1

数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える．毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれ駒を進めるとする．ただし，点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする．

(1)　k 回目に硬貨を投げたあと，駒が点 1 にある確率を求めよ．

(2)　k 回目に硬貨を投げたあと，駒がある点 X_k の期待値 $E[X_k]$ を求めよ．

1900

解 答

(1)　k 回目に駒が l にいる確率を $P_k(l)$ とする．題意より，

$$P_{k+1}(2) = P_k(2) + \frac{1}{2}P_k(1)$$
$$P_{k+1}(1) = \frac{1}{2}P_k(0)$$
$$P_{k+1}(0) = \frac{1}{2}P_k(1)$$
$$P_{k+1}(-1) = P_k(-1) + \frac{1}{2}P_k(0).$$

[1]　$k = 2m-1$ のとき

$$\begin{aligned} P_{2m-1}(-1) &= \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \\ &= \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\} \end{aligned}$$
$$P_{2m-1}(0) = 0$$
$$P_{2m-1}(1) = 2\left(\frac{1}{4}\right)^m$$
$$P_{2m-1}(2) = \frac{1}{3}\left\{1 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}$$

[2]　$k = 2m$ のとき

$$P_{2m-1}(-1) = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}$$
$$P_{2m-1}(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^m$$
$$P_{2m-1}(1) = 0$$
$$P_{2m-1}(2) = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^m\right\}$$

(答)　$$\therefore P_k(1) = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{4}\right)^m & (k : \text{奇数}) \\ 0 & (k : \text{偶数}) \end{cases}$$

(2)　fjoa