



$$\int_0^1 (x^2 + 3x + 4) dx$$

$$\int_0^1 (x^2 + 3x + 4) dx$$

$$\int_0^1 x^2 + 3x + 4 dx$$

1

a を実数とし、関数 $f(x) = x^2 + ax - a$ と $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ を考える.

関数 $y = F(x) - f(x)$ のグラフが x 軸と異なる 3 点で交わるための a の条件を求めよ.

2019

解答

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (t^2 + at - a)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 - at \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 - ax \end{aligned}$$

であるので、 $g(x) = F(x) - f(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right) - (x^2 + ax - a) \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \left(\frac{a}{2} - 1 \right)x^2 - 2ax + a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^2 + (a-2)x - 2ax \\ &= (x+a)(x-2) \end{aligned}$$

$g(x)$ は 3 次関数であるから、 $y = g(x)$ のグラフが x 軸と相異なる 3 点で交わる条件は、「 $g(x)$ が極値をもち、かつ、(極大値) \times (極小値) < 0 」をみたすことである. これは、「 $-a \neq 2$, かつ、 $g(-a)g(2) < 0$ 」 と言い換えられる.

いま、

$$\begin{aligned} g(-a) &= -\frac{a^3}{3} + \left(\frac{a}{2} - 1 \right)a^2 + 2a^2 + a \\ &= \frac{1}{6}a(a^2 + 6a + 6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(2) &= \frac{8}{3} + 2(a-2) - 4a + a \\ &= -a - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

であるので、 $g(-a)g(2) < 0$ より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}a(a^2 + 6a + 6)\left(-a - \frac{4}{3}\right) &< 0 \\ a(a^2 + 6a + 6)\left(a + \frac{4}{3}\right) &> 0 \quad \text{が求まる.} \end{aligned}$$

\therefore 求める a の条件は、

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad &a < -3 - \sqrt{3}, -\frac{4}{3} < a < -3 + \sqrt{3}, 0 < a \\ &\underline{\underline{\text{(これは、} a = 2 \text{ を満たしている.)}}} \end{aligned}$$