1

a，b，c を複素数とするとき，次のことは正しいか．正しいものは証明し，正しくないものについては反例（成り立たない例）をあげよ．

（1）　ab，bc，ca がすべて 0 ならば，a，b，c はすべて 0 である．

（2）　$a+b$，$b+c$，$c+a$ がすべて実数ならば，a，b，c はすべて実数である．

（3）　$a^2+b^2+c^2=0$ ならば a，b，c はすべて 0 である．

（4）　$a+b+c=0$，$ab+bc+ca=0$ ならば，$a^3=b^3=c^3$ である．

1970

解 答

（1）　$a=0, b=0, c=1$ のとき，ab, bc, ca は 0 となるが，a, b, c は 0 ではないため，偽である．

（2）　$a=c+fi, b=g+hi, c=j+ji$ とする．$a+b, b+c, c+a$ が実数であるから，$f+h=0, h+k=0, k+f=0$ となり，これを満たす f, h, k の組み合わせは，$(f, h, k)=(0, 0, 0)$ となる．

よって，$a+b, b+c, c+a$ がすべて実数であるとき，a, b, c は実数となる．

（3）　$a^2=i, b=1, c=0$ のときが挙げられるため，偽である．

（4）　$abc=d$ とすると，解と係数の関係から，a, b, c は $x^3-d=0$ の解となる．よって，$a=b=c$ となる．

2

a，b が実数で $|a|+|b|<1$ のとき，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 根の絶対値は，ともに 1 より小さいことを証明せよ．

1970

解 答

$x^2+ax+b=0$ の解を α, β とする．$\begin{cases}\alpha+\beta=a \\ \alpha\beta=b\end{cases}$，$\begin{cases}|a|=|\alpha+\beta| \\ |b|=|\alpha\beta|\end{cases}$

また，$1>|a|+|b|=|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$ である．

(i)　2 根の絶対値がともに 1 以上と仮定すると，明らかに矛盾する．

(ii)　2 根の絶対値のうち，一方が 1 以上であると仮定すると，$1>|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|$

(I)　$\alpha>1$ とすると，$-1<\beta<0$ である．$|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=\alpha+\beta-\alpha\beta=(1-\beta)\alpha+\beta$

ここで，$(1-\alpha)<1$ より，$\alpha<\dfrac{1}{1-\beta}$ である．また，$-1<\beta<0$ より，$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ となるが，これは $\alpha>1$ に矛盾する．

(II)　$\alpha<-1$ となると，$0<\beta<1$ である．$|\alpha+\beta|+|\alpha\beta|=-(\alpha+\beta)-\alpha\beta=-(1+\beta)\alpha-\beta$ であり，$-(1+\beta)\alpha<1$ より，$\alpha<-\dfrac{1}{1+\beta}$ となるが，$0<\beta<1$ より，$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ となるため，矛盾する．

(i)，(ii) より，2 根の絶対値が 1 以上と仮定すると矛盾が生じるため，2 根の絶対値はともに 1 よりも小さいことが示された．　□

3

座標平面で点 P は x 軸上を正の方向へ，点 Q は y 軸上を正の方向へ，点 R は傾き（勾配）1 の直線上を上方へ，それぞれ一定の速さ a，b，c で動いている．3 点 P，Q，R はつねに一直線上にあり，ある時刻に P の位置は $(4,\ 0)$，Q の位置は $(0,\ 2)$，R の位置は $(2,\ 1)$ であった．このとき a，b，c の値の比を求めよ．

1970

解 答

P，Q，R が x 軸上で一直線になるときを t_1 とする．このとき，P$(x,\ 0)$，Q$(0,\ 0)$，R$(1,\ 0)$ である．

P，Q，R が y 軸上で一直線になるときを t_0 とする．このとき，P(0, 0)，Q(0, y)，R(0, -1) である．
また，P(4, 0)，Q(0, 2)，R(2, 1) となるときを t_2 とする．

P　t_0 から t_2 における距離の変化は，4 ……①

Q　t_1 から t_2 における距離の変化は，2 ……②

R　t_0 から t_2 における距離の変化は，$2\sqrt{2}$ ……③

R　t_1 から t_2 における距離の変化は，$\sqrt{2}$ ……④

①，③から，P と R の速度の比は，$a:c=4:2\sqrt{2}$ である．

②，④から，Q と R の速度の比は，$b:c=2:\sqrt{2}$ である．

したがって，$a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$ となる．

4

次の (1)，(2) を証明せよ．

（1）　$\sin x$ は，x の整式としては表わせない．

（2）　$f(x)$ は実数全体を定義域とする微分できる関数で，$f(1)=0$ である．このとき

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1} & (x \neq 1 \text{ のとき}) \\ f'(1) & (x=1 \text{ のとき})\end{cases}$$

とおけば，$g(x)$ は連続関数である．

1970

解答

（1）　$\sin x=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ と仮定する．（a_k は任意の実数）

このとき，$(\sin x)^4=\sin x$ であるので，$(\sin x)^{(4l)}=\sin x$（l は整数）となる．ここで，$4l>n$ となる l を考えると，$(\sin x)^{(4l)}=\sin x=0$ となるため，これは矛盾である．したがって，$\sin x$ は x の整式で表すことは出来ない．

（2）　平均値の定理から，

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$$

を満たす c が存在する位置について，場合分けを行う．

(i)　$x>1$ のとき，$1<c<x$ の位置に存在する．したがって，$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となる．

(ii)　$x<1$ のとき，$x<c<1$ の位置に存在する．したがって，$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となる．

よって，(i)，(ii) から，$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(c)$ となるから，$g(x)$ は連続関数である．

1

n は 2 以上の自然数で，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\sum_{k=0}^{n} x^k \leqq n + x^{n+1}$ を証明せよ.

1971

解答

(i)　$n = 2$ のとき

$$x^3 + 2 - (x^2 + x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x-1) - (x-1) = (x+1)(x-1)^2 \geqq 0$$

より，成立.

(ii)　$n = 2, 3, \cdots, l$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{l} x^k \leqq l + x^{l+1}$$

が成立すると仮定する.

$n = l+1$ のとき，

$$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leqq (l+1) + x^{l+2}$$

が成立することを示せばよい.

$\sum_{k=0}^{l+1} x^k \leqq l + x^{l+1} + x^{l+2}$ であり，$0 \leqq x \leqq 1$ より，$0 \leqq x^{l+1} \leqq 1$ であるから，$l + x^{l+1} + x^{l+2} \leqq (l+1) + x^{l+2}$ が成立する.

(i)，(ii) から，すべての自然数 n について，$\sum_{k=0}^{n} x^k \leqq n + x^{n+1}$ が成立する.　□

2

放物線 $y = x^2$ 上の異なる 3 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$(x_3,\ y_3)$ における法線が 1 点で交わるとき，$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ であることを証明せよ.（曲線上の 1 点で，接線に垂直な直線を，その点における曲線の法線という）

1971

解答

$(x_1,\ y_1)$ における $y = x^2$ の法線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2x_1}(x - x_1) - {x_1}^2 \qquad \cdots\cdots①$$

同様にして，$(x_2,\ y_2)$ における場合は，

$$y = -\frac{1}{2x_2}(x - x_2) + {x_2}^2 \qquad \cdots\cdots②$$

①，② を連立して，

$$-\frac{1}{2x_1}x + {x_1}^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2x_2}x + {x_2}^2 + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)x = {x_2}^2 - {x_1}^2$$

$$\begin{aligned} x &= 2({x_1}^2 - {x_2}^2)\cdot\left(\frac{x_1x_2}{x_2 - x_1}\right) \\ &= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\cdot\frac{x_1x_2}{x_2 - x_1} \\ &= -2x_1x_2(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

したがって，交点 $(x,\ y)=\left(-2x_1x_2(x_1 + x_2),\ {x_1}^2 + x_1x_2 + {x_2}^2 + \frac{1}{2}\right)$ である.

$(x_3,\ y_3)$ における法線も同じ点で交わるから，

$$x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2x_3}\{-2x_1x_2(x_1+x_2)\}+x_2{}^2+\frac{1}{2}$$
$$x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2=\frac{x_1x_2(x_1+x_2)}{x_3}+x_3{}^2$$
$$0=x_3{}^3-x_3(x_1{}^2+x_1x_2+x_2{}^2)+x_1x_2(x_1+x_2)$$
$$0=(x_3+x_2+x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

ここで，$x_3 \fallingdotseq x_1,\ x_3 \fallingdotseq x_1$ であるから，$x_3+x_2+x_1=0$ である．（証明終了）

3

a

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ $(x>0)$ の増減を調べ，グラフの概形をかけ．

（2）　$\displaystyle\int_1^t \frac{\log x}{x^3}dx$ を求め，$t \to +\infty$ のときの極限値を求めよ．

b

数字 0 を記した札が n 枚，数字 1, 2, ……, 9 を記した札がそれぞれ m 枚ある．この中から任意に 1 枚を取り出し，その札の数字だけの賞金を受ける．ただし数字 0 の札を引いたときは，その札を戻したうえ，もう 1 回だけ引きなおして，賞金を受けるものとする．

（1）　賞金の期待値を求めよ．

（2）　期待値を 3 以下にするには，比 $\dfrac{n}{m}$ をどの程度に大きくすればよいか．

1971

解答

a

（1）　$y=\dfrac{\log x}{x^3}$ より，x について微分して，$y'=\dfrac{1-3\log x}{x^4}$，$y''=\dfrac{4(3\log x-2)}{x^5}$ である．
増減表は以下の通りになる．

b

（1）

$$\sum_{k=1}^{9} k\,\frac{m}{9m+n}=\frac{1}{2}\times 9\times 10\,\frac{m}{9m+n}=\frac{45m}{9m+n}$$

期待値を $E(X)$ とすると，

$$E(X)=\frac{45m}{9m+n}+\frac{n}{9m+n}\times\frac{45m}{9m+n}$$
$$=\frac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}$$

（答）　$E(X)=\dfrac{45m(9m+2n)}{(9m+n)^2}$

（2）　$m \fallingdotseq 0$ であるから，$E(X)=\dfrac{45\left(9+2\dfrac{n}{m}\right)}{\left(9+\dfrac{n}{m}\right)^2}$ と表すことができる．

$\dfrac{n}{m}=t$ とし，$f(t)=\dfrac{45(9+2t)}{(9+t)^2}$ と定めると，$f(t)\leqq 3$ から，

$$\begin{aligned} f(t) &\leqq 3 \\ \frac{45(9+2t)}{(9+t)^2} &\leqq 3 \\ 15(9+2t) &\leqq (t+9)^2 \\ t^2+18t+81-135-30t &\geqq 0 \\ t^2-12t-54 &\geqq 0 \end{aligned}$$

$t>0$ より，これを解いて，$t \geqq 6+3\sqrt{10}$ であるから，比 $\dfrac{n}{m}$ は $6+3\sqrt{10}$ 以上にすればよい．

（答）　$6+3\sqrt{10}$

$\boxed{1}$

次のおのおのについて解答せよ．

（1）　4辺形 $ABCD$ と1点 P がある．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

が成立するならば，この4辺形はどんな4辺形か．

（2）　$x_k \geqq 0\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ のとき，次の不等式を証明せよ．

$$\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{1+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n} \geqq \frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{1+x_1}+\frac{x_2}{1+x_2}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{1+x_n}\right)$$

1972

解答

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})-(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$

$-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから，四角形 ABCD は平行四辺形となる．

（2）　$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ とする。$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$ となり，増減表は以下のようになる．

t	0	$\cdots$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	

$f(t)$ は $t \leqq 0$ において, 狭義単調増加である．$x_1+x_2+\cdots+x_n=t$ とすると，$\dfrac{t}{1+t} \leqq \dfrac{x_k}{1+x_k}$ $(k=1, 2, \cdots, h)$ であるから,

$$\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{1+t} \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}$$

を満たす．よって，題意は示された．　□

$\boxed{2}$

$f(z)$ は，複素数を係数とする z の1次式であって，$f(f(f(z)))=z$ がつねに成り立つものとする．このような $f(z)$ をすべて求めよ．

1972

解答

$$\begin{aligned}
f(z)&=(a+bi)z+c\\
f(f(z))&=(a+bi)\{(a+bi)z+c\}+c\\
&=(a^2-b^2+2abi)z+c(a+1+bi)\\
f(f(f(z)))&=(a+bi)^2\{(a+bi)z+c\}+c\{(a+bi)+1\}\\
&=(a+bi)^3z+c\{(a+bi)^3+(a+bi)+1\}
\end{aligned}$$

ここで，$f(f(f(z)))=z$ から，$\begin{cases}(a+bi)^3=1\\ c\{(a+bi)^2+(a+bi)+1\}=0\end{cases}$ を満たす．よって，$c=0$ である．

また，$(a^3+3a^2bi-3ab^2-b^2i)=1$ より，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0\\ a^3-3ab^2=1\end{cases}$ であり，$\begin{cases}b(3a^2-b^2)=0\\ a(a^2-3b^2)=1\end{cases}$ である．

よってここで場合分けを行う．

(i)　$b=0$ のとき，$a^3=1$ であり，a は実数より $a=1$

(ii)　$3a^2=b^2$ のとき，$a(-8a^2)=1$ であり，a, b は実数より，$a=-\frac{1}{2}$，$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である．

（答）　$f(z)=z,\ \left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

3

次の数列 a_1, a_2, ……, a_n, …… の収束，発散を調べ，解答欄の表に番号を記入せよ．またその理由を述べよ．

（1）　$a_n=\frac{1}{n}\sin n$

（2）　$a_n=n^2\sin\frac{1}{n}$

（3）　$a_n=n\cos\frac{n\pi}{4}$

（4）　$a_n=\sqrt{2n}-n$

（5）　$a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$

（6）　$a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}$

1972

解答

（1）　$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，$-\frac{1}{n}<\frac{\sin n}{n}<\frac{1}{n}$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$ と $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ から，はさみうちの原理より，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ である．したがって，0 に収束する．

（2）　$\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(n\sin\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$ より，発散する．

（3）　$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{n}{4}\pi$ は振動するから，$\lim\limits_{n\to\infty} n\cos\frac{n}{4}\pi$ も振動する．

（4）　$a_n=\frac{(\sqrt{2n}-n)(\sqrt{2n}+n)}{\sqrt{2n}+n}=\frac{n^2-2n}{n+\sqrt{2n}}=\frac{n-2}{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ より，発散する．

（5）　$\frac{1}{(n+k)^2}<\frac{1}{n^2}$ より，

$$0<a_n=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n^2}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$$

ここで，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ より，はさみうちの原理から，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ である．したがって，0 に収束する．

（6）

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\\&=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2\end{aligned}$$

したがって，$\log 2$ に収束する．

4

平面上の点 $P(x_0,\ y_0)$ を通って，放物線 $y=x^2$ に 2 本の接線が引けるための必要十分条件は ${x_0}^2>y_0$ であることを証明せよ．またこのとき，この 2 本の接線の接点を Q，R として，3 角形 PQR の面積を x_0, y_0 で表せ．

1972

解答

$y=x^2$ の $x=t$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t)+t^2 \\ &= 2tx-t^2 \end{aligned}$$

であり，これが $(x_0,\ y_0)$ を通るとき，$t^2-2tx_0+y_0=0$ を満たし，これが異なる2解を持つ条件は，この二次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}={x_0}^2-y_0>0$ であるから，${x_0}^2>y_0$ となる．

また, $\mathrm{Q}(x_0+\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，$\mathrm{R}(x_0-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となるから, 三角形PQRの面積は, P'$(0,\ 0)$，Q'$(\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$，R'$(-\sqrt{{x_0}^2-y_0},\ 2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})$ となる．

ここで，三角形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0+2\sqrt{{x_0}^2-y_0})-\sqrt{{x_0}^2-y_0}\times(2{x_0}^2-2y_0-2\sqrt{{x_0}^2-y_0})\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|-2(2{x_0}^2-2y_0)\sqrt{{x_0}^2-y_0}\right| \\ &= 2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

（答） （面積）$=2({x_0}^2-y_0)^{\frac{3}{2}}$

1

すべての複素数 z に対して $|z|^2+az+\overline{a}\overline{z}+1 \geqq 0$ となる複素数 a の集合を求め，これを複素平面上に図示せよ．ただし $\overline{a}$，$\overline{z}$ はそれぞれ a，z の共役複素数を表す．

1973

解答

$|z|^2+az+\overline{az}+1 \leqq 0$ より，$z\cdot\overline{z}+az+\overline{az}+1 \leqq 0$

ここで，$z=\alpha+\beta i, a=\gamma+\delta i$ とする．

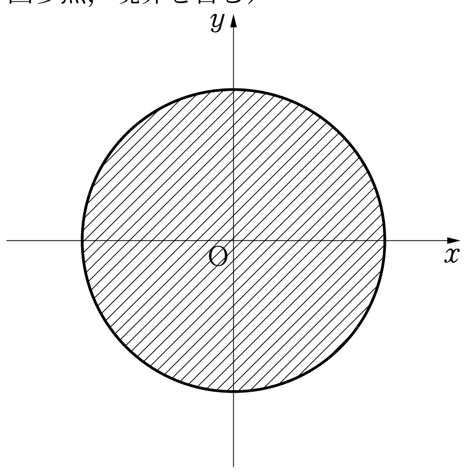
$$\alpha^2+\beta^2+(\gamma+\delta i)(\alpha+\beta i)+(\gamma-\delta i)(\alpha-\beta i)+1 \leqq 0$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\gamma-\delta i)(\alpha-\beta i)+1 \leqq 0$$
$$(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i+(\alpha\gamma-\delta\beta)-(\alpha\delta+\beta\gamma)i+1 \leqq 0$$
$$\alpha^2+\beta^2+2(\alpha\gamma-\beta\delta)+1 \leqq 0$$

この不等式は，任意の α, β に対して成立するから，

$$(\alpha+\gamma)^2-\gamma^2+(\beta-\delta)^2-\delta^2+1 \leqq 0$$
$$(\alpha+\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+1-\gamma^2-\delta^2 \leqq 0$$

より，$\gamma^2+\delta^2 \geqq 1$ のとき，任意の α, β に対してこの不等式は成立する．

よって，$x^2+y^2 \leqq 1$ の部分（下図参照，境界を含む）



である．

2

n を定まった正の整数とし，$1 \leqq k \leqq n$ なる整数 k のおのおのに，$1 \leqq r \leqq n$ なる整数 r を対応させる関数 $r=f(k)$ があって，$k_1<k_2$ ならばつねに $f(k_1) \leqq f(k_2)$ であるとする．このとき，$f(m)=m$ となる整数 m が存在することを証明せよ．

1973

解答

$r=f(k)$ について，$k_1<k_2$ ならば，$f(k_1) \leqq f(k_2)$ より，$f(k)$ は広義単調増加関数であるから，

$$\begin{cases} f(1) \leqq f(2) \leqq \cdots \leqq f(k) \leqq \cdots \leqq f(n) \\ 1 \leqq \cdots \leqq r \leqq \cdots \leqq n \end{cases}$$

となる．ここで，$f(m)=m$ となる m が存在しないと仮定する．

(i)　$m=1$ のとき，$f(1) \neq 1$ より，$f(1) \geqq 2$

(ii)　$m=1, 2, \cdots, l$ のとき，$f(m) \neq m$ が成立すると仮定すると，$f(l) \neq l$ と，$f(l) \geqq f(l-1)$ より，$f(l) \geqq l+1$ となる．

(i)，(ii) から，$1, 2, \cdots, n$ の自然数 m について，$f(m) \geqq m+1$ が成立する．

ここで，$1 \leqq f(n) \leqq n$ より，$f(n) \geqq n+1$ となることはできないため，少なくとも 1 つは $f(m)=m$ となる自然数 m が存在する．□

3

a が 1 でない実数のとき，方程式 $x^2+ax=\sin x$ はちょうど 2 つの実根をもつことを証明せよ．

1973

解答

$x^2+ax-\sin x=0$ より，$f(x)=x^2+ax-\sin x$ とする．$f'(x)=2x+a-\cos x$，$f''(x)=2+\sin x$ である．

(i)　$a>1$ のとき

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$		$+$			$+$
$f'(x)$	↘	0	↗	$a-1$	↗

x	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↗

(ii)　$a=1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f''(x)$	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

(iii)　$a<1$ のとき

x	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f''(x)$					
$f'(x)$	$-$	$a-1$	$-$	0	$+$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘		↗

ここで，任意の a に対して，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ となるから，中間値の定理と (i)，(ii)，(iii) より，$a \fallingdotseq 1$ のとき，$x^2+ax=\sin x$ はちょうど 2 つの実根を持つ．□

4

関数 $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ が正の第 2 次導関数をもつとき，曲線 $y=f(x)$ の上に点 P をとって，P における接線とこの曲線および 2 直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれた部分の面積を最小にするには，点 P をどのようにとればよいか．

1973

解答

$f''(x)>0$ である．P における接線は，

$$y=f'(p)(x-p)+f(p)$$
$$=\int_a^b |f(x)-f'(p)(x-p)+f(p)|\,dx$$

ここで，$f(x)$ の部分は，p によらない定数となるから，

$$S(p)=\int_a^b f'(p)(x-p)+f(p)\,dx$$

が最大となる p を求めればよい．

$$S(p)=\Big[\frac{1}{2}f'(p)x^2+(f(p)-f'(p))\cdot p\Big]_a^b$$
$$=\frac{1}{2}f'(p)(b^2-a^2)+(f(p)-f'(p)\cdot p)(b-a)$$
$$S'(p)=\frac{1}{2}f''(p)(b^2-a^2)+(f'(p)-f'(p)-f''(p)\cdot p)(b-a)$$
$$=\frac{1}{2}f''(p)(b-a)\{(b+a)-2p\}$$

ここで，$f''(p)>0,(b-a)\geqq 0$ より，

p	a	$\cdots$	$\frac{a+b}{2}$	$\cdots$	b
$S'(p)$		$+$	0	$-$	
$S(p)$		↗		↘	

増減表より，$S(p)_{\mathrm{Max}}$ となるのは，$p=\dfrac{a+b}{2}$ のときである．

したがって，求める点 P は $(x,y)=\left(\dfrac{a+b}{2},f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$　　　　（答）$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right)$

1

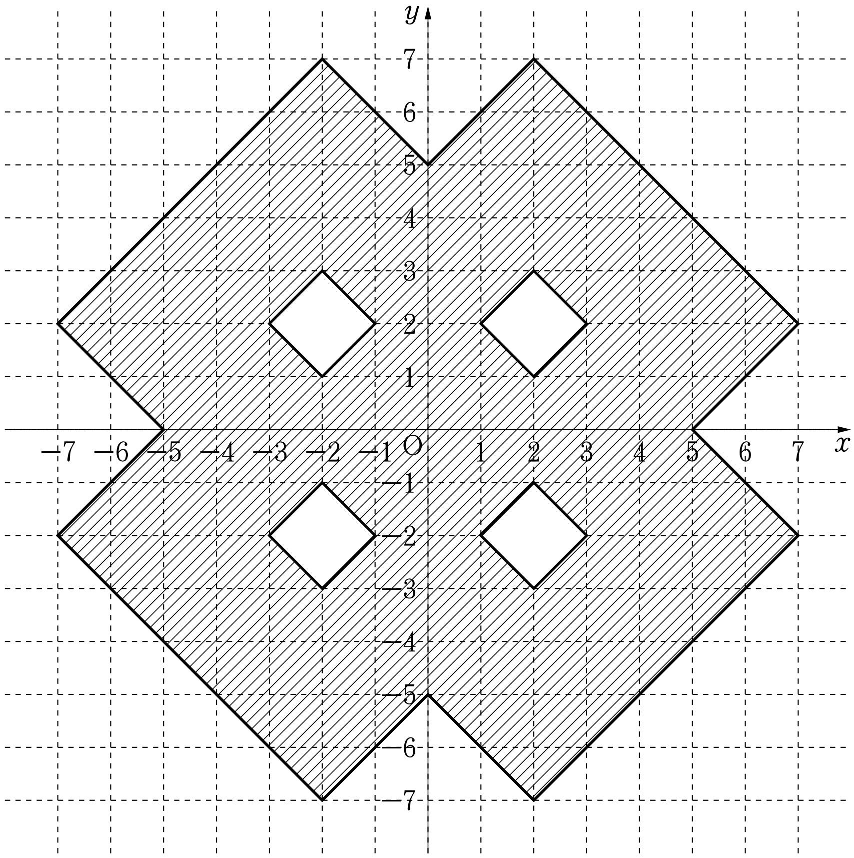
次の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を図示せよ．

$$1 < ||x|-2| + ||y|-2| < 5$$

1974

解答

$1 < ||x|-2| + ||y|-2| < 5$ について考える．$|x|, |y|$ はともに偶関数のため，第 1 象限について考え，それを線対称に第 2，3，4 象限に対応させればよい．したがって，下図のようになる．



2

底辺 a，高さ h の 2 等辺三角形がある．

（1）　この 3 角形の内接円の半径 r を a と h を用いて表せ．

（2）　n が 0 でない整数で，$ah^n = 1$ を満たしながら a，h が変化するとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{r}{a}$ を求めよ．

1974

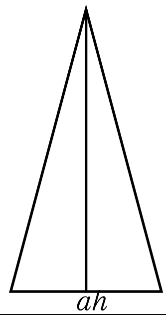
解答

（1）　この三角形の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}ah$$

$$\frac{1}{2}ah = r\left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$$

$$r = \frac{ah}{2\left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}\right)}$$



（答）　$r = \dfrac{ah}{2\left(a + 2\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}\right)}$

（2）　$ah^n=1$ より，$h^n=\dfrac{1}{a}$，したがって，$h=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$

3

$p \geqq 0$，$q \geqq 0$，$p \neq q$ である p，q に対して

$$|\log(p+1)-\log(q+1)|<|p-q|$$

が成立することを証明せよ．

次に，k を $0<k<1$ である定数とすると $|\log(p+1)-\log(q+1)|<k|p-q|$ が成立しないような $p \geqq 0$、$q \geqq 0$，$p \neq q$ が存在することを示せ．ここで log は自然対数を表すものとする．

1974

解答

条件式から $p>q$ としても一般性を失わない．ここで，$\dfrac{\log(p+1)-\log(q+1)}{p-q}<1$ を示せばよい．

ここで，平均値の定理から，$f(x)=\log(x+1)$ とすると，

$$\frac{\log(p+1)-\log(q+1)}{p-q}=\frac{1}{c+1} \quad \cdots\cdots ①$$

となる c が，$q<c<p$ の範囲に存在する．

$\dfrac{1}{p+1}<\dfrac{1}{c+1}<\dfrac{1}{q+1}$ $\cdots\cdots$ ② であるから，$\dfrac{1}{c+1}<\dfrac{1}{q+1}\leqq 1$ を満たし，$\dfrac{1}{c+1}<1$ である．

したがって，$|\log(p+1)-\log(q+1)|<|p-q|$ となる．□

また，$0<k<1$ であることから，$k=\dfrac{1}{1+r}$ $(r>0)$ とおける．このとき，$c=\dfrac{1}{1+r}$ となる c が存在することを示せば良い．

$p=r+\alpha, q=r-\alpha$ とすると，$\dfrac{1}{r+1+\alpha}<\dfrac{1}{c+1}<\dfrac{1}{r+1-\alpha}$ となる．

ここで，$\lim\limits_{\alpha\to 0}$ を考えると，はさみうちの原理から，$\dfrac{1}{c+1}=\dfrac{1}{r+1}=k$ となるため，等号が成立するような $p \geqq 0, q \geqq 0, p \neq q$ となる p, q が存在することが示された．したがって，題意を満たす p, q が存在することが示された．□

4

$f(x)$，$g(x)$ を $x \geqq 0$ で定義された正の値をとる連続関数で，$g(x)$ は増加関数であるとする．このとき

$$S(x)=\int_0^x f(t)dt, \quad T(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt$$

に対して次の (1)，(2) を証明せよ．

（1）　すべての $x>0$ に対して $T(x) \leqq g(x)S(x)$ である．

（2）　$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は $x>0$ で増加関数である．ここで一般に関数 $h(x)$ が増加関数であるとは，$x_1<x_2$ ならば $h(x_1) \leqq h(x_2)$ が成立することをいう．

1974

解答

（1）　$f(x)=g(x)S(x)-T(x)$ とする．

$$\begin{aligned}
f(x)&=g(x)S(x)-T(x)\\
f(x)&=g(x)\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x g(t)f(t)\,dt\\
f'(x)&=g'(x)\int_0^x f(t)\,dt+g(x)f(x)-g(x)f(x)\\
&=g'(x)\int_0^x f(t)\,dt
\end{aligned}$$

ここで，$g(x)$ は増加関数より，$g'(x)>0$ であり，$f(x)$ は正の値を取るから，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt>0$ である．

したがって，$f'(x)=g'(x)\int_0^x f(t)\,dt>0$

よって，$x>0$ において，$g(x)S(x)-T(x)\geqq 0$ であるから，$g(x)S(x)\geqq T(x)$ が示された．

（2）

$$\begin{aligned}\frac{T(x)}{S(x)}\,dx &= \frac{T'(x)S(x)-T(x)S'(x)}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,dt - f(x)\int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)g(t)\,dt}{S^2(x)}\\ &= \frac{f(x)\{g(x)S(x)-T(x)\}}{S^2(x)}\end{aligned}$$

$f(x)>0$ かつ (1) から，$g(x)S(x)-T(x)\geqq 0$ より，$\dfrac{T(x)}{S(x)}\,dx\geqq 0$ であるから，$\dfrac{T(x)}{S(x)}$ は増加関数となる．　□

1

次のおのおのを証明せよ.

（1）　$\log_2 3$ と $\log_3 4$ の大小を比較せよ.

（2）　$\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi+\cos\dfrac{8}{9}\pi+\cos\dfrac{10}{9}\pi+\cos\dfrac{14}{9}\pi+\cos\dfrac{16}{9}\pi$ の値を求めよ.

1975

解答

（1）　$2^{\frac{2}{3}}=2\sqrt{2}<3$ より，$\log_2 3>\dfrac{3}{2}$ …… ①

となる．また，$3^{\frac{2}{3}}=3\sqrt{3}>4$ より，$\log_3 4<\dfrac{3}{2}$ …… ②

となる．

①，② より，$\log_3 4<\log_2 3$.　　　　（証明終了）

（2）　$\cos 5\theta=\cos 4\theta$ を満たす θ を考える．$-1<\cos\theta<1$ の範囲において，$0<\theta<\pi$ である．

$5\theta=\pm 4\theta\pm 2n\pi$ より，$\theta=\dfrac{2}{9}n\pi$，$2n\pi$ であり，$\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$，$\cos 4\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$ から，

$$16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta=8\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1$$
$$16\cos^5\theta-8\cos^4\theta-20\cos^3\theta+8\cos^2\theta+5\cos\theta-1=0$$
$$(\cos\theta-1)(16\cos^4\theta+8\cos^3\theta-12\cos^2\theta-4\cos\theta+1)=0$$

ここで，解と係数の関係より，

$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{6}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=-\frac{1}{2}$$
$$\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi=0$$

が成り立ち，また，

$$\begin{aligned}&\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi+\cos\frac{10}{9}\pi+\cos\frac{14}{9}\pi+\cos\frac{16}{9}\pi\\&=2\left(\cos\frac{2}{9}\pi+\cos\frac{4}{9}\pi+\cos\frac{8}{9}\pi\right)\\&=0\end{aligned}$$

（答）　$\underline{\underline{\cos\dfrac{2}{9}\pi+\cos\dfrac{4}{9}\pi+\cos\dfrac{8}{9}\pi+\cos\dfrac{10}{9}\pi+\cos\dfrac{14}{9}\pi+\cos\dfrac{16}{9}\pi=0}}$

2

次の (1)，(2) を解答せよ.

（1）　1 から 10 までの 10 個の整数から相異なる 5 個をとり，その積を a，残りの 5 個の積を b とする。$a\neq b$ を証明せよ.

（2）　また，1 から 10 までの 10 個の整数のうちの相異なる 5 個の積として表される整数のうちで，$\sqrt{10!}$ より小さいものの個数を p，$\sqrt{10!}$ より大きいものの個数を q とする．$p=q$ を証明せよ.

1975

解答

（1）　1〜10 までの 10 個の整数のうち，7 の倍数を含むものは 7 のみだから，a または b のどちらか一方は 7 の倍数となるが，もう一方は 7 の倍数とはならないため，$a\neq b$ となる．

（2）　1〜10 までの 10 個の整数から 5 個を選び，その積を c，残りの 5 個の積を d とする．ここで，対称性から $c<d$ としても一般性を失わない．このとき，$c\cdot d=10!$ である．

ここで，$c<d$ から，$c^2<10!<d^2$ となる．よって，$c<\sqrt{10!}<d$ と表すことができるため，c は $\sqrt{10!}$ よりも小さく，d は $\sqrt{10!}$ よりも大きいことがわかる．

ここで，c の個数と d の個数は一致するため，$p=q$ となる．（証明終了）

3

三角形 ABC において，$\angle C=n\angle B$ ならば，$b<c<nb$ であることを証明せよ．ただし $b=CA$, $c=AB$ とし、n は2以上の整数とする．

1975

解答

$\angle \mathrm{B}=\beta$ とする．$\dfrac{\sin n\beta}{c}=\dfrac{\sin\beta}{b}$ より，$c=\dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}b.$

ここで，$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}+\angle\mathrm{C}=\pi$ より，$(n+1)\beta=\pi-\angle\mathrm{A}$，$(n+1)\beta<\pi$，$\beta<\dfrac{\pi}{n+1}$

さらに

$$\begin{aligned} f(\beta)&=\sin n\beta-\sin\beta\\ &=2\cos\frac{(n+1)\beta}{2}\sin\frac{(n-1)\beta}{2}\end{aligned}$$

であり，$\cos\dfrac{(n+1)\beta}{2}>\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ かつ，$\sin\dfrac{n-1}{2}\beta>0$ より，$\sin n\beta>\sin\beta$ となるから，$b<c$ となる．

$g(\beta)=\sin n\beta-n\sin\beta$ とすると，$g'(\beta)=n\cos n\beta-n\cos\beta=n(\cos n\beta-\cos\beta)$ である．

$n\beta>\beta$ かつ，$\dfrac{n}{n+1}\pi<\pi$ より，増減表は以下のようになる．

β	0	$\cdots$	$\frac{n}{n+1}\pi$
$g'(\beta)$		$-$	
$g(\beta)$	(0)	$\searrow$	

よって，$g(\beta)$ は 0 から $\dfrac{n}{n+1}\pi$ において単調減少かつ，$g(0)=0$ より，$g(\beta)=\sin n\beta-n\sin\beta<0$, $\sin n\beta<n\sin\beta$ である．

したがって，$\dfrac{\sin n\beta}{\sin\beta}<n$ より，$c<nb$ となる．よって，$b<c<nb$. □

4

曲線 $y=x^2(x+1)$ と直線 $y=k^2(x+1)$ $(0\leqq k\leqq 1)$ とで囲まれる部分の面積が最小となるように k の値を定めよ．

1975

解答

$y=x^2(x+1)$ と $y=k^2(x+1)$ の交点を求める．

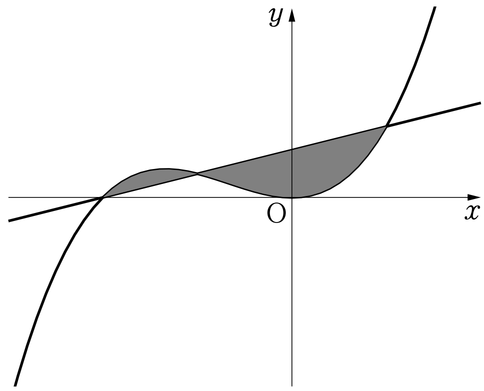
$$\begin{aligned} k^2(x+1)&=x^2(x+1)\\ (x^2-k^2)(x+1)&=0\\ (x-k)(x+k)(x+1)&=0\end{aligned}$$

より，$x=k,-k,-1$ である．$0\leqq k\leqq 1$ より，$-1<-k<k$ である．

$$\begin{aligned} S(k)&=\int_{-k}^{k}\{k^2(x+1)-x^2(x+1)\}\,dx+\int_{-1}^{-k}\{x^2(x+1)-k^2(x+1)\}\,dx\\ &=\int_{-k}^{k}(k^2-x^2)\,dx+\int_{-1}^{-k}\{x^2(x+1)-k^2(x+1)\}\,dx\\ &=\Big[k^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{-k}^{k}+\Big[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}k^2x-k^2x\Big]_{-1}^{-k}\\ &=\frac{4}{3}k^3+\Big\{\Big(\frac{1}{4}k^4-\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k^3+k^3\Big)-\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}k^2+k^2\Big)\Big\}\\ &=\frac{4}{3}k^3+\frac{1}{4}k^4+\frac{1}{6}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{12}\\ &=\frac{1}{4}k^4+\frac{3}{2}k^3-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{12}\end{aligned}$$

したがって,

$$S'(k)=k^3+\frac{9}{2}k^2-k$$
$$=k\left(k^2+\frac{9}{2}k-1\right)$$



k	0	$\cdots$	$\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$	1	$\cdots$
$S'(k)$		$-$	0	$+$	
$S(k)$		$\searrow$		$\nearrow$	

増減表より，$S(k)$ を最小とする k は $k=\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$ である．

（答）$k=\dfrac{-9+\sqrt{85}}{4}$

5

$\boxed{a}$ 1 つのさいころを n 回つづけて投げ，投げた順に出た目の数の積をつくっていくものとする．このとき，次の (1), (2) を解答せよ．

（1） 目の数の積が k 回目 $(1\leqq k\leqq n)$ にはじめて 4 となる確率 p を求めよ．

（2） 目の数の積が n 回目までのどこかで 4 となる確率を求めよ．

$\boxed{b}$ $f(x)$ を $0\leqq x\leqq 1$ で連続な増加関数とする．$0<a<1$ であるどんな a に対しても

$$\int_0^a f(x)dx\leqq a\int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを証明せよ．ここで $f(x)$ が増加関数であるとは，$x_1<x_2$ ならばつねに $f(x_1)\leqq f(x_2)$ が成立することをいう．

1975

解答

$\boxed{a}$

（1） 出た目の積が k 回目までに 4 になるには,

(i) $k-1$ 回目までにすべて 1 を出し，k 回目に 4 を出す

(ii) $k-1$ 回目までに 1 回だけ 2 を出し，k 回目に 2 を出す

のいずれかであればよい．

[1] のとき，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

[2] のとき，$(k-1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k-1}\times\dfrac{1}{6}=(k-1)\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$

（2）

$$S_n=\frac{1}{6}+2\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+n\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$\frac{1}{6}S_n=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^n+n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$
$$\frac{5}{6}S_n=\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{6}\right)^n-n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$
$$\frac{5}{6}S_n=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$$
$$S_n=\frac{6}{25}-\frac{6}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^n-\frac{n}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$
$$=\frac{6}{25}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left\{\frac{6}{5}+n\right\}$$

（答）　$\underline{\underline{\dfrac{6}{25}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\left\{\dfrac{6}{5}+n\right\}}}$

$\boxed{b}$

$f(x)$ が単調増加関数であるから，$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ と $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ の面積は，$\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx \geqq (1-a)f(a)$ の関係にある．すなわち，$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq af(a)$ より，$f(a) \leqq \dfrac{1}{1-a}\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ が成り立つ．

$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，$f(a) \leqq \dfrac{1}{1-a}\displaystyle\int_a^1 f(x)\,dx$ が成立．

$\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx \leqq f(a)$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx &\leqq \frac{1}{1-a}\int_a^1 f(x)\,dx \\
(1-a)\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_a^1 f(x)\,dx + a\int_0^a f(x)\,dx \\
\int_0^a f(x)\,dx &\leqq a\int_0^1 f(x)\,fx
\end{aligned}$$

□

1

次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　1 より大きい自然数 n について，不等式 $2^n < \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} < 2^{2n}$ を証明せよ．

（2）　実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ が $x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots\cdots + x_n{}^2 = 1$ を満たすとき，$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots\cdots + nx_n{}^2$ の最大値と最小値を求めよ．

1976

解答

（1）　$2^n < \dfrac{2n!}{(n!)^2} < 2^{2n} \cdots (*)$ とする．

(i)　$n = 2$ のとき，$4 < 6 < 16$ より成立．

(ii)　$n = k$ のとき，$\dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2k}$

$n = k+1$ のとき，$2^{k+1} < \dfrac{2(k+1)!}{\{(k+1)!\}^2}$　　$2^{k+1} < 2\cdot\dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2\dfrac{2(k+1)}{k+1}\cdot\dfrac{2k!}{(k!)^2}$ より成立．

また，$2\dfrac{2(k+1)}{k+1}\cdot\dfrac{2k!}{(k!)^2} < 4\cdot\dfrac{2k!}{(k!)^2} < 2^{2(k+1)}$ より成立．

(i)，(ii) より，2 以上のすべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．　□

（2）　$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2 = 1$ より，$x_k\ (k < n)$ について考えると，

$$x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots + kx_k{}^2 + (k+1)x_{k+1}{}^2 + \cdots + x_n{}^2$$

となり，$x_k{}^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}{}^2 = 0$ であるとき，$x_k{}^2 = 0$ かつ $x_{k+1}{}^2 = \alpha$ であり，その他の $x_l\ (l = 1, 2, \cdots, k, k+1, \cdots, n)$ を変化させないときを比べると，$x_k{}^2 = \alpha$ かつ $x_{k+1}{}^2 = 0$ の方が，$x_k{}^2 = 0$ かつ $x_{k+1}{}^2 = \alpha$ のときよりも小さくなるから，帰納的に，$1 \leqq x_1{}^2 + 2x_2{}^2 + \cdots + nx_n{}^2 \leqq n$ となる．　□

2

平面上の 3 点 $A(0,\ a)$，$B(b,\ 0)$，$C(c,\ 0)\ (a > 0,\ c > 0,\ b < 0)$ を頂点とする 3 角形 ABC の内部に点 P があり，正数 l，m，n について $l\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ が成り立っている．

（1）　線分 AP の延長と辺 BC との交点 D の座標を求めよ．

（2）　線分 BD と線分 CD の長さの比を求めよ．

1976

解答

（1）　$l(-\overrightarrow{\mathrm{AP}}) + m(\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) + n(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) = 0$

$(l+m+n)\overrightarrow{\mathrm{AP}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{m+n}{l+m+n}\cdot\dfrac{m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{m+n}$

よって，AP の延長と BC との交点 D の座標は，$\mathrm{D}\left(\dfrac{mb+nc}{m+n},\ 0\right)$

（2）　線分 BD と線分 CD の長さの比は $\mathrm{BD} : \mathrm{CD} = n : m$ となる．

3

x^3 の係数が 1 であるような 3 次関数 $f(x)$ のうちで，定積分 $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \{f(x)\}^2 dx$ を最小にするものを決定し，そのときの I の値を求めよ．

1976

解答

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とする．このとき，I を計算すると，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\{x^6+2ax^5+(a^2+2b)x^4+(2ab+2c)x^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx \\
&= 2\int_{0}^{1}\{x^6+(a^2+2b)x^4+(2ac+b^2)x^2+c^2\}\,dx \\
&= 2\Big[\,\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{5}(a^2+2b)x^5+\frac{1}{3}(2bc+b^2)x^3+c^2x\,\Big]_0^1 \\
&= 2\left\{\frac{1}{7}+\frac{1}{5}(a^2+2b)+\frac{1}{3}(2bc+b^2)+c^2\right\}
\end{aligned}
$$

である．

$g(b)=\frac{1}{3}b^2+\frac{2}{5}b$ とする．このとき，$g'(b)=\frac{2}{3}b+\frac{2}{5}$ であり，$g(b)$ は $b=-\frac{3}{5}$ のとき最小値をとる．

$$
\begin{aligned}
h(a,\,c) &= \frac{1}{5}a^2+\frac{2}{3}ac+c^2 \\
&= \left(c+\frac{1}{3}a\right)^2+\frac{4}{45}a^2 \geqq 0
\end{aligned}
$$

であるから，$(a,\,c)=(0,\,0)$ のとき，最小値 0 をとる．

I を最小にする $f(x)=x^3-\frac{2}{5}x$ であり，そのときの I は $I=2\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{25}\right)=\frac{8}{175}$

（答）$\underline{\underline{I=\frac{8}{175}}}$

$\boxed{1}$

空間に 5 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(3,\ 1,\ 5)$，$B(1,\ 2,\ 4)$，$C(2,\ -1,\ -1)$，$D(3,\ 1,\ 2)$ がある．2 点 A，B を通る直線上に動点 P をとり，2 点 C，D を通る直線上に動点 Q をとる．

（1） $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OR}$ を満たす点 R 全体の集合はどのような図形を表すか．

（2） 線分 PQ の長さの最小値を求めよ．

1977

解 答

（1） 直線 AB 上の点 P を以下のように表す．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2t\\1-t\\5-2t\end{pmatrix}$

直線 CD 上の点 Q を以下のように表す．$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-s\\-1-2s\\-1-3s\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix}1+2t+s\\2-t+2s\\6-3t+3s\end{pmatrix}$ であり，点 $\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$ に対して，$\begin{cases}x=1+2t+s\\y=2-t+2s\\z=6-3t+3s\end{cases}$ から，s, t を消去する．

$x+2y=5+5s$，$3y-z=6s$, $x+2y=5+5\dfrac{3y-z}{6}$, $6x+12y=30+5(3y-z)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は $6x-3y+5z=30$ となるような平面上を動く．

（2） $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ より，点と平面の距離公式から，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{|-30|}{\sqrt{36+9+25}}=\dfrac{30}{\sqrt{70}}=\dfrac{3}{7}\sqrt{70}$

（答） $\dfrac{3}{7}\sqrt{70}$

$\boxed{2}$

3 けたの素数 p の百の位の数字を a，十の位の数字を b，一の位の数字を c とする．このとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は整数解をもたないことを証明せよ．

1977

解 答

条件式から，$\begin{cases}100a+10b+c=p\ \cdots\cdots\ ①\\ax^2+bx+c=0\ \cdots\cdots\ ②\end{cases}$ であり, ① − ② より, $(10-x)(10+x)a+(10-x)b=p$

$(10-x)\{(10+x)a+b\}=p$ が導かれる．

これが素数となるためには,

(i) $10-x=1$ のとき，つまり，$(10+x)a+b=p$ となるとき，$x=9$, $19a+b=p$ であり，$100a+10b+c=19a+b$ となり，矛盾する．

(ii) $10-x=p$ のとき，つまり，$(10+x)a+b=1$ となるとき，$(20-p)a+b=1$ であり，① より，$p=100a+10b+1\geqq 11$ である．したがって，$20-p\leqq -91$ となり，$-91a+b\leqq 0$ となるから，矛盾する．

(i), (ii) より，題意は示された． □

3

関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ上の 2 点を結ぶ線分の中点となるような点全体の集合を図示せよ.

1977

解 答

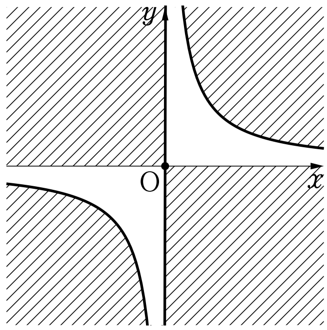
$\mathrm{S}\left(s,\ \dfrac{1}{s}\right)$, $\mathrm{T}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ とする．2 点の中点は, $\left(\dfrac{s+t}{2},\ \dfrac{s+t}{2st}\right)$ であり, $(x,\ y)$ とすると, $x=\dfrac{s+t}{2}$, $y=\dfrac{s+t}{2st}$ である.

(i)　$s \fallingdotseq -t$ のとき, $st=\dfrac{x}{y}$, $s+t=2x$ $t^2-2xt+\dfrac{x}{y}=0$ が異なる 2 つの実数解を持てば良いから,

$$x^2-\frac{x}{y}>0$$
$$x^2y^2-xy>0$$
$$xy(xy-1)>0$$

より, $xy>1$ または $xy<0$ となる.

(ii)　$s=-t$ のとき，中点は原点となる.



(i), (ii) から，右図の斜線部で境界線を含まない.

4

次の (1), (2) を解答せよ.

(1)　a を正数とするとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})$ を求めよ.

(2)　xy 平面上に動点 P がある．さいころを投げて，奇数の目が出れば x 軸の正の方向へ 1 だけ進み，偶数の目が出れば y 軸の正の方向へ 1 だけ進むものとする．動点 P は最初原点にあるものとし，さいころを 8 回投げたとき，原点から P までの距離が 6 以下となる確率を求めよ.

1977

解 答

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{\log a^n+\log(1+a^n)\}=\lim_{n\to\infty}\log a+\log(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$$

(i)　$a<1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=0$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\log a$

(ii)　$a=1$ のとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log 2=0$

(iii)　$a>1$ のとき,

$$\lim_{n\to\infty}\log a+\log a+\log\left(1+\frac{1}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2\log a+\frac{1}{n}\log\left(1+\frac{1}{a^n}\right)=2\log a$$

となる.

(i), (ii), (iii) より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\begin{cases}\log a(a\leqq 1)\\ 2\log a(a>1)\end{cases}$

(答)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(a^n+a^{2n})=\begin{cases}\log a(a\leqq 1)\\ 2\log a(a>1)\end{cases}$

(2)　止まるマスに, (0, 8), (1, 7), (2, 1), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1), (8, 0) であり，キョリは,

$4\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$, $2\sqrt{10}$, $2\sqrt{14}$, 8 のパターンがある．このうち，6 以下となるのは，$4\sqrt{2}$, $\sqrt{34}$ であるから，

$$\begin{aligned}&{}_8\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4+2\times{}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5\\&=\left\{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+2\times\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^8\\&=91\left(\frac{1}{2}\right)^7\end{aligned}$$

（答）　$\dfrac{91}{128}$

5

次の (1)，(2) を解答せよ．

（1）　$f_n(x)=\displaystyle\int_0^x(x-t)\sin nt\,dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ．

（2）　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f_n(x)$ の最大値を a_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ．

1977

解答

（1）　$f_n(x)=\displaystyle\int_0^x x\sin nt\,dt=\int_0^t t\sin nt\,dt.$

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x x\sin nt\,dt\ \text{とする}\\&=x\int_0^{nx}\frac{1}{n}\sin y\,dy\\&=x\left[-\frac{1}{n}\cos y\right]_0^{nx}\\&=\frac{x}{n}(1-\cos nx)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(x)&=\int_0^x(t-\sin nt)\,dt\\&=\frac{1}{n}\int_0^{nx}\frac{1}{n}\sin y\,dy\\&=\frac{1}{n^2}\Big[-y\cos y\Big]_0^{nx}+\frac{1}{n^2}\int_0^{nx}\cos y\,dy\\&=-\frac{1}{n^2}(-nx\cos nx)+\Big[\sin y\Big]_0^{nx}\\&=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\end{aligned}$$

$f_n(x)=F(x)-G(x)$ より，$f_n(x)=\dfrac{x}{n}-\dfrac{1}{n^2}\sin nx$ である．

（答）　$f_n(x)=\dfrac{x}{n}-\dfrac{1}{n^2}\sin nx$

（2）　$f_n{}'(x)=\dfrac{1}{n}(1-\cos nx)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{n}$	$\cdots$	$\frac{4\pi}{n}$	$\cdots$
$f'_n(x)$	0	$+$	0	$+$	0	
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$a_n=f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$ である．

ここで，$-1\leqq\sin\dfrac{n\pi}{2}\leqq1$ より，$-\dfrac{1}{n}\leqq-\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{n\pi}{2}\leqq\dfrac{1}{n}$ である．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$ となるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\frac{\sin n\pi}{2}=0$ となる．

（答）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\frac{\pi}{2}$

1

5 次以下のどんな整式 $f(x)$ に対しても

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(0) + b\{f(c) + f(-c)\}$$

が成り立つように $f(x)$ に無関係な定数 a，b，c を定めよ．

1978

解 答

$f(x) = dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i$ とする．

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(dx^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + hx + i)dx \\
&= \int_{-1}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)dx \\
&= 2\int_{0}^{1}(ex^4 + gx^3 + i)dx \\
&= 2\left[\frac{1}{5}ex^5 + \frac{1}{3}gx^3 + ix\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{5}e + \frac{2}{3}g + 2i
\end{aligned}$$

また，$af(0) = ai$,　$b\{f(c) + f(-c)\} = 2b(ec^4 + gc^2 + i)$ である．

2 式の係数をそれぞれ比較して，$\begin{cases} 2bc^4 & = \dfrac{2}{5} \\ 2bc^2 & = \dfrac{2}{3} \\ (a + 2b) & = 2 \end{cases}$

これをそれぞれ解いて，　（答）$(a, b, c) = \left(\dfrac{8}{9}, \dfrac{5}{9}, \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right)$（符号任意）

2

平面上に 3 角形 ABC が与えられている．この平面上の点 P に対して，AP の中点を Q，BQ の中点を R，CR の中点を S とする．このとき，$S = P$ となる点 P がただ 1 つ存在することを証明せよ．また，この点を P_0 とするとき，$\triangle ABC$ と $\triangle P_0BC$ の面積の比を求めよ．

1978

解 答

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ とする．

このとき，$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{2}(s\vec{b} + t\vec{c}) \\ \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \dfrac{1}{4}(s\vec{b} + t\vec{c}) + \dfrac{1}{2}\vec{b} \\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \dfrac{1}{8}(s\vec{b} + t\vec{c}) + \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c} \end{cases}$ より，それぞれ係数比較をして，$\begin{cases} \dfrac{1}{8}s + \dfrac{1}{4} = s \\ \dfrac{1}{8}t + \dfrac{1}{2} = t \end{cases}$

である．よってこれを s, t について解くと，$(s, t) = \left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{4}{7}\right)$ となるため，$\mathrm{S} = \mathrm{P}$ となる点がただ一つ存在する．

直線 AB と BC の交点を $\mathrm{P_1}$ とする．このとき，$k\overrightarrow{\mathrm{AP_0}} = \overrightarrow{\mathrm{AP_1}}$ より，$k = \dfrac{7}{6}$ となるため，$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}} : \overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}} = 7 : 1$ となり，$\triangle\mathrm{ABC} : \triangle\mathrm{P_0BC} = 7 : 1$ となる．

3

xy 平面上にある正 3 角形で，その 3 頂点の x 座標と y 座標がすべて有理数になるものは存在しないことを証明せよ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明なしで使ってもよい．

1978

解 答

三角形の頂点の座標を $(0,\ 0)$，$(a,\ b)$，$(c,\ d)$（a, b, c, d は有理数）とする．このとき三角形の面積を S

とすると，$S=\dfrac{1}{2}|ad-bc|$ であり，$\sqrt{a^2+b^2}=r$ とすると，

$$S=\frac{1}{2}r^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$$

より，$\dfrac{1}{2}|ad-bc|=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$ であり，

$$\sqrt{3}=\frac{2|ad-bc|}{a^2+b^2}$$

となるが，左辺が無理数であることに対し，右辺が有理数であることに矛盾する．

したがって，頂点の x, y 座標すべてが有理数となる正三角形は存在しない．　□

4

A，B 2 人が次のような規則でさいころを投げるものとする．さいころを投げて 1 の目が出れば次回も同じ人が続けて投げ，1 以外の目が出れば次回は他方が投げることにする．第 1 回目は A が投げる．n 回目に A が投げる確率を p_n とするとき，次の (1)，(2) を解答せよ．

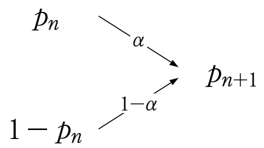
（1）　p_{n+1} を p_n の式で表せ．

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ を求めよ．

1978

解 答

（1）　n 回目に A が投げる確率が p_n であるため，n 回目 B が投げる確率は $(1-p_n)$ と表される．



同じ人が続けて投げる確率を α とすると，$\alpha=\dfrac{1}{6}$ である．推移図より，

$p_{n+1}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}(1-p_n)=-\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{5}{6}$ である．　（答）$p_{n+1}=-\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{5}{6}$

（2）

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{2}{3}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}$$

（答）$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$

5

p，q は区間 $a\leqq x\leqq b$ $(0<a<b)$ で $px+q\geqq\log x$ を満たすものとする．このとき，定積分

$$I=\int_a^b(px+q-\log x)dx$$

が最小となるような p および q を求めよ．また，そのときの I の値を求めよ．

1978

解 答

I が最小値となるのは，$y=px+q$ が $y=\log x$ と $x=t$ $(a<t<b)$ で接するときであるので，

$$\begin{aligned}px+q&=\frac{1}{t}(x-t)+\log t\\&=\frac{1}{t}x+\log t-1\\ \therefore\quad p&=\frac{1}{t},\ q=\log t-1\end{aligned}$$

このとき，

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left(\frac{1}{t}x + \log t - 1 - \log x \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2t}x^2 + (\log t - 1)x - x\log x + x \right]_a^b \\
&= \left\{ \frac{1}{2t}b^2 + (\log t - 1)b - b\log b + b \right\} - \left\{ \frac{1}{2t}a^2 + (\log t - 1)a - a\log a + a \right\} \\
&= \frac{1}{2t}(b^2 - a^2) + \log t(b-a) - b\log b + a\log a
\end{aligned}
$$

ここで，I が最小となる t は，

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= -\frac{1}{2t^2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{t}(b-a) \\
&= -\frac{1}{2t^2}\left\{ (b^2 - a^2) - 2t(b-a) \right\} \\
&= -\frac{1}{2t^2}(b-a)(b+a-2t)
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
t < \frac{a+b}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dI}{dt} < 0
$$
$$
t > \frac{a+b}{2} \text{ のとき} \quad \frac{dI}{dt} > 0
$$

より，$t = \dfrac{a+b}{2}$ のとき，I は最小となる．したがって，$p = \dfrac{2}{a+b}$，$q = \log\left(\dfrac{a+b}{2} \right) + 1$

（答）　$I = (a+b)(b^2 - a^2) + (b-a)\log\left(\dfrac{a+b}{2} \right) - b\log b + a\log a$

1

行列 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって，点 $P(x,\ y)$ が点 $P'(x',\ y')$ にうつるとき，次の (1), (2) を解答せよ．

（1） 原点を O とするとき，すべての点 P に対して，不等式 $OP'\leqq t\cdot OP$ が成り立つような実数 t の最小値 t_0 を求めよ．

（2） $OP'=t_0\cdot OP$ を満たす点 P 全体のなす集合は，直線であることを証明せよ．また，この直線の方程式を求めよ．

1979

解 答

$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より，$\begin{cases}x'=2x+y\\y'=x+y\end{cases}$ である．条件より，$(2x+y)^2+(x+y)^2\leqq t(x^2+y^2)$ であり，これを整理すると，$5x^2+6xy+2y^2\leqq t^2(x^2+y^2)$ である．

(i) $y=0$ のとき，$5x^2\leqq t^2x^2$ より，$\sqrt{5}\leqq t$

(ii) $y\fallingdotseq 0$ のとき，

$$5\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y}+2\leqq t^2\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)$$

となる．ここで，$\dfrac{x}{y}=s$ とすると，

$$(5-t^2)s^2+6s+2-t^2\leqq 0$$

$$(5-t^2)\left\{s+\frac{3}{5-t^2}\right\}^2+2-t^2-\frac{9}{5-t^2}\leqq 0 \qquad (t^2\fallingdotseq s)$$

$$2-t^2-\frac{9}{5-t^2}\leqq 0$$

$$\frac{t^2-7t^4+1}{5-t^2}\leqq 0$$

これを解いて，$t_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ である．

（答） $t_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

2

数列 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n\cdots\cdots$ が $x_{n+1}=2x_n+\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，数 a を適当に定めれば，すべての $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して不等式 $|x_n-2^n\cdot a|\leqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを証明せよ．

1979

解 答

$$x_{n+1}+\frac{1}{3\cdot 2^n}=2\left(x_n+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right)$$

$$x_n+\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}=\left(x_1+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}$$

ここで，$x_1=b$ とすると，$x_n=\left(b+\dfrac{1}{3}\right)2^{n-1}-\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$ である．

また，$a=\dfrac{1}{2}\left(b+\dfrac{1}{3}\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}|x_n-2^n\cdot a|&=\left|\left(b+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}-\left(b+\frac{1}{3}\right)2^{n-1}\right|\\&=\left|-\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right|\leqq\frac{1}{3}\end{aligned}$$

したがって，すべての $n=1, 2, \cdots$ に対して，不等式

$$|x_n-2^n\cdot a|\leqq \frac{1}{3}$$

が成立することが示された．　$\square$