1

(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ をみたすとき，$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$ が成り立つことを証明せよ．

(2)　$\int_0^\pi \frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ を求めよ．

2005

解答

（1）

$$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=\int_0^\pi\left\{(\pi-x)-\frac{\pi}{2}\right\}f(\pi-x)dx$$
$$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=-\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx$$
$$2\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$$
$$\int_0^\pi\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$$

（2）

$$\int_0^\pi \frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=\int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin^3(\pi-x)dx}{4-\cos^2(\pi-x)dx}$$
$$=\pi\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx-\int_0^\pi \frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$$
$$\int_0^\pi \frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$$

$I=\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$　とする．
ここで，$\cos x=t$ とすると，$dt=-\sin x dx$

$$I=-\int_1^{-1}\frac{1-t^2}{4-t^2}dt$$
$$=\int_{-1}^1\left\{1-\frac{3}{4-t^2}dt\right\}$$
$$=\int_{-1}^1\left\{1+\frac{\frac{3}{4}}{t-2}-\frac{\frac{3}{4}}{t+2}dt\right\}$$
$$=\left[x+\frac{3}{4}\log|t-2|-\frac{3}{4}\log|t+2|\right]_{-1}^1$$
$$=1-\frac{3}{4}\log 3+1+\frac{3}{4}\log 3$$
$$=2$$

（答）$\underline{\underline{\int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx=\pi}}$