1

a，b，c を複素数とするとき，次のことは正しいか．正しいものは証明し，正しくないものについては反例（成り立たない例）をあげよ．

（1）　ab，bc，ca がすべて 0 ならば，a，b，c はすべて 0 である．

（2）　$a+b$，$b+c$，$c+a$ がすべて実数ならば，a，b，c はすべて実数である．

（3）　$a^2+b^2+c^2=0$ ならば a，b，c はすべて 0 である．

（4）　$a+b+c=0$，$ab+bc+ca=0$ ならば，$a^3=b^3=c^3$ である．

1970

解答

（1）　$a=0, b=0, c=1$ のとき，ab, bc, ca は 0 となるが，a, b, c は 0 ではないため，偽である．

（2）　$a=c+fi, b=g+hi, c=j+ji$ とする．$a+b, b+c, c+a$ が実数であるから，$f+h=0, h+k=0, k+f=0$ となり，これを満たす f, h, k の組み合わせは，$(f, h, k)=(0, 0, 0)$ となる．
よって，$a+b, b+c, c+a$ がすべて実数であるとき，a, b, c は実数となる．

（3）　$a^2=i, b=1, c=0$ のときが挙げられるため，偽である．

（4）　$abc=d$ とすると，解と係数の関係から，a, b, c は $x^3-d=0$ の解となる．よって，$a=b=c$ となる．

2

a，b が実数で $|a|+|b|<1$ のとき，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 根の絶対値は，ともに 1 より小さいことを証明せよ．

1970

解答

$x^2+ax+b=0$ の解を α, β とする．$\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha\beta=b\end{cases}$ ，$\begin{cases}|a|=|\alpha+\beta|\\ |b|=|\alpha\beta|\end{cases}$

また，$1>|a|+|b|=|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$ である．

(i) 2 根の絶対値がともに 1 以上と仮定すると，明らかに矛盾する．

(ii) 2 根の絶対値のうち，一方が 1 以上であると仮定すると，$1>|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$

(I) $\alpha>1$ とすると，$-1<\beta<0$ である．$|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=\alpha+\beta-\alpha\beta=(1-\beta)\alpha+\beta$
ここで，$(1-\alpha)<1$ より，$\alpha<\dfrac{1}{1-\beta}$ である．また，$-1<\beta<0$ より，$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ となるが，これは $\alpha>1$ に矛盾する．

(II) $\alpha<-1$ となると，$0<\beta<1$ である．$|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=-(\alpha+\beta)-\alpha\beta=-(1+\beta)\alpha-\beta$ であり，$-(1+\beta)\alpha<1$ より，$\alpha<-\dfrac{1}{1+\beta}$ となるが，$0<\beta<1$ より，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ となるため，矛盾する．

(i)，(ii) より，2 根の絶対値が 1 以上と仮定すると矛盾が生じるため，2 根の絶対値はともに 1 よりも小さいことが示された．□

3

座標平面で点 P は x 軸上を正の方向へ，点 Q は y 軸上を正の方向へ，点 R は傾き（勾配）1 の直線上を上方へ，それぞれ一定の速さ a，b，c で動いている．3 点 P，Q，R はつねに一直線上にあり，ある時刻に P の位置は $(4,\ 0)$，Q の位置は $(0,\ 2)$，R の位置は $(2,\ 1)$ であった．このとき a，b，c の値の比を求めよ．

1970

解 答

P，Q，R が x 軸上で一直線になるときを t_1 とする．このとき，$\mathrm{P}(x,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ である．

P，Q，R が y 軸上で一直線になるときを t_0 とする．このとき，$\mathrm{P}(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ y)$，$\mathrm{R}(0,\ -1)$ である．

また，$\mathrm{P}(4,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 2)$，$\mathrm{R}(2,\ 1)$ となるときを t_2 とする．

P　　t_0 から t_2 における距離の変化は，4 …… ①

Q　　t_1 から t_2 における距離の変化は，2 …… ②

R　　t_0 から t_2 における距離の変化は，$2\sqrt{2}$ …… ③

R　　t_1 から t_2 における距離の変化は，$\sqrt{2}$ …… ④

①，③ から，P と R の速度の比は，$a : c = 4 : 2\sqrt{2}$ である．

②，④ から，Q と R の速度の比は，$b : c = 2 : \sqrt{2}$ である．

したがって，$a : b : c = \sqrt{2} : \sqrt{2} : 1$ となる．

4

l，m，n は整数で，$lmn \neq 0$ のとき $\displaystyle\int_0^{2x} \cos lx \cos mx \cos nx dx$ の値を求めよ．

1970

解答

$$\begin{aligned}
&\cos lx \cos mx \cos nx \\
&= \frac{1}{2}\{\cos(l+m)x + \cos(l-m)x\}\cos nx \\
&= \frac{1}{4}\{\cos(l+m+x)x + \cos(l+m-n)x + \cos(l-m+n)x + \cos(l-m-n)x\}
\end{aligned}$$

より，

(i)　$l+m-n=0$ のとき，

$\cos lx \cos mx \cos nx = \dfrac{1}{4}\{\cos 2(l+m)x + \cos 2lx + \cos(-2m)x + 1\}$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos lx \cos mx \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \{\cos 2(l+m)x + \cos 2lx + \cos(-2m)x + 1\}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2(l+m)}\sin 2(l+m)x + \frac{1}{2l}\sin 2lx - \frac{1}{2m}\sin(-2m)x + x\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(ii)　$l-m+n=0$ のとき，

$\cos lx \cos mx \cos nx = \dfrac{1}{4}\{\cos 2(l+n)x + \cos 2lx + \cos(-2n)x + 1\}$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos lx \cos mx \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \{\cos 2(l+n)x + \cos 2lx + \cos(-2n)x + 1\}\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2(l+n)}\sin 2(l+n)x + \frac{1}{2l}\sin 2lx - \frac{1}{2n}\sin(-2n)x + x\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(iii)　$l-m-n=0$ のとき，

$\cos lx \cos mx \cos nx = \cos 2lx + \cos 2mx + \cos 2nx + 1$ であるから，

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos lx \cos mx \cos nx\, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \{\cos 2lx + \cos 2mx + \cos 2nx + 1\} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2l}\sin 2lx + \frac{1}{2m}\sin 2mx + \frac{1}{2n}\sin 2nx + x\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(iv)　$l+m+n=0$ のとき，

$\cos lx \cos mx \cos nx = \cos(-2n)x + \cos(-2n)x + \cos(2l)x + 1$ であるから,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos lx \cos mx \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \{\cos(-2n)x + \cos(-2n)x + \cos(2l)x + 1\} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{-2n}\cos(-2n)x + \frac{1}{-2m}\sin(-2m)x + \frac{1}{2l}\sin(2l)x + x\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

（v）$l+m+n,\ l+m-n,\ l-m+n,\ l-m-n \fallingdotseq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos lx \cos mx \cos nx \, dx \\
&= \frac{1}{4}\{\cos(l+m+x)x + \cos(l+m-n)x + \cos(l-m+n)x + \cos(l-m-n)x\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(i)〜(v) より,

$$\int_0^{2\pi} \cos lx \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (l+m+n=0 \text{ または } l+m-n=0 \text{ または} \\ & \ l-m+n=0 \text{ まあたは } l-m-n=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (l+m+n \fallingdotseq 0 \text{ かつ } l+m-n \fallingdotseq 0 \text{ かつ} \\ & \ l-m+n \fallingdotseq 0 \text{ かつ } l-m-n \fallingdotseq 0) \end{cases}$$

5

次の (1)，(2) を証明せよ．

（1）　$\sin x$ は，x の整式としては表わせない．

（2）　$f(x)$ は実数全体を定義域とする微分できる関数で，$f(1)=0$ である．このとき

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1} & (x \fallingdotseq 1 \text{ のとき})\\ f'(1) & (x=1 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおけば，$g(x)$ は連続関数である．

1970

解答

（1）　$\sin x=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ と仮定する．（a_k は任意の実数）

このとき，$(\sin x)^4=\sin x$ であるので，$(\sin x)^{(4l)}=\sin x$ (l は整数) となる．ここで，$4l>n$ となる l を考えると，$(\sin x)^{(4l)}=\sin x=0$ となるため，これは矛盾である．したがって，$\sin x$ は x の整式で表すことは出来ない．

（2）　平均値の定理から，

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$$

を満たす c が存在する位置について，場合分けを行う．

(i)　$x>1$ のとき，$1<c<x$ の位置に存在する．したがって，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となる．

(ii)　$x<1$ のとき，$x<c<1$ の位置に存在する．したがって，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となる．

よって，(i)，(ii) から，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となるから，$g(x)$ は連続関数である．

1

次のおのおのを証明せよ．

（1）　$n\,(\geqq 4)$ 個の点があって，その中からどの 4 個の点をとってもそれらを通る円がかけるとき，この n 個の点は 1 つの円周上にある．

（2）　平面上に 4 角形 S があって，S の任意の 2 点の距離が 1 をこえないならば，S の面積は $\frac{1}{2}$ をこえない．

1971

解答

（1）　h 個の点に，1 から n までの番号を振り分ける．次の点 1，2，3 と点 4〜n のそれぞれを通る円について考える．ここで，任意の 3 点を通る円は 1 通りしか存在しないため，点 4〜n はそれぞれ点 1，2，3 を通る 1 通りの円上に存在するため，この n 個の点は 1 つの円上にあることが示された．　□

（2）　(i)　すべての頂点の角の大きさが 180° より小さいとき，

$$\mathrm{OA} = a,\ \mathrm{OB} = b,\ \mathrm{OC} = c,\ \mathrm{OD} = d$$

とする．四角形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}bc\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\theta + \frac{1}{2}da\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}|AC||BD|\sin\theta \end{aligned}$$

となる．

ここで，任意の 2 点の距離が 1 を超えないことから，$S < \frac{1}{2}\sin\theta$ より，$S < \frac{1}{2}$ となる．

(ii)　ある角の大きさが 180° より大きい四角形のとき，四角形の面積 S は，$S < \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{B}$ より，$S < \frac{1}{2}\sin\angle\mathrm{B}$ となるから，$S < \frac{1}{2}$ である．

よって，(i)，(ii) から，すべての三角形に対して任意の 2 点の長さが 1 を超えないならば，S の面積は $\frac{1}{2}$ を超えない．　□

2

n は 2 以上の自然数で，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \leqq n + x^{n+1}$ を証明せよ．

1971

解答

(i)　$n = 2$ のとき

$$x^3 + 2 - (x^2 + x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x+1)(x-1)^2 \geqq 0$$

より，成立．

(ii)　$n = 2, 3, \cdots, l$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{l} x^k \leqq l + x^{l+1}$$

が成立すると仮定する．

$n = l + 1$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leqq (l+1) + x^{l+2}$$

が成立することを示せばよい．

$\displaystyle\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leqq l + x^{l+1} + x^{l+2}$ であり，$0 \leqq x \leqq 1$ より，$0 \leqq x^{l+1} \leqq 1$ であるから，$l + x^{l+1} + x^{l+2} \leqq (l+1) + x^{l+2}$ が成立する．

(i)，(ii) から，すべての自然数 n について，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \leqq n + x^{n+1}$ が成立する．　□

3

放物線 $y = x^2$ 上の異なる 3 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ における法線が 1 点で交わるとき，$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ であることを証明せよ．（曲線上の 1 点で，接線に垂直な直線を，その点における曲線の法線という）

1971

解 答

$(x_1,\ y_1)$ における $y = x^2$ の法線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2x_1}(x - x_1) - {x_1}^2 \quad \cdots\cdots①$$

同様にして，$(x_2,\ y_2)$ における場合は，

$$y = -\frac{1}{2x_2}(x - x_2) + {x_2}^2 \quad \cdots\cdots②$$

①，② を連立して，

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2x_1}x + {x_1}^2 + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2x_2}x + {x_2}^2 + \frac{1}{2} \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)x &= {x_2}^2 - {x_1}^2 \\
x &= 2({x_1}^2 - {x_2}^2)\cdot\left(\frac{x_1x_2}{x_2 - x_1}\right) \\
&= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\cdot\frac{x_1x_2}{x_2 - x_1} \\
&= -2x_1x_2(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

したがって，交点 $(x,\ y) = \left(-2x_1x_2(x_1 + x_2),\ {x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2 + \dfrac{1}{2}\right)$ である．

$(x_3,\ y_3)$ における法線も同じ点で交わるから，

$$\begin{aligned}
{x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2 + \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2x_3}\{-2x_1x_2(x_1 + x_2)\} + {x_2}^2 + \frac{1}{2} \\
{x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2 &= \frac{x_1x_2(x_1 + x_2)}{x_3} + {x_3}^2 \\
0 &= {x_3}^3 - x_3({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2) + x_1x_2(x_1 + x_2) \\
0 &= (x_3 + x_2 + x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)
\end{aligned}$$

ここで，$x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_1$ であるから，$x_3 + x_2 + x_1 = 0$ である．（証明終了）

4

周の長さ a の正 n 角形の面積 $S(n)$ を求め，$m > n$ ならば $S(m) > S(n)$ であることを証明せよ．

1971

解 答

半径 R の円に内接する正 n 角形を考える．このとき，$R = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \times \dfrac{a}{2n}$ である．

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}} \times \frac{a}{2n}\right\}^2 \times \sin\frac{2\pi}{n} \times n \\ &= \frac{a^2}{4n\tan\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(m) - S(n) &= \frac{a^2}{4m\tan\frac{\pi}{m}} - \frac{a^2}{4n\tan\pi n} \\ &= \frac{a^2}{4}\left\{\frac{1}{m\tan\frac{\pi}{m}} - \frac{1}{n\tan\frac{\pi}{m}}\right\} \\ &= \frac{a^2}{4} \times \frac{1}{mn\tan\frac{\pi}{n}\tan\frac{\pi}{m}}\left\{n\tan\frac{\pi}{n} - m\tan\pi m\right\} \end{aligned}$$

$f(x) = x\tan\dfrac{\pi}{x}$ とする．このとき，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tan\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}} \\ &= \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}} - \frac{\pi}{x}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}} \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}}\left\{\sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\right\} \\ &= \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{x}}\left\{\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x} - \frac{\pi}{x}\right\} \end{aligned}$$

であり，ここで，$\dfrac{\pi}{x} = t$ とし，$f(t) = \dfrac{1}{2}\sin 2t - t$ とすると，$f'(t) = \cos 2t - 1 \geqq 0$ である．したがって，増減表を考えると，

t	0	$\cdots$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	

より，$f'(t) < 0$ となるから，

x	3	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	

を得る．したがって，$x\tan\dfrac{\pi}{x}$ は単調減少関数であるから，$x\tan\dfrac{\pi}{x} > 0$（x は 3 以上の自然数）より，$n\tan\dfrac{\pi}{n} - m\tan\dfrac{\pi}{m} > 0$ となる．

したがって，$S(m) > S(n)$ である．　□

$\boxed{5}$

$\boxed{a}$

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

（2）　$\displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x^3}dx$ を求め，$t \to +\infty$ のときの極限値を求めよ．

$\boxed{b}$ 数字 0 を記した札が n 枚，数字 1，2，……，9 を記した札がそれぞれ m 枚ある．この中から任意に 1 枚を取り出し，その札の数字だけの賞金を受ける．ただし数字 0 の札を引いたときは，その札を戻したうえ，もう 1 回だけ引きなおして，賞金を受けるものとする．

（1）　賞金の期待値を求めよ．

（2）　期待値を 3 以下にするには，比 $\dfrac{n}{m}$ をどの程度に大きくすればよいか．

1971

解答

$\boxed{a}$

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ より，x について微分して，$y'=\dfrac{1-3\log x}{x^4}$，$y''=\dfrac{4(3\log x-2)}{x^5}$ である．

増減表は以下の通りになる．

$\boxed{b}$

（1）

$$\sum_{k=1}^{9} k\,\frac{m}{9m+n}=\frac{1}{2}\times 9\times 10\,\frac{m}{9m+n}=\frac{45m}{9m+n}$$

期待値を $E(X)$ とすると，

$$\begin{aligned}E(X)&=\frac{45m}{9m+n}+\frac{n}{9m+n}\times\frac{45m}{9m+n}\\&=\frac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}\end{aligned}$$

（答）　$E(X)=\dfrac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}$

（2）　$m \neq 0$ であるから，$E(X)=\dfrac{45\left(9+2\dfrac{n}{m}\right)}{\left(9+\dfrac{n}{m}\right)^2}$ と表すことができる．

$\dfrac{n}{m}=t$ とし，$f(t)=\dfrac{45(9+2t)}{(9+t)^2}$ と定めると，$f(t)\leqq 3$ から，

$$\begin{aligned}f(t)&\leqq 3\\\frac{45(9+2t)}{(9+t)^2}&\leqq 3\\15(9+2t)&\leqq(t+9)^2\\t^2+18t+81-135-30t&\geqq 0\\t^2-12t-54&\geqq 0\end{aligned}$$

$t>0$ より，これを解いて，$t\geqq 6+3\sqrt{10}$ であるから，比 $\dfrac{n}{m}$ は $6+3\sqrt{10}$ 以上にすればよい．

（答）　$6+3\sqrt{10}$

1

次のおのおのについて解答せよ.

（1） 4 辺形 $ABCD$ と 1 点 P がある.

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

が成立するならば，この 4 辺形はどんな 4 辺形か.

（2） $x_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ のとき，次の不等式を証明せよ.

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{1+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{1+x_n}\right)$$

1972

解 答

（1） $\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，四角形 ABCD は平行四辺形となる.

（2） $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ とする。$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ となり，増減表は以下のようになる.

t	0	$\cdots$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	↗	

$f(t)$ は $t \leqq 0$ において，狭義単調増加である．$x_1+x_2+\cdots+x_n=t$ とすると，$\dfrac{t}{1+t} \leqq \dfrac{x_k}{1+x_k}$ $(k=1,2,\cdots,h)$ であるから，

$$\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}$$

を満たす．よって，題意は示された. □

2

$f(z)$ は，複素数を係数とする z の 1 次式であって，$f(f(f(z)))=z$ がつねに成り立つものとする．このような $f(z)$ をすべて求めよ．

1972

解答

$$\begin{aligned} f(z) &= (a+bi)z+c \\ f(f(z)) &= (a+bi)\{(a+bi)z+c\}+c \\ &= (a^2-b^2+2abi)z+c(a+1+bi) \\ f(f(f(z))) &= (a+bi)^2\{(a+bi)z+c\}+c\{(a+bi)+1\} \\ &= (a+bi)^3z+c\{(a+bi)^3+(a+bi)+1\} \end{aligned}$$

ここで，$f(f(f(z)))=z$ から，$\begin{cases}(a+bi)^3=1 \\ c\{(a+bi)^2+(a+bi)+1\}=0\end{cases}$ を満たす．よって，$c=0$ である．

また，$(a^3+3a^2bi-3ab^2-b^2i)=1$ より，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0 \\ a^3-3ab^2=1\end{cases}$ であり，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0 \\ a(a^2-3b^2)=1\end{cases}$ である．

よってここで場合分けを行う．

(i)　$b=0$ のとき，$a^3=1$ であり，a は実数より $a=1$

(ii)　$3a^2=b^2$ のとき，$a(-8a^2)=1$ であり，a, b は実数より，$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である．

（答）　$\underline{\underline{f(z)=z,\ \left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)z}}$

3

次の数列 a_1，a_2，……，a_n，…… の収束，発散を調べ，解答欄の表に番号を記入せよ．またその理由を述べよ．

（1）　$a_n = \dfrac{1}{n}\sin n$

（2）　$a_n = n^2 \sin \dfrac{1}{n}$

（3）　$a_n = n\cos \dfrac{n\pi}{4}$

（4）　$a_n = \sqrt{2n} - n$

（5）　$a_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}$

（6）　$a_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{2n}$

1972

解答

（1）　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ より，$-\dfrac{1}{n} < \dfrac{\sin n}{n} < \dfrac{1}{n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ から，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．したがって，0 に収束する．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \sin\dfrac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n\left(n\sin\dfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ より，発散する．

（3）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos\dfrac{n}{4}\pi$ は振動するから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\cos\dfrac{n}{4}\pi$ も振動する．

（4）　$a_n = \dfrac{(\sqrt{2n}-n)(\sqrt{2n}+n)}{\sqrt{2n}+n} = \dfrac{n^2-2n}{n+\sqrt{2n}} = \dfrac{n-2}{1+\sqrt{\dfrac{2}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ より，発散する．

（5）　$\dfrac{1}{(n+k)^2} < \dfrac{1}{n^2}$ より，

$$0 < a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ より，はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である．したがって，0 に収束する．

（6）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx \\ &= \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \log 2\end{aligned}$$

したがって，$\log 2$ に収束する．

4

平面上の点 $P(x_0,\ y_0)$ を通って，放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線が引けるための必要十分条件は ${x_0}^2>y_0$ であることを証明せよ．またこのとき，この 2 本の接線の接点を Q，R として，3 角形 PQR の面積を x_0，y_0 で表せ．

1972

解 答

$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t)+t^2 \\ &= 2tx-t^2 \end{aligned}$$

であり，これが $(x_0,\ y_0)$ を通るとき，$t^2-2tx_0+y_0=0$ を満たし，これが異なる 2 解を持つ条件は，この二次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}={x_0}^2-y_0>0$ であるから，${x_0}^2>y_0$ となる．

また，$\mathrm{Q}(x_0+\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，$\mathrm{R}(x_0-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となるから, 三角形PQR の面積は, $\mathrm{P'}(0,\ 0)$，$\mathrm{Q'}(\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，$\mathrm{R'}(-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となる．

ここで，三角形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-2(2{x_0}^2-2y_0)\sqrt{{x_0}^2-y_0}\right| \\ &= 2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

（答）（面積）$=2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}}$

5

円 $x^2+y^2=1$ の上に 1 点 A を，また円 $x^2+y^2=3$ の上に 2 点 B，C をとる．このとき，3 角形 ABC の面積の最大値を求めよ．

1972

解 答

底辺の長さを固定し，半径 1 の円に内接する二等辺三角形を考える．このとき，三角形の面積を S とすると，$0<\theta<\pi$ において，

$$\begin{aligned} S &= 2\times\frac{1}{2}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\sin 2\theta \\ &= \sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\theta} &= \cos\theta+\cos 2\theta \\ &= \cos\theta+2\cos^2\theta-1 \\ &= (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \end{aligned}$$

である．このとき，増減表は以下のようになる．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$\frac{dS}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき，最大値をとる．

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ここで，三角形 ABC ∽ 三角形 A'B'C であり，また，相似比は $\sqrt{3}:1$ である．このとき，増減表は以下のようになる．よって，求める面積の最大値は，

$$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}\sqrt{3}$$

である．

（答）$\underline{\underline{\frac{9}{4}\sqrt{3}}}$

1

すべての複素数 z に対して $|z|^2+az+\overline{a}\,\overline{z}+1 \geqq 0$ となる複素数 a の集合を求め，これを複素平面上に図示せよ．ただし $\overline{a}$，$\overline{z}$ はそれぞれ a，z の共役複素数を表す．

1973

解答

$|z|^2+az+\overline{az}+1 \leqq 0$ より，$z\cdot\overline{z}+az+\overline{az}+1 \leqq 0$

ここで，$z=\alpha+\beta i,\ a=\gamma+\delta i$ とする．

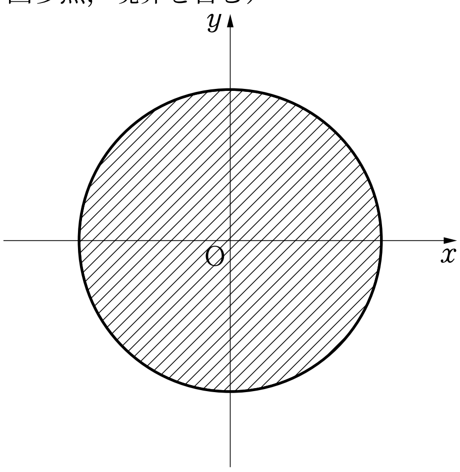
$$\alpha^2+\beta^2+(\gamma+\delta i)(\alpha+\beta i)+(\gamma-\delta i)(\alpha-\beta i)+1 \leqq 0$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\gamma-\delta i)(\alpha-\beta i)+1 \leqq 0$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i+(\alpha\gamma-\delta\beta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)i+1 \leqq 0$$
$$\alpha^2+\beta^2+2(\alpha\gamma-\beta\delta)+1 \leqq 0$$

この不等式は，任意の α,β に対して成立するから，

$$(\alpha+\gamma)^2-\gamma^2+(\beta-\delta)^2-\delta^2+1 \leqq 0$$
$$(\alpha+\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+1-\gamma^2-\delta^2 \leqq 0$$

より，$\gamma^2+\delta^2 \geqq 1$ のとき，任意の α,β に対してこの不等式は成立する．

よって，$x^2+y^2 \leqq 1$ の部分（下図参照，境界を含む）



である．

2

n を定まった正の整数とし，$1 \leqq k \leqq n$ なる整数 k のおのおのに，$1 \leqq r \leqq n$ なる整数 r を対応させる関数 $r = f(k)$ があって，$k_1 < k_2$ ならばつねに $f(k_1) \leqq f(k_2)$ であるとする．このとき，$f(m) = m$ となる整数 m が存在することを証明せよ．

1973

解 答

$r = f(k)$ について，$k_1 < k_2$ ならば，$f(k_1) \leqq f(k_2)$ より，$f(k)$ は広義単調増加関数であるから，

$$\begin{cases} f(1) \leqq f(2) \leqq \cdots \leqq f(k) \leqq \cdots \leqq f(n) \\ 1 \leqq \cdots \leqq r \leqq \cdots \leqq n \end{cases}$$

となる．ここで，$f(m) = m$ となる m が存在しないと仮定する．

(i)　$m = 1$ のとき，$f(1) \fallingdotseq 1$ より，$f(1) \geqq 2$

(ii)　$m = 1, 2, \cdots, l$ のとき，$f(m) \fallingdotseq m$ が成立すると仮定すると，$f(l) \fallingdotseq l$ と，$f(l) \geqq f(l-1)$ より，$f(l) \geqq l + 1$ となる．

(i)，(ii) から，1, 2, ⋯, n の自然数 m について，$f(m) \geqq m + 1$ が成立する．

ここで，$1 \leqq f(n) \leqq n$ より，$f(n) \geqq n + 1$ となることはできないため，少なくとも 1 つは $f(m) = m$ となる自然数 m が存在する．　□

3

放物線 $y=x^2$ の上に 2 点 P，Q があって，線分 PQ の中点が直線 $y=x+1$ の上にあるとき，このような直線 PQ は，すべてある一定の放物線 $y=ax^2+bx+c$ に接することを示し，a，b，c の値を求めよ.

1973

解 答

$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$，また $p<q$ とする．このとき，$(x, y)=\left(\dfrac{p+q}{2}, \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ より，$\dfrac{p^2+q^2}{2}=\dfrac{p+q}{2}+1$ を考えると，$(p+q)^2-2pq=(p+q)+2$ を得る．

さて，直線 PQ の方程式を求めると，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ} : y &= (p+q)x-pq \\ &= (p+q)x-\frac{(p+q)^2}{2}+\frac{p+q}{2}+1\end{aligned}$$

であり，PQ がある放物線に接することを示す．

$y=ax^2+bx+c,\ y'=2ax+b$ より，$x=t$ における接線の方程式を考えると，

$$\begin{aligned}y &= (2at+b)(x-t)+at^2+bt+c \\ &= (2at+b)x-at^2+c\end{aligned}$$

より，$\begin{cases} 2at+b=p+q \\ -at^2+c=-\dfrac{(p+q)^2}{2}+\dfrac{p+q}{2}+1 \end{cases}$ を満たすから，これを整理して，

$$2(-at^2+c)=-(2at+b)^2+2at+b+2$$
$$(4a^2-2a)t^2+(4ab-2a)t+2c+b^2+b-2=0$$

が任意の t に対して成立するから，$\begin{cases} 2a(2a-1)=0 \\ 2a(2b-1)=0 \\ 2c+b^2+b-2=0 \end{cases}$ であり，a, b, c を求めると，$a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{5}{8}$ がこれを満たす．よって，$y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{8}$ に接する．

（答）　$a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2}, c=\dfrac{5}{8}$

4

a が 1 でない実数のとき，方程式 $x^2+ax=\sin x$ はちょうど 2 つの実根をもつことを証明せよ．

1973

解答

$x^2+ax-\sin x=0$ より，$f(x)=x^2+ax-\sin x$ とする．$f'(x)=2x+a-\cos x$，$f''(x)=2+\sin x$ である．

(i)　$a>1$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$		$+$			$+$
$f'(x)$	↘	0	↗	$a-1$	↗

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↗

(ii)　$a=1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

(iii)　$a<1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f''(x)$					
$f'(x)$	$-$	$a-1$	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↗

ここで，任意の a に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ となるから，中間値の定理と (i)，(ii)，(iii) より，$a\neq 1$ のとき，$x^2+ax=\sin x$ はちょうど 2 つの実根を持つ．　□

5

関数 $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ が正の第2次導関数をもつとき，曲線 $y=f(x)$ の上に点 P をとって，P における接線とこの曲線および2直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれた部分の面積を最小にするには，点 P をどのようにとればよいか.

1973

解答

$f''(x)>0$ である．P における接線は,

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$
$$=\int_a^b |f(x)-f'(p)(x-p)+f(p)|\,dx$$

ここで，$f(x)$ の部分は，p によらない定数となるから,

$$S(p)=\int_a^b f'(p)(x-p)+f(p)\,dx$$

が最大となる p を求めればよい.

$$S(p)=\left[\frac{1}{2}f'(p)x^2+(f(p)-f'(p))\cdot p\right]_a^b$$
$$=\frac{1}{2}f'(p)(b^2-a^2)+(f(p)-f'(p)\cdot p)(b-a)$$
$$S'(p)=\frac{1}{2}f''(p)(b^2-a^2)+(f'(p)-f'(p)-f''(p)\cdot p)(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}f''(p)(b-a)\{(b+a)-2p\}$$

ここで，$f''(p)>0$, $(b-a)\geqq 0$ より,

p	a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		$\nearrow$		$\searrow$	

増減表より，$S(p)_{\mathrm{Max}}$ となるのは，$p=\dfrac{a+b}{2}$ のときである.

したがって，求める点 P は $(x,\,y)=\left(\dfrac{a+b}{2},\,f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$　　　（答）　$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},\,f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$

1

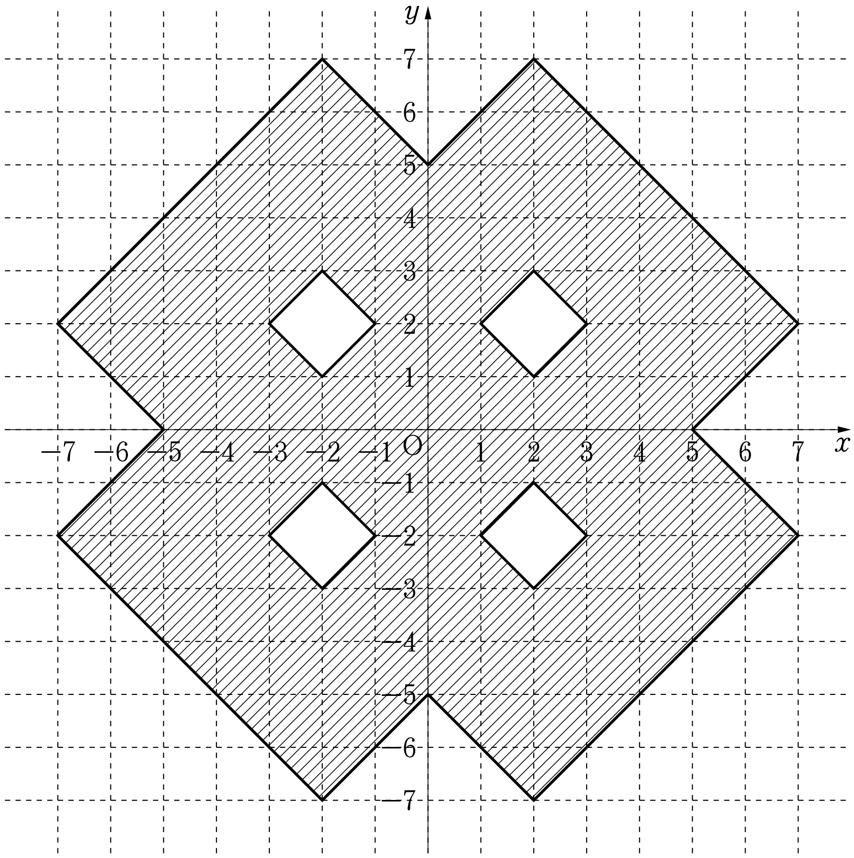
次の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ．

$$1 < ||x|-2| + ||y|-2| < 5$$

1974

解 答

$1 < ||x|-2| + ||y|-2| < 5$ について考える．$|x|$, $|y|$ はともに偶関数のため，第 1 象限について考え，それを線対称に第 2，3，4 象限に対応させればよい．したがって，下図のようになる．



2

α を空間内のある定まった平面とし，空間内の 3 点 A，B，C の α への正射影をそれぞれ A'，B'，C' とする．$AB = BC = CA = 1$ であり，かつ，A'，B' が定点であるように 3 点 A，B，C が動くとき，C' はどんな図形を描くか．ただし $A'B' = \cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．

1974

解 答

平面 α を xy 平面とし，A'B' が x 軸上に存在するとする．ここで，$\mathrm{A}''(a, 0, 0)$，$\mathrm{B}''(1, 0, 0)$ のとき，C″ の動く範囲は $0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ を用いて，$\mathrm{C}''\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)$ と表せる．

ここで，条件から，A，B，C はそれぞれ，これと xz 平面において θ だけ回転させたものであるから，

$$\mathrm{A}(0, 0, 0), \mathrm{B}(\cos\theta, 0, 0), \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$

また，C′ は C の xy 平面への正射影であるから，

$$\mathrm{C}'\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\sin\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha, 0\right)$$

より，

(i)　$\theta = 0$ のとき

$x = \dfrac{1}{2}, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ であるから，$x = \dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の線分となる．

(ii)　$\theta \fallingdotseq 0$ のとき

$\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha, y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$ より，$\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta} + y^2 = \dfrac{3}{4}$ の楕円となる．

よって，(i)，(ii) から，C′ が描く図形は，

（答）
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ の線分 } (\theta = 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2}{\sin^2\theta} + y^2 = \dfrac{3}{4} \text{ の楕円 } (\theta \fallingdotseq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

3

底辺 a，高さ h の 2 等辺三角形がある．

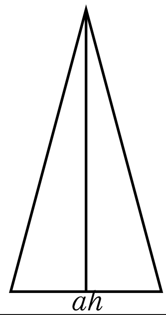
（1）　この 3 角形の内接円の半径 r を a と h を用いて表せ．

（2）　n が 0 でない整数で，$ah^n=1$ を満たしながら a，h が変化するとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{r}{a}$ を求めよ．

1974

解答

（1）　この三角形の面積を S とすると，



$$S=\frac{1}{2}ah$$

$$\frac{1}{2}ah=r\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)$$

$$r=\frac{ah}{2\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)}$$

（答）　$r=\dfrac{ah}{2\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)}$

（2）　$ah^n=1$ より，$h^n=\dfrac{1}{a}$，したがって，$h=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

$$\frac{ah}{2\left(a+2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}\right)}=\frac{a\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\left(a+2\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}+\frac{a^2}{4}}\right)}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\left(1+2\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+2}+\frac{1}{4}}\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}{2\left\{1-4\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+2}+\frac{1}{4}\right)\right\}}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}{-8\left(\frac{1}{a}\right)^{2n+2}}=-\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{a^{2n+2}}}$$

$$=-\frac{1}{8}a^{2n+2-\frac{1}{n}}$$

ここで，$\dfrac{1}{n}=2n+2$ を解いて，$n=-1\pm\sqrt{3}$ であるから，

（i）　$-1-\sqrt{3}<n-1+\sqrt{3}$ のとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{8}a^{2n+2-\frac{1}{n}}=0$

（ii）　$n=-1\pm\sqrt{3}$ のとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{8}a^{2n+2-\frac{1}{n}}=-\frac{1}{8}$

（iii）　$n<-1-\sqrt{3}$ のとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{8}a^{2n+2-\frac{1}{n}}=0$

（iv）　$n>-1+\sqrt{3}$ のとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}-\frac{1}{8}a^{2n+2-\frac{1}{n}}=-\infty$

したがって，(i)〜(iv) より，

（答）　$$\lim_{a\to\infty}\frac{r}{a}=\begin{cases}0 & (n<-1-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3}<n<-1+\sqrt{3}\ \text{のとき})\\ -\frac{1}{8} & (n=-1\pm\sqrt{3}\ \text{のとき})\\ -\infty & (n>-1+\sqrt{3}\ \text{のとき})\end{cases}$$

4

$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$p \neq q$ である p，q に対して

$$|\log(p+1)-\log(q+1)| < |p-q|$$

が成立することを証明せよ．

次に，k を $0<k<1$ である定数とすると $|\log(p+1)-\log(q+1)| < k|p-q|$ が成立しないような $p \geqq 0$、$q \geqq 0$，$p \neq q$ が存在することを示せ．ここで $\log$ は自然対数を表すものとする．

1974

解 答

条件式から $p>q$ としても一般性を失わない．ここで，$\dfrac{\log(p+1)-\log(q+1)}{p-q}<1$ を示せばよい．

ここで，平均値の定理から，$f(x)=\log(x+1)$ とすると，

$$\frac{\log(p+1)-\log(q+1)}{p-q}=\frac{1}{c+1} \quad \cdots\cdots①$$

となる c が，$q<c<p$ の範囲に存在する．

$\dfrac{1}{p+1}<\dfrac{1}{c+1}<\dfrac{1}{q+1}$ …… ② であるから，$\dfrac{1}{c+1}<\dfrac{1}{q+1} \leqq 1$ を満たし，$\dfrac{1}{c+1}<1$ である．

したがって，$|\log(p+1)-\log(q+1)|<|p-q|$ となる． □

また，$0<k<1$ であることから，$k=\dfrac{1}{1+r}$ $(r>0)$ とおける．このとき，$c=\dfrac{1}{1+r}$ となる c が存在することを示せば良い．

$p=r+\alpha, q=r-\alpha$ とすると，$\dfrac{1}{r+1+\alpha}<\dfrac{1}{c+1}<\dfrac{1}{r+1-\alpha}$ となる．

ここで，$\displaystyle\lim_{\alpha \to 0}$ を考えると，はさみうちの原理から，$\dfrac{1}{c+1}=\dfrac{1}{r+1}=k$ となるため，等号が成立するような $p \geqq 0, q \geqq 0, p \neq q$ となる p, q が存在することが示された．したがって，題意を満たす p, q が存在することが示された． □

5

$f(x)$, $g(x)$ を $x \geqq 0$ で定義された正の値をとる連続関数で，$g(x)$ は増加関数であるとする．このとき

$$S(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad T(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt$$

に対して次の (1), (2) を証明せよ．

（1）　すべての $x > 0$ に対して $T(x) \leqq g(x)S(x)$ である．

（2）　$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は $x > 0$ で増加関数である．ここで一般に関数 $h(x)$ が増加関数であるとは，$x_1 < x_2$ ならば $h(x_1) \leqq h(x_2)$ が成立することをいう．

1974

解 答

（1）　$f(x) = g(x)S(x) - T(x)$ とする．

$$f(x) = g(x)S(x) - T(x)$$
$$f(x) = g(x)\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g(t)f(t)\,dt$$
$$f'(x) = g'(x)\int_0^x f(t)\,dt + g(x)f(x) - g(x)f(x)$$
$$= g'(x)\int_0^x f(t)\,dt$$

ここで，$g(x)$ は増加関数より，$g'(x) > 0$ であり，$f(x)$ は正の値を取るから，$\int_0^x f(t)\,dt > 0$ である．

したがって，$f'(x) = g'(x)\int_0^x f(t)\,dt > 0$

よって，$x > 0$ において，$g(x)S(x) - T(x) \geqq 0$ であるから，$g(x)S(x) \geqq T(x)$ が示された．

（2）

$$\frac{T(x)}{S(x)}\,dx = \frac{T'(x)S(x) - T(x)S'(x)}{S^2(x)}$$
$$= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}$$
$$= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}$$
$$= \frac{f(x)\{g(x)S(x) - T(x)\}}{S^2(x)}$$

$f(x) > 0$ かつ (1) から，$g(x)S(x) - T(x) \geqq 0$ より，$\dfrac{T(x)}{S(x)}\,dx \geqq 0$ であるから，$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は増加関数となる．　□

1

次のおのおのを証明せよ．

（1）　$\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ．

（2）　$\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi+\cos\dfrac{8}{9}\pi+\cos\dfrac{10}{9}\pi+\cos\dfrac{14}{9}\pi+\cos\dfrac{16}{9}\pi$ の値を求めよ．

1975

解 答

（1）　$2^{\frac{2}{3}}=2\sqrt{2}<3$ より，$\log_2 3>\dfrac{3}{2}$ ……①

となる．また，$3^{\frac{2}{3}}=3\sqrt{3}>4$ より，$\log_3 4<\dfrac{3}{2}$ ……②

となる．

①，② より，$\log_3 4<\log_2 3$．　（証明終了）

（2）　$\cos 5\theta=\cos 4\theta$ を満たす θ を考える．$-1<\cos\theta<1$ の範囲において，$0<\theta<\pi$ である．

$5\theta=\pm 4\theta\pm 2n\pi$ より，$\theta=\dfrac{2}{9}n\pi$，$2n\pi$ であり，$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$，$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ から，

$$16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$
$$16\cos^5\theta-8\cos^4\theta-20\cos^3\theta+8\cos^2\theta+5\cos\theta-1=0$$
$$(\cos\theta-1)(16\cos^4\theta+8\cos^3\theta-12\cos^2\theta-4\cos\theta+1)=0$$

ここで，解と係数の関係より，

$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{6}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=0$$

が成り立ち，また，

$$\begin{aligned}&\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi+\cos\frac{10}{9}\pi+\cos\frac{14}{9}\pi+\cos\frac{16}{9}\pi\\&=2\left(\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi\right)\\&=0\end{aligned}$$

（答）　$\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi+\cos\dfrac{8}{9}\pi+\cos\dfrac{10}{9}\pi+\cos\dfrac{14}{9}\pi+\cos\dfrac{16}{9}\pi=0$

2

次の(1)，(2)を解答せよ．

（1）　1から10までの10個の整数から相異なる5個をとり，その積をa，残りの5個の積をbとする。$a \neq b$を証明せよ．

（2）　また，1から10までの10個の整数のうちの相異なる5個の積として表される整数のうちで，$\sqrt{10!}$より小さいものの個数をp，$\sqrt{10!}$より大きいものの個数をqとする．$p = q$を証明せよ．

1975

解答

（1）　1〜10までの10個の整数のうち，7の倍数を含むものは7のみだから，aまたはbのどちらか一方は7の倍数となるが，もう一方は7の倍数とはならないため，$a \neq b$となる．

（2）　1〜10までの10個の整数から5個を選び，その積をc，残りの5個の積をdとする．ここで，対称性から$c < d$としても一般性を失わない．このとき，$c \cdot d = 10!$である．

ここで，$c < d$から，$c^2 < 10! < d^2$となる．よって，$c < \sqrt{10!} < d$と表すことができるため，cは$\sqrt{10!}$よりも小さく，dは$\sqrt{10!}$よりも大きいことがわかる．

ここで，cの個数とdの個数は一致するため，$p = q$となる．　（証明終了）

3

三角形 ABC において，$\angle C = n\angle B$ ならば，$b < c < nb$ であることを証明せよ．ただし $b = CA$, $c = AB$ とし、n は 2 以上の整数とする．

1975

解答

$\angle \mathrm{B} = \beta$ とする．$\dfrac{\sin n\beta}{c} = \dfrac{\sin\beta}{b}$ より，$c = \dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}b.$

ここで，$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi$ より，$(n+1)\beta = \pi - \angle \mathrm{A}$，$(n+1)\beta < \pi$，$\beta < \dfrac{\pi}{n+1}$

さらに

$$\begin{aligned} f(\beta) &= \sin n\beta - \sin\beta \\ &= 2\cos\frac{(n+1)\beta}{2}\sin\frac{(n-1)\beta}{2} \end{aligned}$$

であり，$\cos\dfrac{(n+1)\beta}{2} > \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ かつ，$\sin\dfrac{n-1}{2}\beta > 0$ より，$\sin n\beta > \sin\beta$ となるから，$b < c$ となる．

$g(\beta) = \sin n\beta - n\sin\beta$ とすると，$g'(\beta) = n\cos n\beta - n\cos\beta = n(\cos n\beta - \cos\beta)$ である．

$n\beta > \beta$ かつ，$\dfrac{n}{n+1}\pi < \pi$ より，増減表は以下のようになる．

β	0	$\cdots$	$\dfrac{n}{n+1}\pi$
$g'(\beta)$		$-$	
$g(\beta)$	(0)	$\searrow$	

よって，$g(\beta)$ は 0 から $\dfrac{n}{n+1}\pi$ において単調減少かつ，$g(0) = 0$ より，$g(\beta) = \sin n\beta - n\sin\beta < 0$, $\sin n\beta < n\sin\beta$ である．

したがって，$\dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta} < n$ より，$c < nb$ となる．よって，$b < c < nb.$ □

4

曲線 $y=x^2(x+1)$ と直線 $y=k^2(x+1)$ $(0 \leqq k \leqq 1)$ とで囲まれる部分の面積が最小となるように k の値を定めよ．

1975

解答

$y=x^2(x+1)$ と $y=k^2(x+1)$ の交点を求める．

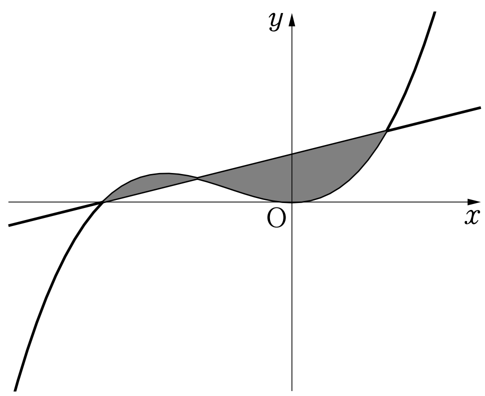
$$k^2(x+1)=x^2(x+1)$$
$$(x^2-k^2)(x+1)=0$$
$$(x-k)(x+k)(x+1)=0$$

より，$x=k,\ -k,\ -1$ である．$0 \leqq k \leqq 1$ より，$-1<-k<k$ である．

$$\begin{aligned}
S(k) &= \int_{-k}^{k}\{k^2(x+1)-x^2(x+1)\}\,dx+\int_{-1}^{-k}\{x^2(x+1)-k^2(x+1)\}\,dx \\
&= \int_{-k}^{k}(k^2-x^2)\,dx+\int_{-1}^{-k}\{x^2(x+1)-k^2(x+1)\}\,dx \\
&= \left[k^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-k}^{k}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}k^2x-k^2x\right]_{-1}^{-k} \\
&= \frac{4}{3}k^3+\left\{\left(\frac{1}{4}k^4-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3+k^3\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}k^2+k^2\right)\right\} \\
&= \frac{4}{3}k^3+\frac{1}{4}k^4+\frac{1}{6}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{12} \\
&= \frac{1}{4}k^4+\frac{3}{2}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
S'(k) &= k^3+\frac{9}{2}k^2-k \\
&= k\left(k^2+\frac{9}{2}k-1\right)
\end{aligned}$$



k	0	$\cdots$	$\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$	1	$\cdots$
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		↘		↗	

増減表より，$S(k)$ を最小とする k は $k=\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$ である．

（答）　$k=\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$

5

a 1 つのさいころを n 回つづけて投げ，投げた順に出た目の数の積をつくっていくものとする．このとき，次の (1), (2) を解答せよ．

（1）　目の数の積が k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ にはじめて 4 となる確率 p を求めよ．

（2）　目の数の積が n 回目までのどこかで 4 となる確率を求めよ．

b $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ で連続な増加関数とする．$0 < a < 1$ であるどんな a に対しても

$$\int_0^a f(x)dx \leqq a\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ．ここで $f(x)$ が増加関数であるとは，$x_1 < x_2$ ならばつねに $f(x_1) \leqq f(x_2)$ が成立することをいう．

1975

解 答

a

（1）　出た目の積が k 回目までに 4 になるには，

(i)　$k-1$ 回目までにすべて 1 を出し，k 回目に 4 を出す

(ii)　$k-1$ 回目までに 1 回だけ 2 を出し，k 回目に 2 を出す

のいずれかであればよい．

[1] のとき，$\left(\frac{1}{6}\right)^k$

[2] のとき，$(k-1)\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} = (k-1)\left(\frac{1}{6}\right)^k$

（2）

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{6} + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
\frac{1}{6}S_n &= \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n + n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\
\frac{5}{6}S_n &= \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{6}\right)^n - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\
\frac{5}{6}S_n &= \frac{1}{5}\left\{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} - n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} \\
S_n &= \frac{6}{25} - \frac{6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^n - \frac{n}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\
&= \frac{6}{25} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left\{\frac{6}{5} + n\right\}
\end{aligned}$$

(答) $\frac{6}{25} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left\{\frac{6}{5} + n\right\}$

b

$f(x)$ が単調増加関数であるから，$\int_a^1 f(x)\,dx$ と $\int_0^a f(x)\,dx$ の面積は，$\int_a^1 f(x)\,dx \geqq (1-a)f(a)$ の関係にある．すなわち，$\int_0^a f(x)\,dx \leqq af(a)$ より，$f(a) \leqq \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,dx$ が成り立つ．

$\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，$f(a) \leqq \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,dx$ が成立．

$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,dx \\
(1-a)\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx + a\int_0^a f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_0^1 f(x)\,fx
\end{aligned}$$

□

$\boxed{1}$

次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　1 より大きい自然数 n について，不等式 $2^n < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n}$ を証明せよ．

（2）　実数 x_1，x_2，……，x_n が $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots\cdots + x_n{}^2 = 1$ を満たすとき，$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots\cdots + nx_n{}^2$ の最大値と最小値を求めよ．

1976

解答

（1）　$2^n < \dfrac{2n!}{(n!)^2} < 2^{2n} \cdots (*)$ とする．

（i）　$n = 2$ のとき，$4 < 6 < 16$ より成立．

（ii）　$n = k$ のとき，$\dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2k}$

$n = k+1$ のとき，$2^{k+1} < \dfrac{2(k+1)!}{\{(k+1)!\}^2}$ 　　$2^{k+1} < 2 \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2\dfrac{2(k+1)}{k+1} \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2}$ より成立．

また，$2\dfrac{2(k+1)}{k+1} \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2} < 4 \cdot \dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2(k+1)}$ より成立．

(i)，(ii) より，2 以上のすべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．　□

（2）　$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = 1$ より，x_k $(k < n)$ について考えると，

$$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots + kx_k{}^2 + (k+1)x_{k+1}{}^2 + \cdots + x_n{}^2$$

となり，$x_k{}^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}{}^2 = 0$ であるとき，$x_k{}^2 = 0$ かつ $x_{k+1}{}^2 = \alpha$ であり，その他の x_l $(l = 1, 2, \cdots, k, k+1, \cdots, n)$ を変化させないときを比べると，$x_k{}^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}{}^2 = 0$ の方が，$x_k{}^2 = 0$ かつ $x_{k+1}{}^2 = \alpha$ のときよりも小さくなるから，帰納的に，$1 \leqq x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots + nx_n{}^2 \leqq n$ となる．　□

2

平面上の 3 点 $A(0,\ a)$，$B(b,\ 0)$，$C(c,\ 0)$ $(a>0,\ c>0,\ b<0)$ を頂点とする 3 角形 ABC の内部に点 P があり，正数 l，m，n について $l\overrightarrow{PA}+m\overrightarrow{PB}+n\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ が成り立っている．

（1）　線分 AP の延長と辺 BC との交点 D の座標を求めよ．

（2）　線分 BD と線分 CD の長さの比を求めよ．

1976

解答

（1）　$l(-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+m(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+n(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=0$

$(l+m+n)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{m+n}{l+m+n}\cdot\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}}+n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$

よって，AP の延長と BC との交点 D の座標は，$\mathrm{D}\left(\dfrac{mb+nc}{m+n},\ 0\right)$

（2）　線分 BD と線分 CD の長さの比は $\mathrm{BD}:\mathrm{CD}=n:m$ となる．

3

　自然数 k および k より大きい自然数 n が与えられているとき，$1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_k \leqq n$ であるような k 個の自然数 a_1，a_2，……，a_k の和として表される自然数は全部で何個あるか．

1976

解答

　$a_1 = 1, a_2 = 2, \cdots, a_k = k$ のとき最小値であり，この状態から，$a_k = k+1, a_k = k+2, \cdots, a_k = n$ になるような操作を繰り返す．次に，$a_{k-1} = k, a_{k-1} = k+1 \cdots, a_k = n-1$ のように，以下同様にして，$a_1 = n-k+1$ になるまですべての値を取ることができる．

　よって，最小値は，$\displaystyle\sum_{l=1}^{k} l = \frac{1}{2}k(k+1)$ であり，最大値は，$\displaystyle\sum_{l=1}^{k}(n-l+1) = (n+1)k - \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}k(2n-k+1)$ である．

　したがって，とり得る値の個数は，$\dfrac{1}{2}k(2n-k+1) - \dfrac{1}{2}k(k+1) + 1 = \dfrac{1}{2}k(2n-2k) + 1 = k(n-k)+1$ 個である．

4

x^3 の係数が 1 であるような 3 次関数 $f(x)$ のうちで，定積分 $I=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ を最小にするものを決定し，そのときの I の値を求めよ．

1976

解答

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．このとき，I を計算すると，

$$
\begin{aligned}
I&=\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx\\
&=\int_{-1}^{1}\{x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2\}\,dx\\
&=\int_{-1}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx\\
&=2\int_{0}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx\\
&=2\left[\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}(a^2+2b)x^5+\frac{1}{3}(2bc+b^2)x^3+c^2x\right]_0^1\\
&=2\left\{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}(a^2+2b)+\frac{1}{3}(2bc+b^2)+c^2\right\}
\end{aligned}
$$

である．

$g(b)=\dfrac{1}{3}b^2+\dfrac{2}{5}b$ とする．このとき，$g'(b)=\dfrac{2}{3}b+\dfrac{2}{5}$ であり，$g(b)$ は $b=-\dfrac{3}{5}$ のとき最小値をとる．

$$
\begin{aligned}
h(a,\,c)&=\frac{1}{5}a^2+\frac{2}{3}ac+c^2\\
&=\left(c+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{4}{45}a^2\geqq 0
\end{aligned}
$$

であるから，$(a,\,c)=(0,\,0)$ のとき，最小値 0 をとる．

I を最小にする $f(x)=x^3-\dfrac{2}{5}x$ であり，そのときの I は $I=2\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{3}{25}\right)=\dfrac{8}{175}$

（答）　$I=\dfrac{8}{175}$

$\boxed{1}$

空間に 5 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $A(3,\ 1,\ 5)$, $B(1,\ 2,\ 4)$, $C(2,\ -1,\ -1)$, $D(3,\ 1,\ 2)$ がある．2 点 A, B を通る直線上に動点 P をとり，2 点 C, D を通る直線上に動点 Q をとる．

（1）　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}$ を満たす点 R 全体の集合はどのような図形を表すか.

（2）　線分 PQ の長さの最小値を求めよ.

1977

解 答

（1）　直線 AB 上の点 P を以下のように表す．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2t\\1-t\\5-2t\end{pmatrix}$

直線 CD 上の点 Q を以下のように表す．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-s\\-1-2s\\-1-3s\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}1+2t+s\\2-t+2s\\6-3t+3s\end{pmatrix}$ であり，点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ に対して，$\begin{cases}x=1+2t+s\\y=2-t+2s\\z=6-3t+3s\end{cases}$ から，s, t を消去する．

$x+2y=5+5s$, $3y-z=6s$, $x+2y=5+5\dfrac{3y-z}{6}$, $6x+12y=30+5(3y-z)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は $6x-3y+5z=30$ となるような平面上を動く．

（2）　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ より，点と平面の距離公式から，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{|-30|}{\sqrt{36+9+25}}=\dfrac{30}{\sqrt{70}}=\dfrac{3}{7}\sqrt{70}$

（答）　$\dfrac{3}{7}\sqrt{70}$

$\boxed{2}$

3 けたの素数 p の百の位の数字を a，十の位の数字を b，一の位の数字を c とする．このとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は整数解をもたないことを証明せよ．

1977

解 答

条件式から，$\begin{cases} 100a+10b+c=p & \cdots\cdots ① \\ ax^2+bx+c=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ であり，①−② より，$(10-x)(10+x)a+(10-x)b=p$

$(10-x)\{(10+x)a+b\}=p$ が導かれる．

これが素数となるためには,

(i) $10-x=1$ のとき，つまり，$(10+x)a+b=p$ となるとき，$x=9,\ 19a+b=p$ であり，$100a+10b+c=19a+b$ となり，矛盾する．

(ii) $10-x=p$ のとき，つまり，$(10+x)a+b=1$ となるとき，$(20-p)a+b=1$ であり，① より，$p=100a+10b+1 \geqq 11$ である．したがって，$20-p \leqq -91$ となり，$-91a+b \leqq 0$ となるから，矛盾する．

(iii) $10-x=-1$ のとき，つまり，$(10+x)a+b=-p$ のとき，$x=11$ であり，$10a+10b+c=-(21a+b)$ となり，矛盾する．

(iv) $10-x=-p$ のとき，つまり，$(10+x)a+b=-1$ のとき，$x=10+p$ であり，$(20+p)a+b \geqq 0$ となり，矛盾する．

(i)〜(iv) より，題意は示された．　□

3

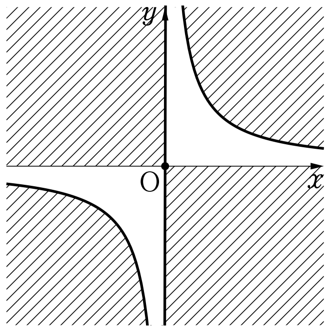
関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ上の 2 点を結ぶ線分の中点となるような点全体の集合を図示せよ.

1977

解答

$\mathrm{S}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$, $\mathrm{T}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする．2 点の中点は, $\left(\dfrac{s+t}{2},\ \dfrac{s+t}{2st}\right)$ であり, $(x,\ y)$ とすると, $x=\dfrac{s+t}{2}$, $y=\dfrac{s+t}{2st}$ である.

(i)　$s\neq -t$ のとき, $st=\dfrac{x}{y}$, $s+t=2x$ $t^2-2xt+\dfrac{x}{y}=0$ が異なる 2 つの実数解を持てば良いから,



$$x^2-\frac{x}{y}>0$$
$$x^2y^2-xy>0$$
$$xy(xy-1)>0$$

より, $xy>1$ または $xy<0$ となる.

(ii)　$s=-t$ のとき, 中点は原点となる.

(i), (ii) から, 右図の斜線部で境界線を含まない.

4

次の (1), (2) を解答せよ．

（1）　a を正数とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$ を求めよ．

（2）　xy 平面上に動点 P がある．さいころを投げて，奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ 1 だけ進み，偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ 1 だけ進むものとする．動点 P は最初原点にあるものとし，さいころを 8 回投げたとき，原点から P までの距離が 6 以下となる確率を求めよ．

1977

解 答

（1）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log a^n+\log(1+a^n)\}=\lim_{n\to\infty}\log a+\log(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$$

(i)　$a<1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\log a$

(ii)　$a=1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2=0$

(iii)　$a>1$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty}\log a+\log a+\log\left(1+\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2\log a+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{a^n}\right)=2\log a$$

となる．

(i), (ii), (iii) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\begin{cases}\log a(a\leqq 1)\\ 2\log a(a>1)\end{cases}$

（答）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\begin{cases}\log a(a\leqq 1)\\ 2\log a(a>1)\end{cases}$

（2）　止まるマスに，(0, 8), (1, 7), (2, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0) であり，キョリは，$4\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{14}$, 8 のパターンがある．このうち，6 以下となるのは，$4\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$ であるから，

$$\begin{aligned}&{}_8\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\times{}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5\\&=\left\{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+2\times\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^8\\&=91\left(\frac{1}{2}\right)^7\end{aligned}$$

（答）　$\dfrac{91}{128}$

5

次の (1), (2) を解答せよ.

（1） $f_n(x)=\int_0^x (x-t)\sin nt\,dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ.

（2） $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f_n(x)$ の最大値を a_n とするとき, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$ を求めよ.

1977

解答

（1） $f_n(x)=\int_0^x x\sin nt\,dt=\int_0^t t\sin nt\,dt.$

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x x\sin nt\,dt \text{ とする}\\&=x\int_0^{nx}\frac{1}{n}\sin y\,dy\\&=x\Big[-\frac{1}{n}\cos y\Big]_0^{nx}\\&=\frac{x}{n}(1-\cos nx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_0^x (t-\sin nt)\,dt\\&=\frac{1}{n}\int_0^{nx}\frac{1}{n}\sin y\,dy\\&=\frac{1}{n^2}\Big[-y\cos y\Big]_0^{nx}+\frac{1}{n^2}\int_0^{nx}\cos y\,dy\\&=-\frac{1}{n^2}(-nx\cos nx)+\Big[\sin y\Big]_0^{nx}\\&=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\end{aligned}$$

$f_n(x)=F(x)-G(x)$ より, $f_n(x)=\dfrac{x}{n}-\dfrac{1}{n^2}\sin nx$ である.

（答） $f_n(x)=\dfrac{x}{n}-\dfrac{1}{n^2}\sin nx$

（2） $f_n{}'(x)=\dfrac{1}{n}(1-\cos nx)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{n}$	$\cdots$	$\frac{4\pi}{n}$	$\cdots$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$+$	0	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$a_n=f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ であり, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ である.

ここで, $-1 \leqq \sin\dfrac{n\pi}{2} \leqq 1$ より, $-\dfrac{1}{n} \leqq -\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2} \leqq \dfrac{1}{n}$ である. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{1}{n}=0$ となるから, はさみうちの原理より, $\lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{1}{n}\dfrac{\sin n\pi}{2}=0$ となる.

（答） $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\dfrac{\pi}{2}$

1

5 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(0) + b\{f(c) + f(-c)\}$$

が成り立つように $f(x)$ に無関係な定数 a, b, c を定めよ.

1978

解 答

$f(x) = dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$ とする.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i)\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)\,dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}ex^5 + \frac{1}{3}gx^3 + ix\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}e + \frac{2}{3}g + 2i
\end{aligned}$$

また, $af(0) = ai$,　$b\{f(c) + f(-c)\} = 2b(ec^4 + gc^2 + i)$ である.

2 式の係数をそれぞれ比較して, $\begin{cases} 2bc^4 & = \dfrac{2}{5} \\ 2bc^2 & = \dfrac{2}{3} \\ (a + 2b) & = 2 \end{cases}$

これをそれぞれ解いて,　　（答）　$(a,\ b,\ c) = \left(\dfrac{8}{9},\ \dfrac{5}{9},\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$（符号任意）

$\boxed{2}$

平面上に 3 角形 ABC が与えられている．この平面上の点 P に対して，AP の中点を Q，BQ の中点を R，CR の中点を S とする．このとき，$S=P$ となる点 P がただ 1 つ存在することを証明せよ．また，この点を P_0 とするとき，$\triangle ABC$ と $\triangle P_0BC$ の面積の比を求めよ．

1978

解 答

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とする．

このとき，$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}(s\vec{b}+t\vec{c})\\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{4}(s\vec{b}+t\vec{c})+\dfrac{1}{2}\vec{b}\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{1}{8}(s\vec{b}+t\vec{c})+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\end{cases}$ より，それぞれ係数比較をして，$\begin{cases}\dfrac{1}{8}s+\dfrac{1}{4}=s\\ \dfrac{1}{8}t+\dfrac{1}{2}=t\end{cases}$

である．よってこれを s, t について解くと，$(s, t)=\left(\dfrac{2}{7},\ \dfrac{4}{7}\right)$ となるため，$\mathrm{S}=\mathrm{P}$ となる点がただ一つ存在する．

直線 AB と BC の交点を $\mathrm{P_1}$ とする．このとき，$k\overrightarrow{\mathrm{AP_0}}=\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$ より，$k=\dfrac{7}{6}$ となるため，$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}:\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}=7:1$ となり，$\triangle\mathrm{ABC}:\triangle\mathrm{P_0BC}=7:1$ となる．

3

xy 平面上にある正 3 角形で，その 3 頂点の x 座標と y 座標がすべて有理数になるものは存在しないことを証明せよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってもよい．

1978

解 答

三角形の頂点の座標を $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ (a, b, c, d は有理数) とする．このとき三角形の面積を S とすると，$S = \dfrac{1}{2}|ad - bc|$ であり，$\sqrt{a^2 + b^2} = r$ とすると，

$$S = \frac{1}{2}r^2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$$

より，$\dfrac{1}{2}|ad - bc| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$ であり，

$$\sqrt{3} = \frac{2|ad - bc|}{a^2 + b^2}$$

となるが，左辺が無理数であることに対し，右辺が有理数であることに矛盾する．

したがって，頂点の x, y 座標すべてが有理数となる正三角形は存在しない． □

4

A，B 2人が次のような規則でさいころを投げるものとする．さいころを投げて1の目が出れば次回も同じ人が続けて投げ，1以外の目が出れば次回は他方が投げることにする．第1回目は A が投げる．n 回目に A が投げる確率を p_n とするとき，次の(1)，(2)を解答せよ．

（1）　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

（2）　$\lim_{n \to \infty} p_n$ を求めよ．

1978

解答

（1）　n 回目にAが投げる確率が p_n であるため，n 回目Bが投げる確率は $(1-p_n)$ と表される．

同じ人が続けて投げる確率を α とすると，$\alpha = \dfrac{1}{6}$ である．推移図より，

$$\begin{tikzcd}
p_n \arrow[dr, "\alpha"] & \\
& p_{n+1} \\
1-p_n \arrow[ur, "1-\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

$p_{n+1} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}(1-p_n) = -\dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}$ である．

（答）　$p_{n+1} = -\dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}$

（2）

$$p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$p_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

（答）　$\lim_{n \to \infty} p_n = \dfrac{1}{2}$

5

p，q は区間 $a \leqq x \leqq b\ (0 < a < b)$ で $px+q \geqq \log x$ を満たすものとする．このとき，定積分

$$I = \int_a^b (px+q-\log x)dx$$

が最小となるような p および q を求めよ．また，そのときの I の値を求めよ．

1978

解答

I が最小値となるのは，$y = px+q$ が $y = \log x$ と $x = t\ (a < t < b)$ で接するときであるので，

$$\begin{aligned} px+q &= \frac{1}{t}(x-t)+\log t \\ &= \frac{1}{t}x+\log t-1 \\ \therefore \quad p &= \frac{1}{t},\ q = \log t-1 \end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \left(\frac{1}{t}x+\log t-1-\log x\right)dx \\ &= \left[\frac{1}{2t}x^2+(\log t-1)x-x\log x+x\right]_a^b \\ &= \left\{\frac{1}{2t}b^2+(\log t-1)b-b\log b+b\right\}-\left\{\frac{1}{2t}a^2+(\log t-1)a-a\log a+a\right\} \\ &= \frac{1}{2t}(b^2-a^2)+\log t(b-a)-b\log b+a\log a \end{aligned}$$

ここで，I が最小となる t は，

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{2t^2}(b^2-a^2)+\frac{1}{t}(b-a) \\ &= -\frac{1}{2t^2}\left\{(b^2-a^2)-2t(b-a)\right\} \\ &= -\frac{1}{2t^2}(b-a)(b+a-2t) \end{aligned}$$

であるから，

$$t < \frac{a+b}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dI}{dt} < 0$$
$$t > \frac{a+b}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dI}{dt} > 0$$

より，$t = \dfrac{a+b}{2}$ のとき，I は最小となる．したがって，$p = \dfrac{2}{a+b}$，$q = \log\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+1$

（答）　$I = (a+b)(b^2-a^2)+(b-a)\log\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-b\log b+a\log a$

1

行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，点 $P(x,\ y)$ が点 $P'(x',\ y')$ にうつるとき，次の (1), (2) を解答せよ．

（1） 原点を O とするとき，すべての点 P に対して，不等式 $OP' \leqq t\cdot OP$ が成り立つような実数 t の最小値 t_0 を求めよ．

（2） $OP'=t_0\cdot OP$ を満たす点 P 全体のなす集合は，直線であることを証明せよ．また，この直線の方程式を求めよ．

1979

解 答

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より，$\begin{cases}x'=2x+y\\y'=x+y\end{cases}$ である．条件より，$(2x+y)^2+(x+y)^2 \leqq t(x^2+y^2)$ であり，これを整理すると，$5x^2+6xy+2y^2 \leqq t^2(x^2+y^2)$ である．

(i) $y=0$ のとき，$5x^2 \leqq t^2x^2$ より，$\sqrt{5} \leqq t$

(ii) $y \neq 0$ のとき，

$$5\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+2 \leqq t^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)$$

となる．ここで，$\dfrac{x}{y}=s$ とすると，

$$(5-t^2)s^2+6s+2-t^2 \leqq 0$$

$$(5-t^2)\left\{s+\frac{3}{5-t^2}\right\}^2+2-t^2-\frac{9}{5-t^2} \leqq 0 \qquad (t^2 \neq s)$$

$$2-t^2-\frac{9}{5-t^2} \leqq 0$$

$$\frac{t^2-7t^4+1}{5-t^2} \leqq 0$$

これを解いて，$t_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ である．

（答） $t_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

2

数列 x_1，x_2，……，x_n…… が $x_{n+1} = 2x_n + \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，数 a を適当に定めれば，すべての $n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して不等式 $|x_n - 2^n \cdot a| \leqq \dfrac{1}{3}$ が成り立つことを証明せよ．

1979

解 答

$$x_{n+1} + \frac{1}{3 \cdot 2^n} = 2\left(x_n + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}\right)$$
$$x_n + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} = \left(x_1 + \frac{1}{3}\right)2^{n-1}$$

ここで，$x_1 = b$ とすると，$x_n = \left(b + \dfrac{1}{3}\right)2^{n-1} - \dfrac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ である．

また，$a = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{1}{3}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned} |x_n - 2^n \cdot a| &= \left|\left(b + \frac{1}{3}\right)2^{n-1} - \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} - \left(b + \frac{1}{3}\right)2^{n-1}\right| \\ &= \left|-\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}}\right| \leqq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

したがって，すべての $n = 1, 2, \cdots$ に対して，不等式

$$|x_n - 2^n \cdot a| \leqq \frac{1}{3}$$

が成立することが示された．　□