大問 1

（1）　鋭角三角形 ABC の垂心を H とするとき，3 つの三角形 HBC，HCA，HAB の外接円の大きさの間には，どのような関係があるか。

（2）　$\log_a c+\log_b c=0$ のとき，$abc+1=ab+c$ であることを証明せよ。

（3）　x が増していくとき，$f(x)=x^3-4x^2+6x-7$ も増していくことを証明せよ。

（1）　$\mathrm{AB}=c, \mathrm{BC}=a, \mathrm{CA}=b$ とする．3 つの三角形 HBC，HCA，HAB の外接円の半径をそれぞれ，R_a, R_b, R_c とする．

また，

$$\angle\mathrm{BHC}=\alpha, \angle\mathrm{CHA}=\beta, \angle\mathrm{AHB}=\gamma$$

とすると，

$$\alpha=180^\circ-A, \beta=180^\circ-B, \gamma=180^\circ-C$$

であるから，

$$\sin\alpha=\sin A, \sin\beta=\sin B, \sin\gamma=\sin C$$

である．

したがって，

$$R_A=\frac{a}{2\sin\alpha}, R_B=\frac{b}{2\sin\beta}, R_C=\frac{c}{2\sin\gamma}$$

であって，$\triangle$ABC の外接円の半径を R とすると，

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{C}{2\sin C}$$

であるので，

$$R=R_A=R_B=R_C$$

である．

したがって，3 つの三角形 HBC，HCA，HAB の外接円の半径はどれも等しい．

（2）　［1］　$c=1$ のとき，$\log_a c=0, \log_b c=0$ であり，$\log_a c+\log_b c=0$ かつ，$abc+1=ab+c \Longleftrightarrow ab+1=ab+1$ である．

よって，$c=1$ のとき題意は満たされる．

［2］　$c\fallingdotseq 1$ のとき，真数条件より $c>0$ であるから，

$c>1, 1>c>0$ のとき，$\log_a c\fallingdotseq 0$ であり，

$$\log_a c+\log_b c=0$$
$$\log_a c+\frac{\log_a c}{\log_a b}=0$$
$$1+\frac{1}{\log_a b}=0$$
$$\log_a b+\log_a a=0$$

したがって，$\log_a ab=0$ であるから，$ab=1$.
$ab=1$ のとき，$abc+1=c+1+ab+c$ より，$c\fallingdotseq 1$ のとき，題意は満たされる．

よって，(i)，(ii) により題意は示された．

（3）　$f'(x)=3x^2-8x+6=3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

$\therefore$ $f(x)$ は単調増加．

大問 2

（1）　平面上で座標の原点を O とし，第 1 象限内にある点 A の座標を (a, b) とする。A を通って x 軸の正の部分，y 軸の正の部分とそれぞれ P，Q で交わる直線を引いて，三角形 OPQ の面積が 1 になるようにするには，直線 PQ の傾き（勾配）をどのような値にとればよいか。また，このようなことが可能であるための点 A の存在範囲を求めて，これを図示せよ。

（2）　ある試験で A 組と B 組の全員が受験し，その成績の平均点を少数第 2 位以下を四捨五入して求めたところ，全体では 73.2，A 組では 70.5，B 組では 75.6 であった。A，B 2 組の人数の合計が 100 人ならば，A 組の人数はどのような範囲にあるか。

解答ごにゃ

大問 1

$y > x^2$，かつ $y < x+1$ のとき，$x+y$ はどんな範囲の値をとるか。

大問 1

3 辺が $BC > CA > AB$ となるような三角形 ABC がつくれるためには，頂角 B の大きさがどんな範囲にあることが必要かつ十分か。

$\mathrm{AB}=c, \mathrm{BC}=a, \mathrm{CA}=b$ とする．

このとき，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$$

が成立する．また，$\mathrm{BC} > \mathrm{CA} > \mathrm{AB}$ から，

$$\sin A > \sin B > \sin C$$

となるようにすると，

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=\frac{\pi}{2}$$

ここで，

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{4}\text{のとき}\right)$$

$$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{C}$$

であることがわかる．

したがって，$0 < \mathrm{B} < \dfrac{\pi}{4}$

大問 2

x の整式 x^n-1 を $(x-1)^3$ で割ったときの余りを求めよ。

$x^n-1=(x-1)^3Q_n(x)+ax^2+bx+c$

$x=1$ のとき　　$a+b+c=0$ ……①

両辺を x で微分して，

$nx^{n-1}=\{3(x-1)^2Q_n(x)+(x-1)^3Q_n(x)\}+2ax+b$

$x=1$ のとき　　$n=2a+b$ ……②

さらに両辺を x で微分して，

$n(n-1)x^{n-2}=\{6(x-1)Q_n(x)+3(x-1)^2Q_n'(x)+3(x-1)^2\}$

$x=1$ のとき　　$n(n-1)=2a$ ……③

③より，$a=\dfrac{n(n-1)}{2}$

②より，

$$n=n(n-1)+b$$
$$b=-n^2+2n$$

①より，

$$\frac{n(n-1)}{2}-n^2+2n+c=0$$
$$n^2-n-2n^2+4n+c=0$$
$$2c=n^2-3n$$
$$c=\frac{n^2-3n}{2}$$

(答)$\dfrac{n(n-1)}{2}x^2-n(n-2)x+\dfrac{n(n-3)}{2}$

大問 1

1 次式 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が $f_1(x)=1+x$，$x^2f_{n+1}(x)=x^2+x^3+\int_0^x tf_n(t)dt$ を満たしているとき

（1） $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ．

（2） $\lim_{n\to\infty} f_n(1)$ を求めよ．

（1） $f_n(x)=ax+b$ と表されることを数学的帰納法を用いて示す．

(i) $n=1$ のとき $f_1(x)=1+x$ より成立．

(ii) $n=k$ のとき $f_k(x)=ax+b$ とする．
このとき，

$$x^2f_{k+1}(x)=x^3+x^2+\int_0^x t(at+b)\,dx$$
$$x^2f_{k+1}(x)=x^3+x^2+\left[\frac{1}{2}at^3+\frac{1}{2}bt^2\right]_0^x$$
$$f_{k+1}(x)=\left(1+\frac{a}{3}\right)+\left(1+\frac{b}{2}\right)$$

より，$n=k+1$ のときも成立．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n について，$f_n(x)=ax+b$ と表される．

よって，$f_n(x)=a_nx+b_n$ とすると，

$$f_{n+1}(x)=\left(1+\frac{a_n}{3}\right)x+\left(1+\frac{b_n}{2}\right)$$

より，

$$\begin{cases} a_{n+1}=1+\dfrac{a_n}{3} & \cdots\cdots④ \\ b_{n+1}=1+\dfrac{b_n}{2} & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

である．

④ から，

$$a_{n+1}-\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(a_n-\frac{3}{2}\right)$$
$$a_n-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$a_n=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}$$

⑤ から，

$$b_{n+1}-2=\frac{1}{2}(b_n-2)$$
$$b_n-2=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$b_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，

$$f_n(x)=\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\right\}x+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

（2）

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1)=\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{2}\right\}+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{3}{2}+2$$
$$=\frac{7}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1)=\frac{9}{2}$$

大問 1

4 辺形 $ABCD$ が半径 r の円に内接し，$\dfrac{AB}{4}=\dfrac{BC}{3}=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{DA}{1}$ を満たすとき，辺 AB の長さを求めよ．

$\dfrac{\mathrm{AB}}{4}=\dfrac{\mathrm{BC}}{3}=\dfrac{\mathrm{CD}}{2}=\dfrac{\mathrm{DA}}{1}=k$ とおくと，$\mathrm{AB}=4k$, $\mathrm{BC}=3k$, $\mathrm{CD}=2k$, $\mathrm{DA}=k$ である．

このとき，余弦定理より，

$(2r)^2=k^2+(2k)^2-2\cdot 2k\cdot k\cdot\cos\theta$ ……⑥

$(2r)^2=(3k)^2+(4k)^2-2\cdot 3k\cdot 4k\cdot(-\cos\theta)$ ……⑦

である．

⑥，⑦ より，

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{25k^2-4r^2}{24k^2}\right)&=\frac{3k^2-4r^2}{4k^2}\\
4r^2-25k^2&=18k^2-24r^2\\
k&=\sqrt{\frac{28}{43}}r\\
&=2\sqrt{\frac{7}{43}}r
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad \mathrm{AB}=4k=8\sqrt{\dfrac{7}{43}}r$