**1**

図1のように2つの正方形ABCDとCDEFを並べた図形を考える．2点P，Qが6個の頂点A，B，C，D，E，Fを以下の規則(a)，(b)に従って移動する．

(a)　時刻0では図2のように点Pは頂点Aに，点Qは頂点Cにいる．

(b)　点P，Qは時刻が1増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する．

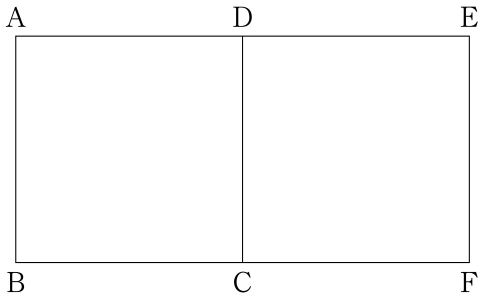
時刻$n$まで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を$p_n$と表す．また時刻$n$まで2点P，Qが同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻$n$に2点P，Qがともに同じ正方形上にいる確率を$a_n$と表し，$b_n = p_n - a_n$と定める．このとき，次の問に答えよ．

(1)　時刻1での点P，Qの可能な配置を，図2にならって全て図示せよ．

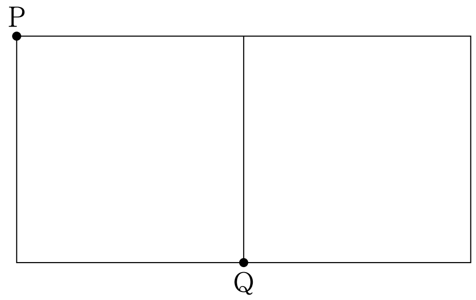
(2)　$a_1, b_1, a_2, b_2$を求めよ．

(3)　$a_{n+1}, b_{n+1}$を$a_n, b_n$で表せ．

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$を示せ．




【図1】




【図2】

1900

**解答**

(1)　時刻1における2点P，Qの可能な配置は，以下の6つの場合のみである．

(2)　(1)の図より，$p_1 = \dfrac{1}{6}$，　$a_1 = \dfrac{1}{2}$，　$b_1 = p_1 - a_1 = \dfrac{1}{3}$.

$a_2, b_2$について考える．以下のように，事象$X, Y, Z$を定める．

$$\begin{cases} \text{事象 } X : 2\text{点 } P, Q \text{ が正方形の対角線上にいる．} \\ \text{事象 } Y : 2\text{点 } P, Q \text{ が } (A, E), (B, F) \text{ のどちらかの組合せでいる．} \\ \text{事象 } Z : 2\text{点 } P, Q \text{ が同じ頂点にある．} \end{cases}$$

(i)　時刻$k$において事象$X$の場合

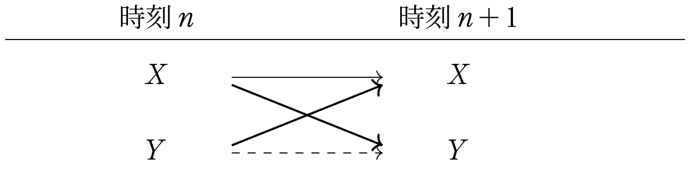
このとき，時刻$k+1$で事象$X$となるのは$\dfrac{1}{2}$，　事象$Y$となるのは$\dfrac{1}{6}$，　事象$Z$となるのは$\dfrac{1}{3}$の確率である．

(ii)　時刻$k$において事象$Y$の場合

このとき，時刻$k+1$で事象$Y$となるのは$\dfrac{1}{2}$，　事象$Y$となるのは$\dfrac{1}{4}$，　事象$Z$となるのは$\dfrac{1}{4}$の確率である．

(iii)　時刻$k$において事象$Z$の場合

時刻$n$から時刻$n+1$になるまでの推移に注目する．






名大数学過去問研究会