = \boxed{オ}$ である。

（5）　次の無限級数に和があるのは $\boxed{カ}$ の場合で，そのとき，和は $\boxed{キ}$ である。

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \cdots + x(1-x)^n + \cdots$$

（6）　$\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \cos 3x + c$（$c$ は定数）のとき，$f(t)$ は $\boxed{ク}$ であり，c は $\boxed{ケ}$ である。

1962

解答

（1）　$\boxed{ア}$　内心

（2）　$\boxed{イ}$　AB を直径とする球の内部

（3）　ある複素数を ω とする．

$$\omega^3 = 8$$
$$\omega^3 - 8 = 0$$
$$(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4) = 0$$

これを解いて，$\boxed{ウ}$　$2,\ -1 \pm \sqrt{3}i$

（4）　相加相乗平均の公式より，$2^x + 2^{-x} \geqq 2$（等号成立は $x = 0$ のとき）であるから，根があるための a の範囲は，$\boxed{エ}$　$a \geqq 2$.

$$2^x + 2^{-x} = a$$
$$2^{2x} - a \cdot 2^x + 1 = 0$$
$$2^x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

したがって，両辺底を 2 とする対数をとって，$\boxed{オ}$　$x = \log_2\left(a \pm \sqrt{a^2-4}\right) - 1$

（5）　$|1-x| < 1$ より，$\boxed{カ}$　$0 < x < 2$ のとき.

(i)　$x = 1$ のとき，1

(ii)　$x \neq 1$ のとき，$\dfrac{x}{1-(1-x)} = \dfrac{x}{x} = 1$

よって，(i)，(ii) より，求める和は $\boxed{キ}$　1 である.

（6）　$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \cos 3x + C$ であり，両辺を x で微分すると，$f(x) = -3\sin 3x$ である．したがって $\boxed{ク}$　$f(t) = -3\sin 3x$.

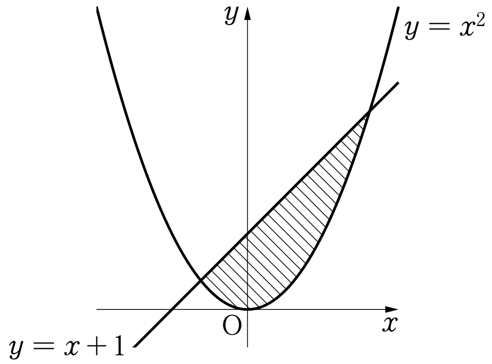
また，$\displaystyle\int_0^x (-3\sin 3t)\,dt = \Big[\cos 3x\Big]_0^t = \cos 3t + 1$ であるから，$\boxed{ケ}$　$c = 1$ である.

2

$y > x^2$，かつ $y < x + 1$ のとき，$x + y$ はどんな範囲の値をとるか。

1962

解 答



（斜線部を除く）

$x+y=k$ とおく．このとき，$y=-x+k$ であり，k の値を変化させ，領域内部での最大，最小を考える．
$y=x^2$ と $y=x+1$ の交点を求める．

$$x^2-x-1=0$$
$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

であるから，$(x+y)_{\max}=2+\sqrt{5}$

$y'=2x$ より，接するときを考えて，$y=-x-\dfrac{1}{4}$ であるから，$(x+y)_{\min}=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore\quad -\dfrac{1}{4}<x+y<2+\sqrt{5}$

3

$f(x)=x^4+2x^3+ax$ が極大値をもつのは，定数 a がどんな範囲にある場合か。

1962

解 答

$f(x)=x^4+2x^3+ax$ とする．このとき，$f'(x)=4x^3+6x^2+a$, $f''(x)=12x^2+12x$ である．
増減表は以下の通りになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\nearrow$	$a+2$	$\searrow$	a	$\nearrow$

ここで，$f(x)$ が極大値をもつためには，$f'(x)$ の値が正から負に変わればよい．

(i)　$a>0$ のとき，

x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$a+2$	$+$	a	$+$
$f(x)$	$\searrow$				$\nearrow$		$\nearrow$

より不適．

(ii)　$a=0$ のとき，

x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$				$\nearrow$		$\nearrow$

より不適．

(iii)　$-2<a<0$ のとき，

x	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$a+2$	$+$	$-$	a	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$				$\nearrow$	$\searrow$				$\nearrow$

より，$f(-1)=a+2>0$, $f(0)=a<0$ であることと，中間値の定理より，$f'(x)$ は $-1<x<0$ の範囲で，少なくとも 1 回は正から負への符号変化をする.

(iv)　$a=-2$ のとき，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

より不適.

(v)　$a<-2$ のとき，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$a+2$	$-$	a	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

より不適.

(i)〜(v) より，$-2<a<0$ のとき極大値をもつ.

4

任意の三次式 $f(x)$ に対し $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\{f(p)+f(q)\}$ となるような p，q で $f(x)$ に無関係なものがあることを証明せよ。

1962

解 答

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とする.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)&=\int_0^1(ax^3+bx^2+cx+d)dx\\&=\left[\frac{1}{4}ax^4+\frac{1}{3}bx^3+\frac{1}{2}cx^2+dx\right]_0^1\\&=\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{2}c+d\end{aligned}$$

また，

$$\frac{1}{2}\{f(p)+f(q)\}=\frac{1}{2}(p^3+q^3)a+\frac{1}{2}(p^2+q^2)b+\frac{1}{2}(p+q)c+d$$

より，

$$p^3+q^3=\frac{1}{2}\text{かつ }p^2+q^2=\frac{2}{3}\text{かつ},p+q=1$$

を満たす $(p,\ q)$ が存在することを示せばよい.

$$\begin{aligned}(p+q)^2-2pq&=\frac{2}{3}\\pq&=\frac{1}{6}\\(p+q)(p^2-pq+q^2)&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

解と係数の関係から，

$$6x^2-6x+1=0$$

を満たす有理数 x が存在すればよい.

この式を解くと, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ より, 有理数 x が存在するため, 題意は示された.

1

3 辺が $BC > CA > AB$ となるような三角形 ABC がつくれるためには，頂角 B の大きさがどんな範囲にあることが必要かつ十分か。

1963

解答

$\mathrm{AB} = c, \mathrm{BC} = a, \mathrm{CA} = b$ とする．

このとき，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

が成立する．また，$\mathrm{BC} > \mathrm{CA} > \mathrm{AB}$ から，

$$\sin A > \sin B > \sin C$$

となるようにすると，

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \frac{\pi}{2}$$

ここで，

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\text{のとき}\right)$$

$$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C}$$

であることがわかる．

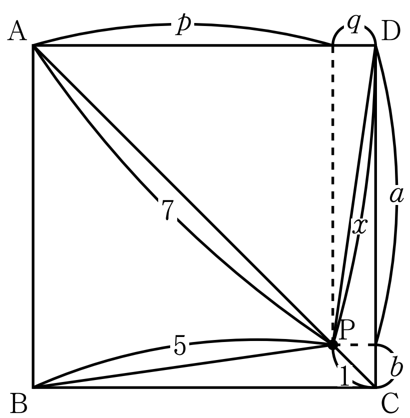
したがって，$0 < \mathrm{B} < \dfrac{\pi}{4}$

2

正方形 ABCD とその内部の 1 点 P がある。線分 AP，BP，CP の長さがそれぞれ 7，5，1 であるとき，この正方形の面積を求めよ。

1963

解答



$\mathrm{PD} = x$ とする．正方形内に存在する直角三角形に対し，三平方の定理より，

$$\begin{cases} a^2 + q^2 = x^2 \\ a^2 + p^2 = 49 \\ b^2 + q^2 = 1 \\ b^2 + p^2 = 25 \end{cases} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

が成り立つ．

① について，各式より，$\begin{cases} p^2 - q^2 = 49 - x^2 \\ p^2 - q^2 = 24 \end{cases}$ を得る．よって，これを解いて，$x = 5$ を得る．

また，$\triangle\mathrm{ABP} \equiv \triangle\mathrm{ADP}$ であるから，$\angle\mathrm{BAP} = \angle\mathrm{DAP} = \dfrac{\pi}{4}$ となる．よって，点 P は対角線上に存在し，対角線の長さが 8 となるから，求める正方形の面積を S とすると，

$$S = 8 \times 8 = 64$$

$\therefore \quad S = 64$

3

点 P を通る直線を対称軸として，円 $x^2+y^2=1$ の対称図形をかいたとき，これが x 軸に接した。このような点 P の存在範囲を求めよ。

1963

解 答

4

x の整式 x^n-1 を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを求めよ。

1963

解 答

$x^n-1=(x-1)^3Q_n(x)+ax^2+bx+c$

$x=1$ のとき　　$a+b+c=0$ …… ①

両辺を x で微分して，

$$nx^{n-1}=\{3(x-1)^2Q_n(x)+(x-1)^3Q'_n(x)\}+2ax+b$$

$x=1$ のとき　　$n=2a+b$ …… ②

さらに両辺を x で微分して，

$$n(n-1)x^{n-2}=\{6(x-1)Q_n(x)+6(x-1)^2Q'_n(x)+(x-1)^3Q''_n(x)\}+2a$$

$x=1$ のとき　　$n(n-1)=2a$ …… ③

③ より，$a=\dfrac{n(n-1)}{2}$

② より，

$$n=n(n-1)+b$$
$$b=-n^2+2n$$

① より，

$$\frac{n(n-1)}{2}-n^2+2n+c=0$$
$$n^2-n-2n^2+4n+c=0$$
$$2c=n^2-3n$$
$$c=\frac{n^2-3n}{2}$$
$$\therefore\quad \frac{n(n-1)}{2}x^2-n(n-2)x+\frac{n(n-3)}{2}$$

5

三角形 ABC の 3 辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とするとき，$\angle A=2\angle C$ ならば $a^2=c(b+c)$ であることを証明せよ。

1963

解 答

$\angle \mathrm{C}=\theta$ とする．正弦定理から，k を実数として，

$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin 3\theta}=\frac{c}{\sin\theta}=k$$

を満たす．したがって，$a=k\sin 2\theta, b=k\sin 3\theta, c=k\sin\theta$ である．

$$(\text{左辺})=k^2\sin^2 2\theta$$
$$=4k^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= k^2\sin\theta(\sin 3\theta+\sin\theta)\\
&= k^2\sin\theta(3\sin\theta-4\sin^3\theta+\sin\theta)\\
&= -4k^2(\sin 4\theta-\sin^2\theta)\\
&= -4k^2\sin^2\theta(\sin^2\theta-1)\\
&= 4k^2\sin^2\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

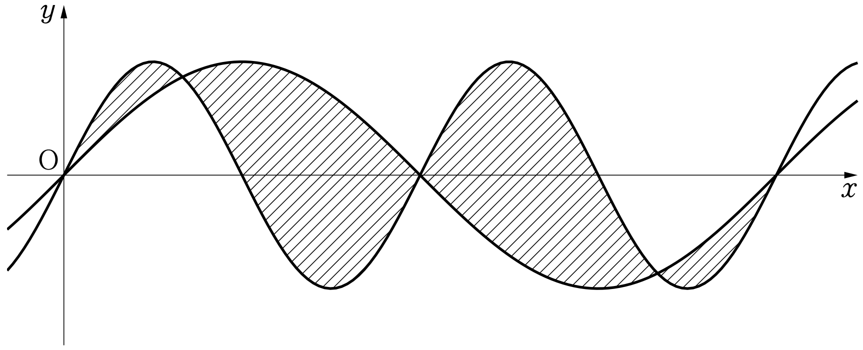
より，(左辺) = (右辺) となるため，$\angle\mathrm{A}=2\angle\mathrm{C}$ であれば，$a^2=c(b+c)$ となる． □

$\boxed{6}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で $y=\sin x$ および $y=\sin 2x$ のグラフをかき，これらの 2 曲線によって囲まれた部分の総面積を求めよ。

1963

解 答



求める面積を S とすると，対称性から，S は 0 から π までの面積を 2 倍したものである．

$$
\begin{aligned}
S &= 2\left\{\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)\right\}\\
&= 2\left\{\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right\}\\
&= \left[\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right\}+\left\{\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right\}\right]\\
&= 2\left(\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right)\\
&= 5
\end{aligned}
$$

（答） $\underline{\underline{5}}$

1

$\sqrt{x-a}=x-b$ を x について解け。

1964

解答

定義域から $x-a>0$ より，$x>a$ の範囲で以下を考える．

(i)　$x-b>0$ のとき

両辺を二乗すると

$$x-a=(x-b)^2$$
$$x^2-(2b+1)x+b^2+a=0$$

ここで，この2次方程式に対して判別式を D とすると，

$$\begin{aligned} D&=(2b+1)^2-4(b^2+a)\\ &=4(b-a)+1 \end{aligned}$$

$D\geqq 0$ のとき，$x=\dfrac{(2b-1)\pm\sqrt{4(b-a)+1}}{2}$ である．ここで，条件より $x>b$ かつ $x>a$ であるから，$x=\dfrac{(2b-1)+\sqrt{4(b-a)+1}}{2}$ である．

(ii)　$x-b<0$ のとき

$y=\sqrt{x-a}$，$y=x-b$ について考えると，$\sqrt{x-a}>0$ かつ，$x-b<0$ となるため，明らかに解を持たない．

(i)，(ii) より，解は以下の通りとなる．

$$\text{（答）}\quad x=\begin{cases} \dfrac{(2b-1)+\sqrt{4(b-a)+1}}{2} & (4(b-a)+1\geqq 0 \text{ のとき})\\ \text{解なし} & (4(b-a)+1<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

2

$f(x)=2-x^2$ に対して $F(t)=\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)dx$ は t のどんな値に対して最大または最小となるか。

1964

解答

$$\begin{aligned} F(t)&=\int_t^{t+2}f(x)dx=\int_t^{t+2}(2-x)^2dx=\int_t^{t+2}(x^2-4x+4)dx\\ &=\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\Big]_t^{t+2}\\ &=\Big\{\frac{1}{3}(t+2)^3-2(t+2)^2+4(t+2)\Big\}-\Big(\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t\Big)\\ &=\Big\{\frac{1}{3}(t^3+6t^2+12t+8)-2(t^2+4t+4)+4t+8\Big\}-\Big(\frac{1}{3}t^3-2t^2+4t\Big)\\ &=2t^2-4t+\frac{8}{3}=2(t-1)^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

よって，$F(t)$ は $t=1$ のとき最小値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．

3

$\dfrac{\pi}{2}>x\geqq y\geqq 0$ のとき，$x-y$，$\sin x-\sin y$，$\tan x-\tan y$ の大小をくらべよ。

1964

解答

$f(x) = x - \sin x$ とすると，$f'(x) = 1 - \cos x$ である．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

より，$x \geqq \sin x$ $(0 \leqq x < \frac{\pi}{2})$，$y \geqq \sin y$ $(0 \leqq y \leqq x < \frac{\pi}{2})$ であるから，
$x - y \geqq \sin x - \sin y$　$(\sin x, \sin y \geqq 0)$

また，$g(x) = \tan x - x$ とすると，$g'(x) = \dfrac{1}{cos^2 x} - 1 = \tan^2 x$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	

より，$\tan x \geqq x$　$(0 \leqq x < \frac{\pi}{2})$，$\tan y \geqq y$　$(0 \geqq y \geqq x < \frac{\pi}{2})$ であるから，$\tan x - \tan y \geqq x - y$ $(x, y \geqq 0)$ である．

よって，$\sin x - \sin y \leqq x - y \leqq \tan x - \tan y$ となる．

4

1辺の長さが a の正三角形の中に，図のように4円 O，O_1，O_2，O_3 が接している。ただし円 O はこの正三角形の重心を中心とする半径 r の円である。r が変化するとき，これら4円の面積の和の最大値および最小値を求めよ。

1964

解 答

5

円に内接する四角形があって，どの3頂点も二等辺三角形の3頂点になっている。この四角形はどんな形をしているか。

1964

解 答

1

$a \geqq 2$，$b \geqq 2$，$c \geqq 2$，$d \geqq 2$ のとき，$abcd > a+b+c+d$ であることを示せ。

1965

解答

(i)　$ab \geqq a+b$ を示す．

$ab-(a+b)=a(b-1)-(b-1)-1=(a-1)(b-1)-1$ である．

$a \geqq 2, b \geqq 2$ より，$(a-1)(b-1) \geqq 1$ であるから，$ab \geqq a+b$ である．

(ii)　$abc > a+b+c$ を示す．

$(a+b)c-(a+b+c)=(a+b)(c-1)-(c-1)-1=(a+b-1)(c-1)-1$ である．

$a+b \geqq 4, c-1 \geqq 1$ より，$c(a+b-1)(c-1) \geqq 3$ であるから，$abc > a+b+c$ である．

(i)，(ii) より，$abc \geqq (a+b)c > a+b+c$ である．

(iii)　$abcd > a+b+c+d$ を示す．

$(a+b+c)d-(a+b+c+d)=(a+b+c)(d-1)-(d-1)-1=(a+b+c-1)(d-1)-1$ である．

$a+b+c-1 \geqq 5, d-1 \geqq 1$ であるから，$(a+b+c-1)(d-1)-1 > 0$ である．

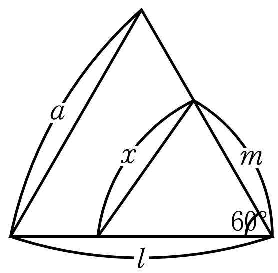
(iii) から，$abcd > (a+b+c)d > a+b+c+d$ であるから，$abcd > a+b+c+d$ が示された．　□

2

1 辺の長さ a の正三角形の面積を 2 等分する線分のうちで最も短いものの長さを求めよ。

1965

解答



$$\frac{1}{2}\times l \times m \sin 60^\circ = \frac{1}{2}a \times a \times \sin 60^\circ \times \frac{1}{2}$$
$$lm = \frac{1}{2}a^2$$
$$\begin{aligned} x^2 &= l^2+m^2-2lm\times\frac{1}{2}=(l+m)^2-3lm \\ &= \left(\frac{a^2}{2m}+m\right)^2-\frac{3}{2}a^2 = m^2+\frac{a^4}{4m^2}+a^2-\frac{3}{2}a^2 \\ &= m^2+\frac{a^4}{4m^2}-\frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

ここで，相加相乗平均の関係より，

$$m^2+\frac{a^4}{4m^2} \geqq 2\sqrt{m^2\cdot\frac{a^4}{4m^2}} = a^2$$

であり，等号成立は $m^2=\dfrac{a^4}{4m^2}$ のとき，つまり，$m=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ のときである．

（答）　$x_{\min}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

1

1 次式 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が $f_1(x)=1+x$，$x^2f_{n+1}(x)=x^2+x^3+\int_0^x tf_n(t)dt$ を満たしているとき

（1） $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ．

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1)$ を求めよ．

1966

解 答

（1） $f_n(x)=ax+b$ と表されることを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき　$f_1(x)=1+x$ より成立．

(ii) $n=k$ のとき　$f_k(x)=ax+b$ とする．このとき，

$$x^2f_{k+1}(x)=x^3+x^2+\int_0^x t(at+b)\,dx$$

$$x^2f_{k+1}(x)=x^3+x^2+\left[\frac{1}{2}at^3+\frac{1}{2}bt^2\right]_0^x$$

$$f_{k+1}(x)=\left(1+\frac{a}{3}\right)+\left(1+\frac{b}{2}\right)$$

より，$n=k+1$ のときも成立．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$f_n(x)=ax+b$ と表される．

よって，$f_n(x)=a_nx+b_n$ とすると，

$$f_{n+1}(x)=\left(1+\frac{a_n}{3}\right)x+\left(1+\frac{b_n}{2}\right)$$

より，

$$\begin{cases} a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{3} & \cdots\cdots① \\ b_{n+1}=1+\dfrac{b_n}{2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

である．

① から，

$$a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$$

$$a_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}$$

② から，

$$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$$

$$b_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，　**（答）** $f_n(x)=\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\right\}x+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

（2）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f_n(1) &= \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\right\}+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{2}+2 \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

$\boxed{1}$

4 辺形 $ABCD$ が半径 r の円に内接し，$\dfrac{AB}{4}=\dfrac{BC}{3}=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{DA}{1}$ を満たすとき，辺 AB の長さを求めよ．

1968

解答

$\dfrac{\mathrm{AB}}{4}=\dfrac{\mathrm{BC}}{3}=\dfrac{\mathrm{CD}}{2}=\dfrac{\mathrm{DA}}{1}=k$ とおくと，$\mathrm{AB}=4k,\ \mathrm{BC}=3k,\ \mathrm{CD}=2k,\ \mathrm{DA}=k$ である．

このとき，余弦定理より，

$$(2r)^2=k^2+(2k)^2-2\cdot 2k\cdot k\cdot \cos\theta \qquad \cdots\cdots①$$

$$(2r)^2=(3k)^2+(4k)^2-2\cdot 3k\cdot 4k\cdot(-\cos\theta) \qquad \cdots\cdots②$$

である．

①，② より，

$$-\left(\frac{25k^2-4r^2}{24k^2}\right)=\frac{3k^2-4r^2}{4k^2}$$

$$4r^2-25k^2=18k^2-24r^2$$

$$k=\sqrt{\frac{28}{43}}r$$

$$=2\sqrt{\frac{7}{43}}r$$

$\therefore\quad \mathrm{AB}=4k=8\sqrt{\dfrac{7}{43}}r$