МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра САПР

ОТЧЕТ

по практической работе №8
по дисциплине «Информационные технологии»
Тема: Линейная регрессия и системы линейных уравнений.

Студент гр. 4352	____________________	Колесникова М. А.
Преподаватель	____________________	Копец Е. Е.

Санкт-Петербург
2025

Цель работы.

Научиться решать вручную и с помощью sympy системы линейных алгебраических уравнений. А также с помощью переопределённых СЛАУ находить среднее крадратичное значение.

Основные теоретические положения.

В первом задании нужно решить систему линейных уравнений вручную. Сделаем это приводя матрицы к ступенчатому виду.

1.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 11 \\ 7x - 3y = -23 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 11 \\ 7 & -3 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 11 \\ 0 & -\frac{41}{2} & -\frac{123}{2} \end{array}\right);$$

$$-\frac{41}{2}y = -\frac{123}{2} \Rightarrow y = 3;$$

$$2x + 5 \cdot 3 = 11 \Rightarrow x = -2.$$

Ответ: $x = -2$, $y = 3$.

Матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 6 \end{array}\right);$$

$$6y = 6 \Rightarrow y = 1;$$

$$-3x + 1 = -2 \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

Матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

3.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ 3 & -1 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 12 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -11 \end{array}\right);$$

$$-\frac{11}{2}y = -11 \Rightarrow y = 2;$$

$$2x + 3 \cdot 2 = 12 \Rightarrow x = 3.$$

Ответ: $x = 3$, $y = 2$.

Матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

4.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right);$$

$$-2z = 4 \Rightarrow z = -2;$$

$$-3y - 2(-2) = -2 \Rightarrow y = 2;$$

$$x + 2 + 2(-2) = -1 \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$.

Матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ -4\\ -2\end{pmatrix}.$$

Умножение матриц на векторы:

1.
$$\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\ 5\end{pmatrix};$$

2.
$$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 18\end{pmatrix};$$

3.
$$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\ 10\end{pmatrix};$$

4.
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\ 11\\ 31\end{pmatrix}.$$

В третьем задании нужно решить системы линейных уравнений:

1.
$$\begin{cases}-x + 7y = -34\\ 8x + 8y = -48\end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 7 & -34\\ 8 & 8 & -48\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}-1 & 7 & -34\\ 0 & 64 & -320\end{array}\right);$$

$$64y = -320 \Rightarrow y = -5;$$
$$-x + 7(-5) = -34 \Rightarrow x = -1.$$

Ответ: $x = -1, y = -5$.

2.
$$\begin{cases} 4x - 7y = -4 \\ 3x - 4y = -3 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -7 & -4 \\ 3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -7 & -4 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 \end{array}\right);$$

$$\frac{5}{4}y = 0 \Rightarrow y = 0;$$
$$4x - 7(0) = -4 \Rightarrow x = -1.$$

Ответ: $x = -1$, $y = 0$.

3.
$$\begin{cases} 8a - 4b = 64 \\ -3a + 3b = -21 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 64 \\ -3 & 3 & -21 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -4 & 64 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 \end{array}\right);$$

$$\frac{3}{2}b = 3 \Rightarrow b = 2;$$
$$8a - 4(2) = 64 \Rightarrow a = 9.$$

Ответ: $a = 9$, $b = 2$.

4.
$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -47 \\ -2x_2 + 2x_3 = 10 \\ -4x_1 - 8x_2 - 7x_3 = 63 \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ -4 & -8 & -7 & 63 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & -\frac{12}{5} & -11 & \frac{107}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -\frac{67}{5} & \frac{67}{5} \end{array}\right);$$

$$-\frac{67}{5}x_3 = \frac{67}{5} \Rightarrow x_3 = -1;$$
$$-2x_2 + 2(-1) = 10 \Rightarrow x_2 = -6;$$
$$5x_1 + 7(-6) - 5(-1) = -47 \Rightarrow x_1 = -2.$$

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -6$, $x_3 = -1$.

Результаты программы совпали с полученными значениями (рис. 1).

```python
M1 = Matrix([[-1, 7, -34],[8, 8, -48]])
M1
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix}-1 & 7 & -34\\ 8 & 8 & -48\end{bmatrix}$$

```python
M2 = Matrix([[4, -7, -4],[3, -4, -3]])
M2
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix}4 & -7 & -4\\ 3 & -4 & -3\end{bmatrix}$$

```python
M3 = Matrix([[8, -4, 64],[-3, 3, -21]])
M3
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix}8 & -4 & 64\\ -3 & 3 & -21\end{bmatrix}$$

```python
M4 = Matrix([[5, 7, -5, -47],[0, -2, 2, 10],[-4, -8, -7, 63]])
M4
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix}5 & 7 & -5 & -47\\ 0 & -2 & 2 & 10\\ -4 & -8 & -7 & 63\end{bmatrix}$$

```python
print("Решение для каждой матрицы:")
print(linsolve(M1))
print(linsolve(M2))
print(linsolve(M3))
print(linsolve(M4))
```
✓ 0.0s

```
Решение для каждой матрицы:
{(-1, -5)}
{(-1, 0)}
{(9, 2)}
{(-2, -6, -1)}
```

Рисунок 1 – Проверка решений СЛАУ

В четвёртом задании нужно умножить матрицы на вектора:

1.

$$\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 8 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+7\cdot(-5)\\ 8\cdot(-1)+8\cdot(-5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-35\\ -8-40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-34\\ -48\end{pmatrix};$$

2.

$$\begin{pmatrix}4 & -7\\ 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot(-1)+(-7)\cdot 0\\ 3\cdot(-1)+(-4)\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4+0\\ -3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\ -3\end{pmatrix};$$

3.

$$\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 9 + (-4) \cdot 2 \\ -3 \cdot 9 + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 - 8 \\ -27 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ -21 \end{pmatrix};$$

4.

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -4 & -8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ 10 \\ 63 \end{pmatrix}.$$

Результаты программы совпадают с найденными значениями (рис. 2, 3).

```
A1 = Matrix([[-1, 7], [8, 8]])
V1 = Matrix([-1, -5])
A1
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$$

```
A1*V1
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} -34 \\ -48 \end{bmatrix}$$

```
A2 = Matrix([[4, -7], [3, -4]])
V2 = Matrix([-1, 0])
A2
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

```
A2*V2
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Рисунок 2 – Проверка 1 и 2

```python
A3 = Matrix([[8, -4], [-3, 3]])
V3 = Matrix([9, 2])
A3
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

```python
A3*V3
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} 64 \\ -21 \end{bmatrix}$$

```python
A4 = Matrix([[5, 7, -5],[0,-2,2],[-4, -8, -7]])
V4 = Matrix([-2, -6, -1])
A4
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -4 & -8 & -7 \end{bmatrix}$$

```python
A4*V4
```
✓ 0.0s

$$\begin{bmatrix} -47 \\ 10 \\ 63 \end{bmatrix}$$

Рисунок 3 – Проверка 3 и 4

В пятом задании нужно решить переопределённую СЛАУ.

Дана система уравнений:

$$\begin{cases} 5x + 7y - 5z = -47 \\ -2y + 2z = 10 \\ -4x - 8y - 7z = 63 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ -4 & -8 & -7 & 63 \end{array}\right).$$

Обнулим элемент a_{31} (-4) с помощью строки R_1:

$$R_3 \to R_3 + \frac{4}{5}R_1 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & -\frac{12}{5} & -11 & \frac{127}{5} \end{array}\right).$$

Обнулим элемент a_{32} $(-\frac{12}{5})$ с помощью строки R_2:

$$R_3 \to R_3 - \frac{6}{5}R_2 :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 7 & -5 & -47 \\ 0 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & -\frac{67}{5} & \frac{67}{5} \end{array}\right).$$

Найдем z из третьей строки:

$$-\frac{67}{5}z = \frac{67}{5} \Rightarrow z = -1 :$$

Найдем y из второй строки:

$$-2y + 2(-1) = 10 \Rightarrow y = -6.$$

Найдем x из первой строки:

$$5x + 7(-6) - 5(-1) = -47 \Rightarrow x = -2.$$

Ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для нахождения MSE пишем код используя numpy (рис. 4).

```python
import numpy as np
x, y, z = symbols('x y z')
equations = [
    5*x + 7*y - 5*z + 47,
    -2*y + 2*z - 10,
    -4*x - 8*y - 7*z - 63,
    x + y + 2*z + 1,
    2*x - y + 2*z + 4,
    4*x + y + 4*z + 2
]
MSE = sum(eq**2 for eq in equations) / len(equations)
dMSE_dx = diff(MSE, x)
dMSE_dy = diff(MSE, y)
dMSE_dz = diff(MSE, z)

grad_func = [
    lambdify((x, y, z), dMSE_dx, 'numpy'),
    lambdify((x, y, z), dMSE_dy, 'numpy'),
    lambdify((x, y, z), dMSE_dz, 'numpy')
]
mse_func = lambdify((x, y, z), MSE, 'numpy')

def calculate_gradient(x_val, y_val, z_val):
    return np.array([f(x_val, y_val, z_val) for f in grad_func])

x_val, y_val, z_val = 0.0, 0.0, 0.0
learning_rate = 0.01
max_iterations = 10000
target_mse = 55

for iteration in range(max_iterations):
    current_mse = mse_func(x_val, y_val, z_val)
    print(f"Итерация {iteration}: x={x_val:.4f}, y={y_val:.4f}, z={z_val:.4f} | MSE={current_mse:.2f}")
    if current_mse < target_mse:
        print(f"Цель достигнута на итерации {iteration}!")
        break

    grad = calculate_gradient(x_val, y_val, z_val)
    x_val -= learning_rate * grad[0]
    y_val -= learning_rate * grad[1]
    z_val -= learning_rate * grad[2]
```

✓ 0.0s

```
Итерация 0: x=0.0000, y=0.0000, z=0.0000 | MSE=1049.83
Итерация 1: x=-1.6800, y=-2.8400, z=-0.6800 | MSE=247.50
Итерация 2: x=-2.2935, y=-4.1044, z=-0.7900 | MSE=104.49
Итерация 3: x=-2.4760, y=-4.7122, z=-0.7230 | MSE=73.77
Итерация 4: x=-2.4845, y=-5.0390, z=-0.6210 | MSE=64.19
Итерация 5: x=-2.4235, y=-5.2402, z=-0.5301 | MSE=59.56
Итерация 6: x=-2.3358, y=-5.3815, z=-0.4611 | MSE=56.57
Итерация 7: x=-2.2389, y=-5.4916, z=-0.4130 | MSE=54.32
Цель достигнута на итерации 7!
```

Рисунок 4 – Нахождение MSE меньше 55

Вывод.

В ходе работы было изучено решение систем алгебраических уравнений, умножение матрицы на вектор. А также было найдено среднее квадратичное отклонение для переопределённой СЛАУ.