



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

# 博士学位论文

中国科学院大学学位论文 LaTeX 模板

作者姓名：王延泽

指导教师：李四 教授 中国科学院 xxx 研究所

学位类别：工学硕士

学科专业：计算机应用技术

培养单位：中国科学院 xxx 研究所

2024 年 6 月



**LaTeX Thesis Template of UCAS**

**A dissertation submitted to  
University of Chinese Academy of Sciences  
in partial fulfillment of the requirement  
for the degree of  
Doctor of Philosophy  
in Computer Applied Technology**

**By**

**Author Name**

**Supervisor: Professor LI Si**

**Institute of xxx, Chinese Academy of Sciences**

**June, 2023**



## **中国科学院大学 学位论文原创性声明**

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

## **中国科学院大学 学位论文授权使用声明**

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：



## 摘 要

中文摘要、英文摘要、目录、论文正文、参考文献、附录、致谢、攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果等均须由另页右页（奇数页）开始。

**关键词：**中国科学院大学，学位论文，模板





## **Abstract**

The purpose of this note is to introduce three methods of the Sarkisov program, which aims to factorize birational maps of log Mori fibre spaces.

**Key Words:** University of Chinese Academy of Sciences, Thesis, LaTeX Template



## 目 录

第 1 章 绪论 .....	1
第 2 章 预备知识 .....	5
2.1 代数簇与奇点 .....	5
2.2 极小模型纲领 .....	5
2.3 有限极小模型 .....	5
2.4 叶状结构 .....	5
第 3 章 Sarkisov 纲领 .....	7
3.1 下降法 .....	7
3.2 双标量法 .....	7
3.3 有限模型法 .....	7
第 4 章 叶状结构 .....	9
第 5 章 应用 .....	11
5.1 结论 .....	11
参考文献 .....	13
第 1 章 附录中的公式 .....	13
第 2 章 附录中的图表 .....	15
致谢 .....	17
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果 ..	19



## 图目录

附图 2-1	这是一个样图 .....	15
--------	--------------	----

## 表目录

附表 2-1	这是一个样表 .....	15
附表 2-2	这是一个样表 .....	15



## 符号列表

### 算子

Symbol	Description
$\Delta$	difference
$\nabla$	gradient operator
$\delta^\pm$	upwind-biased interpolation scheme

### 缩写

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EOS	Equation of State
JWL	Jones-Wilkins-Lee
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering





## 第1章 绪论

极小模型纲领 (minimal model program, MMP) 的目标是按双有理等价类分类代数簇, 并选取选择恰当的代表元。极小模型纲领猜想, 每一个代数簇都双有理等价于一个极小模型 (minimal model) 或一个森纤维空间 (Mori fibre space, mfs), 但这样的代表元有时并不唯一, 于是自然的问题就是不同代表元之间的关系。对于极小模型的情形, 我们有

**定理 1.1** (平转连接极小模型). 令  $(W, B_W)$  为一个  $\mathbb{Q}$ -分解的终极对 (terminal pair), 且  $(X, B_X), (Y, B_Y)$  是它的两个极小模型。那么双有理映射  $X \dashrightarrow Y$  可以分解为一系列  $(K_X + B_X)$ -平转 (flop)。

对于森纤维空间, 由 Sarkisov 纲领可知

**定理 1.2** (主定理). 令  $f : (X, B) \rightarrow S$  和  $f' : (X', B') \rightarrow S'$  为两个 MMP-连接的  $\mathbb{Q}$ -分解 klt 算术森纤维空间, 则有双有理映射  $\Phi$ :

$$\begin{array}{ccc} (X, B) & \xrightarrow{\Phi} & (X', B') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & & S' \end{array}$$

可以分解为 Sarkisov 连接映射的复合, 即

$$\Phi = \Psi_n \circ \dots \circ \Psi_1$$

其中  $\Psi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$  是下列四种 Sarkisov 连接之一:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & X_1 \\ p \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X & & S_1 \\ f \downarrow & \nearrow t & \\ S & & \end{array} & \text{II: } \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & Z' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & & X_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ S & \xrightarrow{\sim} & S_1 \end{array} \\ \text{III: } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow q \\ S & & X_1 \\ s \searrow & & \downarrow f_1 \\ & & S_1 \end{array} & \text{IV: } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & X_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ S & & S_1 \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & & T \end{array} \end{array}$$

其中所有  $f : (X, B) \rightarrow S$  and  $f_1 : (X_1, B_1) \rightarrow S_1$  都是算术森纤维空间, 所有  $p, q$  都是除子压缩, 所有虚线的映射都是翻转 (flip)、平转 (flop) 或反向翻转 (inverse flip) 的复合。

在具有叶状结构的代数簇对 (foliated pair) 上有类似结果：

**定理 1.3** (主定理 2). *TODO*

Sarkisov 纲领起源于对直纹曲面的分类<sup>[2], [2]</sup>. 对 terminal 三位代数簇的完整证明由 Corti 给出, 使用的是下降法。<sup>[2]</sup>. 由下降法的 Sarkisov 纲领归纳地构造 Sarkisov 连接。选取一个定义了双有理映射  $\Phi : X \dashrightarrow X'$  的线性系  $\mathcal{H}$  (或一个一般的除子  $H \in \mathcal{H}$ ), 那么第一个 Sarkisov 连接  $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$  由运行一种特殊的极小模型纲领得到, 被称为 2-ray game, 并且取决于  $\mathcal{H}$  ( $H$ ) 的选取。接着用  $\Phi_1 = \Phi \circ \psi_1^{-1} : X_1 \dashrightarrow X'$  替代  $\Phi : X \dashrightarrow X'$  并重复这一过程。

Sarkisov 次数  $(\mu, \lambda, e)$  可以度量两个森纤维空间的 “距离”

The Sarkisov degree  $(\mu, \lambda, e)$  is designed to prove the termination. The invariant (nef threshold)  $\mu$  lies in a discrete set due to the boundedness of Fano varieties. The invariants (canonical threshold)  $\lambda$  and (the number of crepant divisors)  $e$  are related to the singularities of  $K_X$  with respect to  $H$ . The Sarkisov degree drops after the replacement, and the Sarkisov program terminates after finitely many steps. Bruno and Matsuki<sup>[2]</sup> generalize this method to the case of  $\mathbb{Q}$ -factorial klt threefolds. Moreover, they outline the Sarkisov program for  $\mathbb{Q}$ -factorial klt pairs in any dimension. After important advances in the minimal model program, such as the termination of the MMP with scaling<sup>[2]</sup>, the ACC of lcts<sup>[2]</sup>, the boundedness of  $\delta$ -lc Fano varieties<sup>[2], [2]</sup>, the program they outlined works partially. The main remaining open question is related to the termination of flips and ascending chain condition (or finiteness) of local log canonical thresholds. We call this approach the original method. We are not aware of detailed references discussing the original method for higher dimensional klt pairs, and therefore we discuss this in detail in Section 3.

Using the finiteness of weak log canonical models established in<sup>[2]</sup>, Hacon<sup>[2]</sup> gives another approach to the Sarkisov program, which is called the double scaling method and is known to terminate in all dimensions. Both approaches construct the Sarkisov links by 2-ray games. But in this approach, a common log resolution  $(W, B_W)$  of two Mori fibre spaces is fixed as the roof of the program such that each Sarkisov link is “under the roof”, and each Mori fibre space in the Sarkisov links is a weak log canonical model of  $W$ . The termination of the method of double scaling can then be shown using techniques similar to the termination of flips with scaling. Liu<sup>[2]</sup> generalizes Hacon’s method to generalized pairs. We introduce the double scaling method in Section 4.

Using the idea of Shokurov’s polytopes<sup>[2], [2]</sup>, Hacon and McKernan<sup>[2]</sup> give a different approach to the Sarkisov program without using 2-ray games. Let  $W$  be a common log resolution of  $(X, B) \rightarrow S$  and  $(X', B') \rightarrow S'$ , then there are divisors  $D$  and  $D'$  on  $W$  such that  $S$  and  $S'$  are ample models of  $W$  for  $K_W + D$  and  $K_W + D'$  respectively. Moreover, there are some other divisors  $D_i$  in the polytope of boundaries of

$W$  corresponding to other Mori fibre spaces  $X_i \rightarrow S_i$  and ample models  $S_i$  of  $W$ . Then there is a path in the polytope connecting these divisors  $D_i$  and it gives a decomposition of  $\Phi$  into Sarkisov links. Miyamoto<sup>[2]</sup> uses this method to show that the Sarkisov program works for lc log surfaces or  $\mathbb{Q}$ -factorial log surfaces over an algebraically closed field of any characteristic. We call this approach the polytope method and introduce it in Section 5.

In Section 6, we give examples to illustrate each method of the Sarkisov program.

The Sarkisov program has many applications, such as the classical result for the Cremona group of rank 2. That is, any birational automorphism of the projective plane is a composition of automorphisms of the projective plane and standard quadratic transforms (see<sup>[2]</sup> Chapter 2). Takahashi<sup>[2]</sup> establishes the Sarkisov program for log surfaces and obtains another proof for the classical algebraic result: any automorphism of the affine plane is a composition of linear transformations and upper triangular transformations (see<sup>[2]</sup>, Chapter 13). For more applications, we refer to<sup>[2]</sup> by Lamy.



## 第 2 章 预备知识

- 2.1 代数簇与奇点
- 2.2 极小模型纲领
- 2.3 有限极小模型
- 2.4 叶状结构



## 第 3 章 Sarkisov 纲领

- 3.1 下降法
- 3.2 双标量法
- 3.3 有限模型法





## 第 4 章 叶状结构



## 第 5 章 应用

### 5.1 结论



## 第 1 章 附录中的公式

对公式的引用如，公式(附 1-1)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad (\text{附 1-1})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad (\text{附 1-2})$$

mathtext:  $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$ , mathnormal:  $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$ , mathrm:  $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$ .

mathbf:  $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \boldsymbol{\sigma}$ , mathit:  $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$ , mathsf:  $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$ .

mathtt:  $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$ , mathfrak:  $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{L}, 2, 3, 5, \sigma$ , mathbb:  $\mathbb{A}, \mathbb{F}, \mathbb{L}, 2, 3, 5, \sigma$ .

mathcal:  $\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{L}, 2, 3, 5, \sigma$ , mathscr:  $\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathscr{L}, 2, 3, 5, \sigma$ , boldsymbol:  $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, 2, 3, 5, \boldsymbol{\sigma}$ .

vector:  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$ , unitvector:  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

matrix:  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$ , unitmatrix:  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

tensor:  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$ , unittensor:  $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$



## 第 2 章 附录中的图表

附表测试

附表 2-1 这是一个样表

App Table 2-1 This is a sample table

行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8

附表 2-2 这是一个样表

App Table 2-2 This is a sample table

行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8

附图测试



附图 2-1 这是一个样图

App Figure 2-1 This is a sample figure

注: 对图片的注释





## 致 谢

此处填写致谢。

2023 年 6 月



## 作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果

### 作者简历：

××××年××月——××××年××月，在××大学××院（系）获得学士学位。

××××年××月——××××年××月，在××大学××院（系）获得硕士学位。

××××年××月——××××年××月，在中国科学院××研究所（或中国科学院大学××院系）攻读博士/硕士学位。

工作经历：

### 已发表（或正式接受）的学术论文：

- (1) 已发表的工作 1
- (2) 已发表的工作 2

### 申请或已获得的专利：

（无专利时此项不必列出）

### 参加的研究项目及获奖情况：

