



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

叶层化代数簇对的 Sarkisov 纲领

作者姓名: 王延泽

指导教师: 陈亦飞 副研究员 中国科学院数学与系统研究所

学位类别: 理学硕士

学科专业: 基础数学

培养单位: 中国科学院数学与系统科学研究院

2024 年 6 月

Sarkisov program for foliated pairs

**A thesis submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Pure Mathematics**

By

Yanze Wang

Supervisor: Professor Yifei Chen

**Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of
Sciences**

June, 2024

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

关键词：极小模型纲领，Sarkisov 纲领，叶层化代数簇对

Abstract

The first purpose of this note is to introduce three methods of the Sarkisov program, which aims to factorize birational maps of log Mori fibre spaces. One of goals of birational geometry is to classify birational equivalence classes. The minimal model program is to find a good representative in every fixed birational equivalence class. All of these good representatives can be divided into two classes. One is called the minimal model, and the other is called Mori fiber space, both of which are not unique. Any two MMP-related Mori fibre spaces are connected by a birational map, which can be decomposed into finitely many maps from the four types of elementary birational maps called Sarkisov links, by running the Sarkisov program.

Key Words: Minimal Model Program, Sarkisov Program, Foliated pairs

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 记号及术语	4
第 2 章 预备知识	5
2.1 代数簇对与奇点	5
2.2 极小模型纲领	6
2.3 模型及其有限性	7
2.4 叶状结构	10
第 3 章 下降法	11
3.1 定义与引理	12
3.2 Sarkisov 纲领的流程	16
3.3 下降法的终结性	19
第 4 章 双标量法	21
4.1 定义和引理	21
4.2 用双标量法构造 Sarkisov 连接	23
4.3 双标量 Sarkisov 纲领的终结性	28
第 5 章 有限模型法	33
5.1 定义和引理	33
5.2 构造 Sarkisov 连接	36
5.3 构造 Sarkisov 分解	37
第 6 章 三种方法的总结	41
6.1 三种方法的比较	41
6.2 例子	41
6.2.1 下降法	41
6.2.2 双标量法	43
6.2.3 有限模型法	44
6.3 应用	46
第 7 章 叶层化 Sarkisov 纲领	47
7.1 三种方法的推广尝试	47
7.2 弱化版结果	47
参考文献	49

符号列表

术语翻译

英文	中文
----	----

flip	翻转
------	----

flop	平转
------	----

(log) resolution	(算术) 解消
------------------	---------

common resolution	公共解消
-------------------	------

strict birational map	严格双有理变换
-----------------------	---------

缩写

MMP	Minimal model program
-----	-----------------------

klt	kawamata log terminal
-----	-----------------------

lc	log canonical
----	---------------

JWL	Jones-Wilkins-Lee
-----	-------------------

WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
------	--------------------------------------

ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering
-----	--------------------------------

第 1 章 绪论

极小模型纲领 (minimal model program, MMP) 的目标是按双有理等价类分类代数簇, 并选取选择恰当的代表元。极小模型纲领猜想, 每一个代数簇都双有理等价于一个极小模型 (minimal model) 或一个森纤维空间 (Mori fibre space, mfs), 但这样的代表元有时并不唯一, 于是自然的问题就是不同代表元之间的关系。对于极小模型的情形, 我们有

定理 1.1 (平转连接极小模型). 令 (W, B_W) 为一个 \mathbb{Q} -分解的终端对 (terminal pair), 且 $(X, B_X), (Y, B_Y)$ 是它的两个极小模型。那么双有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 可以分解为一系列 $(K_X + B_X)$ -平转 (flop)。

对于森纤维空间, 由 Sarkisov 纲领可知

定理 1.2 (主定理). 令 $f : (X, B) \rightarrow S$ 和 $f' : (X', B') \rightarrow S'$ 为两个 MMP-连接的 \mathbb{Q} -分解 klt 算术森纤维空间, 则有双有理映射 Φ :

$$\begin{array}{ccc} (X, B) & \xrightarrow{\Phi} & (X', B') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & & S' \end{array}$$

可以分解为 Sarkisov 连接映射的复合, 即

$$\Phi = \Psi_n \circ \cdots \circ \Psi_1$$

其中 $\Psi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是下列四种 Sarkisov 连接之一:

第一型 Sarkisov 连接:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & X_1 \\ p \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X & & S_1 \\ f \downarrow & \nearrow t & \\ S & & \end{array}$$

第二型 *Sarkisov* 连接:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \cdots\cdots\rightarrow & Z' \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 X & & X_1 \\
 f \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 S & \xrightarrow{\sim} & S_1
 \end{array}$$

第三型 *Sarkisov* 连接:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \cdots\cdots\rightarrow & Z \\
 f \downarrow & & \downarrow q \\
 S & & X_1 \\
 & \searrow s & \downarrow f_1 \\
 & & S_1
 \end{array}$$

第四型 *Sarkisov* 连接:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \cdots\cdots\rightarrow & X_1 \\
 f \downarrow & & \downarrow f_1 \\
 S & & S_1 \\
 & \searrow s & \swarrow t \\
 & & T
 \end{array}$$

其中所有 $f : (X, B) \rightarrow S$ and $f_1 : (X_1, B_1) \rightarrow S_1$ 都是算术森纤维空间, 所有 p, q 都是除子压缩, 所有虚线的映射都是翻转 (*flip*)、平转 (*flop*) 或反向翻转 (*inverse flip*) 的复合。

在具有叶状结构的代数簇对 (foliated pair) 上有类似结果:

定理 1.3 (主定理 2). *TODO*

Sarkisov 纲领起源于对直纹曲面的分类 [1], [2]。

具有终端奇点的三维代数簇 (terminal threefolds) 情况的完整证明由 Corti[3] 给出。本文将这种方法称为下降法。选取一个定义了双有理映射 $\Phi : X \dashrightarrow X'$ 的线性系 \mathcal{H} (或一个一般的除子 $H \in \mathcal{H}$)，那么第一个 *Sarkisov* 连接 $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$ 由运行一种特殊的极小模型纲领得到，被称为 2-ray game，并且取决于 \mathcal{H} (H) 的选取。接着用 $\Phi_1 = \Phi \circ \psi_1^{-1} : X_1 \dashrightarrow X'$ 替代 $\Phi : X \dashrightarrow X'$ 并重复这一过程。通过定义 *Sarkisov* 次数，并证明在归纳构造中 *Sarkisov* 次数下降来说明归纳终结。Bruno 和 Matsuki [4] 将这种方法推广到 \mathbb{Q} -分解的 klt 奇点的三维代数簇的情

形。并且他们给出了任意维 \mathbb{Q} -分解 klt 奇点代数簇的 Sarkisov 纲领的下降法的大纲。之后在极小模型纲领中有一些重要进展, 例如标量极小模型纲领 (MMP with scaling) 的终结性 [5], lct 的 ACC (accending chain condition)[6], δ -lc Fano 簇的有界性 [7], [7], 这些进展使得 Bruno 和 Matsuki 的大纲部分地可行, 剩下的主要问题与算术翻转的终结性和局部算术典范阈值 (local log canonical thresholds) 的 ACC(或者有限性) 有关。这种方法在第三章中介绍。

利用弱典范模型的有限性 [5] (finiteness of weak log canonical models), Hacon [8] 给出了另一种构造 Sarkisov 纲领的方法, 在本文中称之为双标量法, 这种方法对所有维数都成立。这两种方法都是通过 2-ray game 来构造 Sarkisov 连接, 但是在双标量法中固定了两个森纤维空间的公共算术解消 (W, B_W) 作为 Sarkisov 纲领的“屋顶”, 使得分解中的每一个森纤维空间都是 W 的某个弱算术典范模型。双标量法的 Sarkisov 纲领的终结性由弱算术典范模型的有限性推出, 这与标量翻转 (flips with scaling) 的终结性的证明类似。刘继豪 [9] 将这种方法推广到了 generalized pairs 的情况。本文第四章介绍这种方法。

利用 Shokurov 的多面体方法 [10], [11], Hacon 和 McKernan [10] 给出了一种新方法不通过 2-ray game 实现 Sarkisov 纲领。令 W 为 $(X, B) \rightarrow S$ 和 $(X', B') \rightarrow S'$ 的公共算术解消, 则在 W 上有两个除子 D 和 D' , 使得 S 和 S' 是 W 相对于 $K_W + D$ 和 $K_W + D'$ 的丰沛模型 (ample model)。进一步, W 的除子的多面体的边界上有其他除子 D_i , 每个除子对应一个森纤维空间 $X_i \rightarrow S_i$ 和 W 的丰沛模型 S_i 。于是在多面体边界上有一条路径连接这些除子 D_i , 并且将 Φ 分解为对应的 Sarkisov 连接。Miyamoto [11] 将这种方法应用到了任意特征代数闭域上的 lc 算术曲面或 \mathbb{Q} -分解算术曲面。本文将这种方法成为有限模型法, 并且在第五章介绍。

在第六章, 总结三种方法, 每种方法给出一个具体例子。Sarkisov 纲领有许多应用, 例如 2 阶 Cremona 群的经典结果 (即每一个射影平面的双有理自同构都是由自同构和标准二次映射复合生成, 见 [12, Chapter 2])。Takahashi [13] 对算术曲面建立了特殊的 Sarkisov 纲领, 并得到了另一个经典代数结论的几何证明: 每一个仿射平面的自同构都由仿射自同构和上三角变换复合 (见 [13, Chapter 13])。Lamy [14] 给出了更多其他应用。

叶层化代数簇 (foliated varieties) 用子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_X$ 代替切丛, 进而用叶层化典

范除子 (foliated canonical divisor) $K_{\mathcal{F}}$ 代替典范除子 K_X , 并且有对应的叶层化极小模型纲领, 尤其是高维情况的叶层化代数簇对。在第六章尝试分析这种情况下的 Sarkisov 纲领。

1.1 记号及术语

over

rational map, morphism

divisorial contraction 除子压缩态射 divisorial extraction 除子解压态射

第2章 预备知识

2.1 代数簇对与奇点

定义代数簇对和相关概念：

定义 2.1. • 一个代数簇对 (X, B) 包括一个正规拟射影代数簇 X 和一个 \mathbb{R} -除子 $B = \sum_i b_i B_i$ ，其中 B_i 是素除子，且 $0 < b_i \leq 1$ ，并且满足

$$K_X + B$$

是 \mathbb{R} -Cartier 除子。

• 若双有理态射 $f : Y \rightarrow X$ 满足 Y 是光滑代数簇，且 $\text{Exc } f \cup \bigcup_i B_{i\text{red}}$ 是横截相交 (normal crossing) 的除子，并且 f 在 $\text{Reg}(X, B)$ 上是同构那么称 f 为 (X, B) 的算术解消。

• 正规代数簇 X 的余维数 1 的不可约子簇 $E \subset X$ 称为 X 上的除子；如果 $f : Y \rightarrow X$ 是双有理射影态射，那么 Y 上的除子 E 称为 X 之上的除子。

定义除子的差异数：

定义 2.2. 令 (X, B) 为代数簇对，且 $f : Y \rightarrow X$ 是它的算术解消，则有

$$K_Y + C = f^*(K_X + B)$$

那么除子 E 的差异数 (discrepancy) $a(E; X, B)$ 定义为

$$a(E; X, B) = -\text{mult}_E C$$

进一步，定义 (X, B) 的差异数：

$$\text{discrep}(X, B) := \inf \{a(E; X, B) : E \text{ 是 } X \text{ 之上的例外除子}\}$$

和整体差异数

$$\text{totdiscrep}(X, B) := \inf \{a(E; X, B) : E \text{ 是 } X \text{ 之上的除子}\}.$$

通过差异数，定义代数簇对 (X, B) 的奇点性质：

定义 2.3. •

2.2 极小模型纲领

定理 2.1 (锥定理).

极小模型纲领 (MMP) 中出现的代数簇对被称为极小模型的结果, 将 MMP 停止处的代数簇称为 MMP 的**输出** (要么是极小模型, 要么是森纤维空间)。对于极小模型纲领, 有如下结果。

定理 2.2 (标量 MMP 的终结定理). [5, Corollary 1.4.2] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 (X, B) 是 \mathbb{Q} -分解的具有 *klt* 奇点的代数簇对, 其中 $K_X + B$ \mathbb{R} -Cartier 除子, 且 B 是 π -big。若 $C \geq 0$ 为 \mathbb{R} -除子, 且 $K_X + B + C$ 具有 *klt* 奇点且 π -数值有效 (*nef*), 那么在 U 上运行 C -标量的 $(K_X + B)$ -MMP, 那么这个极小模型纲领将终结。

如果 $(K_X + B)$ -MMP 终结, 那么其输出和 $(K_X + B)$ 有下列关系:

定理 2.3 (极小模型输出). [5, Corollary 1.3.3] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 (X, B) 是 \mathbb{Q} -分解 *klt* 代数簇对, 其中 $K_X + B$ 是 \mathbb{R} -Cartier 除子。若 $K_X + B$ 不是 π -伪有效的, 那么运行 U 上的 $(K_X + B)$ -MMP, 将终结于森纤维空间 $g : Y \rightarrow Z$ 。

推论 2.4. [8, Corollary 13.7] 令 (X, B) 为 *klt* 代数簇对, \mathfrak{E} 是任意差异数满足 $a(E; X, B) \leq 0$ 的例外除子 E 的集合, 那么有双有理态射 $f : Z \rightarrow X$ 和 \mathbb{Q} -除子 B_Z 使得:

- (1) (Z, B_Z) 是 *klt* 代数簇对;
- (2) E 是 f -例外除子当且仅当 $E \in \mathfrak{E}$;
- (3) 若 $E \in \mathfrak{E}$ 则 $\text{mult}_E B_Z = -a(E; X, B)$, 且 $f_* B_Z = B$ 和 $K_Z + B_Z = f^*(K_X + B)$ 。

特别的, 若却 \mathfrak{E} 为所有差异数满足 $a(E; X, B) \leq 0$ 的例外除子 E 的集合, 那么 Z 被称为 X 的**终端化** (*terminalization*); 若取 $e \mathfrak{E}$ 为仅包含一个差异数满足 $a(E; X, B) \leq 0$ 的例外除子, 那么 $f : Z \rightarrow X$ 被称为**除子解压** (*divisorial extraction*).

定义 2.4. [4, Definition 3.3] 如果多个代数簇对 $\{(X_i, B_i)\}$ 是从算术光滑的代数簇对 (W, B_W) 的 $(K_W + B_W)$ -MMP 的不同结果, 则称它们为 MMP-相关的 (**MMP-related**).

引理 2.5. [4, Proposition 3.4] 令 $\{(X_l, B_l)\}$ 为有限多个互相双有理等价的 \mathbb{Q} -分解 klt 代数簇对, 那么下列条件等价:

(1) 它们是 MMP -相关的;

(2) 存在一个算术光滑代数簇对 (W, B_W) 和一组射影双有理态射 $f_l : W \rightarrow X_l$ 支配每个 X_l , 满足 $f_{l*} B_W = B_l$ 和分歧等式

$$K_W + B_W = f_l^*(K_{X_l} + B_l) + \sum_{\text{例外除子 } E_{li}} a_{li} E_{li}$$

其中对每个 f_l -例外除子 E_{li} 满足 $a_{li} > 0$ 的不等式条件;

(3) 对任意两个代数簇对 $(X, B = \sum_i b_i B_i), (X', B' = \sum_j b'_j B'_j)$, 有 $a(B_i; X', B') \geq -b_i$ 且严格不等式成立当且仅当 B_i 是 X' 上的例外除子。同样的, 有 $a(B'_j; X, B) \geq -b'_j$ 且严格不等式成立当且仅当 B'_j 是 X 上的例外除子。

证明. 我们给出 (3) \implies (2) 的简略证明: 令 W 为支配每个代数簇对 $(X_l, B_l = \sum b_{li} B_{li})$ 的算术光滑解消, 并有射影双有理态射 $f_l : W \rightarrow X_l$, 它们例外除子的并 $f_{l*}^{-1} B_l \cup E_{li}$ 是一个横截相交的除子。令 $B_W = \sum_t d_t D_t$, 其中如果 D_t 是 $\cup_l f_{l*}^{-1} B_l$ 中的某个素除子则 $d_t = b_{li}$, 如果 B_l 是每个 X_l 上的例外除子, 则 $d_t = 1$ 。由条件 (3), 这是定义良好的。那么 (W, B_W) 上的分歧等式 (ramification formula) 中的不等式条件也由 (3) 得到。 \square

2.3 模型及其有限性

定义 2.5. [10, §2] 对有理映射 $f : X \dashrightarrow Y$ 若有 f 的解消 $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow Y$ 满足 p 和 q 都是压缩态射且 p 双有理态射, 则称 f 为有理压缩映射 (**rational contraction**)。若 q 也是双有理态射, 且每个 p -例外除子都是 q -例外除子, 则称 f 为双有理压缩映射 (**birational contraction**)。如果 f^{-1} 也是双有理压缩映射, 则称 f 为小双有理映射 (**small birational map**)。

定义 2.6. [5, Definition 3.6.1] 令 $f : X \dashrightarrow Y$ 为正规拟射影代数簇间的双有理映射, 且 $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow Y$ 是 f 的解消。若 D 是 X 上的 \mathbb{R} -Cartier 除子, 满足 $D_Y = f_* D$ 也是 \mathbb{R} -Cartier 除子, 那么如果满足

- f 不解压任何除子 (即 f 是双有理压缩);
- $E = p^* D - q^* D_Y$ 是 Y 上的有效除子 (对应的, $\text{Supp } p_* E$ 包含全部 f -例外除子)。

则称 f 为 D -非正性的 (D -non-positive), 对应的, D -负性的 (D -negative)。

回顾双有理代数几何中关于模型的定义 [5]:

定义 2.7. [5, Definition 3.6.5] 令 $\pi : (X, D) \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, $K_X + D$ 是 X 上的 \mathbb{R} -Cartier 除子, 且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上的双有理映射。如果 f 是 $(K_X + D)$ -非正性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上半丰沛的, 那么称 Z 和 f 为关于 D 的半丰沛模型 (semiample model)。

令 $g : X \dashrightarrow Z$ 为 U 上的有理映射, $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow Z$ 是对 g 的解消, 其中 q 是压缩态射。若 Z 上有 U 上的丰沛除子 H , 且 $p^*(K_X + D) \sim_{\mathbb{R}, U} q^*H + E$, 其中 E 满足对任意的 $B \in |p^*(K_X + D)/U|_{\mathbb{R}}$ 都有 $B \geq E$, 则称 Z 是 X 关于 D 的丰沛模型 (ample model)。

定义 2.8. [5, Definition 3.6.7] 令 $\pi : (X, D) \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 若 $K_X + D$ 是 lc 且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是双有理压缩映射, 那么有如下定义:

- (1) 如果 f 是 $(K_X + D)$ -非正性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上数值有效的, 则称 Y 为关于 D 在 U 的弱算术典范模型 (weak log canonical model);
- (2) 如果 f 是 $(K_X + D)$ -非正性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上丰沛的, 则称 Y 为关于 D 在 U 的算术典范模型 (log canonical model);
- (3) 如果 f 是 $(K_X + D)$ -负性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上数值有效的和 \mathbb{Q} -分解的, 并且具有 dlt 奇点, 则称 Y 为关于 D 在 U 的算术终端模型 (log terminal model)。

引理 2.6. [5, lemma 3.6.6] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 D 是 X 上的 \mathbb{R} -Cartier 除子。

(1) 如果 $g_i : X \dashrightarrow X_i, i = 1, 2$ 是关于 D 的 U 上的两个丰沛模型, 那么有同构态射 $h : X_1 \rightarrow X_2$ 满足 $g_2 = h \circ g_1$ 。即丰沛模型在同构意义下唯一。

(2) 如果 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上关于 D 的半丰沛模型, 那么 U 上关于 D 的丰沛模型 $g : X \dashrightarrow Z$ 存在, 并且 $g = h \circ f$, 其中 $h : Y \rightarrow Z$ 是压缩态射, Z 上有对应丰沛除子 H 满足 $f_*D \sim_{\mathbb{R}, U} h^*H$ 。

(3) 若 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上双有理映射, 那么 f 是关于 D 在 U 上的丰沛模型当且仅当 f 是关于 D 在 U 上的半丰沛模型且 f_*D 在 U 上丰沛。

根据上述引理, 有算术典范模型的等价定义:

定义 2.9. 令 $\pi : (X, D) \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, $K_X + D$ 有 lc 奇点且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是不解压任何除子的双有理映射。如果 Y 是关于 D 在 U 上的丰沛模型, 那么称之为**算术典范模型 (log canonical model)**。

进一步, 对于边界是大除子的代数簇对, 还有

引理 2.7. [5, lemma 3.9.3] 令 $\pi : (X, B) \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 (X, B) 是具有 klt 奇点的代数簇对, B 在 U 上是大除子。如果 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上弱算术典范模型, 那么

- f 是 U 上半丰沛模型;
- U 上的丰沛模型 $g : X \dashrightarrow Z$ 存在;
- 存在压缩态射 $h : Y \rightarrow Z$ 和 Z 上在 U 上丰沛的 \mathbb{R} -除子, 使得 $K_Y + f_* B \sim_{\mathbb{R}, U} h^* H$ 。

下面给出除子的多面体相关的定义和定理:

定义 2.10. [5, Definition 1.1.4] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 V 是 $\text{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 的定义在有理数上的优先为子射影空间。取定一个 \mathbb{R} -除子 $A \geq 0$, 定义:

$$\mathcal{L}_A(V) = \{D = A + B : B \in V, K_X + D \text{ 有 lc 奇点且 } B \geq 0\}$$

$$\mathcal{E}_{A, \pi}(V) = \{D \in \mathcal{L}_A(V) : K_X + D \text{ 是 } U \text{ 上的伪有效除子}\}$$

令 $f : X \dashrightarrow Y$ 为 U 上的双有理压缩映射, 定义

$$\mathcal{W}_{A, \pi, f}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : f \text{ 是 } (X, D) \text{ 在 } U \text{ 上的弱算术典范模型}\}$$

令 $g : X \dashrightarrow Z$ 是 U 上的有理压缩映射, 定义

$$\mathcal{A}_{A, \pi, g}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : g \text{ 是 } (X, D) \text{ 在 } U \text{ 上的丰沛模型}\}$$

进一步, 将 $\mathcal{A}_{A, \pi, g}(V)$ 在 $\mathcal{L}_A(V)$ 中的闭包记作 $\mathcal{C}_{A, \pi, g}(V)$ 。

如果基底 U 是清楚的, 或是一个点, 那么我们省略 π , 简单记作 $\mathcal{E}_A(V)$ 和 $\mathcal{A}_{A, f}$ 。

定理 2.8. (弱算术典范模型有限性, [5, Theorem E]). 令 $\pi : X \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 A 是一个一般的在 U 上丰沛的 \mathbb{R} -除子, 且 $V \subset$

$\mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 是定义在有理数上的有限维线性子空间, 假设存在具有 klt 奇点的代数簇对 (X, Δ_0) 。那么存在有限多个 U 上的双有理映射 $f_i : X \dashrightarrow X_i, 1 \leq i \leq l$, 若某个 $D \in \mathcal{L}_A(V)$ 有关于 D 的在 U 上的弱算术典范模型 $f : X \dashrightarrow Y$, 那么对某个 $1 \leq i \leq l$ 存在同构态射 $h_i : X_i \rightarrow Y$ 使得 $f = h_i \circ f_i$ 。

2.4 叶状结构

这一节介绍带叶状结构的代数簇对的基本知识。

第3章 下降法

在这一章中，代数簇对 (X, B) 的边界除子 B 是 \mathbb{Q} -除子。

首先回顾 Corti [3] 给出的三维终端奇点的 Sarkisov 纲领。令 $f : X \rightarrow S$ 和 $f' : X' \rightarrow S'$ 是双有理等价的两个有终端奇点的三维森纤维空间。 S' 上的丰沛除子 A' 使得对某个 $\mu' > 0$ 有 X' 上的一般的丰沛除子 H' 满足 $H' \sim -\mu' K_{X'} + f'^* A'$ ，并令 H 是 H' 在 X 上的双有理变换 (birational transform)。取一个公共解消 $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow X'$ 。

- (1) 令 $\mu = \max\{c \in \mathbb{R} : K_X + \frac{1}{c}H \text{ 在 } S \text{ 上数值有效}\}$;
- (2) 令 $\lambda = \min\{c \in \mathbb{R} : (X, \frac{1}{c}H) \text{ 有典范奇点}\}$;
- (3) 令 $e = (X, \frac{1}{\lambda}H)$ 的无差异的例外除子的个数。

如果 $\lambda \leq \mu$ ，在 X 运行相对于恰当基底的 $(K_X + \frac{1}{\mu}H)$ -MMP；如果 $\lambda > \mu$ 则构造一个除子解压 (divisorial extraction) $p : Z \rightarrow X$ ，并运行相对于 S 的 $(K_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z)$ -MMP，这样得到第一个 Sarkisov 连接 $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$ 。这两种情况都是 2-ray games。用 X_1 和 $\Phi_1 = \Phi \circ \psi_1^{-1} : X_1 \dashrightarrow X'$ 替换 X 和 Φ ，并重复这个过程，这样递归地构造一系列 Sarkisov 连接。在这个过程中不变量 (μ, λ, e) 将按字典序下降，最终得到 $\Psi_N : X_{N-1} \dashrightarrow X_N$ ，且 $X_N \cong X'$ 。这就是三维终端奇点代数簇的 Sarkisov 纲领。

对于 \mathbb{Q} -分解的有 klt 奇点的代数簇对，考虑 MMP-相关的森纤维空间 (X, B) 和 (X', B') 。一个自然的想法是按如下定义 μ 和 λ ：

- (1) 令 $\mu = \max\{c \in \mathbb{R} : K_X + B + \frac{1}{c}H \text{ 在 } S \text{ 上数值有效}\}$;
- (2) 令 $\lambda = \min\{c \in \mathbb{R} : (X, B + \frac{1}{c}H) \text{ 有典范奇点}\}$;
- (3) 令 $e = (X, B + \frac{1}{\lambda}H)$ 的无差异的例外除子的个数。

对 λ 的定义将导致一些困难。当 $\lambda > \mu$ 时，为了构造 Sarkisov 连接需要在一个除子解压 $p : Z \rightarrow X$ 上运行 $(K_Z + B_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z)$ -MMP。这个除子解压会解压出一个素除子 E ，这个素除子 E 在 Z 的边界 B_Z 中的系数是 1。如果 E 是 (X', B') 的边界 B' 的一项，那么 E 在 B' 中的系数小于 1，这两者不匹配。另一方面，这是需要在具有 lc 奇点的代数簇对上运行 MMP，这比在具有 klt 奇点的代数簇对上的 MMP 有技术上的困难。除此之外，由于具有 klt 奇点的 Fano 代数簇对的有

界性失效，在证明 Sarkisov 纲领的终结性也有困难。

Bruno 和 Matsuki 给出了 λ 的另一种定义 (见 3.3)，且取决于特定的一个包含 (X, B) 和 (X', B') 的代数簇对的集合 C_θ ，这个集合满足：

- 对任意两个 C_θ 中的代数簇对 $(X, B), (X', B')$ ，存在 C_θ 中的代数簇对 (W, B_W) 和算术公共解消 $p : W \rightarrow (X, B)$ 和 $q : W \rightarrow (X', B')$ ，使得 (W, B_W) 具有 klt 奇点且 $p_* B_W = B, q_* B_W = B'$ 。
- 在集合中的任意代数簇对 (X, B) 和 (Z, B_Z) 上可以运行 $(K_X + B + cH)$ -MMP 和 $(K_Z + B_Z + cH_Z)$ -MMP，并且所有结果都任然在集合 C_θ 中；
- 所有 C_θ 中的代数簇对都具有 δ -lc 奇点，其中 δ 是取决于 C_θ 的正数。

3.1 定义与引理

令 $K = K(X)$ 是双有理等价类的有理函数域 (注意到双有理等价的代数簇有相同的有理函数域) 令 $\Sigma = \{v\}$ 是有理函数域的离散赋值的集合。

定义 3.1. [4, Definition 3.5] 取一个函数 $\theta : \Sigma \rightarrow [0, 1)_{\mathbb{Q}}$ ，那么可以定义关于 θ 的集合 C_θ ，包含满足下列条件的具有 klt 奇点的代数簇对 $(X, B = \sum a_i B_i)$ ：

- (1) $a_i = \theta(B_i)$;
- (2) 对所有 X 上的例外除子 E 有 $a(E; X, B) > -\theta(E)$ 。

注. 例如取 $\theta \equiv 0$ 为常值函数，那么 C_θ 是所有和 X 双有理等价的具有终端奇点的代数簇 Y (不带有边界)。

根据这个集合可以定义 θ -差异数 (θ -discrepancy)：

定义 3.2 (θ -差异数). 令 C_θ 为上述代数簇对的集合，且 (X, B) 是有理函数域满足 $K(X) = K$ 的代数簇对。令 $f : Y \rightarrow X$ 是 (X, B) 的一个算术奇点解消，有分歧等式：

$$K_Y + B_Y + C = f^*(K_X + B)$$

其中 $B_Y = f_*^{-1} B + \sum_{E_i \text{ exc}} \theta(E_i) E_i$ 。则 X 的例外除子 E_i 的 θ -差异数定义为

$$a_\theta(E_i; X, B) = -\text{mult}_{E_i} C.$$

或等价的，可以定义为

$$a_\theta(E_i; X, B) = a(E_i; X, B) + \theta(E_i).$$

如果 (X, B) 上的所有例外除子 E 满足 $a_\theta(E; X, B) \geq 0$ (对应的, $a_\theta(E; X, B) > 0$), 则称代数簇对 (X, B) 具有 θ -典范奇点 (对应的, θ -终端奇点)。

注. θ -典范代数簇对并不总在集合 C_θ 中。

Bruno 和 Matsuki 的 [4, Lemma 3.6] 构造了运行 Sarkisov 纲领所需要的集合 C_θ :

命题 3.1. 令 $f : (X, B) \rightarrow S$ 和 $f' : (X', B') \rightarrow S'$ 是两个 MMP-相关的具有 klt 奇点的 \mathbb{Q} -分解纤维空间, 有双有理映射 Φ :

$$\begin{array}{ccc} (X, B) & \xrightarrow{\Phi} & (X', B') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & & S' \end{array}$$

假设 $B = \sum_i b_i B_i + \sum_j d_j D_j$ 和 $B' = \sum_j d'_j D_j + \sum_k b'_k B'_k$, 其中 B_i 是在 X 上但不在 X' 上的除子, B'_k 是在 X' 上但不在 X 上的除子, 而 D_j 是在 X 和 X' 上的除子。由引理 2.5, 有 $d_j = d'_j$ 。取一个有理数 ϵ 满足

$$-\text{totdiscrep}(X, B), -\text{totdiscrep}(X', B') < \epsilon < 1$$

并按如下定义函数 $\theta : \{v\} \rightarrow [0, 1]_{\mathbb{Q}}$:

- 对于边界 B, B' 的除子, 有 $\theta(B_i) = b_i, \theta(D_j) = d_j, \theta(B'_k) = b'_k$;
- 如果 E 是 X 和 X' 上的例外除子, 则 $\theta(E) = \epsilon$;
- 如果 D 是 X 和 X' 上的除子, 但不是 B 或 B' 的部分, 则 $\theta(D) = 0$ 。

那么定义 3.1 构造的集合 C_θ 满足:

- (1) (X, B) 和 (X', B') 在集合 C_θ 中;
- (2) 对 C_θ 中任意有限多个具有 klt 奇点的代数簇对 $\{(X_l, B_l)\}$, 有 $(Z, B_Z) \in C_\theta$ 和射影双有理态射 $Z \rightarrow X_l$ 使得 X_l 是相对于 X_l 的 $(K_Z + B_Z)$ -MMP 的输出, 因此也是相对于 $\text{Spec } \mathbb{C}$ 的 $(K_Z + B_Z)$ -MMP 结果;
- (3) 任何从 C_θ 中一个元素出发的 $(K + B)$ -MMP, 其结果依然落入 C_θ 。如果对任何 $c \in \mathbb{Q}_{>0}$ 和无基点的除子 H 给出的 $(K + B + cH)$ -MMP 也成立。

注. 令 $\delta = 1 - \epsilon$, 那么所有 C_θ 中的代数簇对都是具有 δ -lc。

使用命题 3.1 中的假设和记号, 可以定义 Sarkisov 次数 (Sarkisov degree)。取 S' 上的极丰沛的除子 A' 和足够大和可除的整数 $\mu' > 1$ 使得

$$H' = |-\mu'(K_{X'} + B') + f'^* A'|$$

是 X' 在 $\text{Spec } \mathbb{C}$ 上的极丰沛的完全线性系。令 (W, B_W) 是 X 和 X' 在 C_θ 中的公共算术解消, 有射影态射 $\sigma : W \rightarrow X$ 和 $\sigma' : W \rightarrow X'$ 满足 $\sigma_* B_W = B, \sigma'_* B_W = B'$ 。令 $\mathcal{H}_W := \sigma'^* \mathcal{H}'$, 那么 $\mathcal{H} := \Phi_*^{-1} \mathcal{H}' = \sigma_* \mathcal{H}_W$ 。进一步, 如果 \mathcal{H} 不是无基点的, 那么

$$\sigma^* \mathcal{H} = \mathcal{H}_W + F$$

其中 $F = \sum f_l F_l \geq 0$ 是固定部分 (fixed part)。取线性系 \mathcal{H}' 中的一个一般除子 H' 使得 $H_W := \sigma'^* H' = \sigma'^{-1} H' \in \mathcal{H}_W$, 并记 $H := \Phi_*^{-1} H' = \sigma_* H_W$ 。那么 H 是 f -丰沛的, 且 $\sigma^* H = H_W + F$ 。通过取进一步的解消, 不妨设 H_W 与 σ 和 σ' 的例外除子各部分光滑且互相横截相交 (即 $(W, H_W + \text{Exc } \sigma + \text{Exc } \sigma')$ 是算术光滑的)。

接下来定义在 C_θ 中关于 H' (或 \mathcal{H}') 的 Sarkisov 次数:

定义 3.3. [4, Definition 3.8] C_θ 中关于 H' (或 \mathcal{H}') 的 Sarkisov 次数是一个按字典序排序的三元组 (μ, λ, e) , 其中:

- **数值有效阈值 μ :** 令 $C \subset X$ 是被 f 压缩的曲线, 那么

$$\mu := -\frac{H.C}{(K_X + B).C}$$

即 $K_X + B + \frac{1}{\mu} H \equiv_S 0$;

- **θ -典范阈值 $\frac{1}{\lambda}$:** 若 \mathcal{H} 无基点则定义 $\lambda = 0$; 否则定义

$$\frac{1}{\lambda} := \max\{t : a_\theta(E; X, B + tH) \geq 0, \forall X \text{ 上例外除子 } E\}$$

- **$(K_X + B_X + \frac{1}{\mu} H)$ -无差别除子个数:** $e = 0$ 若 \mathcal{H} 无基点 (此时 $\lambda = 0$) 则定义 $e = 0$; 否则定义

$$e = \#\{E; E \text{ 是 } \sigma\text{-例外除子, 且 } a_\theta(E; X, B + \frac{1}{\lambda} H) = 0\}$$

注. 对于 Sarkisov 次数, 有下列性质:

(1) Sarkisov 次数取决于 A', H' 和 θ 的选取。

(2) 取公共算术解消 $(W, B_W) \in C_\theta$, 其中 $B_W = \sum \theta(E)E$, 并且有射影双有理态射 $\sigma : W \rightarrow X, \sigma' : W \rightarrow X'$ 。由于 $\sigma^* \mathcal{H} = \mathcal{H}_W + \sum f_l F_l$, 所以有分歧等式:

$$K_W + B_W + tH_W = \sigma^*(K_X + B + tH) + \sum (a_l - tf_l)E_l$$

其中 $\sum a_l E_l$ 是有效除子且支撑在 $\text{Exc } \sigma$ 上。那么 $\lambda := \max\{\frac{f_l}{a_l}\}$ 。如果 H 是无基点的，那么 $\sum f_l F_l = 0$ 且 $\lambda = 0$ 。

(3) e 是公式

$$K_W + B_W + \frac{1}{\lambda} H_W = \sigma^*(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H) + \sum (a_l - \frac{1}{\lambda} f_l) E_l.$$

中系数 $\sum (a_l - \frac{1}{\lambda} f_l) E_l$ 为 0 的部分的个数。这样的素除子 E_1, \dots, E_e 称作 $(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H)$ - θ -无差别的。

需要构造在集合 C_θ 中的解压态射：

引理 3.2. 使用定义 3.3 中的记号，并假设 $\lambda \neq 0$ ，那么存在压缩态射 $f : Z \rightarrow X$ 满足：

- $(Z, B_Z) \in C_\theta$ 且 $(Z, B_Z + \frac{1}{\lambda} H_Z)$ 具有 θ -终端奇点的 \mathbb{Q} -分解代数簇对；
- $\rho(Z) = \rho(X) + 1$ ；
- f 是 $(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H)$ -无差别的，即

$$K_Z + B_Z + \frac{1}{\lambda} H_Z = f^*(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H)$$

证明. 按照 [4, Proposition 1.6] 的思路来证明。取定义 3.3 中的 $(W, B_W) \in C_\theta$ 和公共算术解消 $\sigma : W \rightarrow X, \sigma' : W \rightarrow X'$ 。将 $(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H)$ - θ -无差别除子重新编号 E_1, \dots, E_e ，那么有

$$K_W + B_W + \frac{1}{\lambda} H_W = \sigma^*(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H) + \sum_{l=1}^e 0 \cdot E_l + \sum_{l>e} (a_l - \frac{1}{\lambda} f_l) E_l.$$

在 W 上运行相对于 X 的对某丰沛除子标量的 $(K_W + B_W + \frac{1}{\lambda} H_W)$ -MMP，将终结于 $(W, B_W + \frac{1}{\lambda} H_W)$ 相对于 X 极小模型 $p : (Y, B_Y + \frac{1}{\lambda} H_Y) \rightarrow X$ ，且 p 的例外除子恰好是 $\cup_{i=1}^e E_i$ ，并且 p 是无差别的：

$$K_Y + B_Y + \frac{1}{\lambda} H_Y = p^*(K_X + B + \frac{1}{\lambda} H)$$

接下来运行相对于 X 的对某丰沛除子标量的 $(K_Y + B_Y)$ -MMP，将终结于 (Y, B_Y) 相对于 X 的极小模型，这个极小模型就是 (X, B) 。令 $f : Z \rightarrow X$ 是 MMP 中的最后一个除子压缩，那么 f 就是满足条件的除子解压态射。 \square

3.2 Sarkisov 纲领的流程

这一节主要按照 [4, §1] 的内容。

如果 $\lambda \leq \mu$ 且 $K_X + B + \frac{1}{\mu}H$ 是数值有效的, 那么两个森纤维空间是同构的, Sarkisov 纲领在此结束。

定理 3.3 (Noether-Fano-Iskovskikh 判定法). 按照定义 3.3 中的记号, 有

(1) $\mu \geq \mu'$;

(2) 如果 $\mu \geq \lambda$ 且 $(K_X + B + \frac{1}{\mu}H)$ 是数值有效的, 那么 Φ 是森纤维空间的同构, 即有交换图表:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xrightarrow{\sim} & S' \end{array}$$

证明. 按照 Hacon [8, Claim 13.20], Liu [9, Theorem 5.1] 和 Corti [3, Theorem 4.2] 的思路给出证明:

(1) 只需证明 $(K_X + B + \frac{1}{\mu'}H)$ 是 f -数值有效的。取公共解消 $\sigma : W \rightarrow X$ 和 $\sigma' : W \rightarrow X'$, 有分歧公式

$$\begin{aligned} K_W + B_W + \frac{1}{\mu'}H_W &= \sigma'^*(K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu'}H') + \sum e'_j E_j + \sum g'_k G'_k \\ &= \sigma^*(K_X + B + \frac{1}{\mu'}H) + \sum g_i G_i + \sum e_j E_j \end{aligned}$$

其中 $\{G_i\}, \{E_j\}$ 是 σ -例外除子, $\{E_j\}, \{G'_k\}$ 是 σ' -例外除子。即 G_i 是只在 σ 上例外的除子, G'_k 是只在 σ' 上例外除子, E_j 是在二者上都例外的除子。由于 $H_W = \sigma'^*H'$, 所以 $g'_k > 0$ 或者没有这样的 G'_k (这是由 B_W 的构造得到的)。取被 f 压缩的一般曲线 $C \subset X$, 且它在 W 的双有理原像 \tilde{C} 和 G_i, E_j 无交, 并且不包含在 G'_k 中。那么有

$$\begin{aligned} C \cdot \left(K_X + B + \frac{1}{\mu'}H \right) &= \tilde{C} \cdot \left(\sigma^* \left(K_X + B + \frac{1}{\mu'}H \right) + \sum g_i G_i + \sum e_j E_j \right) \\ &= \tilde{C} \cdot \left(\sigma'^* \left(K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu'}H' \right) + \sum e'_j E_j + \sum g'_k G'_k \right) \\ &= \tilde{C} \cdot \sigma'^* f'^* A' + \tilde{C} \cdot \left(\sum g'_k G'_k \right) \geq 0. \end{aligned}$$

由此推出 $(K_X + B + \frac{1}{\mu'}H)$ 是 f -数值有效的, 且 $\mu \geq \mu'$;

(2) 首先证明 $\mu = \mu'$ 。只需证 $\mu' \geq \mu$ ，同上，只需证 $(K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu}H')$ 是 f' -数值有效的。同上取被 f' 压缩的 X' 上的一般曲线 $C' \subset X'$ ，并且在 W 上的双有理原像 \tilde{C}' 和 G'_k, E_j 无交，并且不包含在 G_i 。那么同上可得到 $C' \cdot (K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu}H') \geq 0$ ，即 $(K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu}H')$ 是 f' -数值有效的。而 $(K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu'}H') \equiv_{f', \mathbb{Q}} 0$ ，所以 $\frac{1}{\mu} \geq \frac{1}{\mu'}$ ，这就推出 $\mu' \geq \mu$ 。

接下来证明它们同构。取 X 上极丰沛除子 D ，且 D' 是在 X' 上的严格双有理变换。那么 D' 是 f' -丰沛的，所以存在 $0 < d \ll 1$ 使得：

- $K_X + B + \frac{1}{\mu}H + dD$ 是丰沛除子；
- $K_{X'} + B' + \frac{1}{\mu}H' + dD'$ 是丰沛除子；
- $(W, B_W + \frac{1}{\mu}H_W + dD_W)$ 具有 klt 奇点 (因为 $\mu \geq \lambda$ ，所以可以做到)。

因此 X 和 X' 都是 $(W, B_W + \frac{1}{\mu}H_W + dD_W)$ 的算术典范模型，由算术典范模型的唯一性， $X \cong X'$ 。更进一步， f 和 f' 压缩相同的曲线数值等价类，所以两个森纤维空间同构。

□

如果 Noether-Fano-Iskovskikh 判定法的条件不成立，则进行 Sarkisov 纲领的归纳构造。

引理 3.4. (1) 如果 $\lambda \leq \mu$ 且 $K_X + B + \frac{1}{\mu}H$ 不是数值有效的，那么存在压缩态射 $f : X \rightarrow T$ 和 III 或 IV 型 Sarkisov 连接 $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$ ；

(2) 如果 $\lambda > \mu$ 那么存在除子压缩 (除子解压) $p : Z \rightarrow X$ 和 I 或 II 型 Sarkisov 连接 $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$ 。

证明. 分两种情况考虑：

(1) 假设 $\lambda \leq \mu$ 和 $K_X + B + \frac{1}{\mu}H$ 不是数值有效的。记 f 是 $(K_X + B)$ -负性的极端射线 $R = \overline{\text{NE}}(X/S)$ 的压缩态射，那么由 μ 的定义有 $(K_X + B + \frac{1}{\mu}H) \cdot R = 0$ 。存在极端射线 $P \subset \overline{\text{NE}}(X)$ 使得 $(K_X + B + \frac{1}{\mu}H) \cdot P < 0$ 且 $F := P + R$ 是极端面 (细节见 [3, 5.4.2])。取 $0 < \delta \ll 1$ 使得 $(K_X + B + (\frac{1}{\mu} - \delta)H) \cdot P < 0$ ，由于 H 是 f -丰沛的，有 $(K_X + B + (\frac{1}{\mu} - \delta)H) \cdot R < 0$ 。因此 F 是 $(K_X + B + (\frac{1}{\mu} - \delta)H)$ -负性的极端面。由于 $(X, B + (\frac{1}{\mu} - \delta)H)$ 有 klt 奇点，由压缩定理，存在关于 F 的压缩态射 $g : X \rightarrow T$ 穿过 $f : X \rightarrow S$ 。由于 $(X, B + \frac{1}{\mu}H)$ 具有 klt 奇点，且 $\rho(X/T) = 2$ ，

可以运行相对于 T 的关于某丰沛除子标量的 $(K_X + B + \frac{1}{\mu}H)$ -MMP。由于 $B + \frac{1}{\mu}H$ 是相对于 T 的大除子，这个 MMP 终结。有下列情况：

(1).1 在有限多步翻转复合 $X \dashrightarrow Z$ 后，第一个非翻转的压缩态射是一个除子压缩 $p : Z \rightarrow X_1$ ，之后是一个森纤维空间的压缩态射 $f_1 : (X_1, B_1 + \frac{1}{\mu}H_1) \rightarrow S_1$ 。这个压缩态射 f_1 也是关于 (X_1, B_1) 的森纤维空间。这是第三型的 Sarkisov 连接。

(1).2 在有限多步翻转复合 $X \dashrightarrow X_1$ 后，第一个非翻转的压缩态射是森纤维空间的压缩态射 $f_1 : (X_1, B_1 + \frac{1}{\mu}H_1) \rightarrow S_1$ 。这个压缩态射 f_1 也是关于 (X_1, B_1) 的森纤维空间。这是个第四型的 Sarkisov 连接。

(1).3 在有限多步翻转复合 $X \dashrightarrow Z$ 后，第一个非翻转的压缩态射是一个除子压缩 $p : Z \rightarrow X_1$ ，且

$$K_Z + B_Z + \frac{1}{\mu}H_Z = p^*(K_{X_1} + B_1 + \frac{1}{\mu}H_1) + eE$$

其中 $e > 0$, $E = \text{Exc } p$ 且 $f_1 : (X_1, B_1 + \frac{1}{\mu}H_1) \rightarrow T$ 是关于 $(X, B + \frac{1}{\mu}H)$ 在 T 上的极小模型。事实上 $\overline{\text{NE}}(X_1/T)$ 唯一的极端射线是 $(K_{X_1} + B_1 + \frac{1}{\mu}H_1)$ -平凡的，所以是 $(K_{X_1} + B_1)$ -负性的。所以 $f_1 : (X_1, B_1) \rightarrow T$ 是森纤维空间。取 $S_1 = T$ ，这是 III 型 Sarkisov 连接。

(1).4 在有限多步翻转复合 $X \dashrightarrow Z$ 后， $(K_X + B + \frac{1}{\mu}H)$ -MMP 终结于 T 上的极小模型 $(X_1, B_1 + \frac{1}{\mu}H_1)$ 。那么存在 $\overline{\text{NE}}(X_1/T)$ 的极端射线 R ，并且是 $(K_{X_1} + B_1 + \frac{1}{\mu}H_1)$ -平凡的和 $(K_{X_1} + B_1)$ -负性的。令 $f_1 : X_1 \rightarrow S_1$ 为关于 R 的压缩态射，这是第四型的 Sarkisov 连接。

(2) 假设 $\lambda > \mu$ 。取引理3.2构造的除子解压 $p : (Z, B_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z) \rightarrow (X, B + \frac{1}{\lambda}H)$ ，即 (Z, B_Z) 具有 θ -终端奇点且 $p^*(K_X + B + \frac{1}{\lambda}H) = K_Z + B_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z$ ，其中 $B_Z = \sum \theta(E_\nu)E_\nu$ 。运行相对于 S 的对某丰沛除子标量的 $(K_Z + B_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z)$ -MMP，由于 Z 被 $(K_Z + B_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z)$ -负性的曲线覆盖， $(K_Z + B_Z + \frac{1}{\lambda}H_Z)$ 不是相对伪有效的。因此由2.3这个 MMP 终结于森纤维空间。有下列两种情况：

(2).1 在有限多步翻转复合 $X \dashrightarrow X'$ 后，第一个非翻转的压缩态射是一个除子压缩 $q : Z' \rightarrow X_1$ ，接着是森纤维空间压缩态射 $f_1 : (X_1, B_1 + \frac{1}{\lambda}H_1) \rightarrow S$ 。令 $S_1 = S$ ，那么压缩态射 f_1 同时也是关于 (X_1, B_1) 的森纤维空间。这是第二型的 Sarkisov 连接。

(2).2 在有限多步翻转复合 $Z \dashrightarrow X_1$ 后，第一个非翻转的压缩态射是森

纤维空间 $f_1 : (X_1, B_1 + \frac{1}{\lambda}H_1) \rightarrow S_1$ 由于 $(K_{X_1} + B_1 + \frac{1}{\lambda}H_1)$ 是在 S_1 上反丰沛 (anti-ample) 的除子, 且 H_1 f_1 -丰沛的所以 $(K_{X_1} + B_1)$ 在 S_1 上反丰沛。因此 $f_1 : (X_1, B_1) \rightarrow S_1$ 是森纤维空间, 这个第一型的 Sarkisov 连接。

□

用 (X_1, B_1) 和 $\Phi_1 = \Phi \circ \psi_1^{-1}$ 替换 (X, B) 和 Φ , 并重复上述引理内容。

注. Sarkisov 次数在此过程中按字典序下降:

- 对于 (1):
 - (1).1 和 (1).2 的情况下, 由于 $K_{X_1} + B_1 + \frac{1}{\mu}H_1$ 在 S_1 上反丰沛, 所以有 $\mu_1 < \mu$ 。
 - (1).3 和 (1).4 的情况下, 由于 $(K_{X_1} + B_1 + \frac{1}{\mu}H_1)$ 在射线 $R = \overline{NE}(X_1/S_1)$, 所以有 $\mu_1 = \mu$ 。注意到 $(X_1, B_1 + \frac{1}{\mu}H_1)$ 任然具有 θ -典范奇点, 所以 $\lambda_1 \leq \mu = \mu_1$, 所以下一个 Sarkisov 连接依然是情况 (1)。对于 (1).3 的情况, 还有 $\rho(X_1) = \rho(X) - 1$ 。
- 对 (2).1, 有 $\mu_1 \leq \mu$ 和 $\lambda_1 \leq \lambda$ 。且如果 $\lambda_1 = \lambda$, 那么 $e_1 < e$ 。

3.3 下降法的终结性

Bruno 和 Matsuki 给出的下降法的 Sarkisov 纲领的终结性需要下列条件:

(1) 数值有效阈值 μ 的离散性 (或者 DCC)。由于本章的代数簇对 (X, B) 的边界除子是 \mathbb{Q} -除子, 由 δ -lc Fano 代数簇对的有界性和相关定理 ([7, Theorem 1.1]), 任意维数下此条件都成立 (离散的正有理数集满足 DCC)。

(2) 翻转的终结性 (这对高维情况还没有完全证明);

(3) lct 的 ACC (ascending chain condition of log canonical thresholds);

(4) 对具有终端奇点的代数簇的 Sarkisov 纲领需要局部 lct 的有限性; 对具有 klt 奇点的代数簇对的 Sarkisov 纲领需要局部 θ -ct (θ -canonical thresholds) 的有限性终端奇点的代数簇对的局部 lct 的有限性。这些在四维及以上的情况还不清楚。

用反证法部分证明终结性:

如果上一节中构造的 Sarkisov 连接构成无限长的序列, 即有无限多个 X_i 和构造的映射:

$$X = X_0 \dashrightarrow X_1 \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow \cdots \dashrightarrow X'$$

(1) 由 μ_i 的离散性 (DCC), 不妨设在有限步后 μ_i 是常值, 不再下降。或者不妨设 $\mu = \mu_0 = \mu_i$ 对所有 i 成立。

(2) 如果序列中有一个第三型或第四型的 Sarkisov 连接 ψ_i , 那么后续每一个 Sarkisov 连接 $\psi_j, j > i$ 都是第三型或第四型 (见注 3.2)。由于第三型 Sarkisov 连接的 Picard 数严格下降, 所以只有有限多个。于是在 $j \gg 0$ 时 ψ_j 全部为第四型 Sarkisov 连接, 同时也是无限多个翻转的复合。对于三维代数簇对和四维伪有效的代数簇对, 这样的翻转只有有限多步, 这是一个矛盾。

(3) 假设所有 Sarkisov 连接都是第一型或者第二型的。lct 的 ACC 对所有维数都成立 [6], 素以存在整数 α 使得对 $i \gg 0$ 有 $(X_i, B_i + \alpha H_i)$ 具有 klt 奇点, 并且每个 Sarkisov 连接 $\psi_i, i \gg 0$ 都同时是相对于 S_i 的 $(K_{Z_i} + B_{Z_i} + \alpha H_{Z_i})$ -MMP 结果。在具有终端奇点的三维代数簇的情况, 这和 θ -典范阈值的有限性矛盾 (具体见 [4, Claim 2.2])。

第4章 双标量法

本章介绍 [8, §13] 和 [9] 中的双标量法构造 (double scaling) 的 Sarkisov 纲领。下降法用 X' 上的除子 H' 来作为标量, 双标量法在 X 和 X' 上分别构造除子 G 和 H' , 作为双标量。令 W 为 MMP-相关的森纤维空间 $f : (X, B) \rightarrow S$ 和 $f' : (X', B') \rightarrow S'$ 的公共解消, 取在 S 上的 \mathbb{Q} -除子 A 使得 $G \sim_{\mathbb{Q}} -(K_X + B) + f^*A$ 是一般的丰沛 \mathbb{Q} -除子。类似的, 取 S' 上的丰沛 \mathbb{Q} -除子, 使得 $H' \sim_{\mathbb{Q}} -(K_{X'} + B') + f'^*A'$ 是一般的丰沛 \mathbb{Q} -除子。那么 $(X, B + G)$ 和 $(X', B' + H')$ 是 W (关于 $B_W + G_W$ 和 $B_W + H_W$) 的两个弱算术典范模型。双标量 Sarkisov 纲领将构造 W 的有限多个弱算术典范模型 $(X_i, B_i + g_i G_i + h_i H_i)$, 它们是分别关于 $(W, B_W + g_i G_W + h_i H_W)$ 的模型, 其中 $0 \leq g_i, h_i \leq 1$ 。这些模型间的双有理映射 $\psi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是通过 2-ray game 构造的 Sarkisov 连接映射。

和下降法相比, 这种方法在一个更小的集合内运行 MMP 和 Sarkisov 纲领。所有的 X_i 都对应一个 $(K_W + D_i)$ -非正性的双有理压缩映射 $W \dashrightarrow X_i$, 其中 D_i 是 $\text{WDiv}_{\mathbb{R}}(W)$ 的一个紧子集 $\mathcal{E}_A(V)$ 。对于这个子集有弱算术典范模型的有限性性质, 由此可以得到双标量法的 Sarkisov 纲领的终结性。

4.1 定义和引理

令 (W, B_W) 是 \mathbb{Q} -分解具有 klt 奇点的代数簇对, 并且 $f : (X, B) \rightarrow S$ 和 $f' : (X', B') \rightarrow S'$ 是两个不同的 $(K_W + B_W)$ -MMP 的输出, 且都是森纤维空间。接下来给出一些所需的记号和引理。

定义 4.1. 令 $f : W \dashrightarrow X$ 是正规拟射影代数簇间的双有理映射, 如果

- f 不解压除子;
- 对所有在 W 之上的 (包括更高模型上的) 除子 E 都有 $a(E; X, B_X) \geq a(E; W, B_W)$,

那么记 $(W, B_W) \geq (X, B_X)$ 。

对于具有终端奇点的代数簇对, 有下面的引理:

引理 4.1. [8, Lemma 13.8] 令 $f : W \dashrightarrow X$ 是双有理映射且 (W, B_W) 具有终端奇点。如果

- f 不解压除子;
- $K_X + B$ 是数值有效除子, 其中 $B = f_* B_W$;
- 对所有 $E \subset W$ 之上的除子 E 都有 $a(E; X, B) \geq a(E; W, B_W)$ 。

那么有

- $(W, B_W) \geq (X, B_X)$;
- (X, B_X) 具有 klt 奇点;
- 如果 $Z \rightarrow X$ 是关于 E 的除子解压, 其中 $a(E; X, B_X) \leq 0$, 那么 E 是 W 上的除子;
- 如果 $Z \rightarrow X$ 是 (X, B_X) 的终端化, 那么 $W \dashrightarrow Z$ 不解压除子。

相反的, 从非正性映射出发, 可以构造这样的具有终端奇点的更高模型:

引理 4.2. [9, Lemma 3.5] 令 $\sigma : (W, B_W) \dashrightarrow (X, B)$ 是 $(K_W + B_W)$ -非正性双有理映射, 使得 $\sigma_*(K_W + B_W) = K_X + B$ 且 (W, B_W) 是 \mathbb{Q} -分解的具有 klt 奇点的代数簇对, 那么存在一个映射解消 $\pi : \tilde{W} \rightarrow W$ 和 $\tilde{\sigma} : \tilde{W} \rightarrow X$ 使得

- $(\tilde{W}, B_{\tilde{W}})$ 是 \mathbb{Q} -分解的具有终端奇点的代数簇对, 且 $\tilde{\sigma}_* B_{\tilde{W}} = B$;
- $\tilde{\sigma}$ 是 $(K_{\tilde{W}} + B_{\tilde{W}})$ -非正性的且 $(\tilde{W}, B_{\tilde{W}}) \geq (X, B)$;

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{W} & \\ \swarrow & & \searrow \\ (W, B_W) & \dashrightarrow & (X, B) \end{array}$$

通过应用引理 4.2, 可以调整双标量法 Sarkisov 纲领的初始设定:

断言 4.3. 用 (W, B_W) 的奇点解消代替它, 使得 (W, B_W) 具有终端奇点, 且 $\sigma : W \rightarrow X$ 和 $\sigma' : W \rightarrow X'$ 是 $(K_W + B_W)$ -非正性态射, 并且 $(W, B_W) \geq (X, B), (X', B')$ 。

取 S 和 S' 上的极丰沛 \mathbb{Q} -除子 A 和 A' 使得 $G \sim_{\mathbb{Q}} -(K_X + B) + f^* A$ 和 $H \sim_{\mathbb{Q}} -(K_{X'} + B') + f'^* A'$ 是丰沛 \mathbb{Q} -除子。进一步, 可以假设 G 和 H 满足 $G_W := \sigma^* G = \sigma_*^{-1} G$ 和 $H_W := \sigma'^* H = \sigma'^{-1} H$ 。因此 $\sigma_*(K_W + B_W + G_W) = K_X + B + G$ 是数值有效的, 因此引理 4.1 的结论满足。如果必要的话取进一步解消, 可以假设 $(W, B_W + gG_W + hH_W)$ 算术光滑, 并且对所有 $0 \leq g, h \leq 2$ 都具有终端奇点。

在这个设定下, 有双标量的 Sarkisov 纲领:

定理 4.4 (双标量 Sarkisov 纲领). [8, Claim 13.12] 沿用上述记号, 有有限多个 Sarkisov 连接的序列

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \dashrightarrow & X_1 & \dashrightarrow & X_2 & \dashrightarrow & \cdots \dashrightarrow X_N = X' \\ f=f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_N \downarrow \\ S = S_0 & & S_1 & & S_2 & & S_N = S' \end{array}$$

和有理数

$$1 = g_0 \geq g_1 \geq \cdots \geq g_N = 0$$

$$0 = h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_N = 1$$

满足

(1) 对每个 i , 双有理压缩映射 $\sigma_i : W \dashrightarrow X_i$ 都是 $(K_W + B_W + g_i G_W + h_i H_W)$ -非正性的, 并且 $(K_{X_i} + B_i + g_i G_i + h_i H_i) = \sigma_{i*}(K_W + B_W + g_i G_W + h_i H_W)$ 是数值有效的, 且相对于 S_i 数值平凡;

(2) $(W, B_W + g_i G_W + h_i H_W) \geq (X_i, B_i + g_i G_i + h_i H_i)$;

(3) 每一个 Sarkisov 连接 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 都是一组 $(K_{X_i} + B_i + g_i G_i + h_i H_i)$ -平凡的映射的复合;

(4) 最后一个森纤维空间 $X_N \rightarrow S_N$ 同构于 $X' \rightarrow S'$ 。

这里平凡映射指

定义 4.2. [8, §13.2] 令 $f : X \dashrightarrow Y$ 是相对于 S 正规拟射影代数簇间的有理映射, 并且 D 是 X 上 \mathbb{R} -Cartier \mathbb{R} -除子, 且 $f_* D = D_Y$ 。如果 D 是 S 上某个 \mathbb{R} -Cartier 除子的拉回, 那么称 f 为 D -平凡 (D -trivial)。

4.2 用双标量法构造 Sarkisov 连接

这一节将归纳地构造 Sarkisov 连接。对于森纤维空间 $X = X_0 \rightarrow S = S_0$, 将 $(X_0, B_0 + 1 \cdot G_0 + 0 \cdot H_0)$ 看作 $(W, B_W + 1 \cdot G_W + 0 \cdot H_W)$ 的弱算术典范模型, 并把 $(X', B' + 0 \cdot G' + 1 \cdot H')$ 看作 $(W, B_W + 0 \cdot G_W + 1 \cdot H_W)$ 的弱算术典范模型。归纳地构造 $f_i : X_i \rightarrow S_i$, 使得 $(X_i, B_i + g_i \cdot G_i + h_i \cdot H_i)$ 是 $(W, B_W + g_i \cdot G_W + h_i \cdot H_W)$ 的弱算术典范模型。在这个过程中, g_i 逐渐减少为 $g_N = 0$, 而 h_i 逐渐增加为 $h_N = 1$, 并且 $X_N \rightarrow S_N$ 与 $X' \rightarrow S'$ 同构。

假设已经构造定理4.4中的映射 $\sigma_i : W \dashrightarrow X_i$, 即

- $f_i : (X_i, B_i) \rightarrow S_i$ 是森纤维空间, 且 $\sigma_{i*} B_W = B_i$;
- $\sigma_i : W \dashrightarrow X_i$ 是 $(K_W + B_W + g_i G_W + h_i H_W)$ -非正性的, 且

$$(K_{X_i} + B_i + g_i G_i + h_i H) = \sigma_{i*}(K_W + B_W + g_i G_W + h_i H_W)$$

是数值有效的, 并且相对于 S_i 数值平凡;

- $(W, B_W + g_i G_W + h_i H_W) \geq (X_i, B_i + g_i G_i + h_i H_i)$;
- $0 \leq g_i, h_i \leq 1$.

那么构造下一个满足定理4.4的 Sarkisov 连接 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 。类比下降法的 Sarkisov 次数, 引入下列记号:

定义 4.3. 令 C_i 是被 f_i 压缩的 (也称为 f -vertical) X_i 上的曲线, 那么

- $r_i := \frac{H_i \cdot C_i}{G_i \cdot C_i}$;
- 令 Γ 是满足下列条件的 $t \in [0, \frac{g_i}{r_i}]$ 的集合
 - $(W, B_W + g_i G_W + h_i H_W + t(H_W - r_i G_W)) \geq (X_i, B_i + g_i G_i + h_i H_i + t(H_i - r_i G_i))$;
 - $K_{X_i} + B_i + g_i G_i + h_i H + t(H_i - r_i G_i)$ 数值有效.

令 $s_i = \max \Gamma$;

- 记 $D_{W,i} = B_W + g_i G_W + h_i H_W$ 和 $D_i = B_i + g_i G_i + h_i H_i$, 并记

$$D_{W,i}(t) = B_W + g_i G_W + h_i H_W + t(H_W - r_i G_W)$$

和

$$D_i(t) = B_i + g_i G_i + h_i H_i + t(H_i - r_i G_i)$$

令 $g_{i+1} = g_i - r_i s_i$ 和 $h_{i+1} = h_i + s_i$ 。注意到 $D_{W,i+1} = D_{W,i}(s_i)$ 。

那么有

- (1) $r_i > 0$;
- (2) $\Gamma = \{0\}$ 或 Γ 是闭区间
- (3) $g_{i+1} = g_i \Leftrightarrow h_{i+1} = h_i \Leftrightarrow s_i = 0$;

(细节见 [9, Lemma 4.4])

终结判定: 如果 $s_i = \frac{g_i}{r_i}$, 此时 $g_{i+1} = 0$ 。令 $N = i + 1$, 并令 $f_N : X_N = X_i \rightarrow S_N = S_i$, 那么 $h_N = 1$ 且 $X_N \rightarrow S_N$ 与 $f' : X' \rightarrow S'$ 同构 (见命题 4.8), 这样双标量 Sarkisov 纲领停止。此时事实上 $X_i \cong X_N, S_i \cong S_N$, 但是对二者的边界不同, 而 X_N 的边界 B_N 与 (X', B') 的边界 B' 相同。

命题 4.5 (构造 Sarkisov 连接). 如果 $s_i < \frac{g_i}{r_i}$, 那么可以构造 Sarkisov 连接 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 。

证明. 分两种情况构造:

(1) 若 s_i 不是集合 Γ 的第一个条件

$$(W, B_W + g_i G_W + h_i H_W + t(H_W - r_i G_W)) \geq (X_i, B_i + g_i G_i + h_i H_i + t(H_i - r_i G_i))$$

的阈值, 也就是说存在 $0 < \epsilon \ll 1$, 使得 W 上任意除子 E , 都有

$$a(E; X_i, D_i(s_i + \epsilon)) \geq a(E; W, D_{W,i}(s_i + \epsilon))$$

并且 $K_{X_i} + D_i(s_i + \epsilon)$ 不是数值有效。那么对某个 $0 < \delta \ll \epsilon$, 存在一个 2 维的 $(K_{X_i} + D_i(s_i + \epsilon) - \delta G_i)$ -负性极端面 F , 由 $R = \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$ 和令一个极端射线 P 张成 (spanned by)。于是存在关于 F 的压缩态射 $X_i \rightarrow T_i$ 穿过 f_i 。

$$\begin{array}{ccc} X_i & & \\ \downarrow & \searrow & \\ S_i & & T_i \end{array}$$

接着运行相对于 T_i 的关于某丰沛除子标量的 $(K_{X_i} + D_i(s_i + \epsilon))$ -MMP, 在有限多个翻转后, 会接着一个关于 $(K_{X_i} + D_i(s_i + \epsilon))$ 的森纤维空间, 或一个除子压缩, 或一个极小模型。

(1.1) 若记 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是翻转的复合, 并且接着森纤维空间压缩 $X_{i+1} \rightarrow S_{i+1}$, 那么这是第四型的 Sarkisov 连接;

$$\begin{array}{ccc} X_i & \dashrightarrow & X_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_i & & S_{i+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & T_i & \end{array}$$

(1.2) 若记 $X_i \dashrightarrow Z_i$ 是翻转的复合, 并接着一个除子压缩态射 $Z_i \rightarrow X_{i+1}$, 那么令 $S_{i+1} = T_i$, 则 $X_{i+1} \rightarrow S_{i+1}$ 是一个森纤维空间。这是第三型的 Sarkisov 连

接。

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \dashrightarrow & Z_i \\
 \downarrow & & \searrow \\
 S_i & & X_{i+1} \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & T_i & \xrightarrow{\sim} S_{i+1}
 \end{array}$$

(1.3) 若记 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是翻转的复合, 且 $X_{i+1} \rightarrow T_i$ 是关于 $(X_i, D_i(s_i + \epsilon))$ 相对于 T_i 的极小模型。令 C' 是 C_i 在 X_{i+1} 上的双有理变换, 则有 $(K_{X_{i+1}} + D_{i+1}(\epsilon)).C' = 0$ 和 $(K_{X_{i+1}} + B_{i+1}).C' < 0$, 因此有压缩态射 $X_{i+1} \rightarrow S_{i+1}$ 相对于 T_i 。这个态射是森纤维空间, 并且这是第四型 Sarkisov 连接。

$$\begin{array}{ccc}
 X_i & \dashrightarrow & X_{i+1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 S_i & & S_{i+1} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & T_i &
 \end{array}$$

注意到 $(K_{X_i} + D_i(s_i))$ 及其严格双有理变换都是相对于 S_i 上数值平凡的, 由锥定理 2.1, 此时的 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是一系列 $(K_{X_i} + D_i(s_i))$ -平凡映射的复合。

(2) 如果 s_i 集合 Γ 的第一个条件 4.3 的阈值, 也就是说存在 $0 < \epsilon \ll 1$ 和 W 上的 σ_i -例外除子 E_i 使得

$$a(E_i; X_i, D_i(s_i + \epsilon)) < a(E_i; W, D_{W,i}(s_i + \epsilon))$$

此时有

$$a(E_i; X_i, D_i(s_i)) = a(E_i; W, D_{W,i}(s_i)) = -\text{mult}_{E_i}(D_{W,i}(s_i)) \leq 0$$

令 $p_i : Z_i \rightarrow X_i$ 是推论 2.4 中除子 E_i 的除子解压, 并且记

$$K_{Z_i} + D_{Z_i}(s_i) = K_{Z_i} + B_{Z_i} + g_{i+1}G_{Z_i} + h_{i+1}H_{Z_i} = p_i^*(K_{X_i} + D_i(s_i))$$

取充分小的 δ 使得 $0 < \delta \ll \epsilon \ll 1$ 且

$$K_{Z_i} + \Delta_i = p_i^*(K_{X_i} + D_i(s_i + \epsilon) - \delta G_i)$$

是 klt 奇点。接下来运行相对于 S_i 的 $(K_{Z_i} + \Delta_i)$ -MMP。由于 Z_i 被 $(K_{Z_i} + \Delta_i)$ -负性的曲线覆盖, 所以 $(K_{Z_i} + \Delta_i)$ 相对于 S_i 不是伪有效的, 并且这个 MMP 终结于森

纤维空间。同时，对一任意 $0 < \delta' \leq \delta$ ，这也是 $p_i^*(K_{X_i} + D_i(s_i + \epsilon) - \delta' G_i)$ -MMP。在有限多步翻转之后，要么终结于 $(K_{Z_i} + \Delta_i)$ 的森纤维空间，要么 $(K_{Z_i} + \Delta_i)$ 的除子压缩。

(2).1 若记 $Z_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是有限步翻转的复合，并终结于森纤维空间

$$X_{i+1} \rightarrow S_{i+1}$$

那么是第一型的 Sarkisov 连接。

$$\begin{array}{ccc} & Z_i & \dashrightarrow X_{i+1} \\ & \swarrow & \downarrow \\ X_i & & S_{i+1} \\ \downarrow & \swarrow & \\ S_i & & \end{array}$$

在这种情况下有 $\rho(X_{i+1}) = \rho(X_i) + 1$ 。

(2).2 若记 $Z_i \dashrightarrow Z'_i$ 是有限步翻转的复合，并且接着相对于 S_i 的除子压缩

$$q_i : Z'_i \rightarrow X_{i+1}$$

那么 $X_{i+1} \rightarrow S_i =: S_{i+1}$ 是森纤维空间，这是第二型 Sarkisov 连接。

$$\begin{array}{ccc} & Z_i & \dashrightarrow Z'_i \\ & \swarrow & \searrow \\ X_i & & X_{i+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_i & \xrightarrow{\sim} & S_{i+1} \end{array}$$

注意到 $(K_{X_i} + D_i(s_i))$ 及其严格双有理变换都是相对于 T_i 上数值平凡的，由锥定理2.1，此时的 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是一系列 $(K_{X_i} + D_i(s_i))$ -平凡映射的复合。

□

类似于下降法中的 Sarkisov 次数，定义4.3中的不变量也有变化：

断言 4.6. 由 [8, Lemma 13.14-17] 和 [9, Lemma 4.2] 可以得到：

(1) $r_i \leq r_{i+1}$ 。在 (1).1 的情况，还有 $r_i < r_{i+1}$ 。

(2) 在情况 (1) 中由于 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是相对于 T_i 的 $(K_{X_i} + D_i(s_i))$ -平凡映射, 所以对任意的 W 之上的除子 E , 都有

$$a(E; X_i, D_i(s_i)) = a(E; X_{i+1}, D_{i+1})$$

和不等式

$$a(E; X_{i+1}, D_{i+1}) \geq a(E; W, D_{W,i+1})$$

(3) 在情况 (2) 中由于 $X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是相对于 S_i 的 $(K_{X_i} + D_i(s_i))$ -平凡映射, 所以同样对任意的 W 之上的除子 E , 都有

$$a(E; X_i, D_i(s_i)) = a(E; X_{i+1}, D_{i+1})$$

和不等式

$$a(E; X_{i+1}, D_{i+1}) \geq a(E; W, D_{W,i+1})$$

(4) 在情况 (1) 中, 任意 W 之上的除子 E 和 $0 < \epsilon \ll 1$, 都有

$$a(E; X_i, D_i(s_i + \epsilon)) \leq a(E; X_{i+1}, D_{i+1}(\epsilon))$$

并且因为 $X_i \not\cong X_{i+1}$, 所以有 W 之上的除子 F 使得

$$a(F; X_i, D_i(s_i + \epsilon)) < a(F; X_{i+1}, D_{i+1}(\epsilon))$$

(5) 在情况 (2) 中, 任何 W 之上的除子 E , 对所有 $0 < \epsilon \ll 1$ 都有

$$a(E; X_i, D_i(s_i + \epsilon) - \delta G_i) \leq a(E; X_{i+1}, D_{i+1}(\epsilon) - \delta G_{i+1})$$

并且因为 $X_i \not\cong X_{i+1}$, 所以有 W 之上的除子 F 使得

$$a(F; X_i, D_i(s_i + \epsilon) - \delta G_i) < a(F; X_{i+1}, D_{i+1}(\epsilon) - \delta G_{i+1})$$

(6) $h_i \leq 1$, 且 $h_i = 1$ 当且仅当 $g_i = 0$;

4.3 双标量 Sarkisov 纲领的终结性

引理 4.7. [8, Lemma 13.18-19] (或者 [9, Lemma 4.9]) 假设按上节所述构造了 Sarkisov 连接的序列:

$$\begin{array}{ccccccc} X = X_0 & \dashrightarrow & X_1 & \dashrightarrow & X_2 & \dashrightarrow & \cdots \dashrightarrow X_i \dashrightarrow \cdots \\ f_0 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_i \downarrow \\ S = S_0 & & S_1 & & S_2 & & S_i \end{array}$$

那么

(1) 在同构意义下, 只有有限多种森纤维空间 $f_i : X_i \rightarrow S_i$;

(2) 对 (G_W, H_W) 双标量的 Sarkisov 纲领终结, 即存在整数 $N > 0$ 使得 $g_N = 0$ 。

证明. (1) 第一条本质上来自弱算术典范模型的有限性 (定理 2.8)。如下构造 $\text{WDiv}_{\mathbb{R}}(W)$ 的子空间 V :

(1.1) 假设对某个 k 有 $h_k > 0$ 。由于 H_W 是数值有效且是大除子, 那么存在丰沛 \mathbb{Q} -除子 A_W 和有效 \mathbb{Q} -除子 C_W 使得 $H_W \sim_{\mathbb{Q}} A_W + C_W$ 。此时取 V 为 B_W, G_W, H_W, C_W 的组成成分的素除子张成的仿射空间。此时对于 $i > k$, 定义 Δ_i 为

$$B_W + g_i G_W + h_i H_W \sim_{\mathbb{Q}} h_k A_W + B_W + g_i G_W + (h_i - h_k) H_W + h_k C_W =: \Delta_i \in \mathcal{L}_{h_k A_W}(V)$$

(1.2) 假设对所有 k 都有 $h_k = 0$, 那么 $h_i \equiv 0$ 且 $g_i \equiv 1$ 。由于 G_W 是数值有效且是大除子, 那么存在丰沛 \mathbb{Q} -除子 A_W 和有效 \mathbb{Q} -除子 C_W 使得 $G_W \sim_{\mathbb{Q}} A_W + C_W$ 。此时取 V 为 B_W, C_W 的组成成分的素除子张成的仿射空间。此时定义 Δ_i 为

$$B_W + G_W \sim_{\mathbb{Q}} A_W + B_W + C_W =: \Delta_i \in \mathcal{L}_{A_W}(V)$$

那么每一个 X_i 都是 (W, Δ_i) 的弱算术典范模型。由弱算术典范模型的有限性, 在同构意义下, 存在有限多个 $\sigma_i : W \dashrightarrow X_i$ 。

这样只证明了 X_i 的有限性, 此时需要森纤维空间 $X_i \rightarrow S_i$ 的有限性。接下来证明在构造的 Sarkisov 连接的序列中, 出现的 X_i 的森纤维空间在同构意义下只有有限多个。不妨设存在无穷子列 $\{i_k\}_{k=0}^{\infty}$ 使得 $X_{i_k} \cong X_{i_0}$ 。为简化记号, 不妨设 $X_{i_0} = X_0 = X$ (注意, 做此替换后 X_0 可能并不是 Sarkisov 纲领的初始起点, 但为符号简便, 仍将其记为 X)。记 f_{i_k} 是关于极端射线 $R_k \subset \overline{\text{NE}}(X_{i_k}) = \overline{\text{NE}}(X)$ 的森纤维空间压缩态射。那么有 $(K_X + B) \cdot R_{i_k} < 0$ 且 $(K_X + B + g_{i_k} G + h_{i_k} H) \cdot R_k = 0$, 并且 H 和 G 相对于 S_{i_k} 是丰沛的。分三种情况证明:

(1.1) 如果对某 k 有 $h_{i_k} = 1$, 那么 Sarkisov 纲领终结, 原序列是有限序列, 断言显然成立。

(1.2) 假设 $h_{i_k} = 0$ 对所有 i_k 成立, 那么 $g_{i_k} = 1$ 。因为 G_{i_k} 是大除子, 所以存在丰沛 \mathbb{Q} -除子 A 和有效 \mathbb{Q} -除子 E 使得 $G = A + E$ 。取充分小的 ϵ 使得 (X, D) 具有 klt 奇点, 其中 $D = B + (1 - \epsilon)G + \frac{\epsilon}{2}E$, 那么 $(K_X + D) \cdot R_k < 0$ 且

$(K_X + D + \frac{\epsilon}{2}A).R_k < 0$ 对所有 k 成立。由锥定理2.1, 有

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + D + \frac{\epsilon}{2}A_k \geq 0} + \sum_{\alpha \in \Lambda \text{ 有限集}} R_\alpha.$$

由于森纤维空间 $X = X_{i_k} \rightarrow S_{i_k}$ 是关于极端射线 R_α 的压缩态射, 这样的射线有限, 所以弱算术典范模型 $X = X_{i_0}$ 在构造的 Sarkisov 连接的序列中出现的森纤维空间在同构意义下有限;

(1).3 假设对某个 $k > 0$ 有 $h_{i_k} > 0$, 那么通过截短子列, 不妨设 $0 < h_{i_0} = h_0 < 1$ (注意, 做此替换后 X_0 并不是 Sarkisov 纲领的初始起点, 并且 $g_0 \neq 1$, 但为符号简便, 仍将其记为 X)。因为 H 是大除子, 所以存在丰沛 \mathbb{Q} -除子 A 和有效 \mathbb{Q} -除子 E 使得 $H = A + E$ 。取充分小的 ϵ 使得 (X, D) 具有 klt 奇点, 其中 $D = B + (1 - \epsilon)H + \epsilon E$ 。那么 $(K_X + D).R_k < 0$ 且 $(K_X + D + \epsilon A).R_k < 0$ 对所有 k 成立。同样由锥定理2.1, 有

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X + D + \epsilon A \geq 0} + \sum_{\alpha \in \Lambda \text{ 有限集}} R_\alpha.$$

同上, 由于森纤维空间 $X = X_{i_k} \rightarrow S_{i_k}$ 是关于极端射线 R_α 的压缩态射, 这样的射线有限, 所以弱算术典范模型 $X = X_{i_0}$ 在构造的 Sarkisov 连接的序列中出现的森纤维空间在同构意义下有限;

(2) 若上述构造的 Sarkisov 连接的序列是无限的, 那么由 (1), 不妨设存在无穷子列 $\{i_k\}_{k=0}^\infty$ 使得森纤维空间 $X_{i_k} \rightarrow S_{i_k}$ 同构于 $X_{i_0} \rightarrow S_{i_0}$ 。为简化记号, 不妨设 $X_{i_0} = X_0 = X$ (同样的, 做此替换后 X_0 可能并不是 Sarkisov 纲领的初始起点, 并且可能有 $g_0 \neq 1, h_0 \neq 0$, 但为符号简便, 仍将其记为 X)。此时曲线 $C_{i_k} \subset X$ 是相同的曲线, 由 g_{i_k} 和 h_{i_k} 的构造可以得到 $g_0 = g_{i_k}$ 和 $h_0 = h_{i_k}$ 。由于序列 h_i 和 g_i 是单调的, 所以 $h_i = h_0$ 和 $g_i = g_0$ 是常值, 并且 $r_i = r_0, s_i = 0$ 都是常值。

若序列中存在命题4.5中 (1) 构造的第三或第四型 Sarkisov 连接, 不妨设为 $X \dashrightarrow X_1$, 那么由断言4.6的 (4), 下一个 Sarkisov 连接也是按 (1) 的构造, 继而之后所有连接都是如此。再考虑 Picard 数, 由于 $X \cong X_{i_1}$, 显然之后都是第四型 Sarkisov 连接。由断言4.6的 (4), 对任意 W 上的除子 E , 存在不等式

$$a(E; X, D(s_0 + \epsilon)) \leq a(E; X_1, D_1(\epsilon))$$

但是同样由断言4.6的 (4), 还存在 W 之上的除子 F , 使得

$$a(F; X, D(s_0 + \epsilon)) < a(F; X_1, D_1(\epsilon))$$

于是对 $X = X_{i_0} \cong X_{i_1}$ 有

$$a(F; X, D(\epsilon)) < a(F; X_{i_1}, D_{i_1}(\epsilon))$$

矛盾。

假设 Sarkisov 连接的序列全是由命题4.5中 (2) 构造的第一第二型 Sarkisov 连接。同样由 Picard 数可以得到, 所有 Sarkisov 连接都是第二型。类似的, 由断言4.6的 (5) 可以推出矛盾。

综上, 命题4.5构造的 Sarkisov 序列是有限的。

□

最后还要证明双标量 Sarkisov 纲领终结的森纤维空间 $X_N \rightarrow S_N$ 与 $(X', B') \rightarrow S'$ 同构。这一部分与下降法 Sarkisov 纲领的判别法定理3.3类似。

命题 4.8. (1) $h_N = 1$ 。

(2) $X_N \rightarrow S_N$ 同构于 $X' \rightarrow S'$ 。

证明. 事实上此处 X' 上的 \mathbb{Q} -除子 $h'H' = 1 \cdot H'$ 代替了定理3.3中 X' 上的 \mathbb{Q} -除子 $\frac{1}{\mu'}H'$, 而 $h_N H_N$ 对应定理3.3中的 $\frac{1}{\mu}H$ 。用同样的方法可以证明 $h_N = h' = 1$ 。

(2) 也可以用同样的方法证明: 取 X_N 上极丰沛除子 L , 且 L' 是在 X' 上的严格双有理变换。那么 L' 是 f' -丰沛的, 所以存在 $0 < d \ll 1$ 使得:

- $K_{X_N} + B_N + H_N + dL$ 是丰沛除子;
- $K_{X'} + B' + H' + dL'$ 是丰沛除子;
- $(W, B_W + H_W + dD_W)$ 具有 klt 奇点 (由双标量 Sarkisov 纲领的初始设定断言4.3可以得到)。

因此 X_N 和 X' 都是 $(W, B_W + H_W + dD_W)$ 的算术典范模型, 由算术典范模型的唯一性, $X_N \cong X'$ 。更进一步, f_N 和 f' 压缩相同的曲线数值等价类, 所以两个森纤维空间同构。

□

第 5 章 有限模型法

这一章主要参考 [10]。通过有限模型来构造 Sarkisov 分解和前两种方法不同，这种方法并不通过运行 2-ray game 来构造 Sarkisov 连接。下面简要介绍这种方法的思路：

令 W 为两个 MMP-相关的森纤维空间 $X \rightarrow S$ 和 $Y \rightarrow T$ 公共奇点解消。Take a finite dimensional affine subspace V 取 $\mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(W)$ 的有限维仿射子空间 V 和丰沛 \mathbb{Q} -除子 A ，那么 $\{\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{A, f_i}\}$ 是 $\mathcal{E}_A(V)$ 的一个划分，且每个子集 \mathcal{A}_i 对应 W 的一个丰沛模型，相邻的子集对应的丰沛模型之间有压缩态射 (见定理 5.2)。由引理 5.7，可以取到一个特殊的子空间 V ，使得

- (1) V 是 2 维的有理仿射空间 (可以定义在有理数上)；
- (2) S, T 是 W 关于 $D_S, D_T \in \mathcal{L}_A(V)$ 的丰沛模型；
- (3) D_S 和 D_T 是 $\mathcal{L}_A(V)$ 边界 $\partial \mathcal{L}_A(V)$ 上的两个点，并且将边界分为两个部分。在其中一个部分上，有有限多个线段连接 D_S 和 D_T ，并且 D_i 是线段的端点，此时每个端点 D_i 对应一个 Sarkisov 连接。

(图 ?? 为一个示例图，其中 $D_S = D_0, D_T = D_1$)

- (4) 双有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 是这些 Sarkisov 连接的复合。这就是有限模型法构造的 Sarkisov 分解。

注. 有限模型法的 Sarkisov 纲领严格来说并不是一个纲领 (program)，和前两种方法不同，不是归纳地构造分解中的森纤维空间 $X_i \rightarrow S_i$ ，而是先找出 W 关于 $D \in \mathcal{L}_A(V)$ 的丰沛模型，然后选择其中的一些。

5.1 定义和引理

首先给出 $\mathcal{E}_A(V)$ 关于丰沛模型的划分定理：

定理 5.1. [5, Corollary 1.1.5] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射，并且 $V \subset \mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 是有限维有理子空间，假设存在一个除子 $\Delta_0 \in V$ 使得 (X, Δ_0) 具有 klt 奇点。令 A 是相对于 U 的一般的丰沛 \mathbb{Q} -除子，并且它和任何 V 中的除子都没有共同的素除子作为组成成分。那么

(1) 存在有限多个相对于 U 的双有理映射 $f_i : X \dashrightarrow X_i$ 使得:

$$\mathcal{E}_{A,\pi}(V) = \bigcup_i \mathcal{W}_i$$

其中 $\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_{A,f_i}(V)$ 是定义在有理数上的多面体 (*rational polytope*)。且如果 $f : X \dashrightarrow Y$ 是关于对某个 $D \in \mathcal{E}_{A,\pi}(V)$ 相对于 U 的算术终端模型, 那么对某个 i , 有 $f = f_i$ 。即 X 关于 $\mathcal{E}_{A,\pi}(V)$ 的算术终端模型一定是 f_i 中的一个。

(2) 存在有限多个相对于 U 的有理映射 $g_j : X \dashrightarrow Z_j$ 使得:

$$\mathcal{E}_{A,\pi}(V) = \coprod_j \mathcal{A}_j$$

其中 $\{\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_{A,\pi,g_j}\}$ 是 $\mathcal{E}_A(V)$ 的划分。令 C_j 是 \mathcal{A}_j 在 $\mathcal{L}_{A,\pi}(V)$ 中的闭包;

(3) 对每个 f_i 都存在某个 g_j 和态射 $h_{ij} : Y_i \rightarrow Z_j$ 使得 $\mathcal{W}_i \subset C_j$ 。

如果模型对应的多面体相邻, 那么模型之间有态射:

定理 5.2. [10, Theorem 3.3] 令 W 是光滑射影代数簇, 并且 V 是 $\mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(W)$ 的有限维有理子空间。取定一个有效丰沛 \mathbb{Q} -除子 A , 假设 $\mathcal{L}_A(V)$ 中有元素 D_0 使得 $K_W + D_0$ 具有 *klt* 奇点并且是大除子。那么存在有限多个有理压缩映射 $f_i : W \dashrightarrow X_i$ 使得

(1) $\{\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{A,f_i}\}$ 是 $\mathcal{E}_A(V)$ 的划分。 \mathcal{A}_i 是有限多个有理多面体的内点的并。令 C_i 是 \mathcal{A}_i 在 $\mathcal{L}_A(V)$ 中的闭包。如果 f_i 双有理映射, 那么 C_i 是有理多面体;

(2) 如果 i, j 两个指标满足 $\mathcal{A}_j \cap C_i \neq \emptyset$, 那么存在一个压缩态射 $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ 使得 $f_j = f_{ij} \circ f_i$;

(3) 进一步假设 V 张成 W 的 *Neron-Severi* 群, 即

$$V \rightarrow \mathrm{NS}(W)$$

是满射。如果某个 C_i 的一个连通分支 C 与 $\mathcal{L}_A(V)$ 的内点有交, 那么下列等价:

(3).1 C 张成 V ;

(3).2 对除子 $D \in \mathcal{A}_i \cap C$, 那么 f_i 是关于 D 的算术终端模型;

(3).3 f_i 是双有理映射, 且 X_i 是 \mathbb{Q} -分解的。

(4) 假设 V 张成 W 的 *Neron-Severi* 群。取两个指标 i, j , 使得 C_i 张成 V 并且 D 是 $\mathcal{A}_j \cap C_i$ 的一般点, 并且也是 $\mathcal{L}_A(V)$ 的内点, 那么 C_i 在 D 的一个邻域局部同构于 $\overline{\mathrm{NE}}(X_i/X_j)^* \times \mathbb{R}^k$, 其中 $k \geq 0$ 。并且 $\rho(X_i/X_j) = \dim C_i - \dim C_j \cap C_i$ 。

对于上述定理后两条的子空间 V ，需要张成 $\text{NS}(W)$ ，所以有 $\dim V \geq \rho(W)$ 。但是通过下列引理，可以取其 2 维子空间，仍然满足结论；

引理 5.3. [10, Corollary 3.4] 假设 V 张成 W 的 Neron-Severi 群。令 $G(r, V)$ 为 V 的 r 维实子空间的 Grassmannian 空间，那么存在一个 Zariski 稠密的开子集 $U \subset G(r, V)$ ，使得任何定义在有理数上的子空间 $[V'] \in U$ ，都满足定理 5.2 的 (1)-(4)。

证明. 令 $U \subset G(r, V)$ 是不包含任何多面体 $C_i \subset \mathcal{L}_A(V)$ 的面 (face) 的 r -维子空间 V' 的集合。特别的， $\mathcal{L}_A(V')$ 的内部包含在 $\mathcal{L}_A(V)$ 的内部。显然任何定义在有理数上的子空间 $[V'] \in U$ 都满足定理 5.2 的 (1)-(4)。□

注. 应用上述引理，本章从此开始，总假设 V 是满足定理 5.2(1)-(4) 的定义在有理数上的 2-维空间。此时如果多面体 C 是 2 维的，那么就张成 Neron-Severi 群，进而定理 5.2.(3).1 的条件就满足。

下面的引理用定理 5.2.(2) 的态射构造对应的除子压缩、小压缩或森纤维空间压缩。在一些情况下，两个小压缩组成了一个平转。

引理 5.4. [10, Lemma 3.5] 令 $f : W \dashrightarrow X$ 和 $g : W \dashrightarrow Y$ 是两个有理压缩使得 $C_{A,f}$ 是 2 维空间 (张成 2 维线性空间) 且 $\mathcal{O} = C_{A,f} \cap C_{A,g}$ 是 1 维空间。假设 $\rho(X) \geq \rho(Y)$ 且 \mathcal{O} 不包含在 $\mathcal{L}_A(V)$ 。令 D 是 \mathcal{O} 的内点且 $B = f_* D$ 。那么存在一个有理压缩态射 $\pi : X \dashrightarrow Y$ 且 $g = \pi \circ f$ 满足下列情况之一：

- (1) $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ 且 π 是 $(K_X + B)$ -平凡映射。此时下列情况之一成立：
 - (1).1 π 是双有理态射，并且 \mathcal{O} 不包含在 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界里。此时有两种情况：
 - (1).1.1 π 是除子压缩，并且 $\mathcal{O} \neq C_{A,g}$ ；
 - (1).1.2 π 是小压缩，并且 $\mathcal{O} = C_{A,g}$ 。
 - (1).2 π 是森纤维空间压缩，并且 $\mathcal{O} = C_{A,g}$ 包含在 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界里。
- (2) $\rho(X) = \rho(Y)$ 。此时 π 是 $(K_X + B)$ -平转，并且 $\mathcal{O} \neq C_{A,g}$ 不包含在 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界里。

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\pi} & Y \\
 \searrow p & & \swarrow q \\
 & S &
 \end{array}$$

注. 引理5.4.(1) 中, 态射 π 由定理5.2.(2) 给出. 引理5.4.(1).1 对应定理5.2.(3) 成立的情况, 而引理5.4.(1).2 则对应定理5.2.(3) 不成立的情况.

引理5.4.(2) 中两个态射 p, q 由定理5.2.(2) 给出, 并且都是引理5.4.(1).1.2 的小双有理态射.

最后给出引理来保证后续构造的 Sarkisov 连接中的每一个代数簇, 都是 (W, B_W) -MMP 的结果.

引理 5.5. [10, Lemma 3.6] 令 $f : W \dashrightarrow X$ 是 \mathbb{Q} -分解代数簇的双有理压缩, 假设 (W, D) 和 $(W, D + A)$ 都具有 *klt* 奇点. 如果 f 是关于 $(W, D + A)$ 的丰沛模型, 且 A 是丰沛的, 那么 f 是 $(K_W + D)$ -MMP 的结果.

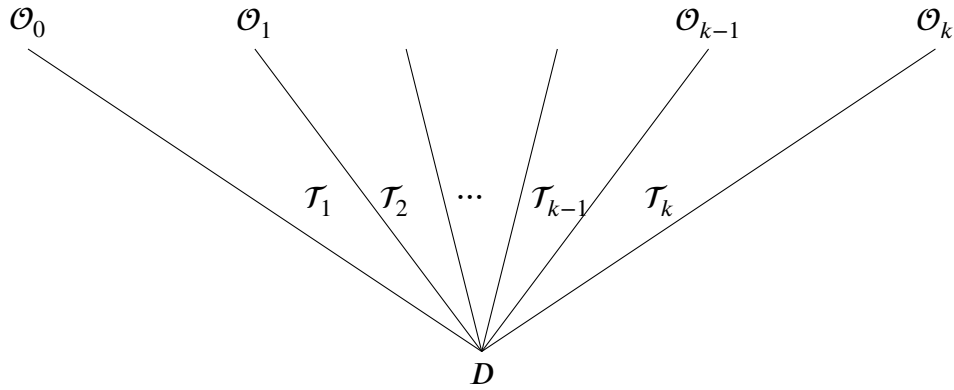
5.2 构造 Sarkisov 连接

这一节构造 Sarkisov 连接. 对于某些端点 $D \in \mathcal{E}_A(V)$, 如果 $D = A + B$ 在 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界上, 并且在 $\mathcal{L}_A(V)$ 的内部, 那么可以构造对应的 Sarkisov 连接

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Z = Z^0 & \xrightarrow{\text{关于 } K+D \text{ 的平转}} & Z^1 & \cdots & Z^k = Z_1 \\
 & \swarrow p & & & \swarrow & & \searrow q \\
 X & & & & Y^1 & & X_1
 \end{array}$$

其中 p, q 可能是同构, 且 X, X_1, Z^i, Z, Z_1 都是 W 关于 D 的某种模型.

令 τ_1, \dots, τ_k 是包含 D 的多面体 C_i 中 2 维的那些. 通过重新排序, 可以假设 \mathcal{O}_0 是 τ_1 和 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界的交 (即 $\tau_1 \cap \partial \mathcal{E}_A(V) = \mathcal{O}_0$), 类似的 \mathcal{O}_k 是 τ_k 和 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界的交 (即 $\tau_k \cap \partial \mathcal{E}_A(V) = \mathcal{O}_k$), 并且 $\mathcal{O}_i = \tau_i \cap \tau_{i+1}$ 是 1 维的. 如下图所示:



令 $f_i : W \dashrightarrow X_i$ 是 τ_i 对应的双有理映射, 且 $g_i : W \dashrightarrow S_i$ 是 \mathcal{O}_i 对应的有理映射.

记

$$f = f_1 : W \dashrightarrow X, g = f_k : W \dashrightarrow Y$$

以及

$$\phi : X \rightarrow S = S_0, \psi : Y \rightarrow T = S_k$$

和 $X' = X_2, Y' = X_{k-1}$ 。令 $W \dashrightarrow R$ 为关于 D 的丰沛模型。延续这些记号，构造 Sarkisov 连接：

定理 5.6. [10, Theorem 3.7] 取边界 B_W 使得 (W, B_W) 是算术光滑的算术终端奇点的代数簇对，且 $D - B_W$ 是丰沛除子。那么 ϕ 和 ψ 是森纤维空间，并且是 $(K_W + B_W)$ -MMP 的输出。假设 D 包含在 2 个以上的多面体中，那么 ϕ 和 ψ 由 Sarkisov 连接相连，并且每个 $f_i : W \dashrightarrow X_i$ 是 $(K_W + B_W)$ -MMP 的结果。

证明. 假设 $k \geq 3$ ，那么有

$$\begin{array}{ccc} X' & \dashrightarrow & Y' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ S & & T \\ s \swarrow & & \searrow t \\ & R & \end{array}$$

注意到 $\rho(X_i/R) \leq 2$ 且 $\rho(X/S) = \rho(Y/T) = 1$ ，那么下列两种情况之一成立：

- (1) s 是一致态射 (identity) 而 p 是除子压缩 (除子解压)；
- (2) s 是压缩态射而 p 是平转。

同样的情况对 q 和 t 成立。而映射 $X' \dashrightarrow Y'$ 是 $(K + D)$ -平转。这样给出了四种 Sarkisov 连接。 \square

5.3 构造 Sarkisov 分解

首先需要如下特别的解消 W 和仿射子空间 $V \subset \text{WDiv}(W)$ ：

引理 5.7. [10, Lemma 4.1] 令 $\phi : (X, B_X) \rightarrow S$ 和 $\psi : (Y, B_Y) \rightarrow T$ 是两个具有 klt 奇点的 MMP-相关森纤维空间。那么存在光滑射影代数簇 W 和两个双有理态射 $f : W \rightarrow X$ 和 $g : W \rightarrow Y$ ，并且有边界除子 (B_W) 是 (W, B_W) 具有 klt 奇点。同时还存在 W 上的丰沛 \mathbb{Q} -除子 A 和 2 维有理仿射子空间 $V \subset \text{WDiv}_{\mathbb{R}}(W)$ 使得：

- (1) 如果 $D \in \mathcal{L}_A(V)$, 那么 $D - B_W$ 是丰沛除子;
- (2) $\mathcal{A}_{A, \phi \circ f}$ 且 $\mathcal{A}_{A, \psi \circ g}$ 不包含在 $\mathcal{L}_A(V)$ 的边界里;
- (3) V 满足定理 5.2.(1-4);
- (4) $C_{A, f}$ 和 $C_{A, g}$ 是 2 维的;
- (5) $C_{A, \phi \circ f}$ 和 $C_{A, \psi \circ g}$ 是 1 维的。

证明. 由 MMP-相关的假设, 存在 \mathbb{Q} -faci 分解的具有 klt 奇点的代数簇对 (W, B_W) 使得 $f: W \dashrightarrow X$ 和 $g: W \dashrightarrow Y$ 是 $(K_W + B_W)$ -MMP 的输出。令 $p': W' \rightarrow W$ 是解消 f 和 g 的解消, 记

$$K_{W'} + B_{W'} = p'^*(K_W + B_W) + E'$$

其中 $p'_* B_{W'} = B_W$, 且 $E' \geq 0$ 和 $B_{W'} \geq 0$ 没有公共组成成分, E' 是例外除子。取除子 $-F$ 满足:

- 相对于 W 丰沛的;
- $\text{Supp } F = \text{Exc } p'$;
- $K_{W'} + B_{W'} + F$ 具有 klt 奇点。

由于 p' 是 $(K_{W'} + B_{W'} + F)$ -负性的, $(K_W + B_W)$ 具有 klt 奇点, W 是 \mathbb{Q} -分解的, 所以相对于 W 的 $(K_{W'} + B_{W'} + F)$ -MMP 终结于 (W, B_W) 。用 $(W', B_{W'} + F)$ 替换 (W, B_W) , 可以假设 (W, B_W) 是算术光滑并且 f, g 是双有理态射。

取 W 上一般的丰沛 \mathbb{Q} -除子 A, H_1, H_2, \dots, H_k on W 使得 H_1, \dots, H_k 生成 W 的 Neron-Severi 群。记 $H = A + H_1 + \dots + H_k$ 。取 S 和 T 上充分丰沛的除子 A_S 和 A_T 使得

$$-(K_X + B_X) + \phi^* A_S$$

和

$$-(K_Y + B_Y) + \psi^* A_T$$

都是丰沛除子。取有理数 $0 < \delta < 1$ 使得

$$-(K_X + B_X + \delta f_* H) + \phi^* A_S$$

和

$$-(K_Y + B_Y + \delta g_* H) + \psi^* A_T$$

都是丰沛除子, 并且 f 和 g 都是 $(K_W + B_W + \delta H)$ -负性的。通过用 δH 替换 H 可以假设 $\delta = 1$ 。接着取 \mathbb{Q} -除子 $B_0 \leq B_W$ 使得 $A + (B_0 - B_W), -(K_X + f_* B_0 + f_* H) + \phi^* A_S$ 和 $-(K_Y + g_* B_0 + g_* H) + \psi^* A_T$ 都是丰沛除子, 并且 f 和 g 都是 $(K_W + B_0 + \delta H)$ -负性的。

取一般的丰沛 \mathbb{Q} -除子 $F_1 \geq 0$ 和 $G_1 \geq 0$ 使得

$$F_1 \sim_{\mathbb{Q}} -(K_X + f_* B_0 + f_* H) + \phi^* A_S$$

且

$$G_1 \sim_{\mathbb{Q}} -(K_Y + g_* B_0 + g_* H) + \psi^* A_T$$

并且

$$K_W + B_0 + H + F + G$$

具有 klt 奇点, 其中 $F = f^* F_1, G = g^* G_1$ 。考虑由 H_1, \dots, H_k, F, G 张成的线性子空间, 再被 B_0 平移, 得到 $\text{WDiv}_{\mathbb{R}}(W)$ 的仿射子空间 V_0 (即 $V_0 = B_0 + \langle H_1, \dots, H_k, F, G \rangle$)。假设 $D = A + B \in \mathcal{L}_A(V_0)$, 那么

$$D - B_W = (A + B_0 - B_W) + (B - B_0)$$

是丰沛除子 (由于 $B - B_0$ 是数值有效的, 由 V_0 的定义可以得到)。注意到

$$B_0 + F + H \in \mathcal{A}_{A, \phi \circ f}(V_0), B_0 + G + H \in \mathcal{A}_{A, \psi \circ g}(V_0)$$

且 f 和 g 分别是关于 $K_W + B_0 + F + H$ 和 $K_W + B_0 + G + H$ 的弱算术典范模型。因此由定理5.2 推出 V_0 满足定理5.2.(1)-(4)。

由于 H_1, \dots, H_k 生成 W 的 Neron-Severi 群, 可以找到常熟 h_1, \dots, h_k 使得 $G \equiv \sum_{i=1}^k h_i H_i$ 。那么存在 $0 < \delta \ll 1$ 使得

$$B_0 + F + \delta G + H - \delta \left(\sum_{i=1}^k h_i H_i \right) \in \mathcal{L}_A(V_0)$$

且

$$B_0 + F + \delta G + H - \delta \left(\sum_{i=1}^k h_i H_i \right) \equiv B_0 + F + H$$

因此, $\mathcal{A}_{A, \phi \circ f}$ 不含在 $\mathcal{L}_A(V_0)$ 的边界中。类似的, $\mathcal{A}_{A, \psi \circ g}$ 不包含在 $\mathcal{L}_A(V_0)$ 的边界中。特别的, 由于 $\rho(X/S) = \rho(Y/T) = 1$, 所以 $\mathcal{A}_{A, \phi \circ f}$ 和 $\mathcal{A}_{A, \psi \circ g}$ 张成 V_0 中的仿射平面。

考虑 $F + H - A$ 和 $G + H - A$ 张成的空间, 再被 B_0 平移, 得到仿射空间 V_1 。由引理5.3, 将 V_1 扰动得到定义在有理数上的仿射空间 V , 这个空间即满足此引理。□

最后证明 Sarkisov 分解的存在性:

证明. 令 $(W, B_W), A$ 和 V 满足引理5.7。取 $\mathcal{L}_A(V)$ 中的内点 $D_0 \in \mathcal{A}_{A, \phi \circ f}$ 和 $D_1 \in C_{A, g}$ 。由于 V 是 2 维的, 去掉 D_0 和 D_1 将把 $\mathcal{E}_A(V)$ 的边界分成两个部分。其中一部分全部由不大的 (not big) 除子组成, 并且包含在 $\mathcal{L}_A(V)$ 的内部。考虑这一部分从 D_0 到 D_1 的过程, 存在有点多个点 $D_i, 2 \leq i \leq N$ 包含在两个以上的多面体 $C_{A, f_k}(V)$ 中。由引理 5.6, 每一个点 D_i 给出一个 Sarkisov 连接。那么双有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 分解成这些连接的复合。□

第 6 章 三种方法的总结

6.1 三种方法的比较

6.2 例子

首先给出一些具体的 MMP-相关的森纤维空间的 Sarkisov 分解的例子。

6.2.1 下降法

记 $X = \mathbb{P}^2$ 为射影平面, 坐标记为 $[x_0 : x_1 : x_2]$, 记 $X' = \mathbb{P}^2$ 为另一个射影平面, 坐标为 $[y_0 : y_1 : y_2]$ 。记 $B = \{x_0 = 0\}$ 和 $B' = \{y_0 = 0\}$ 。取双有理映射 $\Phi : X \dashrightarrow X'$, 按如下定义:

$$\Phi : [x_0 : x_1 : x_2] \dashrightarrow [x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 + x_0x_2]$$

那么存在一个公共解消 $\sigma : W \rightarrow X$ 和 $\sigma' : W \rightarrow X'$, 两个态射都是三个对点的胀开的复合。三个胀开如下所示:

(1) $\pi_1 : W_1 \rightarrow X$ 是对点 $P_0 \in B$ 的胀开, 点 P_0 是双有理映射 Φ 不定义的点。用相同的符号 B 表示它在 W_1 上的严格双有理变换。将 π_1 的例外除子记为 E_1 。此时 Φ 提升到双有理映射 $W_1 \dashrightarrow X'$, 但仍然不是态射。

(2) $\pi_2 : W_2 \rightarrow W_1$ 是对点 $P_1 = E_1 \cap B$ 的胀开, 点 P_1 是双有理映射 $W_1 \dashrightarrow X'$ 的不定义的点。将 π_2 的例外除子记为 E_2 , 仍然用同样的符号 B 和 E_1 表示它们在 W_2 上的严格双有理变换。此时 Φ 提升到双有理映射 $W_2 \dashrightarrow X'$, 但仍然不是态射。

(3) $\pi_3 : W = W_3 \rightarrow W_2$ 是对点 $P_2 \in E_2 \setminus (B \cup E_1)$ 的胀开。将 π_3 的例外除子记为 E_3 , 仍然用同样的符号 B, E_1, E_2 表示它们在 W_3 上的严格双有理变换。此时 Φ 提升到双有理映射 $W_3 \rightarrow X'$ 是一个态射。

那么 $\sigma = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ 和 $W = W_3$ 是 Φ 的公共解消。对称的, $\sigma' : W \rightarrow X'$ 是三个压缩曲线的态射的复合 $W = W_3 \xrightarrow{\pi'_3} W_2' \xrightarrow{\pi'_2} W_1' \xrightarrow{\pi'_1} X'$ 。双有理态射 π'_3, π'_2, π'_1 依次压缩曲线 B, E_2, E_1 。

注. 显然双有理映射 Φ 有逆映射

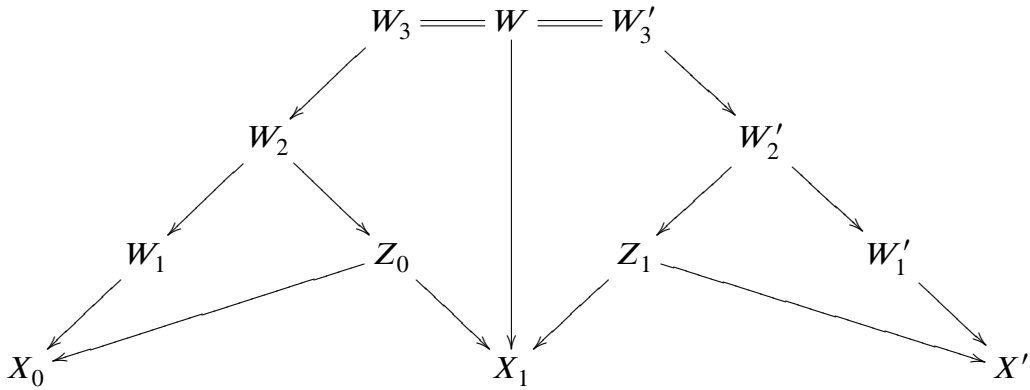
$$\Phi^{-1} : [y_0 : y_1 : y_2] \dashrightarrow [y_0^2 : y_0y_1 : y_1^2 - y_0y_2]$$

与 Φ 只差一个符号。于是 σ' 是解消 Φ^{-1} 的三个胀开的复合，例外曲线依次是 E_1, E_2, B 。可以看到， $B' \subset X'$ 是例外除子 $E_3 \subset W$ 在 X' 上的严格双有理变换。在 W 上，如果用相同的符号 B' 记它在 W 上的严格双有理变换，那么除子 E_3 和 B 是地位相等的。

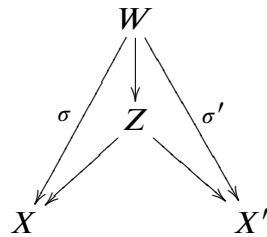
下面给出一些代数簇的符号：

- 令 $W_2 \rightarrow Z_0$ 是 W_2 压缩曲线 E_1 的态射，且 $Z_0 \rightarrow X_1$ 是压缩曲线 B 的除子压缩，那么 $Z_0 \rightarrow X_0$ 是 X 上解压 E_2 的除子解压；
- 令 $W'_2 \rightarrow Z_1$ 是 W'_2 上压缩 E_1 的态射，那么 $Z_1 \rightarrow X_1$ 是 X_1 上解压除子 E_3 的除子解压，并且 $Z_1 \rightarrow X'$ 是压缩 E_2 的除子压缩；
- 令 $W \rightarrow Z$ 是 W 上压缩 E_1 和 E_2 的两个压缩曲线态射的复合，那么 $Z \rightarrow X$ 是解压 E_3 的除子解压，而 $Z \rightarrow X'$ 是解压 B 的除子解压

对应的映射的交换图表：



和



考虑代数簇对 (X, bB) 和 $(X', b'B')$ ，因为是算术光滑的，所以显然是具有 klt 奇点的。取函数 θ 使得：

- $\theta(B) = b$ 且 $\theta(B') = b'$ ；
- $\theta(E_1) = \theta(E_2) = \epsilon$ ，其中 $b, b' < \epsilon < 1$ 。

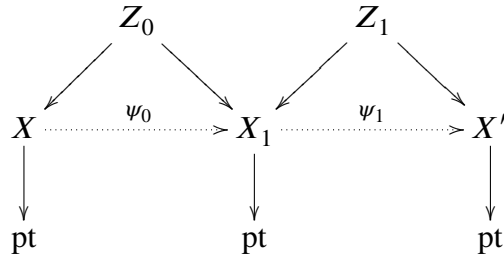
那么有分歧公式：

$$\begin{aligned}
 & K_W + B_W \\
 &= \sigma^*(K_X + bB) + (3 - 2b + b')E_3 + (1 - b + \epsilon)E_1 + (2 - 2b + \epsilon)E_2 \\
 &= \sigma'^*(K_{X'} + b'B') + (3 - 2b' + b)B + (1 - b' + \epsilon)E_1 + (2 - 2b' + \epsilon)E_2
 \end{aligned}$$

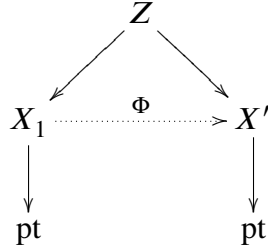
取 $H' = |\mathcal{O}_{X'}(1)|$ 为 X' 上极丰沛的完全线性系，那么 $H \in |\mathcal{O}_X(2)|$ 。

不同的 θ 和 ϵ 的选取给出不同的分解：

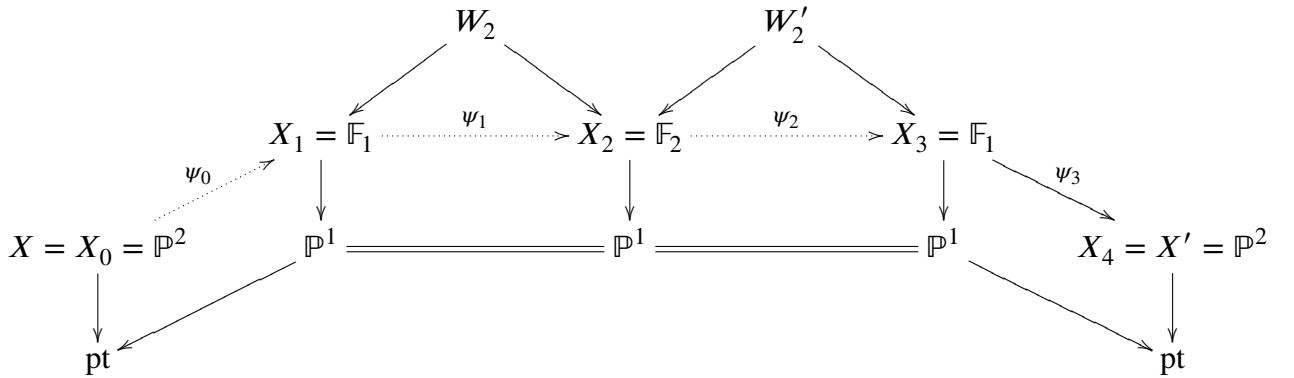
(1) 如果 $2b + 2b' \geq 3\epsilon > 0$ ，那么 Φ 是两个第二型 Sarkisov 连接 ψ_0, ψ_1 的复合：



(2) 如果 $2b + 2b' < 3\epsilon$ ，那么 Φ 是一个第二型 Sarkisov 连接的复合：



(3) 如果 $\epsilon = b = b' = 0$ ，那么 Φ 是四个 Sarkisov 连接 ψ_i 的复合：



6.2.2 双标量法

沿用上一小节 6.2.1 的记号，令 $B_W = \frac{1}{2}(B + E_1 + E_3)$ 并考虑代数簇对 $(X, \frac{1}{2}B)$ 和 $(X', \frac{1}{2}B')$ 。那么有 $G = G_0 \sim_{\mathbb{Q}} \frac{5}{2}B$ 和 $H' \sim_{\mathbb{Q}} \frac{5}{2}B'$ 。对 G 和 H' 运行双标量 Sarkisov 纲领：

(1) 第一个连接: $r_0 = 2$ 且 $s_0 = \frac{1}{5}$ 。于是 X_1 是 W 关于 $(W, B_W + \frac{3}{5}G_W + \frac{1}{5}H_W)$ 的弱算术典范模型;

(2) 第二个连接: $r_1 = 1$ 且 $s_1 = \frac{2}{5}$ 。于是 $X_2 = X'$ 是 W 关于 $(W, B_W + \frac{1}{5}G_W + \frac{3}{5}H_W)$ 的弱算术典范模型。

注. 严格按照命题4.5和引理4.7来说, $N = 3$, 且还有一个恒同的连接 $X_2 = X_3 = X'$, 不过这里我们省去它。

注. 这给出了上一小节6.2.1 中情况 (1) 相同的分解。

6.2.3 有限模型法

令 P, Q 是射影平面 \mathbb{P}^2 上两个不同的点, 且 L 是经过 P 和 Q 的射影直线。令 $p: X \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是在 P 处的胀开, 并且记 E_1 是例外除子。令 $q: Y \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是在 Q 处的胀开, 并且记 E_2 是例外除子。令 $W \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是在 P 和 Q 两点的胀开。那么有压缩态射 $f: W \rightarrow X$ 和 $g: W \rightarrow Y$ 。用相同的记号 L, E_1 和 E_2 表示它们在 W 上的严格双有理变换。那么 W 上有

$$K_W \sim -3L - 2E_1 - 2E_2$$

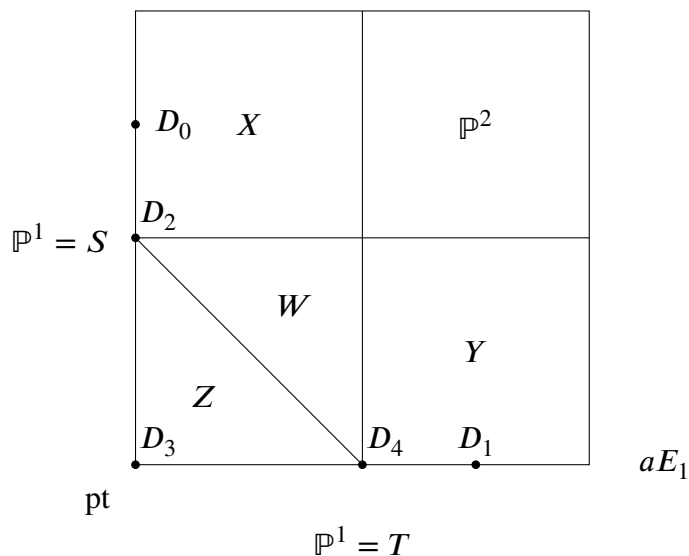
和相交数关系: 令 $h: W \rightarrow Z$ 是压缩曲线 L 的压缩态射, 那么 $Z \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{F}_0$ 。

	L	E_1	E_2
L	-1	1	1
E_1	1	-1	0
E_2	1	0	-1

注意到 $X \cong \mathbb{F}_1$, 那么 $\phi: X \rightarrow S \cong \mathbb{P}^1$ 是森纤维空间。类似的, 还有令一个森纤维空间 $\psi: Y \rightarrow T \cong \mathbb{P}^1$ 。用交换图表表示是:

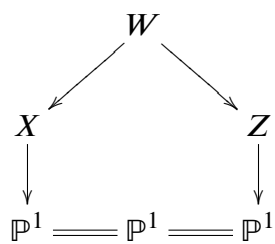
$$\begin{array}{ccccc}
 S \cong \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{\phi} & X \cong \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^2 \\
 \uparrow & & \uparrow f & & \uparrow q \\
 & & W & \xrightarrow{g} & Y \cong \mathbb{F}_1 \\
 & \swarrow h & & & \downarrow \psi \\
 Z \cong \mathbb{F}_0 & \xrightarrow{\quad} & & & T \cong \mathbb{P}^1
 \end{array}$$

由 p 和 q 诱导双有理映射 $\Phi: X \dashrightarrow Y$, 如果取 W 上边界除子 $B_W = \frac{1}{4}L$,

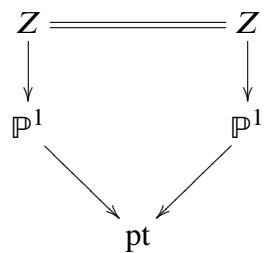
$$D = A + \frac{1}{4}L + aE_1 + bE_2, 0 \leq a, b \leq 1$$
$$\begin{aligned} D_0 &= A + \frac{1}{4}L + 0 \cdot E_1 + \frac{3}{4} \cdot E_2 \\ D_1 &= A + \frac{1}{4}L + \frac{3}{4} \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 \\ D_2 &= A + \frac{1}{4}L + 0 \cdot E_1 + \frac{1}{2} \cdot E_2 \\ D_3 &= A + \frac{1}{4}L + 0 \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 \\ D_4 &= A + \frac{1}{4}L + \frac{1}{2} \cdot E_1 + 0 \cdot E_2 \end{aligned}$$
 bE_7 

45

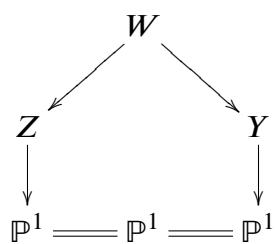
• D_2 对应



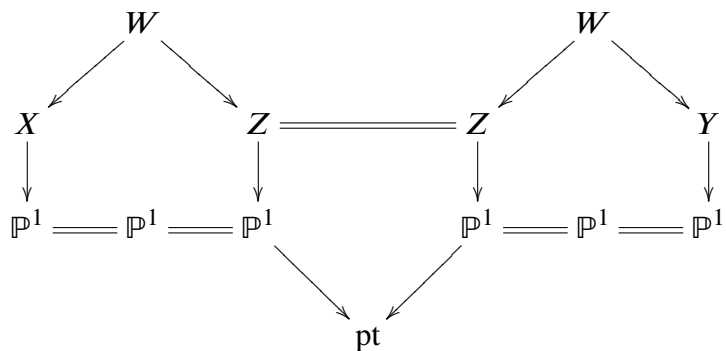
• D_3 对应



• D_4 对应



于是, 有 $\Phi : X \dashrightarrow Y$ 的分解:



注. 此例中对 V 和 A 的选取并不是严格按照引理5.7构造的, 但是相对简单一些, 并且可以看出模型在 Sarkisov 分解中的位置。

6.3 应用

第 7 章 叶层化 Sarkisov 纲领

最后尝试分析叶层化代数簇对上的 Sarkisov 纲领。

7.1 三种方法的推广尝试

7.2 弱化版结果

参考文献

- [1] Sarkisov V G. Birational automorphisms of conic bundles. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1981, 17(1): 177-202. DOI: [10.1070/IM1981v017n01ABEH001326](https://doi.org/10.1070/IM1981v017n01ABEH001326).
- [2] Sarkisov V G. On conic bundle structures. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1982, 46(2): 371-408, 432.
- [3] Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. Journal of Algebraic Geometry, 1995, 1995(4): 223-254.
- [4] Bruno A, Matsuki K. Log Sarkisov program. Internat. J. Math., 1997, 8(4): 451-494. <https://doi.org/10.1142/S0129167X97000238>.
- [5] Birkar C, Cascini P, Hacon C D, et al. Existence of minimal models for varieties of log general type: arXiv:math/0610203. arXiv, 2008.
- [6] Hacon C, McKernan J, Xu C. ACC for log canonical thresholds. Annals of Mathematics, 2014, 180(2): 523-571[2022-06-24]. <https://annals.math.princeton.edu/2014/180-2/p03>. DOI: [10.4007/annals.2014.180.2.3](https://doi.org/10.4007/annals.2014.180.2.3).
- [7] Birkar C. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties. Annals of Mathematics, 2021, 193(2): 347 - 405. <https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.1>.
- [8] Hacon C D. The Minimal model program for Varieties of log general type. Wiadomości Matematyczne, 2012, 48(2): 49. DOI: [10.14708/wm.v48i2.317](https://doi.org/10.14708/wm.v48i2.317).
- [9] Liu J. Sarkisov program for generalized pairs. Osaka J. Math., 2021, 58(4): 899-920.
- [10] Hacon C, McKernan J. The Sarkisov program. Journal of Algebraic Geometry, 2012, 22(2): 389-405. DOI: [10.1090/S1056-3911-2012-00599-2](https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2012-00599-2).
- [11] Miyamoto K. The sarkisov program on log surfaces. arXiv: Algebraic Geometry, 2019, 2019: 114-114.

