1

a を正の実数とする．関数 $f(x)=x^2e^{-ax}$ について，以下の問に答えよ．必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\lim\limits_{x\to\infty}x^ne^{-x}=0$ が成り立つことを用いて良い．

（1）　$f(x)$ の極値を求めよ．

（2）　b を実数とする．関数 $g(x)=f(x)-bx$ が正の極小値をもつような b の範囲を a を用いて表せ．

2021

2

n を 2 以上の整数とし，整数 $x,\ y$ が

$$5x+2y=7^n \qquad \cdots(*)$$

を満たしている．以下の問に答えよ．

（1）　$(*)$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ．

（2）　$(*)$ を満たす整数 $x,\ y$ について，x と y が互いに素でないならば，$x,\ y$ がともに 7 の倍数であることを示せ．

（3）　$(*)$ かつ $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ のうち，x と y が互いに素であるものの個数を p_n とする．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{7^n}$ を求めよ．

2021

3

xy 平面上で原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，x 軸上に 2 点 A$(a,\ 0)$，B$(3,\ 0)$ をとる．B を通り傾き m の直線を l とし，l は C と異なる 2 点 P，Q で交わっている．以下の問に答えよ．

（1）　m のとり得る値の範囲を求めよ．

（2）　2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ $p,\ q$ とするとき，$p+q$ および pq を m を用いて表せ．

（3）　積 AP・AQ を a と m を用いて表せ．

（4）　(3) の AP・AQ が m の値によらず一定となるような a をすべて求めよ．

2021

4

n を 3 以上の整数として，番号 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ の人がいる．番号 1 の人は白玉 1 個と赤玉 1 個，番号 2 の人は白玉 1 個と青玉 1 個，番号 $3,\ 4,\ \cdots,\ n$ の人は白玉 2 個を持っている．

最初に，番号 1 の人は，持っている 2 個の玉から無作為に 1 個選んで番号 2 の人に渡す．次に，番号 2 の人は，番号 1 の人から受け取った玉を含む 3 個の玉から無作為に 1 個選んで番号 3 の人に渡す．このようにして順番に，番号 $i(i=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ の人は，番号 $i-1$ の人から受け取った玉を含む 3 個の玉から無作為に 1 個選んで番号 $i+1$ の人に渡す．最後に番号 n の人は，番号 $n-1$ の人から受け取った玉を含む 3 個の玉から無作為に 1 個選んで番号 1 の人に渡す．これを 1 回の操作とする．1 回目の操作を終えた時点で，赤玉と青玉の両方を持っている人がいるときはその人を勝者とする．勝者が決まらなかったときは，1 回目の操作後に確認が持っている玉の状態から 2 回目の操作を行い，2 回目の操作を終えた時点で赤玉と青玉の両方を持っている人がいるときはその人を勝者とする．なお，1 回目の操作で勝者が決まったときは 2 回目の操作を行わない．以下の問に答えよ．

（1）　1 回目の操作で番号 $k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の人が勝者となる確率を p_n とする．$p_1,\ p_2$ および $p_k\ (k=3,\ 4,\ \cdots,\ n)$ を求めよ．

（2）　2 回目の操作で番号 $k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ の人が勝者となる確率を q_k とする．$q_1,\ q_2$ を求めよ．

（3）　2 回目までの操作で勝者が決まる確率を r_n とする．$\lim\limits_{n\to\infty}r_n$ を求めよ．必要ならば，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3^n}=0$ であることを用いてよい．

2021

1

関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{a}{3}x^3+bx^2-2ax$ (a, b は実数の定数) があり，$f'(2)=0$ を満たしている．以下の問に答えよ．

（1）　b を a を用いて表せ．

（2）　$f(x)$ が $x=2$ で極大値をとるような a の値の範囲を求めよ．

（3）　$f(x)$ が $x=2$ で極小値をとるような a の値の範囲を求めよ．

2021

2

2つの袋A，Bがあり，最初袋Aには赤球が1個と黒球が1個，袋Bには白球が2個入っている．以下の（操作）と（終了条件）を用いて，袋A，Bの間で球のやり取りを行う．最初の状態から始めて，（終了条件）満たされるまで（操作）を繰り返す．（終了条件）が満たされたなら（操作）を終了し，以後（操作）は行わない．

操作　袋Bの中に白球や黒球があれば，それらはすべて袋Aに入れる．袋Bの中に赤球があれば，それは袋Bに入れたままにする．次に袋Aの中の球をよくかき混ぜた後，袋Aから球を2個取り出し袋Bに入れ，袋Bの中の球を確認する．

終了条件　（操作）において袋Bの中の球を確認したとき，赤球と黒球がともに袋Bの中に入っている．

以下の問いに答えよ．

（1）　1回目の（操作）で赤球が袋Aから袋Bに移り，かつ2回目の（操作）で終了する確率を求めよ．

（2）　$n \geqq 2,\ 1 \leqq k \leqq n-1$ とする．k 回目の（操作）で初めて赤球が袋Aから袋Bに移り，かつ n 回目の（操作）で終了する確率を求めよ．

（3）　$n \geqq 1$ とする．ちょうど n 回目の（操作）で終了する確率 p_n を求めよ．

（4）　(3)の p_n を最大にする n を求めよ．

2021

3

座標平面において，連立不等式

$$y \geqq \frac{1}{2}x, \quad y \geqq 2x, \quad y \leqq -x^2+3$$

の表す領域を D とする．以下の問に答えよ．

（1）　領域 D を図示せよ．

（2）　点 (x, y) が領域 D を動くとき，$\dfrac{y+3}{(x-2)^2}$ の最小値を求めよ．また，そのときの x, y の値を求めよ．

（3）　点 (x, y) が領域 D を動くとき，$\dfrac{y+3}{(x-a)^2}$ の最大値を a を用いて表せ．また，そのときの x, y の値を求めよ．ただし，$a>1$ とする．

2021