

# INSTITUT DE MATHÉMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications

Adresse mail : [secretariat@imsp-uac.org](mailto:secretariat@imsp-uac.org)

---

## PROJET TUTORÉ

FILIÈRE : STATISTIQUE-PROBABILITÉS

---

Thème

**CHAINES DE MARKOV À TEMPS CONTINU**

---



**Rédigé par :**

HIPPOLYTE SODJINO

...

Adresse mail : [sodjinouhippolyte@gmail.com](mailto:sodjinouhippolyte@gmail.com)

**Superviseur :**

DR (MC) FREEDATH DJIBRIL MOUSSA

THE ABDUS SALAM  
INTERNATIONAL CENTRE FOR  
THEORETICAL PHYSICS (ITALY)

Année académique 2023-2024



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions sur la loi exponentielle et la loi de Poisson</b>	<b>2</b>
1.1 Loi Exponentielle . . . . .	2
1.2 Loi de Poisson . . . . .	3
<b>2 Processus Ponctuel de Poisson</b>	<b>5</b>
2.1 Distribution des temps d'attente et des inter-arrivées . . . . .	7
2.2 Propriétés du processus de Poisson . . . . .	9
2.3 Loi conditionnelle en fonction du nombre de sauts . . . . .	11
<b>3 Introduction aux Chaînes de Markov à Temps Continu</b>	<b>13</b>
3.1 Notion de Chaines de Markov à Temps Continu (CMTC) . . . . .	13
3.1.1 Définition et propriétés . . . . .	13
3.1.2 Étude du régime stationnaire . . . . .	20
3.2 Processus de naissance et de mort . . . . .	21
3.2.1 Définition et propriétés . . . . .	21
3.2.2 Étude du régime stationnaire des processus de naissance et de mort . . . . .	23
3.2.3 Temps espéré pour atteindre un état $j$ . . . . .	24
3.3 Processus de naissance pur . . . . .	24
3.3.1 Définition . . . . .	24
3.3.2 Calcul des probabilités $\mathbb{P}_{i,j}(t)$ pour un processus de naissance pur . . . . .	25
<b>4 Applications</b>	<b>26</b>
4.1 Files d'attente . . . . .	26
4.1.1 Définition et exemples . . . . .	26
4.1.2 Étude du régime stationnaire des files d'attente . . . . .	27
4.2 Modèle prédateur-proie . . . . .	33
4.2.1 Modèle fluide déterministe . . . . .	33
4.3 Modèle pour Covid-19 (Prem et al., The Lancet, 25 mars 2020) . . . . .	34
4.3.1 Modèle déterministe correspondant en dynamique des systèmes . . . . .	35
4.4 Corrigés des exercices . . . . .	36
4.4.1 Exercice 3.1 . . . . .	36
4.4.2 Exercice 3.2 . . . . .	36
<b>Conclusion</b>	<b>38</b>
<b>Références Bibliographiques</b>	<b>39</b>

---

# Introduction

---

Les chaînes de Markov à temps continu constituent un outil central en probabilités et en modélisation stochastique, avec des applications variées dans des domaines tels que la théorie des files d'attente, la biologie, et la finance. Ces chaînes modélisent des processus où les transitions entre états se produisent à des instants aléatoires, en suivant une loi exponentielle, et dépendent uniquement de l'état actuel. Fondée sur des concepts tels que les générateurs infinitésimaux et les processus de Poisson, cette théorie permet d'étudier les comportements dynamiques des systèmes aléatoires continus et d'explorer des propriétés asymptotiques comme l'ergodicité ou la stationnarité. Dans ce projet, nous allons examiner les résultats essentiels liés aux chaînes de Markov à temps continu, en présentant leurs applications dans différents domaines, et en mettant en lumière leur rôle crucial dans l'analyse des phénomènes stochastiques.

---

# Notions sur la loi exponentielle et la loi de Poisson

---

## 1.1 Loi Exponentielle

**Définition 1.1.** Une variable aléatoire  $X$  de loi exponentielle de paramètre (ou de taux)  $\lambda > 0$  est une variable continue à valeurs positives de densité

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$

La loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est notée  $\mathcal{E}(\lambda)$  et sa fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \mathbf{1}_{t \geq 0}$$

**Propriété 1.1.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$   
Sa moyenne, sa variance et sa fonction génératrice sont données respectivement par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{et, pour } t < \lambda, \quad \mathbb{E}(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

*Démonstration.* Sa fonction génératrice des moments vérifie :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^{+\infty} \lambda e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} \lambda (e^{(t-\lambda)x}) dx = \left[ \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \right]$$

Et ainsi on a le résultat.

Avec les dérivées de la fonctions génératrices

$$\varphi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \quad \varphi''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}$$

on a :

$$\mathbb{E}[X] = \varphi'(0) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \varphi''(0) - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

□

**Propriété 1.2. (Absence de mémoire)**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle, alors pour tout  $t, s > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$$

*Démonstration.* En effet,

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

□

Du fait de sa propriété d'absence de mémoire, la loi exponentielle est souvent utilisée pour modéliser des durées de vie pour un système sans usure ou des temps d'attente. Par exemple, si on modélise la durée de vie d'une lampe par la loi exponentielle, l'absence de mémoire revient à dire "sachant que la lampe fonctionne encore après  $t$  heures de service, la probabilité qu'elle fonctionne encore pendant au moins  $s$  heures est égale à la probabilité qu'elle fonctionne au moins  $s$  heures". C'est comme si la lampe avait oublié qu'elle avait déjà fonctionné  $t$  heures, voilà pourquoi on utilise cette loi pour des systèmes sans usure.

On peut réécrire la propriété d'absence de mémoire de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s) \cdot \mathbb{P}(X > t)$$

**Exemple.** On suppose que le temps d'attente  $T$  à la poste suit une loi exponentielle de moyenne 10 minutes ( $\lambda = 1/10$ ). La probabilité qu'un client attende plus de 15 minutes est

$$\mathbb{P}(T > 15) = e^{-\frac{15}{10}} = e^{-3/2} \simeq 0.22.$$

Sachant que le client a déjà attendu au moins 10 minutes, la probabilité qu'il attende au moins 15 minutes est

$$\mathbb{P}(T > 15 \mid T > 10) = \mathbb{P}(T > 5) = e^{-\frac{5}{10}} = e^{-1/2} \simeq 0.604.$$

## 1.2 Loi de Poisson

**Définition 1.2.** Une variable aléatoire  $X$  de loi Poisson de paramètre  $\lambda$  est une variable discrète à valeur dans  $\mathbb{N}$  de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

La loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  est notée  $\mathcal{P}(\lambda)$

Cette loi est en général utilisée pour des événements rares comme le nombre d'accidents de voiture, le nombre de mutations génétiques fixées dans l'ADN, etc. En fait, la loi de Poisson a été introduite en 1838 par Siméon-Denis Poisson dans son ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*.

**Propriété 1.3.** Soit  $X$  une variable aléatoire de loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$ .

— Sa fonction génératrice des moments est :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

— Sa moyenne et sa variance sont :

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \lambda.$$

*Démonstration.*

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk} \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

On calcule les dérivées de la fonction génératrice :

$$\varphi'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \quad \text{et} \quad \varphi''(t) = (1 + \lambda e^t) \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}.$$

D'où

$$\mathbb{E}[X] = \varphi'(0) = \lambda \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \varphi''(0) - [\mathbb{E}[X]]^2 = \lambda.$$

□

**Proposition 1.1.** *La somme de  $n$  variables indépendantes de loi Poisson suit encore une loi de Poisson : soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables indépendantes de loi respective  $\mathcal{P}(\lambda_i)$ , alors*

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

*Démonstration.* On calcule la fonction génératrice de  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$  et on utilise le fait que la fonction génératrice caractérise la loi : par indépendance des  $X_i$  on a :

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{X_1}(t) \times \varphi_{X_2}(t) \times \dots \times \varphi_{X_n}(t) = e^{\lambda_1(e^t-1)} \times e^{\lambda_2(e^t-1)} \times \dots \times e^{\lambda_n(e^t-1)} = e^{(e^t-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i}.$$

□

---

# Processus Ponctuel de Poisson

---

Un processus stochastique est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre  $t$  et définies sur un même espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Le paramètre  $t$  est généralement interprété comme le temps et appartient à un ensemble ordonné  $T$ .

**Définition 2.1.** *Un processus stochastique  $(N(t))_{t \geq 0}$  est appelé processus de comptage si  $N(t)$  représente le nombre total de sauts (ou événements) qui sont arrivés avant l'instant  $t$ .*

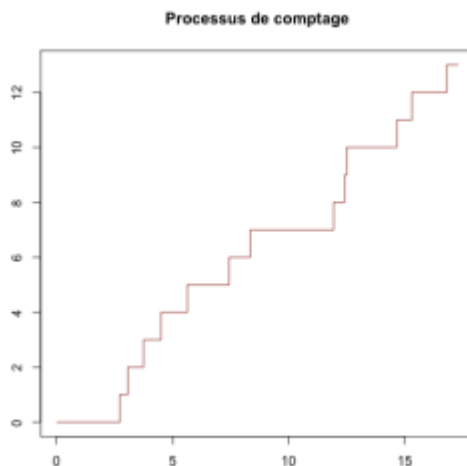
**Exemple.**

- Dans le cas de la compagnie d'assurance,  $N(t)$  représente le nombre de sinistres intervenus sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Chaque saut correspond à l'arrivée d'un nouveau sinistre.
- On peut compter le nombre de visiteurs dans un musée qui sont arrivés avant l'instant  $t$ . Chaque saut correspond à l'arrivée d'un nouveau visiteur.

Un processus de comptage est forcément positif, à valeurs entières et croissant.

**Propriété 2.1.** *Soit  $(N(t))_{t \geq 0}$  un processus de comptage. On a :*

- $N(t) \geq 0$
- $N(t) \in \mathbb{N}$
- Si  $s < t$ , on a  $N(s) \leq N(t)$  (croissance)
- Pour  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  est le nombre de sauts dans l'intervalle  $(s, t]$



On va étudier ici un processus de comptage particulier : le processus de Poisson.

**Définition 2.2. (Première définition)**

*Un processus stochastique  $(N(t))_{t \geq 0}$  est appelé processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , avec  $\lambda > 0$  si*

- $N(0) = 0$
- Le processus a des accroissements indépendants, c'est-à-dire que pour  $t > s$ , le nombre de sauts  $N(t) - N(s)$  intervenus sur  $]s, t]$  est indépendant du nombre de sauts  $N(s)$  intervenus avant l'instant  $s$ .
- Le nombre d'événements sur un intervalle de longueur  $t$  est distribué selon une loi de Poisson  $P(\lambda t)$ , c'est-à-dire pour tout  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Les accroissements de même longueur du processus de Poisson ont tous la même loi, on dit que le processus a des accroissements stationnaires.

Le processus de Poisson est un processus de Markov : les accroissements étant indépendants, la valeur du processus après l'instant  $t$  ne dépend que de la valeur du processus à l'instant  $t$  mais pas de tout ce qui s'est passé avant.

Comme  $N(t) \sim P(\lambda t)$  pour  $t > 0$ , on remarque que le nombre moyen de saut par intervalle de temps est :

$$\mathbb{E}[N(t)]/t = \lambda.$$

**Exemple.** On suppose que les accidents qu'aura un conducteur se produisent selon un processus de Poisson  $(N(t))_{t \geq 0}$  d'intensité 0.01 par mois.

La probabilité que le conducteur n'ait aucun accident au cours de sa première année de conduite est donc :

$$\mathbb{P}(N(12) = 0) = e^{-\lambda * 12} = e^{-0.01 * 12} \simeq 88.7\%.$$

car  $N(12)$  suit la loi de Poisson  $\mathcal{P}(0.01 * 12)$ .

La probabilité que le conducteur ait exactement un accident entre sa seconde année de conduite et sa troisième année de conduite est :

$$\mathbb{P}(N(36) - N(24) = 1) = \mathbb{P}(N(12) - N(0) = 1) = \mathbb{P}(N(12) = 1) = 0.01 \times 12 e^{-0.01 * 12} \simeq 10.6\%$$

Car les accroissements sont stationnaires.

La probabilité qu'il ait au moins deux accidents avant la fin de sa deuxième année de conduite sachant qu'il a eu exactement un accident au cours de sa première année est :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N(24) \geq 2 | N(12) = 1) &= \mathbb{P}(N(24) - N(12) \geq 1 | N(12) = 1) \\ &= \mathbb{P}(N(24) - N(12) \geq 1) \quad \text{car les accroissements sont indépendants} \\ &= \mathbb{P}(N(12) \geq 1) \quad \text{car les accroissements sont stationnaires} \\ &= 1 - \mathbb{P}(N(12) = 0) \simeq 11.3\%. \end{aligned}$$



**Remarque 2.1.** Soit  $(N(t))_{t \geq 0}$  un processus de poisson d'intensité  $\lambda$ . Le nombre de saut sur un petit intervalle de temps ne dépasse généralement pas 1. Plus précisément, soit  $h > 0$ , pour  $h$  suffisamment petit on a  $\lambda h < 1$  et donc

$$\mathbb{P}(N(h) = 0) = e^{-\lambda h} \quad \mathbb{P}(N(h) = 1) = \lambda h e^{-\lambda h} \quad \mathbb{P}(N(h) \geq 2) \leq \frac{(\lambda h)^2}{2}$$

et quand  $h$  tend vers 0, on a :

$$\frac{\mathbb{P}(N(h) = 1)}{h} \rightarrow \lambda \quad \text{et} \quad \frac{\mathbb{P}(N(h) \geq 2)}{h} \rightarrow 0.$$

## 2.1 Distribution des temps d'attente et des inter-arrivées

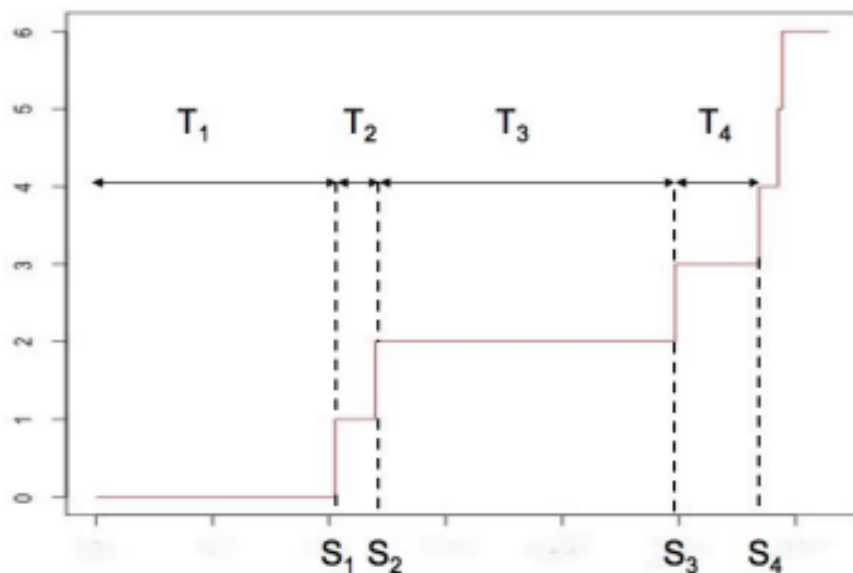
Un processus de Poisson sert à compter des sauts (ou des événements). On peut se demander à quels moments arrivent ces sauts, et quelle distance il y a entre deux sauts. Les sauts arrivent de façon aléatoire, on va donc essayer de trouver la loi d'attente entre deux sauts : la loi des instants inter-arrivées.

Considérons un processus de Poisson  $(N(t))_{t \geq 0}$ . Le premier saut arrive à un instant aléatoire  $T_1$ , puis il faudra attendre un temps  $T_2$  avant que le second saut survienne, puis un temps  $T_3$  ainsi de suite ... On note  $T_n$  le temps écoulé entre le  $(n-1)^{\text{ième}}$  saut et le  $n^{\text{ème}}$  saut.

La suite des instants  $(T_n)_{n \geq 1}$  est appelée suite des instants inter-arrivées.

D'autres quantités intéressantes sont les instants de chaque saut :

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i.$$



Cherchons la loi de  $T_n$  et de  $S_n$ .

**Théorème 2.1.** *La suite des instants inter-arrivées  $(T_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ .*

*Par conséquent, la durée moyenne d'un intervalle de temps entre deux sauts est  $1/\lambda$ .*

*Démonstration.* Étudions le premier instant de saut de  $T_1$ . Si à l'instant  $t$  on a  $N(t) = 0$  ceci signifie que l'on a pas encore sauté et donc  $T_1 > t$ . Par conséquent :

$$\mathbb{P}(T_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Ceci implique que  $T_1$  suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

maintenant étudions la loi de  $T_2$  en conditionnant par rapport à  $T_1$  : soit  $t, s > 0$

$$\mathbb{P}(T_2 > t | T_1 = s) = \mathbb{P}(\text{pas de saut sur l'intervalle } ]s, s+t] | T_1 = s)$$

Le nombre de saut sur l'intervalle  $]s, s+t]$  suit une loi de poisson  $\mathcal{P}(\lambda t)$  et est indépendant de ce qui est passé avant, par conséquent

$$\mathbb{P}(T_2 > t | T_1 = s) = \mathbb{P}(\text{pas de saut sur l'intervalle } ]s, s+t]) = e^{-\lambda t}.$$

Par conséquent  $T_2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$  et les variables  $T_2$  et  $T_1$  sont indépendantes. En itérant ce raisonnement, on prouve le théorème.  $\square$

**Corollaire 2.1.** *L'instant  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$  est la somme de  $n$  variables indépendantes de loi exponentielle, elle suit donc la loi Gamma  $\mathcal{G}(n, \lambda)$ .*

*On remarque que*

$$\{N(t \leq n)\} = \{S_n \geq t\}.$$

**Exemple.** On suppose que les nouveaux arrivants aux Québec arrivent selon un processus de poisson d'intensité  $\lambda = 1$  par jour.

Le temps moyen avant de voir le 10<sup>ème</sup> immigrant est égal à

$$\mathbb{E}[S_{10}] = \frac{10}{\lambda} = 10 \text{ jours.}$$

Si maintenant on regarde la probabilité que le temps d'attente entre le 10<sup>ème</sup> immigrant et le 11<sup>ème</sup> immigrant soit supérieur à 2 jours :

$$\mathbb{P}(T_{11} > 2) = e^{-2\lambda} = e^{-2} \simeq 0.1333.$$

**Définition 2.3. (Deuxième définition)**

*Cette deuxième définition se base sur les temps inter-arrivées.*

*Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes  $(T_n)_{n \geq 1}$ , de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .*

*Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$  pour  $n \geq 1$  et  $S_0 = 0$ .*

*Alors, le processus  $(N(t))_{t \geq 0}$  défini par*

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{S_n \leq t} = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$$

*est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .*

**Nb :** Les deux définitions sont équivalentes

## 2.2 Propriétés du processus de Poisson

### • Somme de deux processus de Poisson indépendants

On considère deux processus de Poisson indépendants et on cherche la loi de la somme de ces deux processus. On sait déjà que la somme de variables de Poisson indépendantes suit une loi de Poisson. Il en est de même pour les processus de Poisson.

#### Proposition 2.1. Somme de deux processus de Poisson

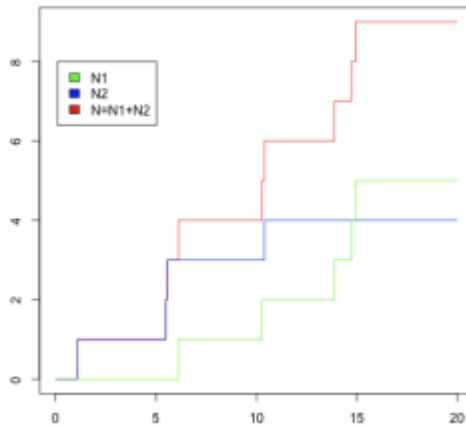
Considérons deux processus de Poisson  $(N^1(t))_{t \geq 0}$  et  $(N^2(t))_{t \geq 0}$  indépendants d'intensité respective  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Alors, le processus  $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

La probabilité que le premier processus saute avant le second est égale à :

$$\mathbb{P}(T_1^1 < T_1^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

où  $T_1^1$  est le premier instant de saut de  $N^1$  et  $T_1^2$  le premier instant de saut de  $N^2$ .

La probabilité que les deux processus sautent en même temps est nulle car leurs temps de saut sont indépendants et suivent des lois gammas (loi continue!).



*Démonstration.* On considère le processus  $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ . On a  $N(0) = 0$ . Par ailleurs, si  $t, s > 0$ , alors  $(N(t+s) - N(s) = (N^1(t+s) - N^1(s)) + N^2(t+s) - N^2(s))$ .

$N^1$  est un processus de Poisson, par conséquent  $N^1(t+s) - N^1(s)$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda_1 t)$  et est indépendant de  $N^1(s)$ . De même  $N^2(t+s) - N^2(s)$  suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda_2 t)$  et est indépendant de  $N^2(s)$ . Les processus  $N^1$  et  $N^2$  étant indépendants, on obtient que  $N(t+s) - N(s)$  suit une loi de Poisson  $\mathcal{P}(\lambda_1 t + \lambda_2 t)$  et est indépendant de  $N(s) = N^1(s) + N^2(s)$ .

Par ailleurs, le premier instant de saut de  $N$  a lieu dès que le premier processus entre  $N^1$  et  $N^2$  saute, par conséquent  $N$  saute pour la première fois en  $T_1 = \min(T_{1,1}, T_{2,1})$ . Les instants  $T_{1,1}$  et  $T_{2,1}$  étant indépendants, on utilise alors les résultats sur le minimum de variables exponentielles indépendant pour conclure.  $\square$

**Exemple.** On considère une compagnie d'assurance qui a une branche assurance automobile et une branche assurance habitation. On peut modéliser les instants d'arrivée des sinistres à l'aide de processus

de Poisson indépendants pour chacune des branches, d'intensité  $\lambda_a$  pour la branche automobile et d'intensité  $\lambda_h$  pour la branche habitation. Au final, pour la compagnie les instants d'arrivée d'un sinistre (quel qu'il soit) sont les temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda_a + \lambda_h$ .

### • Décomposition d'un processus de Poisson

On va maintenant voir que si on décompose un processus de Poisson selon des classes, on obtient alors plusieurs processus de Poisson.

On considère un processus de Poisson  $(N(t))_{t \geq 0}$  de paramètre  $\lambda$  permettant de comptabiliser des événements liés à une population. Les individus de cette population peuvent être soit du type I soit du type II. Par exemple : soit de sexe masculin, soit de sexe féminin si on regarde les visiteurs dans un musée, ou soit des sinistres "habitation" soit des sinistres "automobile" si on considère une compagnie d'assurance. On suppose que la proportion d'individus de type I est égale à  $p$  (la proportion d'individus de type II est par conséquent  $1 - p$ ).

On note  $N^1(t)$  le nombre de sauts de type I intervenus dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  et  $N^2(t)$  le nombre de sauts de type II intervenus dans l'intervalle  $[0, t]$ .

On a par conséquent  $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ .

#### Proposition 2.2. Décomposition d'un processus de Poisson selon des classes

Soit  $(N(t))_{t \geq 0}$  un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  permettant de comptabiliser une population divisée en deux classes. La proportion d'individus dans la première classe est égale à  $p$  et la proportion d'individus dans la seconde classe est  $1 - p$ .

Les processus  $(N^1(t))_{t \geq 0}$  et  $(N^2(t))_{t \geq 0}$  obtenus en séparant les sauts par rapport à chaque classe sont des processus de Poisson indépendants d'intensité respective  $p\lambda$  et  $(1 - p)\lambda$ .

Cette proposition se généralise facilement lorsque qu'on découpe la population en  $k$  sous-groupes qui sont distribués selon les proportions  $p_1, \dots, p_k$  ( $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ ).

*Démonstration.* Montrons que  $N^1$  et  $N^2$  sont des processus de Poisson au sens de la première définition. On a de façon évidente que  $N^1(0) = N^2(0) = 0$ , car  $N(0) = 0$ .

Cherchons la loi jointe de  $(N^1(t), N^2(t))$  : soit  $n, k \in \mathbb{N}$  et  $t \geq 0$  fixés, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N^1(t) = n, N^2(t) = k) &= \mathbb{P}N(t) = n + k \quad \text{dont } n \text{ sauts sont de type I et } K \text{ de type II} \\ &= \binom{n+k}{n} p^n (1-p)^k \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda} \\ &= \frac{(p\lambda)^n}{(n)!} e^{-p\lambda} \times \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} e^{-(1-p)\lambda}. \end{aligned}$$

Par conséquent  $N^1(t)$  et  $N^2(t)$  sont indépendants et suivent respectivement les lois de Poisson  $\mathcal{P}(p\lambda)$  et  $\mathcal{P}((1-p)\lambda)$ .

Étudions les accroissements de  $N^1$  (le raisonnement est identique pour  $N^2$ ). Soient  $t, s \geq 0$ ,  $N^1(t + s) - N^1(s)$  correspond au nombre de sauts du type I du processus  $N$ . Comme  $N$  a des accroissements indépendants, les sauts de type I de  $N$  sur  $]s, t + s]$  sont indépendants de tous les sauts intervenus avant l'instant  $s$ , et donc indépendants de ceux de type I avant l'instant  $s$ . Donc  $N^1$  a des accroissements indépendants. On montre que les accroissements sont stationnaires de la même façon que

précédemment en calculant  $\mathbb{P}(N^1(t+s) - N^1(s) = n, N^2(t+s) - N^2(s) = k)$  pour tout  $s, t \geq 0$  et  $k, n \in \mathbb{N}$ .

□

**Exemple.** On considère une compagnie d'assurance qui s'occupe d'assurance habitation et assurance automobile. On suppose que sa proportion de contrat automobile est égale à  $\frac{3}{4}$ . On suppose que les sinistres arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 10 par mois. Le probabilité de ne pas avoir de sinistre habitation pendant 3 mois peut être calculée de la manière suivante. Le nombre de sinistres habitation est un processus de Poisson de paramètre  $\frac{1}{4} \times 10 = 2.5$  par mois. Par conséquent la probabilité de ne pas avoir de sinistre habitation pendant trois mois est égale à :

$$\mathbb{P}(\text{pas de sinistre habitation pendant 3 mois}) = \mathbb{P}(T_1^k > 3) = e^{-3 \times 2.5} \simeq 5.53.10^{-4}$$

où  $T_1^k$  représente le premier instant où un sinistre habitation intervient.

## 2.3 Loi conditionnelle en fonction du nombre de sauts

Soit  $(N(t))_{t \geq 0}$  un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . On le considère sur l'intervalle  $[0, t]$ . Sur cet intervalle, le nombre de sauts suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ . Connaissant le nombre de sauts, que peut-on dire de la loi des instants de sauts. Par exemple, sachant qu'il n'y a eu qu'un saut sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ , quelle est la loi du premier instant de saut  $T_1$ . Cet instant est forcément inférieur à  $t$ . On a pour  $s \leq t$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1 < s \mid N(t) = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 < s, N(t) = 1)}{\mathbb{P}(N(t) = 1)} = \frac{\mathbb{P}(\text{avoir 1 saut sur } [0, s[ \text{ et aucun saut sur } [s, t])}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{avoir 1 saut sur } [0, s]) \mathbb{P}(\text{avoir aucun saut sur } [s, t])}{\lambda t e^{-\lambda t}} \text{ par indépendance des accroissements} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

Par conséquent, la loi de  $T_1$  sachant que  $N(t) = 1$  est la loi uniforme sur  $[0, t]$ .

**Définition 2.4.** Considérons  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires. On définit la statistique d'ordre  $Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)}$  comme étant les variables réordonnées par ordre croissant :  $Y_{(k)}$  est le  $k$ -ème plus petite valeur parmi  $Y_1, \dots, Y_n$ .

On a  $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ .

**Exemple** Prenons un exemple simple avec  $n = 5$  et des observations :  $Y_1 = 7, Y_2 = 3, Y_3 = 9, Y_4 = 4, Y_5 = 5$ .

En triant ces valeurs dans l'ordre croissant, on obtient 3, 4, 5, 7, 9.

Les statistiques d'ordre associées sont donc :

$$Y_{(1)} = 3 \text{ (la plus petite valeur),}$$

$$Y_{(2)} = 4,$$

$$Y_{(3)} = 5,$$

$$Y_{(4)} = 7,$$

$$Y_{(5)} = 9 \text{ (la plus grande valeur).}$$

**Théorème 2.2.** *Sachant que  $N(t) = k$ , les instants de saut  $S_1, S_2, \dots, S_k$  ont la même loi que la statistique d'ordre d'un  $k$ -échantillon de loi uniforme sur  $[0, t]$  :  $(U_{(1)}, \dots, U_{(k)})$ .*

Ce résultat est très utile en simulation. En effet, quand on veut simuler un processus de Poisson jusqu'à l'instant  $t$ , le nombre de sauts sur cet intervalle de temps suit une loi de Poisson  $\mathbb{P}(\lambda t)$ . On simule par conséquent  $N \sim \mathcal{P}(\lambda t)$  puis on simule  $N$  variables uniformes sur  $[0, t]$  que l'on ordonne par ordre croissant pour avoir les instants de sauts de notre processus.

---

# Introduction aux Chaînes de Markov à Temps Continu

---

On considère un processus stochastique  $\{X_t, t \in T\}$  défini sur un même espace de probabilité.

## Quelques Classifications :

- Un processus stochastique dont l'ensemble des états  $E$  est fini ou dénombrable est appelé une chaîne.
- Un processus est à temps continu lorsque l'ensemble  $T$  est non dénombrable. Le plus souvent on aura alors  $T = \mathbb{R}_+$  et le processus sera noté  $\{X_t, t \geq 0\}$  ou  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ .

## 3.1 Notion de Chaînes de Markov à Temps Continu (CMTC)

### 3.1.1 Définition et propriétés

**Définition 3.1.** Le processus aléatoire  $(X_t)_{t \geq 0}$  d'espace d'états  $E = \{e_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ , fini ou dénombrable, est une chaîne de Markov à temps continu, si sont vérifiées les deux propriétés :

- (1) propriété de Markov :  $\forall (e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}) \in E^{n+1} \quad \forall (t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$  tels que  $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = e_{n+1} | X_{t_n} = e_n, \dots, X_{t_1} = e_1) = \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = e_{n+1} | X_{t_n} = e_n)$$

- (2) homogénéité :  $\forall t_1, t_2, t \in \mathbb{R}_+, \forall e_i, e_j \in E :$

$$\mathbb{P}(X_{t_1+t} = e_j | X_{t_1} = e_i) = \mathbb{P}(X_{t_2+t} = e_j | X_{t_2} = e_i) =_{\text{noté}} p_{i,j}(t).$$

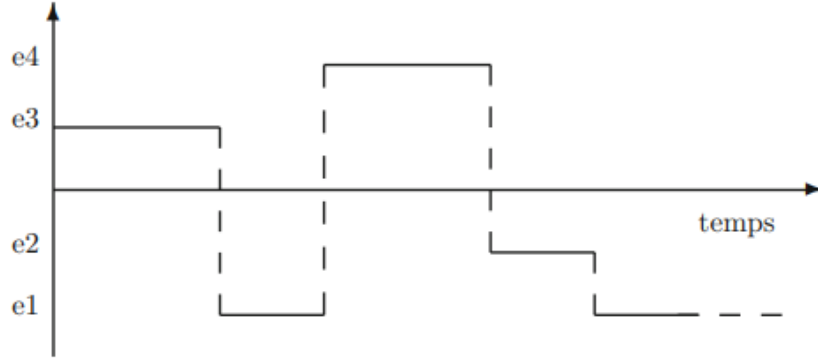
Les chaînes de Markov à temps continu étudiées dans ce projet sont supposées être régulières : leur nombre de transitions en temps fini est presque sûrement fini, ce qui est le cas si la chaîne est récurrente ou finie.

**Théorème 3.1.** La matrice de transition  $\mathbf{P}(t) = (p_{i,j}(t))_{i,j \in \mathbb{I}}$  vérifie les deux propriétés :

1.  $\forall t, \forall i, j \in \mathbb{I}, p_{i,j}(t) \geq 0 ;$
2.  $\forall t, \quad \forall i \in \mathbb{I}, \quad \sum_j p_{i,j}(t) = 1.$

**Théorème 3.2.** (Équations de Chapman-Kolmogorov)

Exemple dévolution d'une chaine de Markov à quatre états :



$$\forall s, t \text{ et } \forall i, j \in \mathbb{I}, \quad p_{i,j}(s+t) = \sum_k p_{i,k}(s)p_{k,j}(t),$$

Soit, sous forme matricielle :  $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$ .

L'ensemble des matrices de transition  $(\mathbf{P}(t))_{t \geq 0}$  muni du produit matriciel constitue un semi-groupe, dans lequel l'élément neutre  $\mathbf{P}(0)$  est la matrice identité. La propriété  $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$  est analogue à la propriété fondamentale des matrices de transition des chaînes à temps discret :

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad \mathbf{P}(m+n) = \mathbf{P}(m)\mathbf{P}(n)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} p_{i,j}(s+t) &= P(X_{s+t} = e_j \mid X_0 = e_i) = \sum_k P(X_{s+t} = e_j, X_s = e_k \mid X_0 = e_i) \\ &= \sum_k P(X_{s+t} = e_j \mid X_s = e_k, X_0 = e_i) P(X_s = e_k \mid X_0 = e_i) \\ &= \sum_k P(X_{s+t} = e_j \mid X_s = e_k) P(X_s = e_k \mid X_0 = e_i) \\ &= \sum_k P(X_t = e_j \mid X_0 = e_k) P(X_s = e_k \mid X_0 = e_i) \\ &= \sum_k p_{i,k}(s)p_{k,j}(t). \end{aligned}$$

□

On utilisera désormais l'abréviation **CMTC** pour désigner une chaîne de Markov à temps continu.

• **Hypothèses de continuité et de dérivabilité des  $p_{i,j}(t)$**

Pour construire les concepts fondamentaux de générateur infinitésimal et d'équations de Kolmogorov associés à toute CMTC, on supposera vérifiées les hypothèses suivantes de continuité et de dérivabilité des  $p_{i,j}(t)$  :

$$\mathbf{H}_1 : \forall i \text{ et } j, i \neq j, \lim_{t \rightarrow 0^+} p_{i,j}(t) = 0 \text{ et } \forall i, \lim_{t \rightarrow 0^+} p_{i,i}(t) = 1.$$



**H<sub>2</sub>** :  $\forall i$  et  $j, i \neq j$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,j}(t) - p_{i,j}(0)}{t}$  existe et est égale à  $p'_{i,j}(0) = \text{noté } a_{i,j}$ , dénommé **taux de transition instantané** de  $e_i$  à  $e_j$ ;  $a_{i,j}$  est strictement positif si la transition de  $e_i$  à  $e_j$  est possible, car la probabilité de transition de  $e_i$  à  $e_j$  croît en fonction du temps.

**H<sub>3</sub>** :  $\forall i$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{p_{i,i}(t) - p_{i,i}(0)}{t}$  existe et est égal à  $p'_{i,i}(0) = \text{noté } a_{i,i}$  dénommé **taux de permanence**  $a_{i,i}$  en l'état  $e_i$  est négatif, puisque contrairement à la situation précédente, la probabilité de séjourner dans un état quelconque décroît avec le temps.

**Définition 3.2.** Sous les hypothèses précédentes, la matrice  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  définie par

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathbf{P}(t) - \mathbf{1}_d}{t} = \frac{d}{dt}(\mathbf{P}(t))_{(t=0^+)} \text{ existe}$$

elle est nommée *générateur infinitésimal* de la CMTC  $(X_t)_{t \geq 0}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & & & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Théorème 3.3.** Pour tout état  $i$  :

$$a_{i,i} = - \sum_{j \neq i} a_{i,j}$$

*Démonstration.*  $\forall i, \sum_{i=1}^n p_{i,j}(t) = 1$ ; par dérivation par rapport à  $t$ ,  $\sum_{i=1}^n p'_{i,j}(t) = 0$  et donc  $\sum_{i=1}^n p'_{i,j}(0) = \sum_j a_{i,j} = 0$ . □

**Théorème 3.4.** Tout processus à accroissements indépendants vérifie la propriété de Markov.

*Démonstration.* Soit la CMTC  $(X_t)_t$  tel que  $X_0 = 0$ ; désignons  $X_{t_j}$  par  $X_j$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n < x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) &= \mathbb{P}(X_n - X_{n-1} < x_n - x_{n-1} \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_n - X_{n-1} < x_n - x_{n-1} \mid X_1 - X_0 = x_1, \dots, X_{n-1} - X_{n-2} = x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &= \mathbb{P}(X_n - X_{n-1} < x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

car les  $(X_j - X_{j-1})$  sont mutuellement indépendants.

$(X_n - X_{n-1})$  étant indépendant du vecteur  $(X_1 - X_0, X_2 - X_1, \dots, X_{n-1} - X_{n-2})$ , est donc indépendant de la somme de ses composantes.

En conclusion, l'expression précédente est égale à :

$$\mathbb{P}(X_n - X_{n-1} < x_n - x_{n-1} \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n < x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}).$$

□

**Exemple 3.1.** Un processus de Poisson  $(N_t)_{t \geq 0}$  est une CMTC, puisqu'il vérifie la propriété de stationnarité et que la propriété des accroissements indépendants implique la propriété de Markov. Déterminons son générateur infinitésimal :

$\forall t, h > 0, \mathbb{P}(N_{t+h} = i + 1 \mid N_t = i) = \lambda h e^{-h\lambda}$  et  $\mathbb{P}(N_{t+h} = i \mid N_t = i) = 1 - \lambda e^{-h\lambda}$ , d'où :

$$a_{i,i+1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N_{t+h} = i + 1 \mid N_t = i) - 0}{h} = \lambda;$$

$$a_{i,i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}(N_{t+h} = i \mid N_t = i) - 1}{h} = -\lambda.$$

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ \vdots & \ddots & 0 & -\lambda & \lambda & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

### Théorème 3.5. (Équations de Kolmogorov)

1. Pour tout  $t \geq 0$ , la matrice de transition  $\mathbf{P}(t)$  d'une CMTC vérifie les équations différentielles ci-dessous :

(a) équations inverses ou du passé :

$$\forall i, j \quad p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{I}} a_{i,k} p_{k,j}(t)$$

$$\text{soit : } P'(t) = A \cdot \mathbf{P}(t)$$

(b) équations directes ou du futur :

$$\forall i, j \quad p'_{i,j}(t) = \sum_{k \in \mathbb{I}} p_{i,k}(t) a_{k,j}$$

$$\text{soit : } P'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot A$$

2. Lorsque le nombre d'états est fini,  $\mathbf{P}(t)$  est définie par :

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{(tA)^n}{n!} = e^{tA}$$

(La forme matricielle ci-dessus a surtout un intérêt théorique, mais sauf cas particuliers, elle n'est pas analytiquement exploitable.)

*Démonstration.* 1.

(a) On dérive l'équation de Chapman-Kolmogorov par rapport à  $s$  :

$$\frac{d}{ds} p_{i,j}(s+t) = \sum_k \frac{d}{ds} p_{i,k}(s) p_{k,j}(t);$$

pour  $s$  tendant vers 0 :  $p'_{i,j}(t) = \sum_k p'_{i,k}(0) p_{k,j}(t) = \sum_k a_{i,k} p_{k,j}(t).$

On prouve (1.b) de façon analogue.

Schéma formel de démonstration de (2) :

$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \left( \mathbf{P} \left( \frac{t}{n} \right) \right)^n \underset{(n \text{ grand par rapport à } t)}{\simeq} \left( \mathbf{P}(0) + \frac{t}{n} \mathbf{P}'(0) \right)^n = \left( I_d + \frac{t}{n} A \right)^n$$

qui converge vers  $e^{At}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . □

**Théorème 3.6. (Loi d'évolution d'une CMTC)**

1. Pour tout temps  $t$  le vecteur d'évolution  $\pi(t)$  vérifie l'équation :

$$\pi(t) = \pi(0) \mathbf{P}(t)$$

où  $\forall i, \pi_i(t) = \mathbb{P}(X_t = e_i)$  et  $\pi(t) = (\pi_1(t), \dots, \pi_n(t))$ .

2.  $\pi(t)$  est solution de l'équation d'évolution :

$$\pi'(t) = \pi(t) A$$

*Démonstration.*

1. Pour tout  $j, \pi_j(t) = \sum_i p_{i,j}(t) \pi_i(0)$ .

2.  $\pi'(t) = \pi(0) P'(t) =$  (d'après équ de Kolmogorov)  $\pi(0) \mathbf{P}(t) \cdot A = \pi(t) A$ . □

**Remarque.** Sauf dans le cas d'une CMTC ayant un petit nombre d'états ou bien lorsque la matrice  $A$  est creuse, ce qui est le cas des processus de naissance et de mort, la résolution analytique de l'équation d'évolution est généralement lourde de calculs. On utilise souvent une méthode analytique ou numérique fondée sur la transformation de Laplace.

**Théorème 3.7. (Caractère exponentiel des temps de séjour)**

Le temps de séjour  $U_i$  dans un état quelconque  $e_i$  est une v.a. exponentielle de paramètre  $-a_{i,i}$ .

*Démonstration.* Pour les temps  $t$  et  $h > 0, h$  étant petit par rapport à  $t$  :

$$\mathbb{P}(U_i > t + h) = \mathbb{P}(U_i > t + h \mid U_i > t) \mathbb{P}(U_i > t)$$

égal à

$$\mathbb{P}(U_i > h) \mathbb{P}(U_i > t),$$

comme conséquence de l'axiome d'homogénéité.

Posons  $\Phi(t) = \mathbb{P}(U_i > t)$ ; l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\Phi(t + h) = \Phi(t) \Phi(h).$$

Or  $\Phi(h) = p_{i,i}(h) + o(h) = 1 + a_{i,i}h + o(h)$ , d'où l'on déduit l'équation différentielle  $\Phi'(t) = a_{i,i}\Phi(t)$ , qui a pour solution  $\Phi(t) = e^{a_{i,i}t}$ , sachant que  $\Phi(0) = 1$ .

On conclut que  $\mathbb{P}(U_i \leq t) = 1 - e^{a_{i,i}t}$  et donc que  $U_i$  est de loi exponentielle. □

**Exemple.** Considérons un système dont la durée de vie  $T$  entre deux pannes consécutives est de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  et dont le temps de réparation  $R$  est de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\mu)$ . Le système comporte donc deux états : l'état de marche  $e_1$  et l'état de réparation  $e_2$ . On décrit l'évolution temporelle du système grâce à une CMTC à deux états  $(X_t)_t$ . Déterminons la matrice de transition et le générateur du processus.

Pour  $t$  petit,  $p_{2,2}(t) = \mathbb{P}(X_t = e_2 \mid X_0 = e_2) \approx \mathbb{P}(R > t) = e^{-\mu t}$ , d'où l'on déduit :

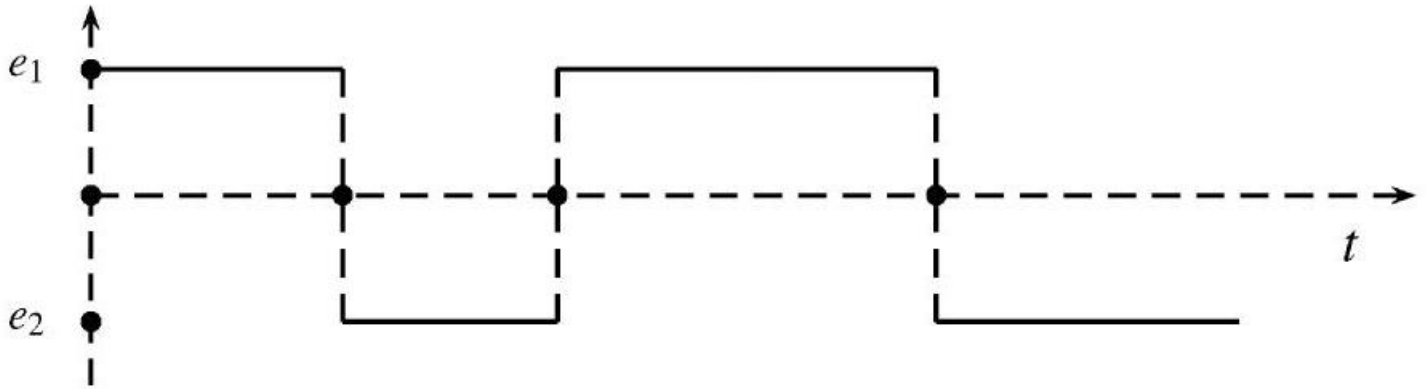
$$a_{2,2} = \left. \frac{dp_{2,2}(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\mu;$$

$$p_{1,1}(t) = \mathbb{P}(X_t = e_1 \mid X_0 = e_1) = \mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}, \text{ d'où : } a_{1,1} = -\lambda$$

On en déduit le générateur :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

Graphes d'évolution de la CMTC à deux états :



On calcule facilement  $\mathbf{P}(t)$  en diagonalisant  $A$ .

$$\mathbf{P}(t) = e^{At} = \frac{1}{\mu + \lambda} \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} + \frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\mu + \lambda} \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\mu & \mu \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit :

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t)) = \pi(0) \cdot \mathbf{P}(t).$$

Le système démarrant en état de marche :  $\pi(0) = (1, 0)$ .

$$(\pi_1(t), \pi_2(t)) = \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda+\mu)t}, \frac{\lambda}{\mu + \lambda} - \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda+\mu)t} \right)$$

On aurait pu déterminer  $\pi(t)$  en résolvant l'équation d'évolution :

$$\pi'(t) = \pi(t)A$$

Lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , les probabilités  $\pi_1(t)$  et  $\pi_2(t)$  convergent respectivement vers des probabilités constantes  $\frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{5}{6}$  et  $\frac{\lambda}{\mu + \lambda} = \frac{1}{6}$ . Pratiquement, sur un temps long, le système est en état de marche pendant 83,3% du temps.

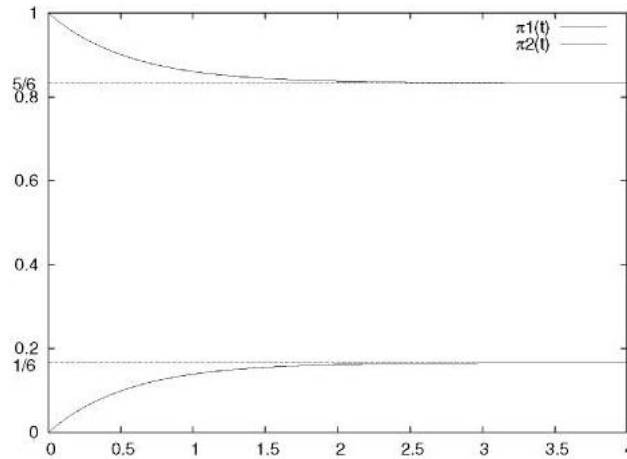


FIGURE 3.1 – Graphes d'évolution des probabilités  $\pi_1(t)$  et  $\pi_2(t)$  pour  $\lambda = 0,3$  et  $\mu = 1,5$ .

**Théorème 3.8.** À toute CMTC  $(X_t)_t$  on associe une chaîne discrète, dite **chaîne immergée ou incluse**  $(Y_n)_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, Y_n = X_{T_n}$$

où  $T_n$  est l'instant de la  $n$ ième transition, défini par  $\inf \{t > T_{n-1} \mid X_t \neq X_{T_{n-1}}\}$ . La matrice de transition  $Q = (q_{i,j})_{i,j}$  de la chaîne incluse est définie par :

$$\forall i \text{ et } j \text{ distincts} : q_{i,j} = -\frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \text{ si } j \neq i;$$

$$\forall i : q_{i,i} = 0$$

**Exemple 3.2.** La chaîne incluse associée à la CMTC de l'exemple 3.1 est définie par la matrice de transition  $Q$  :

$$q_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{-a_{1,1}} = \frac{\lambda}{-(-\lambda)} = 1, \quad q_{2,1} = \frac{\mu}{-(-\mu)} = 1$$

### • Simulation d'une CMTC

Si  $\sup_i |a_{i,i}|$  fini, condition de régularité de la chaîne, on simule la chaîne  $(X_t)_t$  en appliquant successivement les deux règles ci-dessous :

- (1) Lorsque la CMTC est dans un état  $e_i$ , elle y reste un temps aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $-a_{i,i}$ .
- (2) Au terme de ce temps, elle quitte cet état vers l'un des états  $e_j$  avec la probabilité  $q_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\sum_{k \neq i} a_{i,k}}$ .

### • Classes

Les notions de classes sont les mêmes à temps continu et à temps discret. Plus précisément,  $(X_t)_{t \geq 0}$  a la même structure de classe que sa chaîne incluse  $(Y_n)_{n \geq 0}$ . On dit que  $e_i$  mène à  $e_j$ , et on note  $e_i \rightarrow e_j$  si :

$$\mathbb{P}_i(X_t = e_j, \text{ pour un certain temps } t \geq 0) > 0.$$

On dit que  $e_i$  et  $e_j$  communiquent, et on note  $e_i \leftrightarrow e_j$  si  $e_i \rightarrow e_j$  et  $e_j \rightarrow e_i$ .

**Théorème 3.9.** *Pour deux états distincts  $e_i$  et  $e_j$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1.  $e_i \rightarrow e_j$ ,
2.  $e_i \rightarrow e_j$  pour la chaîne incluse,
3. il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $i_0, \dots, i_n$  dans  $I$  tels que  $a_{i_0 i_1} \dots a_{i_{n-1} i_n} > 0$ ,
4. pour tout  $t > 0$ ,  $p_{ij}(t) > 0$ ,
5. il existe  $t > 0$ ,  $p_{ij}(t) > 0$ .

*Démonstration.* Les implications 4.  $\Rightarrow$  5.  $\Rightarrow$  1.  $\Rightarrow$  2. découlent des définitions. Si 2. est vraie, il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $i_0, \dots, i_n$  dans  $I$  tels que  $\pi_{i_0 i_1} \dots \pi_{i_{n-1} i_n} > 0$ , ce qui implique 3. Si  $a_{ij} > 0$  alors

$$p_{ij}(t) \geq \mathbb{P}_i(T_1 \leq t, Y_1 = e_j, T_2 < t) = (1 - e^{-a_{ii}t})\pi_{ij}e^{-a_{jj}t} > 0,$$

pour tout  $t > 0$ . Donc si 3. est vraie, alors

$$p_{ij}(t) \geq p_{ii_1}(t/n) \dots p_{i_{n-1}j}(t/n) > 0$$

pour tout  $t > 0$  et 4. est établie. □

**Remarque.** Le point 4. montre que la situation est plus simple en temps continu qu'en temps discret. En temps continu, si  $e_i$  mène à  $e_j$  alors avec une probabilité strictement positive,  $X_t$  peut valoir  $e_j$  (sachant que  $X_0 = e_i$ ). En temps, si  $e_i$  mène à  $e_j$ , il faut parfois un certain temps avant que la chaîne incluse ne l'atteigne et des phénomènes de périodicité apparaissent. Par exemple, pour la marche aléatoire simple issue de 0, le temps d'attente de 4 sera supérieur ou égal à 4 et pair.

Les propriétés d'irréductibilité, de récurrence positive ou nulle et de transience d'une CMTC sont les mêmes que celles d'une chaîne discrète : le théorème ci-dessous est utile pour les caractériser.

**Théorème 3.10.** *Une CMTC  $(X_t)_t$  a les mêmes propriétés d'irréductibilité, de récurrence ou de transience que sa chaîne incluse  $(Y_n)_n$ .*

**Remarque.** Une CMTC ne peut pas être périodique puisque le temps passé dans un état quelconque est décrit par une v.a. continue.

### 3.1.2 Étude du régime stationnaire

**Définition 3.3.** *Une distribution de probabilités  $\pi = (\pi_i)_i$  portée par les états  $(e_i)_i$  est **stationnaire** si pour tout  $j$  et pour tout  $t \geq 0$  :*

$$\sum_i \pi_i \cdot p_{i,j}(t) = \pi_j,$$

qui s'écrit aussi :

$$\pi \cdot P(t) = \pi.$$

**Théorème 3.11. (Équation d'équilibre d'une CMTC)**

*Soit une CMTC de générateur  $A$ , si  $\pi$  est une distribution stationnaire, elle satisfait l'équation d'équilibre :*

$$\pi \cdot A = 0$$

équivalente aux équations

$$\forall j \sum_{i \neq j} \pi_i \cdot a_{i,j} = -\pi_j \cdot a_{j,j},$$

qui expriment l'égalité, en régime stationnaire, du flux moyen entrant dans l'état  $e_j$  et du flux moyen sortant vers l'ensemble des autres états. On la détermine en résolvant le système linéaire formé de l'équation d'équilibre et de l'équation de normalisation  $\sum_i \pi_i = 1$ .

*Démonstration.* Par dérivation de l'équation  $\pi \cdot \mathbf{P}(t) = \pi$  au temps  $t = 0$ . □

### Théorème 3.12.

1. Une CMTC  $(X_t)_t$  irréductible et récurrente positive a une unique distribution stationnaire  $(\pi_j)_j$  indépendante de la distribution initiale, et égale à  $\left( \pi_j = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_{i,j}(t) \right)_j$ .
2. Une CMTC transitoire ou récurrente nulle ne possède aucune distribution stationnaire.

**Exercice 3.1.** Un système est constitué de deux composants indépendants de durées de vie aléatoires de lois exponentielles  $\mathcal{E}(\lambda_i)$   $i = 1, 2$ . Lorsque le composant  $i$  tombe en panne, il est remplacé par un composant de caractéristiques identiques ; la durée du remplacement du composant  $i$  défaillant de loi  $\mathcal{E}(\mu_i)$  est indépendante de la durée de vie du composant.

Soit  $X_t = (X_t^{(1)}, X_t^{(2)})$  le vecteur aléatoire décrivant l'état au temps  $t$  du système parmi quatre états possibles :  $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ , où 0 désigne l'état de panne et 1 l'état de marche.

1. Déterminer le générateur du processus de Markov  $(X_t)_t$ .  
[Indication : calculer  $\forall t$  et  $h$  petit devant  $t$ ,  $\mathbb{P}(X_{t+h} = j \mid X_t = i)$ .]
2. Déterminer sa distribution stationnaire.

## 3.2 Processus de naissance et de mort

Ce sont des CMTC à valeurs dans l'espace d'états  $\mathbb{N}$  et dont les seules transitions possibles à partir de l'état  $n$  se font vers les états contigus  $(n - 1)$  et  $(n + 1)$ . Les processus de naissance et de mort sont utilisés pour modéliser les systèmes d'attente et l'évolution de populations. Le processus de Poisson est un processus de naissance et de mort pour lequel la seule transition possible à partir de l'état  $n$  se fait vers l'état  $(n + 1)$ .

### 3.2.1 Définition et propriétés

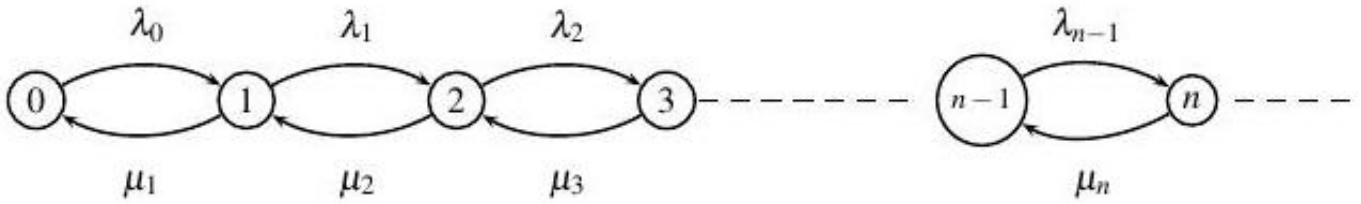
**Définition 3.4.** Un processus de naissance et de mort est une CMTC à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , dont le générateur infinitésimal  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  vérifie :

1.  $a_{i,j} = 0$  si  $|i - j| \geq 2$  ;
2.  $a_{i,i+1} = \text{noté } \lambda_i$  est le taux de croissance ou de naissance de l'état  $e_i$ ;  $\lambda_0$  étant égal à  $a_{0,1}$  ;
3.  $a_{i,i-1} = \text{noté } \mu_i$  est le taux de décroissance ou de mort de l'état  $e_i$ , pour tout  $i$  non nul.

**Définition 3.5.** Le générateur  $A$  d'un processus de naissance et de mort  $(X_t)_t$  est défini par la matrice tridiagonale :

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & . & . \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & . \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & . \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \lambda_3 & . \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Diagramme de transition :



Le théorème suivant explicite l'équation d'évolution  $\pi'(t) = \pi(t)A$  du processus de naissance et de mort.

**Théorème 3.13.** Les probabilités  $(\pi_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \pi'_0(t) &= -\lambda_0 \pi_0(t) + \mu_1 \pi_1(t) \\ \forall n \geq 1, \pi'_n(t) &= \lambda_{n-1} \pi_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) \pi_n(t) + \mu_{n+1} \pi_{n+1}(t) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Application directe du théorème 3.5

□

**Théorème 3.14. (Propriétés du temps d'extinction)**

Soit  $T_k$  le temps qui s'écoule jusqu'à l'extinction, lorsque la taille de la population initiale est  $k$ .

1. La fonction de répartition  $F_{T_k}$  de  $T_k$  est égale à  $P_{k,0}$ .

2. Soit  $d_j = \frac{\mu_1 \cdots \mu_j}{\lambda_1 \cdots \lambda_j}$  ; la probabilité d'extinction est égale à  $\frac{\sum_{j=k}^{+\infty} d_j}{1 + \sum_{j=1}^{+\infty} d_j}$  si  $\sum_{j=1}^{+\infty} d_j$  converge et à 1 , sinon.

3. Soit  $\rho_j = \frac{1}{d_j \lambda_j}$  ; le temps moyen de vie jusqu'à l'extinction à partir de l'état  $k$  est égal à :

$$E(T_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \sum_{j=i+1}^{+\infty} \rho_j$$

si  $\sum_{j=1}^{+\infty} \rho_j$  converge dans le cas contraire, le temps moyen de vie est infini.



### 3.2.2 Étude du régime stationnaire des processus de naissance et de mort

#### • Équations de Kolmogorov vers l'arrière et vers l'avant pour un processus de naissance et de mort

Rappelons que pour le cas général,  $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{P}(t)$ , c'est à dire :

$$P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i} q_{i,k} P_{k,j}(t) - \nu_i P_{i,j}(t) \quad \text{et} \quad P'_{i,j}(t) = \sum_{k \neq j} P_{i,k}(t) q_{k,j} - P_{i,j}(t) \nu_j.$$

Dans ce cas-ci :

**Équation arrière :**  $P'_{i,j}(t) = \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t) - (\lambda_i + \mu_i) P_{i,j}(t).$

**Équation avant :**  $P'_{i,j}(t) = P_{i,j-1}(t) \lambda_{j-1} + P_{i,j+1}(t) \mu_{j+1} - P_{i,j}(t) (\lambda_j + \mu_j).$

#### Théorème 3.15. (Équations d'équilibre)

La distribution stationnaire  $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n, \dots)$  est solution de l'équation d'équilibre  $\pi \cdot A = 0$  équivalente au système linéaire :

$$\begin{aligned} -\lambda_0 \pi_0 + \mu_1 \pi_1 &= 0 \\ \forall n \geq 1, \quad \lambda_{n-1} \pi_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n) \pi_n + \mu_{n+1} \pi_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

La distribution stationnaire  $(\pi_n)_n$  existe et est unique si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

est convergente. Dans ce cas, elle est définie par :

$$\pi_0 = \left( 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1 : \pi_n = \pi_0 \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

*Démonstration.* On calcule d'abord  $\pi_0$  et l'on en déduit par récurrence les valeurs des  $\pi_i, i \geq 1$ . □

**Exercice 3.2.** Une entreprise de location de voitures possède  $N$  voitures ; chacune d'elles peut tomber en panne avec un taux de panne égal à  $\mu$  ; la durée de sa réparation est de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$ . Soit  $X_t$  le nombre de voitures disponibles au temps  $t$ .

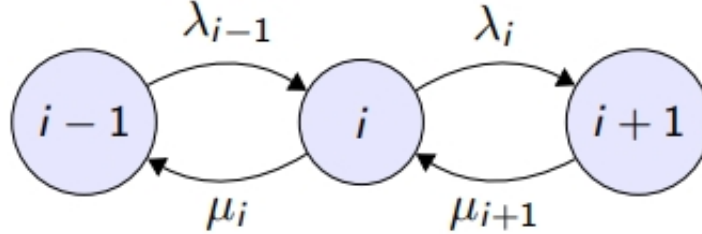
1. Démontrer que  $(X_t)_t$  est un processus de naissance et de mort.
2. Déterminer la distribution stationnaire  $\pi$ .

### 3.2.3 Temps espéré pour atteindre un état $j$

Dans un processus de naissance et de mort, soit  $\tau_i$  le temps requis pour atteindre l'état  $i + 1$  pour la première fois si on part de l'état  $i$ . On veut calculer  $\mathbb{E}[\tau_i]$  pour  $i = 0, 1, 2, \dots$

On sait que  $\tau_0 \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$ , et donc  $\mathbb{E}[\tau_0] = \frac{1}{\lambda_0}$ .

Partant de l'état  $i$ , soit  $I_i = \mathbb{I}[\text{le prochain état est } i + 1]$ . On a  $\mathbb{P}[I_i = 0] = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$ ,



$$\mathbb{E}[\tau_i \mid I_i = 1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i},$$

$$\mathbb{E}[\tau_i \mid I_i = 0] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}[\tau_{i-1}] + \mathbb{E}[\tau_i], \quad \text{et donc}$$

$$\mathbb{E}[\tau_i] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} (\mathbb{E}[\tau_{i-1}] + \mathbb{E}[\tau_i]) \Rightarrow \lambda_i \mathbb{E}[\tau_i] = 1 + \mu_i \mathbb{E}[\tau_{i-1}], \quad i \geq 1.$$

On peut ainsi calculer facilement les  $\mathbb{E}[\tau_i]$  par récurrence.

Et puis pour  $j > i$ , le temps espéré pour atteindre  $j$  en partant de  $i$  est  $\mathbb{E}[\tau_i] + \dots + \mathbb{E}[\tau_{j-1}]$ .

## 3.3 Processus de naissance pur

### 3.3.1 Définition

**Définition 3.6.** Un processus de naissance pur est un type de processus de naissance et de mort avec  $\mu_i = 0$  pour tout  $i$ .

Si le taux de naissance est le même indépendamment du nombre d'individus dans le système, c'est-à-dire que  $\lambda_i = \lambda$  pour tout  $i$ , on parle de **Processus de Poisson stationnaire**

#### • Processus de Yule :

C'est un processus de naissance pur pour lequel  $\lambda_i = i\lambda$  pour tout  $i \geq 0$ .

Le taux de naissance est proportionnel au nombre d'individus dans le système (i.e., linéaire).

*Interprétation :* Chaque individu se reproduit au taux  $\lambda$ , indépendamment des autres. Si on part de  $X(0) = e_i > 0$ , cela donne lieu à une croissance exponentielle !

Pour ces processus, les équations d'équilibre n'ont pas de solution :

on a  $\mathbb{P}_i = 0$  pour tout  $e_i$ , sauf si l'un des  $\lambda_j$  vaut 0, auquel cas  $\mathbb{P}_j = 1$ .

### 3.3.2 Calcul des probabilités $\mathbb{P}_{i,j}(t)$ pour un processus de naissance pur

Soit  $A_k$  le temps passé dans l'état  $e_k$ , pour  $k \geq 0$ . Partant de  $e_i$ , pour  $j > i$ , on a

$$X(t) < e_j \Leftrightarrow T_{i,j} \stackrel{\text{def}}{=} A_i + \dots + A_{j-1} > t \quad (\text{pas rendu à } e_j \text{ au temps } t),$$

et donc

$$\mathbb{P}[X(t) < e_j \mid X(0) = e_i] = \mathbb{P}[T_{i,j} > t].$$

Ce  $T_{i,j}$  est une somme d'exponentielles indépendantes de paramètres  $\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$ .

C'est la loi hypo-exponentielle de paramètres  $(\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1})$ .

Pour cette loi, en supposant que  $\lambda_i, \dots, \lambda_{j-1}$  sont tous distincts, on a

$$\mathbb{P}[T_{i,j} > t] = \sum_{k=i}^{j-1} e^{-\lambda_k t} \prod_{\substack{r=i \\ r \neq k}}^{j-1} \frac{\lambda_r}{\lambda_r - \lambda_k}.$$

On peut ensuite calculer :

$$\mathbb{P}_{i,j}(t) = \mathbb{P}[X(t) < e_{j+1} \mid X(0) = e_i] - \mathbb{P}[X(t) < e_j \mid X(0) = e_i] = \mathbb{P}[T_{i,j+1} > t] - \mathbb{P}[T_{i,j} > t],$$

pour  $i < j$  et

$$\mathbb{P}_{i,i}(t) = \mathbb{P}[A_i > t] = e^{-\lambda_i t}.$$

---

# Applications

---

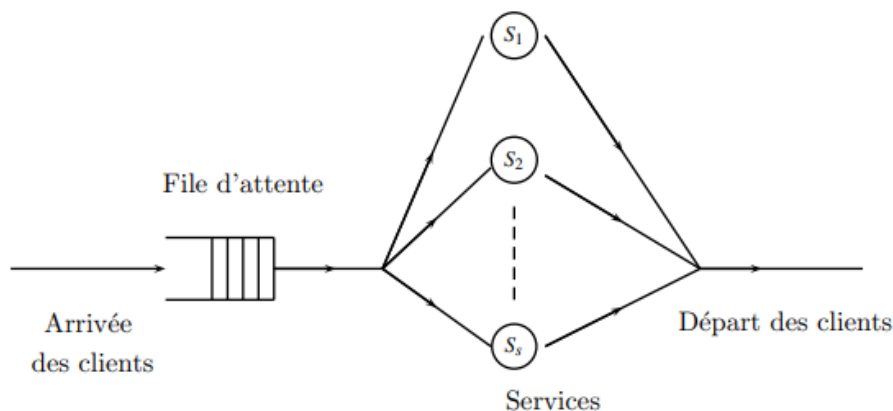
## 4.1 Files d'attente

### 4.1.1 Définition et exemples

**Définition 4.1.** *Un système de service est constitué d'un espace d'attente où les clients arrivent l'un après l'autre, en formant une file, et d'un espace de service. Il est décrit par les cinq caractéristiques suivantes :*

- (1) **la nature du processus stochastique décrivant le flux des entrées**, indépendantes entre elles, déterminé par la loi des intervalles de temps entre deux arrivées. Si la loi est exponentielle  $E(\lambda)$ , le flux est décrit par le processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ , qui est le taux moyen d'entrée des clients dans l'unique file d'attente.
- (2) **Le nombre  $s$  de services mis en parallèle.**
- (3) **La loi de probabilité de la durée de service  $S$** , de moyenne  $\frac{1}{\mu}$  les durées de service sont toujours des v.a. indépendantes de même loi, qui est souvent mais non nécessairement exponentielle.
- (4) **La capacité  $K$  du système**, nombre maximal de clients présents dans le système.
- (5) **La discipline d'attente ou politique de service.**  
*La règle la plus fréquemment utilisée s'exprime sous la forme « le premier arrivé est le premier servi », connue sous l'abréviation anglo-saxonne FIFO (first in first out). Cependant, en théorie des réseaux, il existe d'autres politiques, cherchant par exemple à maximiser différentes formes d'unités ou à garantir des propriétés temporelles.*

Représentation d'un système d'attente :



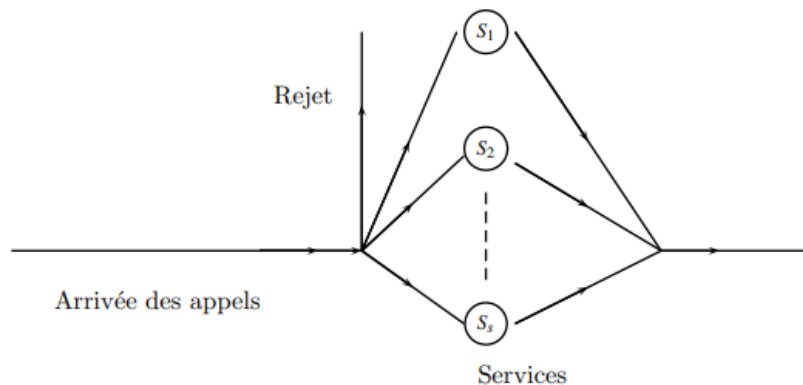
La notation dite de Kendall permet de symboliser une file d'attente par la suite de caractères :

$A/S/s/K$ .

La lettre A caractérise la loi du processus d'entrée et S la loi de service ; par exemple, si on affecte la lettre M en A ou en S, on indique que le flux des entrées est poissonnien ou que les temps de service sont de loi exponentielle. La lettre s dans la notation de Kendall désigne le nombre de services et la lettre K la capacité du système qui s'exprime par un entier strictement positif. (La lettre M a été choisie par Kendall pour exprimer le caractère markovien d'un processus dont les temps entre deux arrivées sont indépendants et de loi exponentielle.) Ces quatre symboles peuvent être suivis par un cinquième qui qualifie la politique du service. On peut adjoindre à la nomenclature précédente deux symboles supplémentaires désignant le nombre maximal de clients potentiels et le sigle symbolisant la discipline de service.

### Exemples de systèmes d'attente classiques

- (1) Guichet de poste du type  $M/M/s/K\infty$  : un service comporte plusieurs serveurs de mêmes caractéristiques, le client en attente choisit la première station qui se libère, et la file est de capacité bornée.
- (2) Central téléphonique ou informatique du type  $M/M/s/s$ , possédant un nombre  $s$  de serveurs ; c'est un système sans attente et à perte, car si un appel n'est pas pris par l'un des serveurs, il est rejeté et doit se représenter.
- (3) Station-service, salle d'attente du type  $M/M/s/K$  où  $K > s$  ; systèmes à capacité  $K$  bornée.



#### 4.1.2 Étude du régime stationnaire des files d'attente

L'étude du régime transitoire des systèmes d'attente généraux est généralement très difficile, voire analytiquement impossible, sauf dans quelques cas comme le système  $M/M/1$ . Il s'agit d'un moindre mal du point de vue pratique puisque, dans ce domaine comme dans beaucoup d'autres, seuls les régimes stationnaires importent. Soient  $X_t$  la v.a. associée au nombre de clients présents à l'instant  $t$  dans le système de service et  $p_n(t)$  la probabilité  $P(X_t = n)$ . S'il existe un régime stationnaire, on le décrit par la v.a.  $X$  indépendante de  $t$ , et on note sa distribution stationnaire par :

$$(P(X = n) = p_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Définition 4.2.** (*Paramètres descriptifs des systèmes de file d'attente*)

$\bar{\lambda}$  = taux moyen d'arrivée.

$\frac{1}{\mu}$  = temps moyen passé dans une unité de service.

$L$  = nombre moyen  $E(X) = \sum_{n \geq 1} np_n$  de clients dans le système.

$L_q$  = nombre moyen  $E(X) = \sum_{n \geq 1+s} (n-s)p_n$  de clients dans la file d'attente.

$W$  = durée moyenne de présence d'un client quelconque dans le système.

$W_q$  = durée d'attente moyenne d'un client quelconque dans la file.

$\rho$  = intensité  $\frac{\lambda}{\mu}$  du trafic, dont l'unité est appelée erlang.

$\mu$  = taux d'utilisation de chaque serveur (proportion du temps pendant lequel il est occupé).

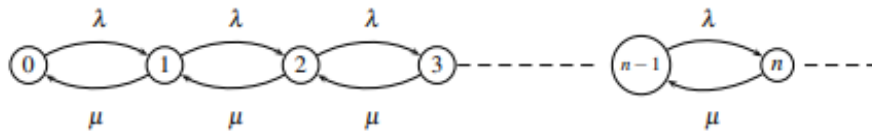
Les paramètres  $L$ ,  $L_q$ ,  $W$ ,  $W_q$  et  $\mu$  sont aussi appelés **paramètres de performance système**.

**Définition 4.3. (Relations entre les paramètres de performance)**

1.  $L = L_q + \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$
2.  $L = \bar{\lambda} \cdot W$  (Formule de Little).
3.  $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ .
4.  $L_q = \bar{\lambda} W_q$ .

### Étude de la file $M/M/1$

Le système d'attente le plus simple est constitué d'un serveur et d'une file à capacité illimitée, désigné par  $M/M/1$  ou  $M/M/1/\infty$ . C'est un processus de naissance et de mort de paramètres :  $\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu$  si  $n \neq 0$  et  $\mu_0 = 0$ . Dans ce cas, le taux moyen d'entrée  $\bar{\lambda}$  est égal à  $\lambda$ .



**Définition 4.4. Système de service  $M/M/1$**

1. Le processus  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des temps d'arrivée des clients est supposé poissonnien, d'intensité  $\lambda$ ; les durées  $U_n = T_{n+1} - T_n$  entre deux arrivées consécutives, sont donc indépendants et de loi exponentielle  $E(\lambda)$ .
2. Les durées de service  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  représentées par des v.a. indépendantes sont de même loi exponentielle de paramètre  $\mu$  définissant le taux de service; la durée moyenne de service est donc égale à  $\frac{1}{\mu}$ .

On supposera vérifiée la condition d'existence d'un régime stationnaire : l'intensité  $\rho$  du trafic est strictement inférieure à 1.

**Théorème 4.1.** *La distribution stationnaire  $(\pi_j)_j$  est de loi géométrique*

$$\forall j, \pi_j = (1 - \rho)\rho^j.$$

*Démonstration.* Pour tout  $n$ ,  $\lambda_n = \lambda$ ,  $\mu_n$  est égal à  $\mu$  si  $n \neq 0$  et à 0 si  $n = 0$ . D'autre part :  $\pi_n = \pi_0 \rho^n$ , d'où :  $\pi_n = \rho^n(1 - \rho)$ .  $\square$

**Théorème 4.2.** *La durée d'attente  $T$  d'un client dans le système est de loi exponentielle de paramètre  $(\mu - \lambda)$ .*

*Démonstration.* Si, lorsque le client arrive,  $(n - 1)$  clients sont dans la file, et un client est en service, son temps d'attente  $W$  est égal à la somme de  $(n + 1)$  temps d'attente au service, soit  $\sum_{i=1}^{n+1} T_i$ . En effet, compte tenu de l'absence de mémoire de la loi exponentielle, le temps de service restant au client en train d'être servi vérifie la même loi exponentielle. L'application de la formule de recombinaison (Théorème 6.3) permet d'établir :

$$f_W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n f_{T_1+\dots+T_{n+1}}(t).$$

On calcule la transformée de Laplace  $\mathcal{L}(f_W)(s) = \frac{(1 - \rho)\mu}{(1 - \rho)\mu + s}$ , puis par inversion de ladite transformée, on obtient :  $f_W(s) = (\mu - \lambda)e^{-(\mu - \lambda)t}$ .  $\square$

**Théorème 4.3.** *(Caractéristiques du système M/M/1)*

$$\begin{aligned} u &= \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \\ L &= \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}, \\ L_q &= \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}, \\ W &= \frac{1}{\mu - \lambda}, \\ W_q &= \frac{L}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}. \end{aligned}$$

*Démonstration.*  $u = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = 1 - \pi_0 = \rho$ .

Par définition :

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = \frac{\rho}{1 - \rho} \text{ et } L_q = \sum_{n=2}^{\infty} (n - 1)\pi_n = L - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}.$$

Soient  $T_q$  le temps d'attente d'un individu dans la file, et  $E_n$  l'événement «  $n$  clients sont dans le système quand arrive l'individu ».

$$P(E_n) = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n = (1 - \rho)\rho^n \quad \text{et} \quad E(T_q|E_n) = \frac{n}{\mu}.$$

$$W_q = E(T_q) = \sum_{n=0}^{\infty} E(T_q|E_n)P(E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu}(1 - \rho)\rho^n = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{L}{\mu},$$

d'où :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = L + 1.$$

□

**Exemple.** Soit un système d'attente  $M/M/1$  où un client arrive en moyenne tous les quarts d'heure, et dont la durée moyenne de service est 10 minutes.

1. Calculons les probabilités pour que deux clients, trois clients,  $k$  clients soient en attente dans la file, ainsi que la longueur moyenne de la file et le temps moyen d'attente pour un client. (On prend l'heure pour unité.)

$$\pi_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = 0,15 \quad ; \quad \pi_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = 0,1 \quad ; \quad \pi_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \frac{1}{3}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad W_q = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{3} \quad \text{soit 20 minutes d'attente moyenne par client.}$$

2. Si le taux d'arrivée augmente de 25 %, voyons comment évoluent la longueur moyenne de la file et le temps moyen d'attente pour un client. Le taux d'arrivée initial est de 4 par heure, et après augmentation il est de 5 par heure ; d'où  $\rho = \frac{5}{6}$ .

$$L_q = \frac{25}{6} \quad \text{soit une file moyenne trois fois plus longue que précédemment.}$$

$$W_q = \frac{5}{6}, \quad \text{soit deux fois et demi plus d'attente moyenne.}$$

On constate un phénomène analogue lorsque la durée moyenne de service  $\mu$  augmente : choisir par exemple  $\mu = 4, 5$  et  $\lambda = 4$ .

Conclusion : de façon générale, une augmentation petite de l'intensité  $\rho$  au voisinage de 1 se traduit par une augmentation significative de la longueur moyenne de la file et du temps moyen d'attente.

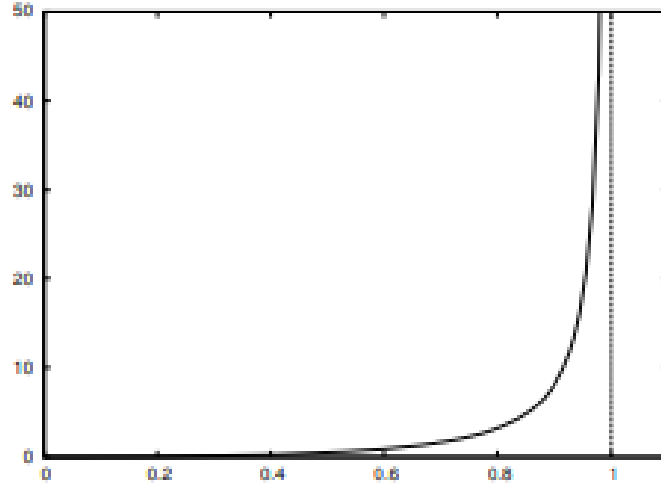
D'un point de vue pratique, il y a donc conflit d'intérêts entre les clients qui souhaitent passer le moins de temps possible en attente et le gestionnaire qui souhaite minimiser le nombre de services. Si le gestionnaire du service souhaite diminuer le risque de perte des clients, il faudra qu'il choisisse un nombre minimal de services de façon à ce que l'intensité du trafic  $\rho$  ne soit pas trop proche de 1.



## Étude des systèmes d'attente $M/M/s/K$

### (1) Cas où la capacité $K$ est non bornée

On rappelle que la capacité est le nombre maximal de clients en attente ou en service. Ce modèle convient aux situations où l'espace d'attente est de très grande taille, donc d'une capacité beaucoup plus grande que le nombre de serveurs  $s$ .



Graphique d'évolution de  $L_q$  en fonction de  $\rho$  montrant la forte croissance de  $L_q$  au voisinage de  $\rho = 1$

### Théorème 4.4. (*Caractéristiques du système $M/M/s/\infty$* )

Condition d'existence d'un régime stationnaire :  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < s$ .

1.

$$\pi_0 = \left( \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^s}{(s-1)!} \cdot \frac{1}{s-\rho} \right)^{-1}, \quad \pi_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} \pi_0 & \text{si } k \leq s, \\ \frac{\rho^k}{s! \cdot s^{k-s}} \pi_0 & \text{si } k > s. \end{cases}$$

2.

$$L_q = \pi_0 \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2}, \quad W_q = \pi_0 \frac{\rho^s}{\mu(s-1)!(s-\rho)^2}.$$

3. La probabilité pour que tous les services soient occupés est égale à :

$$\pi_0 \frac{s \rho^s}{s!(s-\rho)}.$$

*Démonstration.* 1. Tracer le diagramme de transition et écrire les équations bilan.

2. Les résoudre dans chacun des cas :  $0 \leq k \leq s$  et  $k > s$ .

3. Déterminer  $L_q$ .

□

**Exemple.** *Optimisation de la production d'un atelier*

Un atelier emploie deux ouvriers qui produisent chacun quatre pièces par semaine dans le cadre d'une sous-traitance. La demande étant passée à dix pièces, le chef d'atelier envisage d'embaucher un ouvrier supplémentaire, tandis que les deux ouvriers proposent de produire chacun six pièces si leur salaire est augmenté de la moitié du traitement prévu pour le nouvel ouvrier. Pour qui cette dernière solution est-elle avantageuse ? Déterminons les paramètres de performance dans chacun des cas.

1. Embauche d'un ouvrier :

$$s = 3 \quad ; \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{2}.$$

$$\pi_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{2(3-\rho)}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{5}{2} + \frac{25}{8} + \frac{125}{8}\right)^{-1} = \frac{4}{89}$$

$$\pi_3 = \pi_0 \frac{\rho^3}{3!} \approx 0,117 \quad ; \quad L_q \approx 3,51 \quad ; \quad L \approx 6,01 \quad ; \quad W_q \approx 0,35 \text{ (semaine)} \quad ; \quad W \approx 0,6.$$

2. Pas d'embauche :

$$s = 2 \quad ; \quad \text{posons} \quad \mu = \frac{5}{3}.$$

$$\pi_0 = \left(1 + \mu + \frac{\mu^2}{2-\mu}\right)^{-1} \approx 0,126 \quad ; \quad L_q \approx 3,78 \quad ; \quad L \approx 5,45;$$

$$W_q \approx 0,38 \text{ (semaine)} \quad ; \quad W \approx 0,54.$$

**(2) Cas d'une capacité  $K$  finie**

Les systèmes d'attente à capacité limitée sont dits *à perte* : lorsqu'un client trouve le ou les services occupés, il est refusé et repart ; c'est typiquement le cas d'un central téléphonique. Dans la notation de Kendall, on les désigne par :  $M/M/s/K$ , où  $K$  est la capacité maximale du système.

**Système d'attente  $M/G/1$** 

Ce système d'attente est caractérisé par une durée de service de loi quelconque symbolisée par  $G$  en notation de Kendall. On considère donc que le processus d'arrivée est toujours poissonnien d'intensité  $\lambda$  et que le temps de service  $T_S$  de densité  $f$ , d'espérance  $\frac{1}{\mu}$  et de variance  $\sigma^2$  sont indépendants entre eux. Il s'agit de déterminer la distribution stationnaire du processus  $(X_t)_t$ .

Soit  $(X_{T_i})_i$  la chaîne incluse représentant le nombre de clients dans le système aux instants aléatoires respectifs  $T_1, T_2, \dots$ , où le premier client, respectivement le second client, quittent le service.

Soit  $N_k$  le nombre de clients entrant dans le système pendant la durée de service du  $k$ -ième client ; les  $N_k$  sont indépendantes entre elles, de même loi :

$$P(N_k = n) = \int P(N_k = n \mid T_S = t) f(t) dt = \int e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} f(t) dt \equiv a_n.$$

Les durées de service n'étant plus de loi exponentielle, le processus  $(X_t)_t$  n'est plus markovien, alors que la chaîne  $(X_{T_i})_i$  l'est, de matrice de transition  $P = (p_{i,j})_{i,j}$  définie par :

$$p_{0,j} = a_j \text{ si } j \geq 0,$$

$$p_{i,j} = a_{j-i+1} \text{ si } 1 \leq i \leq j+1,$$

$$p_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

Ainsi :

$$P = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_0 & a_1 \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer que la chaîne  $(X_{T_i})_i$  est irréductible, apériodique et récurrente positive, et possède donc d'après le théorème de Chacon-Ornstein une unique distribution stationnaire  $(\pi_j)_j$ . Grâce à l'utilisation des fonctions génératrices des distributions  $(a_i)_i$  et  $(\pi_j)_j$ , on établit que :

$$L = \left( \frac{1 + C_S^2}{2} \right) \frac{\rho^2}{1 - \rho} + \rho \quad \text{où} \quad C_S^2 = \mu^2 \sigma^2.$$

L'étude du système d'attente  $G/G/1$  où le processus des arrivées n'est pas poissonnien et la durée de service n'est pas de loi exponentielle, se traite grâce à la transformation de Laplace.

## 4.2 Modèle prédateur-proie

On considère deux populations : les prédateurs et les proies. Par exemple : loups vs lynx ; requins vs thons ; etc.

Ici, les états du système sont les couples  $(x, y) \in \mathbb{N}_0^2$ , avec  $x$  est le nombre de prédateurs et  $y$  est le nombre de proies.

On peut représenter l'évolution par une CMTC avec les transitions suivantes :

$$\begin{aligned} -(x, y) &\rightarrow (x + 1, y) && \text{naissance d'un prédateur au taux } k_1xy \\ -(x, y) &\rightarrow (x - 1, y) && \text{décès d'un prédateur au taux } k_2x \\ -(x, y) &\rightarrow (x, y + 1) && \text{naissance d'une proie au taux } k_3y \\ -(x, y) &\rightarrow (x, y - 1) && \text{mort d'une proie au taux } k_4xy \end{aligned}$$

L'espace d'états est infini. Il est alors difficile de trouver une solution exacte, mais on peut simuler cette dernière.

### 4.2.1 Modèle fluide déterministe

Lorsque les populations de prédateurs et de proies sont très grandes, on peut utiliser une approximation continue et déterministe des processus stochastiques. Cette approche repose sur des équations différentielles ordinaires (EDO) qui décrivent l'évolution des populations au fil du temps :

$$\begin{aligned} x'(t) &= k_1x(t)y(t) - k_2x(t) \\ y'(t) &= k_3y(t) - k_4x(t)y(t) \end{aligned}$$

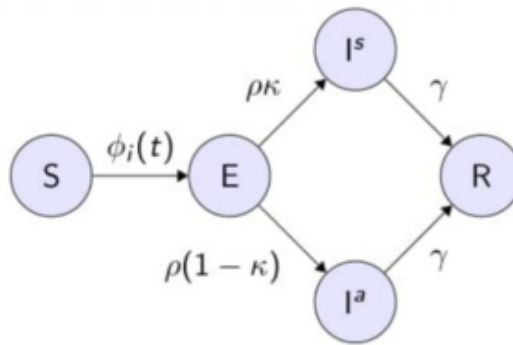
Dans ce modèle :

- La première équation décrit le taux de changement de la population des prédateurs. Le terme  $k_1x(t)y(t)$  représente le taux de naissance des prédateurs (proportionnel au nombre de proies et de prédateurs), et le terme  $k_2x(t)$  représente le taux de décès des prédateurs.
- La deuxième équation décrit le taux de changement de la population des proies. Le terme  $k_3y(t)$  représente le taux de naissance des proies, et le terme  $k_4x(t)y(t)$  représente le taux de mort des proies (proportionnel au nombre de prédateurs et de proies).

La modélisation de systèmes par ce genre de système d'équations différentielles et la simulation de ces modèles constitue un champ d'études appelé la dynamique des systèmes (*system dynamics*). Voir [System\\_dynamics](#).

### 4.3 Modèle pour Covid-19 (Prem et al., The Lancet, 25 mars 2020)

On considère une population de taille  $N$  divisée en  $d$  groupes d'âges. Pour un groupe d'âge  $i$  nous avons la CMTC suivante :



$$\phi_i(t) = \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j} (I_j^s(t) + \alpha I_j^a(t))$$

$C_{i,j}$  = mesure d'interaction entre les groupes  $i$  et  $j$ .

Les paramètres  $C_{i,j}$ ,  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\rho$ , doivent être estimés à partir de données ! Leurs valeurs sont très incertaines et peuvent changer bien des choses (e.g.,  $\alpha$  pour l'utilité des masques).

- $S_i(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont susceptibles
- $E_i(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont exposés
- $I_i^s(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont infectieux et symptomatiques
- $I_i^a(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont infectieux et asymptomatiques
- $R_i(t)$  = nombre d'individus du groupe d'âge  $i$  qui sont immunisés

L'état de la CMTC est  $X(t) = (S_1, E_1, I_1^s, I_1^a, R_1, \dots, S_d, E_d, I_d^s, I_d^a, R_d)(t)$ , en  $5d$  dimensions.

Les transitions de la CMTC :

Un individu du groupe  $i$  passe

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow E : \text{taux de transition } \phi_i(t)S_i(t) \\
E &\rightarrow I^s : \text{taux de transition } \rho\kappa E_i(t) \\
E &\rightarrow I^a : \text{taux de transition } \rho(1 - \kappa)E_i(t) \\
I^s &\rightarrow R : \text{taux de transition } \gamma I_i^s(t) \\
I^a &\rightarrow R : \text{taux de transition } \gamma I_i^a(t)
\end{aligned}$$

Dans la plupart des états, il y a  $5d$  transitions possibles. Le générateur infinitésimal est gigantesque, mais on peut simuler l'évolution de cette CMTC assez facilement, une transition à la fois. Par contre, les taux de transition de la CMTC changent à chaque transition ! À cause de cela, la simulation peut être coûteuse.

#### 4.3.1 Modèle déterministe correspondant en dynamique des systèmes

On suppose ici que toutes les coordonnées du vecteur d'états  $X(t)$  prennent des valeurs réelles et évoluent continûment selon des équations différentielles. Les taux de transition deviennent des taux de changement de l'état.

$$\begin{aligned}
\phi_i(t) &= \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j}(I_j^s(t) + \alpha I_j^a(t)) \\
S_i'(t) &= -\phi_i(t)S_i(t) \\
E_i'(t) &= \phi_i(t)S_i(t) - \rho E_i(t) \\
(I_i^s)'(t) &= \rho\kappa E_i(t) - \gamma I_i^s(t) \\
(I_i^a)'(t) &= \rho(1 - \kappa)E_i(t) - \gamma I_i^a(t) \\
R_i'(t) &= \gamma(I_i^s(t) + I_i^a(t))
\end{aligned}$$

On peut simuler ce système déterministe approximativement en discrétisant le temps. On peut discrétiser le temps disons en intervalles de longueur  $\delta$ . Si  $\delta$  est très petit, on peut supposer que la dérivée ne change pas durant chaque intervalle de longueur  $\delta$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_i(t) &= \beta \sum_{j=1}^d C_{i,j}(\tilde{I}_j^s(t) + \alpha \tilde{I}_j^a(t)) \\
\tilde{S}_i(t + \delta) &= \tilde{S}_i(t) - \delta \tilde{\phi}_i(t) \tilde{S}_i(t) \\
\tilde{E}_i(t + \delta) &= \tilde{E}_i(t) + \delta \tilde{\phi}_i(t) \tilde{S}_i(t) - \delta \rho \tilde{E}_i(t) \\
\tilde{I}_i^s(t + \delta) &= \tilde{I}_i^s(t) + \delta \rho \kappa \tilde{E}_i(t) - \delta \gamma \tilde{I}_i^s(t) \\
\tilde{I}_i^a(t + \delta) &= \tilde{I}_i^a(t) + \delta \rho (1 - \kappa) \tilde{E}_i(t) - \delta \gamma \tilde{I}_i^a(t) \\
\tilde{R}_i(t + \delta) &= \tilde{R}_i(t) + \delta \gamma (\tilde{I}_i^s(t) + \tilde{I}_i^a(t))
\end{aligned}$$

C'est la méthode d'Euler (1768) pour simuler les équations différentielles. Les "tilde" indiquent que ce ne sont pas les valeurs exactes, mais des approximations.

## 4.4 Corrigés des exercices

### 4.4.1 Exercice 3.1

1. Calculons  $P(X_{t+h} = e_j \mid X_t = e_i)$  quand  $h$  est petit par rapport à  $t$  ; on en déduit par dérivation les taux de transition instantanée.

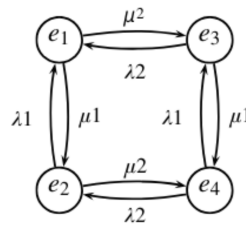
Par exemple,  $P(X_{t+h} = (1, 0) \mid X_t = (0, 0))$  désigne la probabilité que le composant (1) tombé en panne à l'instant  $t$  soit en état de marche en  $t + h$ . Elle est égale à :

$$\int_0^h \mu_1 e^{-\mu_1 u} du \approx \mu_1 h$$

d'où un taux de probabilité égal à  $\mu_1$ .

Le calcul des autres probabilités de transition s'effectue de la même façon. On obtient le générateur :

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu_1 + \mu_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_1 + \mu_2) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_2 + \mu_1) & \mu_1 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix}$$



2. Ce processus de Markov continu est irréductible et récurrent positif : il admet donc une unique distribution stationnaire  $\pi$  solution de l'équation d'équilibre  $\pi A = 0$ . On obtient :

$$\pi_{0,0} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{D}, \quad \pi_{0,1} = \frac{\lambda_1 \mu_2}{D}, \quad \pi_{1,0} = \frac{\mu_1 \lambda_2}{D}, \quad \pi_{1,1} = \frac{\mu_1 \mu_2}{D}$$

où

$$D = (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2).$$

### 4.4.2 Exercice 3.2

1.  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov continu dont les seules transitions se font d'un état quelconque vers les états contigus ; c'est donc un processus de naissance et de mort.

Taux de transitions :  $\lambda_i = (N - i)\lambda$  et  $\mu_i = i\mu$  pour  $0 \leq i \leq N$ . En effet :

« 0 » est l'état « aucune voiture n'est disponible » ; autrement dit, toutes sont en réparation et le taux de sortie d'une voiture des ateliers est donc égal à  $N\lambda$ . Lorsqu'il y a une seule voiture en marche (état 1), elle peut tomber en panne avec un taux égal à  $\mu$ .

2.

$$\pi_0 = \left( 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{N-1}}{\mu_0 \cdots \mu_N} \right)^{-1} = \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^N$$

d'où par définition des  $\pi_j$ ,

$$\pi_1 = \pi_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \left( \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right)^N \frac{N\lambda}{\mu}$$

et

$$\pi_j = C_j^N \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{N-j} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^j.$$

La distribution stationnaire est donc de loi binomiale  $B\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}; N\right)$ .

---

# Conclusion

---

Les chaînes de Markov à temps continu jouent un rôle crucial dans la modélisation des systèmes stochastiques évoluant continuellement dans le temps, permettant d'analyser des processus où les transitions entre états se produisent à des instants aléatoires. Nous avons exploré les propriétés fondamentales de ces chaînes, telles que les générateurs infinitésimaux et les processus de Poisson, et avons illustré leur application dans divers domaines à travers des exemples concrets. Ces résultats mettent en évidence l'efficacité des chaînes de Markov à temps continu pour modéliser des phénomènes complexes, tout en ouvrant des perspectives intéressantes pour l'étude des processus continus comme le mouvement brownien. En effet, le mouvement brownien, qui est un cas particulier de chaîne de Markov à temps continu, offre des opportunités fascinantes pour approfondir notre compréhension des processus stochastiques et des phénomènes naturels en modélisation financière, physique, et biologique. L'exploration future des chaînes de Markov à temps continu pourrait ainsi enrichir notre connaissance des modèles stochastiques continus et ouvrir de nouvelles avenues pour la recherche sur les processus aléatoires comme le mouvement brownien.



# Bibliographie

- [1] Ross. S. M. ( 2014) *Introduction to Probability Models*, 11th Edition, Academic Press.
- [2] Norris. J. R. (1998). *Markov Chains*, Cambridge University Press.
- [3] L'Ecuyer, P. (2020). *IFT-3655, Modèles Stochastiques : Chaînes de Markov en temps continu (CMTC)*. DIRO, Université de Montréal. <https://www.iro.umontreal.ca/~lecuyer/ift3655/chaines-markov-tcontinu.pdf>
- [4] Caumel, Y. (2011). Chaînes de Markov à temps continu et files d'attente. In : Probabilités et processus stochastiques. Statistique et probabilités appliquées. Springer, Paris. [https://doi.org/10.1007/978-2-8178-0163-6\\_9](https://doi.org/10.1007/978-2-8178-0163-6_9)
- [5] Guérin, H. (2012). *MAT-3071 Processus Stochastiques*. Département de Mathématiques, Université du Québec à Montréal. <https://perso.univ-rennes1.fr/helene.guerin/enseignement/NotesCoursMAT3071.pdf>
- [6] Lefebvre, Mario. (2005). *Processus stochastiques appliqués*. Presses Internationales Polytechniques
- [7] Karlin, Samuel ; Taylor, Howard M. (1975). *A first course in stochastic processes*. Second edition. Academic Press
- [8] Grimmett, G, R. and Stirzaker, D, R. ( 2001). *Probability and random processes*. Oxford University Press, New York, third edition.
- [9] Barbour, A. Holst, L. and Janson, S . (1992). *Poisson approximation*. Oxford Studies in Probability. Clarendon Press