



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

博士学位论文

中国科学院大学学位论文 LaTeX 模板

作者姓名：王延泽

指导教师：李四 教授 中国科学院 xxx 研究所

学位类别：工学硕士

学科专业：计算机应用技术

培养单位：中国科学院 xxx 研究所

2024 年 6 月

LaTeX Thesis Template of UCAS

**A dissertation submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Philosophy
in Computer Applied Technology**

By

Author Name

Supervisor: Professor LI Si

Institute of xxx, Chinese Academy of Sciences

June, 2023

中国科学院大学 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学 学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

中文摘要、英文摘要、目录、论文正文、参考文献、附录、致谢、攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果等均须由另页右页（奇数页）开始。

关键词：中国科学院大学，学位论文，模板

Abstract

The purpose of this note is to introduce three methods of the Sarkisov program, which aims to factorize birational maps of log Mori fibre spaces. One of goals of birational geometry is to classify birational equivalence classes. The minimal model program is to find a good representative in every fixed birational equivalence class. All of these good representatives can be divided into two classes. One is called the minimal model, and the other is called Mori fiber space, both of which are not unique. Any two Mori fiber spaces in a same birational class is connected by a birational map, which can be decomposed into finitely many maps from the four types of “links” by the Sarkisov program.

Key Words: Minimal Model Program, Sarkisov Program, Foliated pairs

目 录

第 1 章 绪论	1
第 2 章 预备知识	5
2.1 代数簇与奇点	5
2.2 极小模型纲领	5
2.3 有限极小模型	6
2.4 叶状结构	9
第 3 章 Sarkisov 纲领	11
3.1 下降法	11
3.2 双标量法	11
3.3 有限模型法	11
第 4 章 叶状结构	13
第 5 章 应用	15
5.1 结论	15
参考文献	17
第 1 章 附录中的公式	19
第 2 章 附录中的图表	21
致谢	23
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果 ..	25

图目录

附图 2-1 这是一个样图	21
---------------------	----

表目录

附表 2-1 这是一个样表	21
附表 2-2 这是一个样表	21

符号列表

算子

Symbol	Description
Δ	difference
∇	gradient operator
δ^\pm	upwind-biased interpolation scheme

缩写

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EOS	Equation of State
JWL	Jones-Wilkins-Lee
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering

第 1 章 绪论

极小模型纲领 (minimal model program, MMP) 的目标是按双有理等价类分类代数簇, 并选取恰当的代表元。极小模型纲领猜想, 每一个代数簇都双有理等价于一个极小模型 (minimal model) 或一个森纤维空间 (Mori fibre space, mfs), 但这样的代表元有时并不唯一, 于是自然的问题就是不同代表元之间的关系。对于极小模型的情形, 我们有

定理 1.1 (平转连接极小模型). 令 (W, B_W) 为一个 \mathbb{Q} -分解的终端对 (terminal pair), 且 $(X, B_X), (Y, B_Y)$ 是它的两个极小模型。那么双有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 可以分解为一系列 $(K_X + B_X)$ -平转 (flop)。

对于森纤维空间, 由 Sarkisov 纲领可知

定理 1.2 (主定理). 令 $f : (X, B) \rightarrow S$ 和 $f' : (X', B') \rightarrow S'$ 为两个 MMP-连接的 \mathbb{Q} -分解 klt 算术森纤维空间, 则有双有理映射 Φ :

$$\begin{array}{ccc} (X, B) & \xrightarrow{\Phi} & (X', B') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & & S' \end{array}$$

可以分解为 Sarkisov 连接映射的复合, 即

$$\Phi = \Psi_n \circ \dots \circ \Psi_1$$

其中 $\Psi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是下列四种 Sarkisov 连接之一:

$$\begin{array}{ll} \text{I: } \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & X_1 \\ p \downarrow & & \downarrow f_1 \\ X & & S_1 \\ f \downarrow & \nearrow t & \\ S & & \end{array} & \text{II: } \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\quad} & Z' \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X & & X_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ S & \xrightarrow{\sim} & S_1 \end{array} \\ \text{III: } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Z \\ f \downarrow & & \downarrow q \\ S & & X_1 \\ s \searrow & & \downarrow f_1 \\ & & S_1 \end{array} & \text{IV: } \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & X_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f_1 \\ S & & S_1 \\ s \searrow & & \nearrow t \\ & & T \end{array} \end{array}$$

其中所有 $f : (X, B) \rightarrow S$ and $f_1 : (X_1, B_1) \rightarrow S_1$ 都是算术森纤维空间, 所有 p, q 都是除子压缩, 所有虚线的映射都是翻转 (flip)、平转 (flop) 或反向翻转 (inverse flip) 的复合。

在具有叶状结构的代数簇对 (foliated pair) 上有类似结果：

定理 1.3 (主定理 2). *TODO*

Sarkisov 纲领起源于对直纹曲面的分类 [1], [2]. 对终端三维代数簇 (terminal threefolds) 的完整证明由 Corti 给出, 使用的是下降法。[3]. 由下降法的 Sarkisov 纲领归纳地构造 Sarkisov 连接。选取一个定义了双有理映射 $\Phi : X \dashrightarrow X'$ 的线性系 \mathcal{H} (或一个一般的除子 $H \in \mathcal{H}$), 那么第一个 Sarkisov 连接 $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$ 由运行一种特殊的极小模型纲领得到, 被称为 2-ray game, 并且取决于 \mathcal{H} (H) 的选取。接着用 $\Phi_1 = \Phi \circ \psi_1^{-1} : X_1 \dashrightarrow X'$ 替代 $\Phi : X \dashrightarrow X'$ 并重复这一过程。

Sarkisov 次数 (μ, λ, e) 可以度量两个森纤维空间的“距离”。由 Fano 代数簇的有界性, 第一个不变量 μ 落在一个离散集中。第二个不变量典范阈值 (canonical threshold) λ 和第三个不变量相容除子 (crepant divisor) 的个数和代数簇相对于 H 的奇异性有关。每构造一个 Sarkisov 连接, 新的双有理映射 $X_i \dashrightarrow X'$ 的 Sarkisov 次数 (μ_i, λ_i, e_i) 会下降, 于是 Sarkisov 纲领将在有限步内终结。

Bruno 和 Matsuki [4] 将这种方法推广到 \mathbb{Q} -分解的 klt 奇点的三维代数簇的情形。并且他们给出了任意维 \mathbb{Q} -分解 klt 奇点代数簇的 Sarkisov 纲领的下降法的大纲。之后在极小模型纲领中有一些重要进展, 例如标量极小模型纲领 (MMP with scaling) 的终结性 [?] , lct 的 ACC (ascending chain condition) [?] , δ -lc Fano 簇的有界性 [?] , [5], 这些进展使得 Bruno 和 Matsuki 的大纲部分地可行, 剩下的主要问题与算术翻转的终结性和局部算术典范阈值 (local log canonical thresholds) 的 ACC (或者有限性) 有关。本文将这种方法称为下降法, 并且在第三章第一节具体讨论。

利用弱典范模型的有限性 [?] (finiteness of weak log canonical models), Hacon [6] 给出了另一种构造 Sarkisov 纲领的方法, 在本文中称之为双标量法, 这种方法对所有维数都成立。这两种方法都是通过 2-ray game 来构造 Sarkisov 连接, 但是在双标量法中固定了两个森纤维空间的公共算术解消 (W, B_W) 作为 Sarkisov 纲领的“屋顶”, 使得分解中的每一个森纤维空间都是 W 的某个弱算术典范模型。双标量法的 Sarkisov 纲领的终结性由弱算术典范模型的有限性推出, 这与标量翻转 (flips with scaling) 的终结性的证明类似。刘继豪 [7] 将这种方法推广到了 generalized pairs 的情况。本文第三章第二节介绍这种方法。

利用 Shokurov 的多面体方法 [?] , [?] , Hacon 和 McKernan [8] 给出了一种新方法不通过 2-ray game 实现 Sarkisov 纲领。令 W 为 $(X, B) \rightarrow S$ 和 $(X', B') \rightarrow S'$ 的公共算术解消, 则在 W 上有两个除子 D 和 D' , 使得 S 和 S' 是 W 相对于 $K_W + D$ 和 $K_W + D'$ 的丰沛模型 (ample model)。进一步, W 的除子的多面体的边界上有其他除子 D_i , 每个除子对应一个森纤维空间 $X_i \rightarrow S_i$ 和 W 的丰沛模型 S_i 。于是在多面体边界上有一条路径连接这些除子 D_i , 并且将 Φ 分解为对应的 Sarkisov 连接。Miyamoto [9] 将这种方法应用到了任意特征代数闭域上的 lc 算术曲面或 \mathbb{Q} -分解算术曲面。本文将这种方法成为有限模型法, 并且在第三章第三节介绍。

在第三章第四节, 本文给出三种方法的具体例子。Sarkisov 纲领有许多应用, 例如 2 阶 Cremona 群的经典结果。即每一个射影平面的双有理自同构都是由自同构和标准二次映射复合生成。(见 [?, Chapter 2])。Takahashi [?] 对算术曲面建立了特殊的 Sarkisov 纲领, 并得到了另一个经典代数结论的几何证明: 每一个仿射平面的自同构都由仿射自同构和上三角变换复合。(见 [?, Chpter 13], Chapter 13)。Lamy[?] 给出了更多其他应用。

foliation mmp

叶状结构的代数簇 (foliated varies) 用子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_X$ 代替切丛, 进而用叶状典范除子 (foliated canonical divisor) $K_{\mathcal{F}}$ 代替典范除子 K_X 。等人发展了带叶状结构的极小模型纲领, 尤其是高维情况的带代数可积的叶状结构的代数簇。于是可以考虑这种情况下的 Sarkisov 纲领。将在第四章介绍。

第2章 预备知识

2.1 代数簇与奇点

定义 2.1. 令 (X, B) 为代数簇对, 且 $f : Y \rightarrow X$ 是它的算术解消, 则有

$$K_Y + C = f^*(K_X + B),$$

那么除子 E 的差异数 (discrepancy) $a(E; X, B)$ 定义为

$$a(E; X, B) = -\text{mult}_E C.$$

进一步, 定义 (X, B) 的差异数:

$$\text{discrep}(X, B) := \inf \{a(E; X, B) : E \text{ is an exceptional divisor over } X\}$$

和整体差异数

$$\text{totdiscrep}(X, B) := \inf \{a(E; X, B) : E \text{ is a divisor over } X\}.$$

2.2 极小模型纲领

我们将极小模型纲领中出现的代数簇对称为极小模型的**结果**, 将 MMP 停止处的代数簇称为 MMP 的**输出** (要么是极小模型, 要么是森纤维空间)。对于极小模型纲领, 有如下结果。

定理 2.1 (标量 MMP 的终结定理). ? , Corollary 1.4.2] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 (X, B) 是 \mathbb{Q} -分解 klt 代数簇对, 其中 $K_X + B$ \mathbb{R} -Cartier 除子, 且 B 是 π -big。若 $C \geq 0$ 为 \mathbb{R} -除子, 且 $K_X + B + C$ 是 klt 和 π -数值有效 (nef), 那么在 U 上运行 C -标量的 $(K_X + B)$ -MMP, 那么这个极小模型纲领将终结。

定理 2.2 (极小模型输出). ? , Corollary 1.3.3] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 (X, B) 是 \mathbb{Q} -分解 klt 代数簇对, 其中 $K_X + B$ 是 \mathbb{R} -Cartier 除子。若 $K_X + B$ 不是 π -伪有效的, 那么运行 U 上的 $(K_X + B)$ -MMP, 将终结于森纤维空间 $g : Y \rightarrow Z$ 。

推论 2.3. Hacon [6, Corollary 13.7] 令 (X, B) 为 klt 代数簇对, \mathfrak{E} 是任意差异数满足 $a(E; X, B) \leq 0$ 的例外除子 E 的集合, 那么有双有理态射 $f : Z \rightarrow X$ 和 \mathbb{Q} -除子 B_Z 使得:

- (1) (Z, B_Z) 是 klt 代数簇对;
- (2) E 是 f -例外除子当且仅当 $E \in \mathfrak{E}$;

- (3) 若 $E \in \mathfrak{C}$ 则 $\text{mult}_E B_Z = -a(E; X, B)$, 且 $f_* B_Z = B$ 和 $K_Z + B_Z = f^*(K_X + B)$ 。

特别的, 若却 \mathfrak{C} 为所有差异数满足 $a(E; X, B) \leq 0$ 的例外除子 E 的集合, 那么 Z 被称为 X 的 **终端化** (*terminalization*); 若取 $e \mathfrak{C}$ 为仅包含一个差异数满足 $a(E; X, B) \leq 0$ 的例外除子, 那么 $f : Z \rightarrow X$ 被称为 **除子解压** (*divisorial extraction*).

定义 2.2. Bruno 等 [4, Definition 3.3] 如果多个代数簇对 $\{(X_i, B_i)\}$ 是从算术光滑的代数簇对 (W, B_W) 的 $(K_W + B_W)$ -MMP 的不同结果, 则称它们为 **MMP-相关的** (**MMP-related**) if they are results of $(K_W + B_W)$ -MMPs starting from a given log smooth pair (W, B_W) .

引理 2.4. Bruno 等 [4, Proposition 3.4] 令 $\{(X_l, B_l)\}$ 为有限多个互相双有理等价的 \mathbb{Q} -分解 *klt* 代数簇对, 那么下列条件等价:

- (1) 它们是 *MMP*-相关的;
- (2) 存在一个算术光滑代数簇对 (W, B_W) 和一组射影双有理态射 $f_l : W \rightarrow X_l$ 支配每个 X_l , 满足 $f_{l*} B_W = B_l$ 和分歧等式

$$K_W + B_W = f_l^*(K_{X_l} + B_l) + \sum_{\text{exceptional}} a_{li} E_{li}$$

其中对每个 f_l -例外除子 E_{li} 满足 $a_{li} > 0$ 的不等式条件;

- (3) 对任意两个代数簇对 $(X, B = \sum_i b_i B_i), (X', B' = \sum_j b'_j B'_j)$, 有 $a(B_i; X', B') \geq -b_i$ 且严格不等式成立当且仅当 B_i 是 X' 上的例外除子。同样的, 有 $a(B'_j; X, B) \geq -b'_j$ 且严格不等式成立当且仅当 B'_j 是 X 上的例外除子。

证明. 我们给出 (3) \implies (2) 的简略证明: 令 W 为支配每个代数簇对 $(X_l, B_l = \sum b_{li} B_{li})$ 的算术光滑解消, 并有射影双有理态射 $f_l : W \rightarrow X_l$, 它们例外除子的并 $f_{l*}^{-1} B_l \cup E_{li}$ 是一个横截相交的除子。令 $B_W = \sum_i d_i D_i$, 其中如果 D_i 是 $\cup_l f_{l*}^{-1} B_l$ 中的某个素除子则 $d_i = b_{li}$, 如果 B_l 是每个 X_l 上的例外除子, 则 $d_i = 1$ 。由条件 (3), 这是定义良好的。那么 (W, B_W) 上的分歧等式 (ramification formula) 中的不等式条件也由 (3) 得到。 \square

2.3 有限极小模型

定义 2.3. Hacon 等 [8, §2] 对有理映射 $f : X \dashrightarrow Y$ 若有 f 的解消 $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow Y$ 满足 p 和 q 都是压缩态射且 p 双有理态射, 则称 f 为有理压缩映射 (**rational contraction**)。若 q 也是双有理态射, 且每个 p -例外除子都是 q -例外除子, 则称 f 为双有理压缩映射 (**birational contraction**)。如果 f^{-1} 也是双有理压缩映射, 则称 f 为小双有理映射 (**small birational map**)。

定义 2.4. [Definition 3.6.1] 令 $f : X \dashrightarrow Y$ 为正规拟射影代数簇间的双有理映射, 且 $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow Y$ 是 f 的解消。若 D 是 X 上的 \mathbb{R} -Cartier 除子, 满足 $D_Y = f_* D$ 也是 \mathbb{R} -Cartier 除子, 那么如果满足

- f 不解压任何除子 (即 f 是双有理压缩);
- $E = p^* D - q^* D_Y$ 是 Y 上的有效除子 (对应的, $\text{Supp } p_* E$ 包含全部 f -例外除子)。

则称 f 为 D -非正性的 (D -non-positive), 对应的, D -负性的 (D -negative)。

回顾双有理代数几何中关于模型的定义 []:

定义 2.5. [Definition 3.6.5] 令 $\pi : (X, D) \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, $K_X + D$ 是 X 上的 \mathbb{R} -Cartier 除子, 且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上的双有理映射。如果 f 是 $(K_X + D)$ -非正性的且 $K_Y + f_* D$ 是 U 上半丰沛的, 那么称 Z 和 f 为关于 D 的半丰沛模型。

令 $g : X \dashrightarrow Z$ 为 U 上的有理映射, $p : W \rightarrow X$ 和 $q : W \rightarrow Z$ 是对 g 的解消, 其中 q 是压缩态射。若 Z 上有 U 上的丰沛除子 H , 且 $p^*(K_X + D) \sim_{\mathbb{R}, U} q^* H + E$, 其中 E 满足对任意的 $B \in |p^*(K_X + D)/U|_{\mathbb{R}}$ 都有 $B \geq E$, 则称 Z 是 X 关于 D 的丰沛模型 (ample model)。

定义 2.6. [Definition 3.6.7] 令 $\pi : (X, D) \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 若 $K_X + D$ 是 lc 且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是双有理压缩映射, 那么有如下定义:

- (1) 如果 f 是 $(K_X + D)$ -非正性的且 $K_Y + f_* D$ 是 U 上数值有效的, 则称 Y 为关于 D 在 U 的弱算术典范模型 (weak log canonical model);
- (2) 如果 f 是 $(K_X + D)$ -非正性的且 $K_Y + f_* D$ 是 U 上丰沛的, 则称 Y 为关于 D 在 U 的算术典范模型 (log canonical model);
- (3) 如果 f 是 $(K_X + D)$ -负性的且 $K_Y + f_* D$ 是 U 上数值有效的和 \mathbb{Q} -分解的, 并且具有 dlt 奇点, 则称 Y 为关于 D 在 U 的算术终端模型 (log terminal model)。

引理 2.5. [lemma 3.6.6] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 D 是 X 上的 \mathbb{R} -Cartier 除子。

- (1) 如果 $g_i : X \dashrightarrow X_i, i = 1, 2$ 是关于 D 的 U 上的两个丰沛模型, 那么有同构态射 $h : X_1 \rightarrow X_2$ 满足 $g_2 = h \circ g_1$ 。即丰沛模型在同构意义下唯一。
- (2) 如果 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上关于 D 的半丰沛模型, 那么 U 上关于 D 的丰沛模型 $g : X \dashrightarrow Z$ 存在, 并且 $g = h \circ f$, 其中 $h : Y \rightarrow Z$ 是压缩态射, Z 上有对应丰沛除子 H 满足 $f_* D \sim_{\mathbb{R}, U} h^* H$ 。

(3) 若 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上双有理映射, 那么 f 是关于 D 在 U 上的丰沛模型当且仅当 f 是关于 D 在 U 上的半丰沛模型且 f_*D 在 U 上丰沛。

根据上述引理, 有算术典范模型的等价定义:

定义 2.7. 令 $\pi : (X, D) \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, $K_X + D$ 有 lc 奇点且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是不解压任何除子的双有理映射。如果 Y 是关于 D 在 U 上的丰沛模型, 那么称之为**算术典范模型 (log canonical model)**。

进一步, 对于边界是大除子的代数簇对, 还有

引理 2.6. [?, lemma 3.9.3] 令 $\pi : (X, B) \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 (X, B) 是具有 klt 奇点的代数簇对, B 在 U 上是大除子。如果哦 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上弱算术典范模型, 那么

- f 是 U 上半丰沛模型;
- U 上的丰沛模型 $g : X \dashrightarrow Z$ 存在;
- 存在压缩态射 $h : Y \rightarrow Z$ 和 Z 上在 U 上丰沛的 \mathbb{R} -除子, 使得 $K_Y + f_*B \sim_{\mathbb{R}, U} h^*H$ 。

下面给出除子的多面体相关的定义和定理:

定义 2.8. [?, Definition 1.1.4] 令 $\pi : X \rightarrow U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 V 是 $\text{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 的定义在有理数上的优先为子射影空间。取定一个 \mathbb{R} -除子 $A \geq 0$, 定义:

$$\mathcal{L}_A(V) = \{D = A + B : B \in V, K_X + D \text{ 有 lc 奇点且 } B \geq 0\}$$

$$\mathcal{E}_{A, \pi}(V) = \{D \in \mathcal{L}_A(V) : K_X + D \text{ 是 } U \text{ 上的伪有效除子}\}$$

令 $f : X \dashrightarrow Y$ 为 U 上的双有理压缩映射, 定义

$$\mathcal{W}_{A, \pi, f}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : f \text{ 是 } (X, D) \text{ 在 } U \text{ 上的弱算术典范模型}\}$$

令 $g : X \dashrightarrow Z$ 是 U 上的有理压缩映射, 定义

$$\mathcal{A}_{A, \pi, g}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : g \text{ 是 } (X, D) \text{ 在 } U \text{ 上的丰沛模型}\}$$

进一步, 将 $\mathcal{A}_{A, \pi, g}(V)$ 在 $\mathcal{L}_A(V)$ 中的闭包记作 $C_{A, \pi, g}(V)$ 。

如果基底 U 是清楚的, 或是一个点, 那么我们省略 π , 简单记作 $\mathcal{E}_A(V)$ 和 $\mathcal{A}_{A, f}$ 。

定理 2.7 (弱算术典范模型有限性, [?] Theorem E). 令 $\pi : X \rightarrow U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射, 且 A 是一个一般的在 U 上丰沛的 \mathbb{R} -除子, 且 $V \subset \text{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 是定义在有理数上的有限维线性子空间, 假设存在具有 klt 奇点的代数簇对 (X, Δ_0) 。那么存在有限多个 U 上的双有理映射 $f_i : X \dashrightarrow X_i, 1 \leq i \leq l$, 若某个 $D \in \mathcal{L}_A(V)$ 有关于 D 的在 U 上的弱算术典范模型 $f : X \dashrightarrow Y$, 那么对某个 $1 \leq i \leq l$ 存在同构态射 $h_i : X_i \rightarrow Y$ 使得 $f = h_i \circ f_i$ 。

2.4 叶状结构

第 3 章 Sarkisov 纲领

- 3.1 下降法
- 3.2 双标量法
- 3.3 有限模型法

第 4 章 叶状结构

第 5 章 应用

结论与展望

5.1 结论

参考文献

- [1] Sarkisov V G. BIRATIONAL AUTOMORPHISMS OF CONIC BUNDLES [J/OL]. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1981, 17(1): 177-202. DOI: [10.1070/IM1981v017n01ABEH001326](https://doi.org/10.1070/IM1981v017n01ABEH001326).
- [2] Sarkisov V G. On conic bundle structures [J]. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1982, 46(2): 371-408, 432.
- [3] Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov [J]. Journal of Algebraic Geometry, 1995, 1995(4): 223-254.
- [4] Bruno A, Matsuki K. Log Sarkisov program [J/OL]. Internat. J. Math., 1997, 8(4): 451-494. <https://doi.org/10.1142/S0129167X97000238>.
- [5] Birkar C. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties [J/OL]. Annals of Mathematics, 2021, 193(2): 347 - 405. <https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.1>.
- [6] Hacon C D. The Minimal model program for Varieties of log general type [J/OL]. Wiadomości Matematyczne, 2012, 48(2): 49. DOI: [10.14708/wm.v48i2.317](https://doi.org/10.14708/wm.v48i2.317).
- [7] Liu J. Sarkisov program for generalized pairs [J]. Osaka J. Math., 2021, 58(4): 899-920.
- [8] Hacon C, McKernan J. The Sarkisov program [J/OL]. Journal of Algebraic Geometry, 2012, 22(2): 389-405. DOI: [10.1090/S1056-3911-2012-00599-2](https://doi.org/10.1090/S1056-3911-2012-00599-2).
- [9] Miyamoto K. The sarkisov program on log surfaces [J]. arXiv: Algebraic Geometry, 2019, 2019: 114-114.

第 1 章 附录中的公式

对公式的引用如，公式(附 1-1)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad (\text{附 1-1})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \end{cases} \quad (\text{附 1-2})$$

mathtext: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$, mathnormal: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$, mathrm: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$.

mathbf: $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \boldsymbol{\sigma}$, mathit: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$, mathsf: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$.

mathtt: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$, mathfrak: $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{L}, 2, 3, 5, \sigma$, mathbb: $\mathbb{A}, \mathbb{F}, \mathbb{L}, 2, 3, 5, \sigma$.

mathcal: $\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{L}, 2, 3, 5, \sigma$, mathscr: $\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathscr{L}, 2, 3, 5, \sigma$, boldsymbol: $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, 2, 3, 5, \boldsymbol{\sigma}$.

vector: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$, unitvector: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

matrix: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$, unitmatrix: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

tensor: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$, unittensor: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

第 2 章 附录中的图表

附表测试

附表 2-1 这是一个样表

App Table 2-1 This is a sample table

行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8

附表 2-2 这是一个样表

App Table 2-2 This is a sample table

行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8

附图测试



附图 2-1 这是一个样图

App Figure 2-1 This is a sample figure

注: 对图片的注释

致 谢

致谢。

2023 年 6 月

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果

作者简历：

××××年××月——××××年××月，在××大学××院（系）获得学士学位。

××××年××月——××××年××月，在中国科学院××研究所（或中国科学院大学××院系）攻读硕士学位。

已发表（或正式接受）的学术论文：

[enumerate]

[nosep]已发表的工作 1

参加的研究项目及获奖情况：

