1

a を実数とし，関数 $f(x)=x^2+ax-a$ と $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ を考える．
関数 $y=F(x)-f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ．

2019

解 答

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x (t^2+at-a)dt\\&=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2-at\right]_0^x\\&=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-ax\end{aligned}$$

であるので，$g(x)=F(x)-f(x)$ とおくと，

$$\begin{aligned}g(x)&=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right)-(x^2+ax-a)\\&=\frac{1}{3}x^3+\left(\frac{a}{2}-1\right)x^2-2ax+a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g'(x)&=x^2+(a-2)x-2ax\\&=(x+a)(x-2)\end{aligned}$$

$g(x)$ は 3 次関数であるから，$y=g(x)$ のグラフが x 軸と相異なる 3 点で交わる条件は，「$g(x)$ が極値をもち，かつ，（極大値）×（極小値）<0」をみたすことである．これは，「$-a \fallingdotseq 2$, かつ, $g(-a)g(2)<0$」と言い換えられる．

いま，

$$\begin{aligned}g(-a)&=-\frac{a^3}{3}+\left(\frac{a}{2}-1\right)a^2+2a^2+a\\&=\frac{1}{6}a(a^2+6a+6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(2)&=\frac{8}{3}+2(a-2)-4a+a\\&=-a-\frac{4}{3}\end{aligned}$$

であるので，$g(-a)g(2)<0$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}a(a^2+6a+6)\left(-a-\frac{4}{3}\right)&<0\\a(a^2+6a+6)\left(a+\frac{4}{3}\right)&>0\end{aligned}$$　が求まる．

∴ 求める a の条件は，　（答）$a<-3-\sqrt{3},\ -\frac{4}{3}<a<-3+\sqrt{3},\ 0<a$

（これは，$a=2$ を満たしている．）