

1

$n$  を正の整数として、関係式  $f(x) = (x-1)^n + 2 \int_0^1 f(t) dt$  を満たす関数  $f(x)$  を求めよ。

2000

$a = \int_0^1 f(t) dt$  とおく.

$f(x) = (x-1)^n + 2a$  より、

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 ((t-1)^n + 2a) dt \\ &= \frac{1}{n+1} [(t-1)^{n+1}]_0^1 + 2a[t]_0^1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + 2a \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1} + 2a \\ \therefore a &= \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\underline{f(x) = (x-1)^n - \frac{(-1)^n}{n+1}}}$$