



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

硕士学位论文

曲面的极小模型纲领及其应用

作者姓名: 刘子琳

指导教师: 陈亦飞 副研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

学位类别: 理学硕士

学科专业: 基础数学

培养单位: 中国科学院数学与系统科学研究院

2021 年 12 月

The Minimal Model Program of Surfaces and Its Application

A thesis submitted to the
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Master of Natural Science
in Pure Mathematics

By

Zilin Liu

Supervisor: Professor Yifei Chen

Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese
Academy of Sciences

December 2021

中国科学院大学
研究生学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。尽我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。

作者签名：

日 期：

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院有关保存和使用学位论文的规定，即中国科学院有权保留送交学位论文的副本，允许该论文被查阅，可以按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则公布该论文的全部或部分内容，可以采用影印、缩印或其他复制手段保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：

日 期：

导师签名：

日 期：

摘 要

本文介绍了曲面上的极小模型纲领及其应用. 曲面按双有理等价可以分为若干等价类, 曲面的极小模纲领就是要从这些等价类中找出性质良好的代表元来. 性质良好的代表元分为两类, 一类称作极小模型, 另一类称作森纤维空间. 双有理等价的极小模型在同构的意义下是唯一的, 森纤维空间在同一双有理等价类中可能存在多个不同构的代表元. 不过, 对于森纤维空间, 应用 Sarkisov 纲领可以将两个森纤维空间的非同构双有理映射分解成四种基本的连接映射的有限复合. 最后应用 Sarkisov 纲领证明射影平面的双有理自同构群由其自同构群和二次变换生成.

关键词: 曲面的极小模型纲领, Sarkisov 纲领, 射影平面自同构群.

Abstract

This paper is an introduction to the minimal model program of surfaces and its application. There are many birational equivalence classes of surfaces. The minimal model program of surfaces is to find a good representative in every fixed birational equivalence class. All of these good representatives can be divided into two classes. One is called the minimal model which is unique up to an isomorphism in a given birational equivalence class. The other is called Mori fiber space which is not unique up to an isomorphism in a given birational equivalence class. One can, however, decompose any birational map between two birational Mori fiber spaces into a composite of finite maps from the four types of “links” by the Sarkisov program. Finally, as an application of the Sarkisov program, the group of birational automorphism of projective plane is generated by the group of automorphism of projective plane and the standard quadratic transformations.

Keywords: the Minimal Model Program of Surfaces, the Sarkisov Program, the group of birational automorphism of projective plane.

目 录

第 1 章 引言	1
第 2 章 预备知识	3
2.1 胀开	3
2.2 除子	4
2.3 线丛	6
2.4 相交数及相关定理	6
第 3 章 曲面的极小模纲领	13
3.1 引言	13
3.2 极端压缩定理	14
3.3 锥定理	22
3.4 曲面的极小模纲领	28
第 4 章 曲面的 Sarkisov 纲领	31
4.1 Noether-Castelnuovo 定理	31
4.2 Sarkisov 次数	32
4.3 Noether-Fano-Iskovskih 定理	35
4.4 Sarkisov 算法	39
第 5 章 射影平面的双有理自同构群	47
附 录 A	51
附 录 B	53
参考文献	55
作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果	57
致 谢	59

符号列表

字符

Symbol	Description
\mathbb{N}	the natural numbers
\mathbb{Z}	the ring of intergral numbers
\mathbb{Q}	the field of rational numbers
\mathbb{C}	the field of complex numbers
\mathbb{P}^n	the projective space of dimension n
$\text{Div}X$	the group of divisors of X
$\text{Pic}X$	the Picard group of X
$\text{Supp}D$	the union of prime divisors of D
\equiv	the numerical equivalence
$N^1(S)$	numerical equivalence classes of the Picard group of S tensoring \mathbb{R}
$N_1(S)$	numerical equivalence classes of the group of divisors of S tensoring \mathbb{R}
$\text{NE}(S)$	the convex cone generated by effective 1-cycles
$\overline{\text{NE}}(S)$	the closure of $\text{NE}(S)$ in $N_1(S)$

第 1 章 引言

代数簇是代数几何的基本研究对象. 而分类问题是几何学的基本问题. 代数几何里的一个经典分支是研究代数簇的双有理等价分类, 并寻找每个类中的性质良好的代表元. 双有理等价分类形成的学科称为极小模型纲领. 这是一个非常重要的领域, 在代数簇维数小于等于 3 时已经有确切结果. 对于维数大于 3 的代数簇, 猜想这个代数簇要么双有理等价于一个极小模型 (minimal model), 要么双有理等价于一个森纤维空间 (Mori fiber space). 如果我们把极小模型和森纤维空间看成是双有理等价类的代表元, 一个自然的问题是它们是否唯一? 如果不唯一, 这些代表元之间存在怎样的关系? 极小模型之间的关系相对清晰, 它们之间相差一些称为 flop 的双有理操作的复合 (参见 [1]), 而 flop 是一个余维数 2 的同构. 特别地, 曲面极小模型只有一个同构类. 而森纤维空间的关系相对丰富, 并不能由一些余维数 2 的同构将 2 个双有理等价的森纤维空间连接起来. 曲面上经典的研究森纤维空间关系的理论称为 Sarkisov 纲领. 目前这个纲领对任意纤维带川又 (Kawamata) 对数奇点 (klt singularity) 的森纤维空间均成立 (见参考文献 [2]).

本论文是一篇学习论文. 文章的结构如下:

第二章介绍基本概念和定理.

第三章介绍曲面的极小模型纲领. 本章中将平行于高维极小模型纲领 4 个主要定理中的两个——锥定理和有理性定理进行详细证明. 这两个定理在高维情形的证明思路基本一致. 曲面上的小平消没定理和黎曼罗赫定理在高维时已经不够用了. 需引进更一般的 Kawamata-Viehweg 消没定理和 Shokurov 的非消没 (nonvanishing) 定理. 可参考高维双有理几何的经典教材 [3] 或者 [4].

第四章介绍曲面森纤维空间的 Sarkisov 纲领及详细证明.

第五章作为曲面的森纤维空间 Sarkisov 纲领的应用. 将证明射影平面双有理自同构群由其自同构群和二次变换生成. 这是一个经典的事实. Sarkisov 纲领只是其中的一个证明. 其他证明可参考文献 [5], [6].

第 2 章 预备知识

本文中的曲面是复数域上光滑射影曲面.

2.1 胀开

胀开是一个基础概念, 由于论文的讨论对象是曲面, 所以我们介绍在曲面在一点的胀开.

定义 2.1 ([10], Chapter 1, §1, Definition-Proposition 1-1-1) 令 S 是一个光滑射影曲面, $P \in S$ 是 S 上的一点. 取点 P 的一个解析开邻域 U , 令 P 在 U 上的局部坐标是 (x, y) . 定义集合 \tilde{U} 如下:

$$\tilde{U} = \{(s : t) \times (x, y) \in \mathbb{P}^1 \times U : xt - ys = 0\}$$

自然的有 \tilde{U} 到 U 的投射.

在上面的投射中, 若将 \tilde{U} 限制为 $\tilde{U} - E$, 其中 $E = \mathbb{P}^1 \times (0, 0)$ 是点 $P = (0, 0)$ 在投射下的原像, 得到的映射

$$\tilde{U} - E \xrightarrow{\sim} U - \{P\}$$

是一个同构. 因此令 \tilde{S} 是两个开集 \tilde{U} 与 $(S - \{P\})$ 粘合得到的曲面, 我们获得一个态射

$$\mu : \tilde{S} \rightarrow S$$

我们称 $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ 是 S 在点 P 的胀开. 由于

$$\mu|_{\tilde{S} - \mu^{-1}(P)} : \tilde{S} - \mu^{-1}(P) \xrightarrow{\sim} S - P$$

是同构, 所以 \tilde{S} 和 S 双有理等价.

由以上命题不难看出, 除了被胀开的点外, 所有的点的原像都有且只有一个点, 而被胀开的点的原像较为特殊, 在后文经常用到. 我们对它做额外说明.

令 S 是一个曲面, P 为 S 上一点, $\mu : \tilde{S} \rightarrow S$ 是胀开点 P 得到的态射. 称曲线 $E = \mu^{-1}(P)$ 为例外曲线. 由相交数的性质 (相交数的详细定义见后文) 有 $E^2 = -1$. 这说明曲面在一点胀开得到的例外曲线的自交数是 -1 , 那么, 反过来, 是否曲面上自交数为 -1 的曲线都是某个胀开的例外曲线? 这是我们后文的话题, 现在我们有如下定义.

定义 2.2 ([10], Chapter 1, §1, Definition 1-1-2) 令 S 是一个光滑射影曲面, $E \subset S$ 是 S 上一条既约的不可约曲线. 如果

$$E \cong \mathbb{P}^1, \text{ 且 } E^2 = -1$$

我们就称 E 是 S 上的一条 (-1) -曲线.

胀开与双有理映射关系密切, 我们有如下引理.

引理 2.1 (resolution of indeterminacies) ([5], Chapter 1, §1.8) 若 $f: S \dashrightarrow S'$ 是曲面 S 到曲面 S' 的一个双有理映射, 那么存在如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow q & \\ S & \xrightarrow{f} & S' \end{array}$$

其中 X 是一个曲面, p, q 是双有理态射.

2.2 除子

除子是一个基础概念, 我们给出如下定义. (以下定义均引自 [7], Chapter II, §6)

定义 2.3 令 X 是一个诺特整可分概型, 且在余维数为 1 处正则 (regular in codimension one), 称 X 的一个余维数为 1 的闭整子概型 Y 是素除子. 定义由 X 上所有素除子生成的自由阿贝尔群是 X 的 Weil 除子群, 记作 $\text{Div}X$. 称其中的元素是 X 上的 Weil 除子. 例如若 D 是 X 上的一个 Weil 除子, 那么有如下等式

$$D = \sum_{i=1}^r n_i Y_i.$$

其中 Y_i 是 X 上的素除子, n_i 是整数. 如果其中所有的 n_i 都大于零, 就称这个除子 D 是有效的 (effective).

定义 2.4 沿用上一个定义的符号, 令 K 是 X 的函数域, $\eta \in Y$ 是 Y 的一般点, 那么局部环 $\mathcal{O}_{\eta, Y}$ 是一个离散赋值环, 且它的商域是函数域 K . 称对应的离散赋值 v_Y 是 Y 的赋值. 令 $f \in K^*$ 是函数域中任意的非零元素, 故有 v_Y 是整数. 定义如下除子

$$(f) = \sum v_Y(f) \cdot Y$$

其中 $Y \in \text{Div}(X)$. 由引理 2.1, (f) 是一个有限和, 所以它的确是一个除子, 且称这样的除子为主除子.

令 D, D' 是 X 上的两个除子. 如果 $D - D'$ 是一个主除子, 就称 D 和 D' 线性等价, 记作 $D \sim D'$.

引理 2.2 ([7], Chapter II, §6, 6.1) 沿用上面定义记号, 令 $f \in K^*$ 是 X 上的非零有理函数, 那么只有有限个素除子 Y 的赋值 v_Y 使得 $v_Y(f) \neq 0$.

以上我们定义了 Weil 除子. 但是 Weil 除子只能在满足一定条件的概型上定义, 所以我们推广 Weil 除子的定义, 得到可以在一般概型上定义的 Cartier 除子.

定义 2.5 令 X 是一个概型. 对于每个仿射开子集 $U = \text{Spec} A$, 令 S 是 A 的非零因子的集合, $K(U)$ 是 A 用乘法集 S 作的局部化, 我们称 $K(U)$ 是 A 的全商环. 当 U 变化时, 环 $K(U)$ 构成环层 \mathcal{K} , 称它为 \mathcal{O} 的全商环层. 对于任意概型, 层 \mathcal{K} 取代了整概型的函数域的概念. 我们用 \mathcal{K}^* 表示环层 \mathcal{K} 中的乘法可逆元子层. 类似的, \mathcal{O}^* 是 \mathcal{O} 中的可逆元层.

定义 2.6 概型 X 的 Cartier 除子是商层 $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ 的整体截面. 由商层的定义, 给定一个开覆盖 $\{U_i\}$, 以及对每个 i , 有 $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}^*)$, 使得对任意的 i, j , $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}^*)$, 这样就确定了一个商层 $\mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*$ 的整体截面, 因此确定了一个 Cartier 除子. 如果 Cartier 除子在自然映射 $\Gamma(X, \mathcal{K}^*) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^*/\mathcal{O}^*)$ 的像中, 则称它为主除子. 如果两个 Cartier 除子的差是主除子, 则称它们线性等价.

如果 X 是 Noether 的, 整的, 分离的局部分解概型, 以上定义的 Cartier 除子类群与 Weil 除子类群同构, 所以我们经常会不区分它们交替使用 (详见 [7], Chapter II, §6, Corollary 6.17). 当 X 是代数闭域上的非奇异射影簇时, 我们有如下定义.

定义 2.7 令 D 是概型 X 的 Cartier 除子, 用 $\{U_i, f_i\}$ 表示它, 其中 $f_i \in \mathcal{K}(U_i)$. 定义全商环层 \mathcal{K} 的子层 $\mathcal{L}(D)$ 为 f_i 在 U_i 上生成的子 \mathcal{O}_X 模. 称 $\mathcal{L}(D)$ 是和 D 相伴的层.

定义 2.8 令 X 是一个非奇异的射影簇, 定义所有与给定除子 D_0 线性等价的有效除子是一个完全线性系, 记作 $|D_0|$. 完全线性系 $|D_0|$ 的一个子集 δ 如果在 $|D_0|$ 的射影空间结构下是个线性子空间, 就称它是 X 上的一个线性系. 令 $D \in \delta$ 是一个除子, 记 $\text{Supp} D$ 是 D 的所有素除子的并. 定义点 P 是 δ 的基点, 如果对每个 $D \in \delta$, 都有 $P \in \text{Supp} D$.

2.3 线丛

线丛是一个基础概念，我们给出如下定义.

定义 2.9 ([7], Chapter II, §5, Exercises 5.18) 令 X, Y 是概型, $f: X \rightarrow Y$ 是态射. 如果存在 Y 上的开覆盖 $\{U_i\}$, 且有同构 $\psi_i: f^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{A}_{U_i}^n$, 使得对任意的 i, j , 任意的仿射开子集 $V = \text{Spec} A \subseteq U_i \cap U_j$, $\psi = \psi_j \circ \psi_i^{-1}$ 限制在 $\mathbb{A}_V^n = \text{Spec} A[x_1, \dots, x_n]$ 上是一个 $A[x_1, \dots, x_n]$ 的线性自同构 θ , 即对 $\forall a \in A, \theta(a) = a$, 且存在合适的 $a_{ij} \in A$, 使得 $\theta(x_i) = \sum a_{ij} x_j$. 此时, 我们称 X 是 Y 上秩为 n 的向量丛. 秩一向量丛称为线丛.

2.4 相交数及相关定理

由于本文中需要大量的相交数的计算, 所以我们定义相交数, 并引出所需的相关定理.

定理 2.1 ([7], Chapter V, §1, 1.1) 令 S 是一个光滑射影曲面, 对于任意的除子 $C, D \in \text{Div} S$, 存在唯一满足如下条件的到整数 \mathbb{Z} 上的二元函数 $\text{Div} S \times \text{Div} S \rightarrow \mathbb{Z}$, 记作 $C.D$. 满足如下四条

- (1). 如果 C, D 是非奇异曲线且横截相交, 那么 $C.D = \#(C \cap D)$, 即 $C \cap D$ 当中点的个数;
- (2). 这个二元函数是对称的, 即 $C.D = D.C$;
- (3). 这是个加性二元函数, 即 $(C_1 + C_2).D = C_1.D + C_2.D$;
- (4). 这个二元函数在线性等价类上取值相等, 即, 如果 $C_1 \sim C_2$, 那么有 $C_1.D = C_2.D$.

如果两个除子 C, D 与任意除子 E 求相交数都相等, 即 $C.E = D.E$, 那么从相交数角度 D 和 E 就可以看作一个元素, 这就有了数值等价的概念.

定义 2.10 ([7], Chapter V, §1, page 364, Definition) 令 D 是曲面 S 上一个除子. 如果对 S 上任意除子 E 都有 $D.E = 0$, 则称 D 数值等价于 0, 记作 $D \equiv 0$. 如果 $D - E \equiv 0$, 我们就称 D 和 E 数值等价, 记作 $D \equiv E$.

在相交数的计算中, 我们经常会用到投影公式. 在这里我们介绍常用的两个版本, 参见教材 ([6], Chapter I, 1.9, 1.10).

对于光滑射影代数簇 X , D 是 X 上的一个 Cartier 除子, 对于 X 上任意曲线 C 定义相交数 $D.C = \deg \mathcal{L}(D)|_C$, 其中 $\pi: C^\vee \rightarrow C$ 是 C 的正规化映射.

定理 2.2 (投影公式) 令 $\pi: Y \rightarrow X$ 是代数簇的本征态射 (proper morphism), C 是 Y 上一条曲线. 我们定义

$$\pi_* C = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \pi(C) \text{ 是一个点} \\ d \cdot \pi(C) & \text{其中 } d \text{ 是态射 } \pi|_C: C \rightarrow \pi(C) \text{ 的次数} \end{cases}$$

如果 D 是 X 上的 Cartier 除子, 则有投影公式

$$\pi^* D.C = D.\pi_* C.$$

定理 2.3 (投影公式) 令 $\pi: Y \rightarrow X$ 是本征代数簇 (proper varieties) 上的满态射. 令 D_1, \dots, D_r 是 X 上的 Cartier 除子, 其中 $r \geq \dim Y$, 则有

$$\pi^* D_1 \cdots \pi^* D_r = (\deg \pi)(D_1 \cdots D_r).$$

下面都是本文计算或证明中用到的定理, 并给出部分证明.

定理 2.4 (伴随公式) ([7], Chapter V, §1, 1.4) 如果 C 是曲面 S 上亏格为 g 的非奇异曲线, 如果 K 是 S 上的典范除子, 那么 $2g - 2 = C.(C + K)$.

证明: 我们有 $\omega_C \cong \omega_X \otimes \mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C$. ω_C 的次数是 $2g - 2$, 另一方面, 我们有 $\deg_C(\omega_X \otimes \mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C) = C.(C + K)$. \square

定理 2.5 (曲面的 Riemann-Roch 定理) ([7], Chapter V, §1, 1.6) 令 D 是曲面 S 上的任意除子, 那么有

$$l(D) - s(D) + l(K - D) = \frac{1}{2}D.(D - K) + 1 + p_a$$

其中 $l(D) = \dim H^0(S, \mathcal{L}(D))$, $s(D) = \dim H^1(S, \mathcal{L}(D))$ 称作 D 的超丰数, p_a 是 X 的算数亏格, 定义为 $p_a = (-1)^2(\chi(\mathcal{O}_S) - 1)$.

证明: 由 Serre 对偶定理

$$l(K - D) = \dim H^0(S, \mathcal{L}(D)^\vee \otimes \omega_S) = \dim H^2(S, \mathcal{L}(D))$$

因此等式左边就是 Euler 特征, 所以我们只需证明对任意的 D

$$\chi(\mathcal{L}(D)) = \frac{1}{2}D.(D - K) + 1 + p_a$$

由于两边只与 D 的线性等价类有关, 所以我们将 D 写成两条非奇异曲线差的形式 $C - E$. 由于 C 和 E 的理想层分别是 $\mathcal{L}(-C)$ 和 $\mathcal{L}(-E)$. 我们有正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(-E) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(-C) \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

将这两个正合列张量上 $\mathcal{L}(C)$ 有

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(C - E) \rightarrow \mathcal{L}(C) \rightarrow \mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_E \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{L}(C) \rightarrow \mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

由于 χ 在短正合列上具有加性, 我们有

$$\chi(\mathcal{L}(C - E)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \chi(\mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_E)$$

由 p_a 的定义有 $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 + p_a$. 使用曲线上的黎曼-罗赫定理, 并计算次数得

$$\chi(\mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_C) = C^2 + 1 - g_C$$

$$\chi(\mathcal{L}(C) \otimes \mathcal{O}_E) = C.E + 1 - g_E$$

最后, 由伴随公式计算曲线 C 和 E 的亏格

$$g_C = \frac{1}{2}C.(C + K) + 1$$

$$g_E = \frac{1}{2}E.(E + K) + 1$$

将上述等式代入到一起有

$$\chi(\mathcal{L}(C - E)) = \frac{1}{2}(C - E).(C - E - K) + 1 + p_a$$

所求得证. □

命题 2.1 ([7], Chapter V, §1, 1.8) 令 H 是曲面 S 上的丰富除子, 且 D 是 S 上另一个除子满足 $D.H > 0$ 且 $D^2 > 0$. 那么只要 $n > 0$ 足够大, 就有 nD 线性等价于一个有效除子。

定理 2.6 (Hodge 指标定理) ([5], §1.6, Theorem 1.8) 令 S 是一个曲面, 在 $\text{Num}(S)$ 上的相交积的符号差为 $(1, \rho - 1)$, 其中 ρ 为群 $\text{Num}(S)$ 的秩. 特殊的, 如果 D, E 是除子类, 且有 $D^2 > 0$, 那么

$$D^2 \cdot E^2 \leq (D.E)^2$$

其中, 等号成立当且仅当 D 和 E 数值等价。

定理 2.7 (Stein 分解) ([7], Chapter III, §1, 11.5) 令 $f: X \rightarrow Y$ 是诺特概型间的射影态射, 那么 f 可以分解成 $g \circ f'$, 其中 $f': X \rightarrow Y'$ 是一个射影态射, 且它的纤维是连通的, $g: Y' \rightarrow Y$ 是一个有限态射.

定理 2.8 (Nakai-Moishezon 判别准则) ([7], Chapter V, §1, 1.10) 令 D 是曲面 S 上的除子, 那么 D 是丰富的当且仅当对所有的 S 上的不可约曲线 C , 有 $D^2 > 0$ 且 $D.C > 0$.

证明: 先证必要性. 如果 D 是丰富的, 那么存在某个 $m > 0$ 使得 mD 是极丰富除子. 此时 $m^2 D^2$ 是 S 在某种嵌入下的次数, $mD.C$ 是 C 的次数, 所以 $D^2 > 0$ 且 $D.C > 0$.

反之充分性. 假设 $D^2 > 0$, 且对所有的 S 上的不可约曲线 C , 有 $D.C > 0$. 令 H 是 S 上一个极丰富除子, 那么 H 是一条不可约曲线, 所以由假设有 $D.H > 0$, 因此由命题 2.1, 存在 $m > 0$ 使得 mD 是有效除子. 用 D 代替 mD , D 仍然是有效的, 但同时把 D 看作是 S 上一条曲线, D 可能是奇异的, 可约的, 或者不约化的.

接下来, 令 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$, 我们将证明层 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ 在概型 D 上是丰富的. 这只需要证明 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{D_{\text{red}}}$ 在约化概型 D_{red} 上是丰富的. 如果约化概型 D_{red} 是不可约曲线 C_1, \dots, C_r 的并, 只需证明对每个 $1 \leq i \leq r$, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i}$ 在 C_i 上是丰富的. 最后, 如果 $f_i: \tilde{C}_i \rightarrow C_i$ 是 C_i 的正规化, 由于 f_i 是有限满态射, 所以只需证明 $f_i^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i})$ 在 \tilde{C}_i 上是丰富的. 由于 \mathcal{L} 可以表示成与 C_i 横截相交的非奇异曲线的差, 所以 f 保持次数, 故有 $\deg f_i^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i}) = D.C_i > 0$. 由 $\deg f_i^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i}) > 0$ 可推出, 层 $f_i^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{C_i})$ 在 \tilde{C}_i 上是丰富的. 因此 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ 在 D 上是丰富的.

接下来我们将证明当 n 足够大时, \mathcal{L}^n 是由整体截面生成. 对正合列

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{(-1)} \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow 0$$

张量 \mathcal{L}^n , 得到的上同调列是

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(S, \mathcal{L}^{n-1}) \rightarrow H^0(S, \mathcal{L}^n) \rightarrow H^0(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(S, \mathcal{L}^{n-1}) \rightarrow H^1(S, \mathcal{L}^n) \rightarrow H^1(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ 在 D 是丰富的, 所以当 $n \gg 0$ 我们有 $H^1(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D) = 0$. 所以对于每个 n 有

$$\dim H^1(S, \mathcal{L}^n) \leq \dim H^1(S, \mathcal{L}^{n-1}).$$

由于同调群 $H^1(S, \mathcal{L}^n)$, ($n > 0$) 都是有限维的线性空间, 所以当 $n \gg 0$ 时, 这些同调群的维数相等, 因此映射 $H^0(S, \mathcal{L}^n) \rightarrow H^0(D, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D)$ 是满射. 由于 $\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_D$ 在 D 上面是丰富的, 所以, 当 $n \gg 0$ 时, 层 $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D$ 是由整体截面生成的. 层 $\mathcal{L}^n \otimes \mathcal{O}_D$ 的整体截面可以提升到层 \mathcal{L}^n 的整体截面, 所以由 Nakayama 引理, \mathcal{L}^n 的截面在整体 D 的每点都生成茎. 又因为 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$, 所以它有一个仅在 D 上等于 0 的截面, 这说明 \mathcal{L}^n 处处由整体截面生成.

固定一个 n , 使得 \mathcal{L}^n 由整体截面生成, 因而由 \mathcal{L}^n 定义了一个态射 $\varphi: S \rightarrow \mathbb{P}^N$. 接下来我们证明态射 φ 有有限纤维. 反证法, 如果没有, S 上就存在一个不可约曲线 C , 使得 φ 将 C 压缩到一个点. 此时, 取一个 \mathbb{P}^N 中不经过这点的超平面, 我们就有一个有效除子 $E \sim nD$, 且 $E \cap C = \emptyset$. 那么 $E.C = 0$, 这与 $D.C > 0$ 的假设矛盾. 所以 φ 有有限纤维.

由于 Stein 分解定理, φ 是一个有限态射, 所以 $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{L}^n$ 是 S 上的丰富除子, 所以有 D 是丰富的. \square

定理 2.9 (Kleiman 判别准则) ([4], Chapter I, §2, 1-2-5) 曲面 S 上的线丛 L 是丰富的当且仅当对任意的 $C \in \overline{NE}(S) - \{0\}$, 有 $L.C > 0$.

定理 2.10 (小平消没定理) ([4], Chapter I, §2, 1-2-13) 令 S 是一个非奇异射影簇, 并且 A 是 S 上的丰富除子. 那么

$$H^i(S, \mathcal{O}_S(K_S + A)) = 0, \text{ 对 } \forall i > 0.$$

在此引入后文需要的基本变换的定义

定义 2.11 ([5], Chapter 4, Example 4.16) 令 $f: S \rightarrow C$ 是一个直纹面. 假设 $\alpha: T \rightarrow S$ 是胀开 S 的一个点 x , 过点 x 的纤维在双有理变换下是一个 (-1) -曲线, 这条 (-1) -曲线可以通过 $\beta: T \rightarrow S'$ 爆缩 (blow down) 到一个光滑的点 y . 这个曲面 S' 是一个新的 C 上的直纹面, 并且 S' 双有理等价于 S , 构成以下交换图

$$\begin{array}{ccc} & T & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ S & \overset{\gamma}{\dashrightarrow} & S' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ C & \xrightarrow{id} & C \end{array}$$

我们称 $\gamma: S \dashrightarrow S'$ 是基本变换.

给定自然数 q , 定义 \mathbb{F}_q 是一个 \mathbb{P}^1 上的 \mathbb{P}^1 -线丛, 它是由秩为二的向量丛 $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(q)$ 射影化得到的, 即 $\mathbb{F}_q = \mathbb{P}(\mathcal{E}) = \text{Proj}_{\mathbb{P}^1}(\text{Sym}(\mathcal{E}))$.

如果 $S = \mathbb{F}_n$, 那么 $S' = \mathbb{F}_i$, 其中 $i = n - 1$ 或者 $i = n + 1$. 具体的是, 如果 x 不属于 C 关于 \mathbb{F}_n 的一个不可约截面 (当 $n > 0$ 时, 这个截面是唯一的), 且 $C^2 = -n$, 那么 $i = n - 1$; 如果 x 属于这个截面时 $i = n + 1$.

第 3 章 曲面的极小模纲领

3.1 引言

曲面在一点胀开后得到的曲面与原曲面双有理等价, 但是明显更复杂. 能否利用胀开的逆变换“爆缩”, 从一个给定曲面得到与它双有理等价的最简单的曲面, 这就是曲面的极小模纲领的初衷.

最初的想法是, 既然胀开只改变了一个点, 将它变成了一条 (-1) -曲线. 那么, 我们不妨研究如何判断曲面上的曲线是不是 (-1) -曲线, 以及曲面上如果有 (-1) -曲线能不能仿造胀开的过程, 反过来将它压缩到一个点. 围绕这两个问题, 我们有如下引理和定理.

引理 3.1 ([10], Chapter 1, §1, Lemma1-1-4) 令 S 是一个光滑射影曲面, $E \subset S$ 是 S 上一条既约的不可约曲线. 那么 E 是 S 上的 (-1) -曲线当且仅当

$$K_S \cdot E < 0, \text{ 且 } E^2 < 0.$$

定理 3.1 (Castelnuovo 可缩判别法) ([10], Chapter 1, Theorem1-1-6) 令 S 是一个光滑射影曲面. $E \subset S$ 是 S 上的一条 (-1) -曲线. 那么存在一个收缩 E 的满态射

$$\mu: S \rightarrow T$$

满足

- T 是一个光滑射影曲面;
- $\mu(E) = \text{pt.} (= P \in T)$, 即 μ 将 E 映到一个点, 且 $\mu: S - E \xrightarrow{\sim} T - P$ 是同构.

但是, 我们并不知道什么时候不再有 (-1) -曲线可以压缩, 并且“最简单的”曲面到底是什么样子. 所以, 我们不再考虑曲面上的 (-1) -曲线, 而是考虑曲面上的典范丛的性质, 引入了一个新的概念, 如下:

定义 3.1 ([10], Chapter 1, Definition1-2-4) 令 S 是一个曲面, L 是曲面 S 上的一个线丛, 如果曲面 S 上的任意曲线 C 与 L 相交非负, 即 $L \cdot C \geq 0$, 就称线丛 L 是数值有效的.

令 K_S 是曲面 S 的典范线丛, 如果 K_S 不是数值有效的, 就可以构造一个“极端压缩映射”, 使得新得到的曲面在与原曲面双有理等价的情况下比原曲面更简单.

接下来的问题是, 对给定曲面 S 做极端压缩, 是只做有限次就停止, 还是有可能一直做下去. 如果一直能做下去, 那么这种想法就失败了, 或者说是出现了意料之外的结果. 但是通过锥定理 (the cone theorem) 我们知道, 每个光滑射影曲面都会在有限次极端压缩后停止.

将以上的所有想法联系起来, 就是曲面的极小模纲领的思路了. 我们会在后面几节依次叙述并证明极端压缩定理, 锥定理, 并总结极小模纲领的内容.

3.2 极端压缩定理

我们先叙述极端压缩定理 (Extremal Contraction Theorem).

定理 3.2 (极端压缩定理) ([5], Chapter 5, Theorem 5.1): 如果 S 是一个光滑、不可约的射影曲面, 且它的典范除子 K_S 不是数值有效的, 那么存在一个不可约簇 V 和一个满态射 $\varphi: S \rightarrow V$, 满足以下条件:

- φ 不是同构, 并且 φ 把 S 上的一些曲线压缩到一点;
- 如果 C 是 S 上由 φ 压缩到一点的不可约曲线, 那么 $K_S \cdot C < 0$;
- 如果 C, D 都是 S 上通过 φ 压缩到一点的不可约曲线, 那么 C 和 D 在 $\overline{NE}(S)$ 中属于同一类, 特殊的, 和 D 数值等价, $C \equiv D$;
- 反之, 令 C, D 是 S 上的不可约曲线, 如果 C 通过 φ 压缩到一点, 且 $C \equiv D$, 那么 D 也通过 φ 压缩到一点;
- φ 的纤维是连通的, 且 V 是光滑射影簇;

我们称满足这些条件的态射 φ 和不可约簇 V 为 S 的一个极端压缩.

从定理中极端压缩的性质可以看出, 我们要将与 K_S 相交小于零的曲线压缩成一个点 (第二条), 并且同时也压缩了所有与它数值等价的曲线 (第三条). 但是, 由于 φ 只压缩了一类数值等价的曲线 (第四条), 并且得到的是有连通纤维的光滑射影曲面 (第五条), 所以, 新得到的曲面仍然保留着原曲面足够的信息.

要证明这个定理, 我们需要以下两个结果: 一是有理性定理 (Rationality theorem), 二是无基点定理 (Base point freeness theorem).

定理 3.3 (有理性定理) ([5], Chapter 5, Theorem 5.4) 令 S 是光滑不可约的射影曲面, 并且 K_S 不是数值有效的, 且令 A 是一个 S 上的丰富 (ample) 线丛. 定义

$$r_A := \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : A + tK_S \text{ 是数值有效的}\}$$

称为 A 的数值有效阈值 (nef threshold), 那么 $r_A \in \mathbb{Q}^+$.

定理 3.4 (无基点定理) ([5], Chapter 5, Theorem 5.5) 令 S 是一个光滑不可约射影曲面, 且 A 是 S 上的丰富除子. 定义

$$L := A + r_A K_S \in \text{Div}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

其中 r_A 是 A 的数值有效阈值, 则存在一个足够大的正整数 l , 且 $lr_A \in \mathbb{N}$, 使得线性系 $|lL|$ 没有基点.

先假设以上两个定理, 证明极端压缩定理.

证明 (极端压缩定理): 仍然沿用上面的符号, 当 l 足够大时, 线性系 $|lL|$ 无基点. 因此这个线性系定义了一个满态射 $\varphi_{|lL|} : S \rightarrow V$, 其中 V 是一个射影簇且 $\dim(V) \leq 2$. 下面按维数分情况讨论:

情况 (a): 当 $\dim(V) = 2$ 时.

此时有 $L^2 > 0$, 所以根据后文无基点定理证明中的情况 (a), 存在 S 上的一个 (-1) -曲线 E 使得 $L.E = 0$. 把 E 压缩到一个点就是我们要的极端压缩态射.

情况 (b): 当 $\dim(V) = 1$ 时.

由 Stein 分解 (本文第 2 章, 定理 2.7) 可以假设 $\varphi_{|lL|} : S \rightarrow V$ 的纤维 F 是连通的, 且得到 V 是正规曲线, 从而是光滑曲线. 由 $F.L = 0$ 可得 $F.K_S < 0$. 因此 $F.K_S = -2$ 并且一般纤维 F 是光滑且有理的. 如果所有的纤维都是不可约的, 那么 $S \rightarrow V$ 是我们所求的极端压缩态射. 否则, 存在一个可约的纤维 $F = \sum_{i=1}^h n_i F_i$. 可以断言 $h \geq 2$. 如果 $h = 1$, 那么由 F 是非既约的有 $n_1 > 1$, 并且由于 $F_1^2 = 0$ 且 $-2 = n_1 K_S.F_1$ 可得, $n_1 = 2$ 且 $K_S.F_1 = -1$. 这与由伴随公式得到的 $F_1.(K_S + F_1)$ 是偶数矛盾, 断言得证. 由于 $h \geq 2$, 那么对每个 $1 \leq i \leq h$ 都有 $F_i^2 < 0$. 进一步, 由 $K_S.F < 0$ 可得, 存在一个 $1 \leq i \leq h$ 使得 $K_S.F_i < 0$. 那么 F_i 是一个 (-1) -曲线且压缩它得到一个极端压缩态射.

情况 (c): 当 $\dim(V) = 0$ 时.

这种情况对应于后文无基点定理证明中的情况 (b), 再利用分母有界性定理 (后文定理 3.5) 的证明有以下三种可能:

- 若 S 上存在一个 (-1) -曲线 E , 那么对它做爆缩就得到我们要的极端压缩态射.
- 若 S 没有 (-1) -曲线但是有一个态射 $f : S \rightarrow C$, 其中 C 是一个光滑曲线, 且 f 的纤维也是光滑不可约的, 那么 $f : S \rightarrow C$ 即是所求的极端压缩态射.
- 否则 $\rho(S) = 1$, 此时, 我们要的极端压缩态射 $S \rightarrow V$ 就是 $\mathbb{P}^2 \rightarrow \text{pt}$, 其中 pt 是一个点. □

我们先来证明第一个定理，有理性定理，这需要用到如下两条引理. 以下两条引理均沿用有理性定理符号.

引理 3.2 ([5], Chapter 5, Lemma5.7) 如果 r_0 是一个大于 r_A 的有理数，且存在某个 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $k(A + r_0 K_S)$ 是一个有效除子，那么 r_A 是有理数.

证明： 由于 $k(A + r_0 K_S)$ 是一个有效除子，所以它线性等价于 $\sum_{i=1}^n d_i D_i$ ，其中对所有的 $1 \leq i \leq n$ ， D_i 是不同的不可约曲线，并且 d_i 是正整数. 因此在 $\text{Pic}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 中有

$$K_S = -\frac{1}{r_0}A + \frac{1}{kr_0} \sum_{i=1}^n d_i D_i$$

因此有

$$A + tK_S = \frac{r_0 - t}{r_0}A + \frac{t}{kr_0} \sum_{i=1}^n d_i D_i, \forall t \in \mathbb{Q}.$$

对于除去 D_i 之外的任意不可约曲线 C 和任意正有理数 $t < r_0$ 都有

$$(A + tK_S).C = \frac{r_0 - t}{r_0}A.C + \frac{t}{kr_0} \sum_{i=1}^n d_i D_i.C \geq 0.$$

那么，对于任意的 $t \in (0, r_0) \cap \mathbb{Q}$ ， $A + tK_S$ 是数值有效的当且仅当对所有的 $j, 1 \leq j \leq n$ ， $(A + tK_S).D_j \geq 0$ ，这又当且仅当对所有的 $1 \leq j \leq n$

$$\frac{r_0 - t}{r_0}A.D_j + \frac{t}{kr_0} \sum_{i=0}^n d_i D_i.D_j \geq 0$$

因此有，

$$r_A = \min_{1 \leq j \leq n} \{t_j : \frac{r_0 - t_j}{r_0}A.D_j + \frac{t_j}{kr_0} \sum_{i=0}^n d_i D_i.D_j = 0\}$$

并且由于是在有限个有理数中取最小值，所以 r_A 是有理数. \square

引理 3.3 ([5], Chapter 5, Lemma5.8) 如果 r 是正无理数，那么有无限多对正整数对 (u, v) 使得

$$0 < \frac{v}{u} - r < \frac{1}{3u}.$$

接下来是有理性定理的证明.

证明 [有理性定理]： 反证法，假设 r_A 是无理数，证明有一个有理数 r_0 满足引理 1 的条件，导出矛盾.

对于所有的整数对 (x, y) ，令

$$P(x, y) := \chi(\mathcal{O}_S(xA + yK_S)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(xA + yK_S).(xA + (y-1)K_S)$$

将 $P(x, y)$ 看成是关于 x, y 的二次多项式。这个多项式不是零多项式，因为 x^2 的系数是 A^2 不等于零。

由引理 2，有无限对正整数 (u, v) ，满足如下条件

$$0 < \frac{v}{u} - r_A < \frac{1}{3u}$$

对所有的正整数对 (u, v) ， $P(ku, kv)$ 是一个关于 k 的二次多项式，由贝祖定理， $P(ku, kv) = 0$ 当且仅当直线 $vx - uy = 0$ 包含在曲线 $P(x, y) = 0$ 。由于我们有无限多对 (u, v) ，我们可以选择 (u_0, v_0) 使得 $P(ku_0, kv_0)$ 不是 k 的零多项式，那么存在 $k_0 \in \{1, 2, 3\}$ 使得 $P(k_0u_0, k_0v_0) \neq 0$ 。令

$$M = k_0(u_0A + v_0K_S) = K_S + k_0u_0\left(A + \frac{k_0v_0 - 1}{k_0u_0}K_S\right)$$

此时

$$0 < \frac{k_0v_0 - 1}{k_0u_0} = \frac{v_0}{u_0} - \frac{1}{k_0u_0} \leq \frac{v_0}{u_0} - \frac{1}{3u_0} < r_A.$$

另外

$$A + \frac{k_0v_0 - 1}{k_0u_0}K_S = \left(1 - \frac{b}{r_A}\right)A + \frac{b}{r_A}(A + r_AK_S)$$

其中 $b = \frac{k_0v_0 - 1}{k_0u_0}$ 。由 r_A 的定义， $A + r_AK_S$ 是数值有效的，由已知 A 是丰富的，所以 $A + \frac{k_0v_0 - 1}{k_0u_0}K_S$ 是丰富的。因此由小平消没定理，对所有 $i \in \mathbb{N}$ 且 $1 \leq i \leq 2$ ， $h^i(S, M) = 0$ 。所以有

$$h^0(S, M) = \chi(M) = \chi(\mathcal{O}_S(k_0u_0A + k_0v_0K_S)) = P(k_0u_0, k_0v_0) \neq 0$$

这得出我们想要的

$$r_0 := \frac{v_0}{u_0} > r_A \text{ 使得 } h^0(S, k_0u_0(A + r_0K_S)) \neq 0.$$

□

证明无基点定理需要 Zariski 引理，下面介绍这个引理。

引理 3.4 (Zariski 引理) ([5], Chapter 5, Theorem 5.10) 令 S 是一个曲面， C 是一条光滑射影曲线， $f: S \rightarrow C$ 是一个满态射，且具有连通纤维，令 F 为 f 的一般纤维，若 D 是 $\text{Div}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ 一个非零曲线使得 $\text{Supp} D$ 包含在 F 内，那么 $D^2 \leq 0$ 。等号成立当且仅当存在某个有理数 k ，使得 $D = kF$ 。

证明：在 C 上取一个丰富除子 H . 由投影公式, $f^*H.D = 0, (f^*H)^2 = H^2 > 0$. 由 Hodge 指标定理, $D^2 \leq 0$. 假设 $D^2 = 0$, 则 $D_p^2 = 0$, 其中 D_p 是包含在纤维 $f^{-1}(p)$ 的部分. 所以, 我们可以假设 D 包含于一根纤维 $F = f^{-1}(p)$. 如果 D 不是 $f^{-1}(p)$ 的倍数, 则可选取有理数 a , 使得 $D + aF > 0$ 且 $\text{Supp}(D + aF) \subsetneq \text{Supp}F$. 由于 F 连通, 可选取一个不可约分支 $G \subseteq \text{Supp}F$, 使得 $(D + aF).G > 0$. 计算可得

$$(D + aF)^2 = D^2 + 2aF.D + a^2F^2 = D^2 = 0$$

对于充分小的正实数 x , 有

$$\begin{aligned} 0 &\geq ((D + aF) + xG)^2 = (D + aF)^2 + 2x(D + aF).G + x^2G^2 \\ &= 2x(D + aF).G + x^2G^2 > 0 \end{aligned}$$

矛盾! 从而 $D^2 = 0$, 等价于存在某个整数 k 使得 $D = kF$. □

下面证明无基点定理.

证明：因为 L 是数值有效的, 所以 $L^2 \geq 0$. 我们分 3 种情况考虑:

情况 (a): 当 $L^2 > 0$ 时,

如果 L 是丰富的, 那么不证自明, 所以假设 L 是数值有效的且不是丰富的. 事实上, 由 r_A 的定义, L 不会是丰富的. 由 Kleiman 丰富判别法, 存在不可约曲线 E 使得

$$0 = L.E = A.E + rK_S.E > rK_S.E$$

因此 $K_S.E < 0$. 由 Hodge 指标定理有 $L^2 \cdot E^2 \leq (L.E)^2 = 0$, 但是 $L^2 > 0$, 所以 $E^2 \leq 0$. 断言 $E^2 \neq 0$. 这是因为 $L \not\equiv E$, 否则 $0 = L.E = L^2 > 0$ 矛盾. 又由伴随公式, $2g_E - 2 = K_S.E + E^2 < 0$, 因此 E 是 (-1) -曲线. 因此存在一个双有理态射 $\mu: S \rightarrow S'$ 将 E 映到一个点. 又因为 $L.E = 0$, 故有 $L' := \mu_*(L)$ 是一个线丛, 进一步有 $L = \mu^*(L')$ 且 L' 是数值有效的, 这是因为, $L = \mu^*(L') + aE$, 其中 a 是一个整数. 由假设 $L.E = 0, E^2 = -1$, 及投影公式

$$0 = L.E = \mu^*(L').E + aE^2 = -a$$

所以 $a = 0, L = \mu^*(L')$. 此外, 对任意的 S' 上曲线 C' 有

$$L'.C' = \mu^*(L').\mu^*(C') = L.\mu^*(C') \geq 0$$

将 $L, L', A, K_S, K_{S'}$ 看作除子, 由于 $K_S = \mu^*(K_{S'}) + E$, 所以有 $L' = \mu_*(L) = \mu_*A + rK_{S'}$.

由 $A' := \mu_* A$, 则 $\mu^* A' = A + bE$, 其中 b 是一个有理数, 令 $L' = \mu_* L = \mu_* A + rK_{S'}$, 有

$$L = \mu^* L' = \mu^* A' + r\mu^* K_{S'} = A + bE + r(K_S - E)$$

所以 $b = r$, 即 $\mu^* A' = A + rE$. 故有

$$(A')^2 = (\mu^* A)^2 = (A + rE)^2 = A^2 + 2rA \cdot E + r^2 E^2 = A^2 + 2rA \cdot E - r^2$$

由于 $0 = L \cdot E = A \cdot E + rK_S \cdot E = A \cdot E - r$, 所以 $AE = r$, 从而有 $(A')^2 = A^2 + r^2 > 0$.

另一方面, 对于 S' 上任意曲线 C' 有

$$\begin{aligned} A' \cdot C' &= (\mu^* A') \cdot (\mu^* C') = (A + rE) \cdot \mu^*(C') \\ &= A \cdot \mu^*(C') + rE \cdot \mu^*(C') = A \cdot \mu^*(C') > 0 \end{aligned}$$

由 *Nakai - Moishezon* 判别准则有 $A' = \mu_*(A)$ 是丰富的.

如果 L' 是丰富的, 那么存在一个正整数 l 使得 $|lL'|$ 是无基点的, 因此 $|lL|$ 也是无基点的. 如果 L' 不是丰富的, 由于 $L'^2 = L^2 > 0$, 我们可以重复以上步骤, 有限步之后得到一个由 S 爆缩有限个点得到的曲面 V , 和一个双有理态射 $f: S \rightarrow V$. 并且在 V 上有一个丰富线丛 M 使得 $L = f^*(M)$. 这样就得到我们想要的结果.

情况 (b): 当 $L \equiv 0$ 时,

由于 $A + rK_S = L \equiv 0$, 所以 $-K_S \equiv \frac{1}{r}A$ 是丰富除子. 同样, 对任意整数 l , $lL - K_S \equiv \frac{1}{r}A$ 是丰富除子. 因此由小平消没定理可得

$$h^i(S, \mathcal{O}_S) = h^i(S, K_S - K_S) = 0, \text{ 当 } i = 1, 2 \text{ 时.}$$

同样, 由小平消没定理可得, 对任意整数 l , 线丛 lL 有如下结论

$$h^i(S, lL) = h^i(S, lL - K_S + K_S) = 0, \text{ 当 } i = 1, 2 \text{ 时.}$$

那么由曲面的 Riemann-Roch 定理可得

$$h^0(S, lL) = \chi(lL) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}lL(lL - K_S) = \chi(\mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S) = 1$$

所以 lL 是有效除子, 但 lL 又数值等价于 0, 这说明 $L = 0$, 从而 L 是无基点的.

情形 (c): 当 $L^2 = 0$ 且 $L \not\equiv 0$ 时,

存在一个不可约曲线 C 使得 $L.C > 0$. 可以断言 $L.K_S < 0$. 事实上, 取正整数 $h \gg 0$, 使得 $hA - C$ 是有效除子, 那么有

$$L.(hA) = L.(hA - C) + L.C \geq L.C > 0$$

所以 $L.A > 0$. 因此有

$$0 = L^2 = L.(A + rK_S) = L.A + rL.K_S > rL.K_S$$

这证明了断言.

对于所有的整数 l 有

$$lL - K_S = lL + \frac{1}{r}(A - L) = \frac{1}{r}A + \frac{lr-1}{r}L$$

并且当 l 充分大时 $lL - K_S$ 是丰富除子, 因为 $\frac{1}{r}A$ 是丰富除子, 当 l 足够大时, $\frac{lr-1}{r}L$ 是数值有效除子, 它们的和是丰富除子. 因此, 对于足够大的 l , 使得 lL 是一个线丛, 并且同样由小平消没定理有 $h^1(S, lL) = h^2(S, lL) = 0$. 因此

$$h^0(S, lL) = \chi(lL) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}lL.(lL - K_S) = \chi(\mathcal{O}_S) - \frac{1}{2}lL.K_S > 0$$

最后, 将 $|lL|$ 分解成移动部分 $|M|$, 和固定部分 F . 因此有

$$0 \leq M^2 \leq M.(M + F) = lL.M \leq lL.(M + F) = (lL)^2 = 0$$

因此有

$$0 = M^2 = M.(M + F) = (lL)^2$$

化简后得

$$M^2 = M.F = F^2 = 0$$

这说明 $|M|$ 和一束纤维相吻合, 即存在一个曲线 D 和 D 上的一个线丛, 并且还有一个纤维化态射 $f: S \rightarrow D$, 满足 $M = f^*(N)$. 此外 $M.F = 0$ 意味着 F 包含在 f 的一些纤维的并中, 由 Zariski 引理, $F^2 = 0$ 推出 F 是全部纤维和的有理数倍, 那么取 l 足够大, lL 没有基点, 正是想要证明的. \square

接下来我们要证明一个推论.

定理 3.5 (分母有界定理) ([5], Chapter 5, Corollary 5.13) 在有理性定理的前提下, 令 $r = r_A$. 那么 $r = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素, 且 q 只能为 1, 2, 或者 3.

证明：我们按照无基点定理的证明中的 3 种情况进行分类讨论.

情况 (a)：当 $L^2 > 0$ 时，

此时存在一个 (-1) -曲线 E 使得

$$0 = L.E = (A + rK_S).E = A.E - r$$

因此， $r = A.E \in \mathbb{Z}$ ，故 $q = 1$.

情况 (c)：当 $L^2 = 0$ 且 $L \neq 0$ 时，

首先 $f: S \rightarrow D$ 是一个 \mathbb{P}^1 -纤维化. 事实上， $\text{Supp}M$ 和 $\text{Supp}F$ 都是一些完整纤维和. 设 F_1 是 $f: S \rightarrow D$ 的一般纤维，则 $M = a \cdot F_1, F = b \cdot F_1$ 其中 a, b 是一些正有理数. 这时， $lL = M + F = (a + b) \cdot F_1$. 注意到 $lL.K_S < 0$ ，所以 $K_S.F_1 < 0$. 又 $F_1^2 = 0$ ，由伴随公式 $2g(F_1) - 2 = K_S.F_1 + F_1^2 < 0$ ，所以， $F_1 \cong \mathbb{P}^1$ 且 $f: S \rightarrow D$ 是一个 \mathbb{P}^1 -纤维化.

这样就有

$$0 = L.F_1 = (A + rK_S).F_1 = A.F_1 - 2r$$

因此有 $r = \frac{A.F_1}{2}$ ，即 $q = 2$.

情况 (b)：当 $L \equiv 0$ 时，

若皮卡数 $\rho(S) > 1$ ，那么有一个和 A 不数值等价的丰富除子 A' ，即 $A' \not\equiv A$ ，并且和有理性定理的过程一样，我们有， $L' = A' + r'K_S$. 如果 $L' \equiv 0$ ，那么 $rA' \equiv -rr'K_S \equiv r'A$ ，矛盾. 因此 L' 要么满足情况 (a)，要么满足情况 (c). 在情况 (a)， S 上有一个 (-1) -曲线 E ，在情况 (c) 存在一条曲线 F_1 使得 $F_1.K_S = -2$. 又因为 $L \equiv 0$ ，所以 $L.E = 0$ 或者 $L.F_1 = 0$ ，同上面一样的计算可得 $q = 1$ 或者 $q = 2$.

现在可假设 $\rho(S) = 1$. 令 H 是群 $\text{Num}(S)$ 的一个丰富的生成元，且存在一个正整数 h ，使得 $-K_S = hH$. 我们断言 $h \in \{1, 2, 3\}$. 如果 $h > 3$ ，令 $x = 1, 2, 3$ ，由小平消没定理有 $h^i(S, K_S + xH) = 0$ 当 $i = 1, 2$ 时. 又因为 $K_S + xH = (x - h)H$ ，其中 $x - h < 0$ 有

$$0 = h^0(S, K_S + xH) = \chi(K_S + xH)$$

这说明二次非零多项式 $P(x) := \chi(K_S + xH)$ 有三个根 $x = 1, 2, 3$ ，矛盾. 最后，令 $A = kH$ ，其中 $k > 0$ ，并且对于任意曲线 C 有

$$0 = C.L = A.C + rK_S.C = (k - rh)H.C$$

所以 $r = \frac{k}{h}$ ，故有 $q|h$ ，得出 $q \in \{1, 2, 3\}$. □

3.3 锥定理

本节定理和引理均参考 [5], Chapter 6, 不再分别指明参考文献.

在 n 为欧式空间 \mathbb{R}^n 中, 定义锥为一个集合 C , 若 $x, y \in C$, 那么对任意的 $0 \leq \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 都有 $\lambda x + \mu y \in C$. 注意锥是一个凸集. 如果一个锥不包含 \mathbb{R}^n 的子空间时, 我们就称它是严格凸的.

在 \mathbb{R}^n 中, 由方程 $f(x) = 0$ 定义的超平面称作锥 C 的支撑超平面, 如果对所有的 $z \in C$, $f(z) \geq 0$. 锥 C 的一个面 F 定义为锥 C 和一个支撑超平面的交, 即如果支撑超平面的方程为 $f(x) = 0$, 那么面 $F = \{z \in C : f(z) = 0\}$. 射线定义为如下形式的半条直线

$$\mathbb{R}^+ x, \text{ 其中 } x \in C - \{0\}$$

如果一条射线是锥 C 的一个面的话, 我们就称它是锥 C 的极端射线.

如果一个锥 C 是由有限多条射线生成的凸锥, 那就称它为一个多面体, 即存在有限条射线 R_1, \dots, R_h , 使得 $C = R_1 + \dots + R_h$.

现在将话题回归到曲面 S 上, 定义如下记号:

- $Z_1(S) = \text{Div} S$, 表示曲面 S 的除子群;
- $N_1(S) = \{Z_1(S) / \equiv\} \otimes \mathbb{R}$, 即, 按数值等价分类后再扩充到域 \mathbb{R} 上的线性空间;
- $\text{NE}(S)$ 表示 $Z_1(S)$ 中所有有效除子在 $N_1(S)$ 中对应的元素生成的锥;
- $\overline{\text{NE}}(S)$ 表示 $\text{NE}(S)$ 在 $N_1(S)$ 中的闭包.
- $\overline{\text{NE}}(S)_{H \geq 0} = \{Z \in \overline{\text{NE}}(S) : Z.H \geq 0\}$, 即, $\overline{\text{NE}}(S)$ 中所有与除子 H 相交大于等于 0 的除子构成的集合, 类似的, 我们用 $\overline{\text{NE}}(S)_{H > 0}, \overline{\text{NE}}(S)_{H \leq 0}, \overline{\text{NE}}(S)_{H < 0}$ 分别表示 $\overline{\text{NE}}(S)$ 中所有与除子 H 相交大于、小于等于、小于 0 的除子构成的集合.

定理 3.6 (锥定理) 令 S 是一个光滑射影曲面, 那么

$$\overline{\text{NE}}(S) = \overline{\text{NE}}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{l \in \mathcal{L}} R_l$$

其中

- l 的取值范围 \mathcal{L} 是一个可数集;
- 对于每一个 $l \in \mathcal{L}$, R_l 是 $\overline{\text{NE}}(S)_{K_S < 0}$ 中一条由光滑有理曲线 C_l 所在类生成的射线, 且 C_l 满足 $0 < -C_l.K_S \leq 3$;

• 任意 $l \in \mathcal{L}$, 都有一个数值有效线丛 L_l 使得 $R_l = \overline{NE}(S) \cap L_l^\perp$, 因此 R_l 是一条极端射线;

• 射线 R_l 在 $\overline{NE}(S)_{K_S > 0}$ 是离散的, 即对任意的丰富除子 H 和任意的 $\varepsilon > 0$ 只有有限个射线 R_1, \dots, R_n 在锥 $\overline{NE}(S)_{(K_S + \varepsilon H) < 0}$ 并且

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{(K_S + \varepsilon H) \geq 0} + \sum_{i=1}^n R_i$$

因此 $\overline{NE}(S)_{(K_S + \varepsilon H) < 0}$ 是多面体;

• 对于任意的 $l \in \mathcal{L}$, 存在一个压缩了类 R_l 中曲线的极端压缩, 反之, 任意的极端压缩都是这种类型.

证明第一步

引理 3.5 令 M 是一个数值有效且非丰富的除子类, 故有 $\overline{NE}(S) \cap M^\perp \neq \{0\}$. 若 $\overline{NE}(S)_{K_S < 0}$ 的一个面是如下形式

$$F := \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M^\perp \neq \{0\}$$

那么有某个数值有效除子类 N 使得

$$R := \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap N^\perp \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M^\perp$$

是一个极端射线.

在证明这个引理之前, 我们需要如下的线性代数结论.

引理 3.6 令 W 是一个实线性空间, 维数是 ρ . 令 v_1, \dots, v_ρ 是 W 的一组基. 再令 $v \in W$ 且 $\lambda_1, \dots, \lambda_\rho \in \mathbb{R}$, 那么 $\dim(\langle v_i + \lambda_i v \rangle_{1 \leq i \leq \rho}) \geq \rho - 1$.

证明: 若 W 中向量 $\{v_1 + \lambda_1 v, \dots, v_\rho + \lambda_\rho v\}$ 有如下等式

$$\sum_{i=1}^{\rho} a_i (v_i + \lambda_i v) = 0$$

再设 $v = \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i v_i$, 将其代入化简后有

$$\sum_{i=1}^{\rho} (a_i + (\sum_{j=1}^{\rho} a_j \lambda_j) \alpha_i) v_i = 0$$

因此我们有

$$a_i + (\sum_{j=1}^{\rho} a_j \lambda_j) \alpha_i = 0, \quad \forall i (1 \leq i \leq \rho)$$

将其看成一个关于 a_1, \dots, a_ρ 的线性方程组，它对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda_1 \alpha_1 & \lambda_2 \alpha_2 & \cdots & \lambda_\rho \alpha_\rho \\ \lambda_1 \alpha_1 & 1 + \lambda_2 \alpha_2 & \cdots & \lambda_\rho \alpha_\rho \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \alpha_1 & \lambda_2 \alpha_2 & \cdots & 1 + \lambda_\rho \alpha_\rho \end{pmatrix}$$

对这个矩阵做初等变换，化简到标准型，得到如下矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 + \sum_{i=1}^{\rho} \lambda_i \alpha_i \end{pmatrix}$$

这个矩阵的秩至少为 $\rho - 1$ ，所以 $\dim(\langle v_i + \lambda_i v \rangle_{1 \leq i \leq \rho}) \geq \rho - 1$. □

接下来我们证明引理 3.5.

证明 (引理 3.5): 结论在 $\dim(F) = 1$ 时是平凡的，所以我们假设 $\dim(F) > 1$.

固定一个丰富除子 B ，一个非负有理数 ν ，令 $r_{\nu M+B}$ 为 $\nu M + B$ 对应的有效阈值，使得 $\nu M + B + r_{\nu M+B} K_S$ 是数值有效的. 我们有以下性质：

- $r_{\nu M+B}$ 是关于 ν 的非减函数. 事实上，如果 $\nu' > \nu$ ，我们有

$$(\nu' M + B) + r_{\nu M+B} K_S = (\nu' - \nu) M + (\nu M + B + r_{\nu M+B} K_S)$$

由于 $(\nu' - \nu) M$ 和 $\nu M + B + r_{\nu M+B} K_S$ 是数值有效的，所以 $(\nu' M + B) + r_{\nu M+B} K_S$ 是数值有效的. 这证明了 $r_{\nu' M+B} \geq r_{\nu M+B}$.

- $r_{\nu M+B}$ 是有界的. 事实上，取 $Z \in F - \{0\}$ 有

$$0 \leq Z \cdot (\nu M + B + r_{\nu M+B} K_S) = Z \cdot (B + r_{\nu M+B} K_S)$$

因此

$$-(K_S \cdot Z) r_{\nu M+B} \leq B \cdot Z$$

即

$$r_{\nu M+B} \leq -\frac{B \cdot Z}{K_S \cdot Z}$$

其中 $-K_S \cdot Z > 0$.

- 由分母有界定理（本文第 3 章定理 3.5）， $r_{\nu M+B}$ 的分母是有界的.

以上性质导致了存在一个 ν_B , 当 $\nu \geq \nu_B$ 时, $r_{\nu M+B}$ 稳定在一个固定值 $r_{M,B}$ 周围. 当 $\nu \geq \nu_B$ 时, 令

$$M_{B,\nu} := \nu M + B + r_{M,B} K_S$$

$M_{B,\nu}$ 是数值有效且不丰富的. 我们又有如下性质:

- $\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M_{B,\nu}^\perp \neq \{0\}$. 事实上, 由于 $\nu M + B$ 是丰富的, 且 $M_{B,\nu}$ 是数值有效且不丰富的, 所以存在一个曲线 $Z \in \overline{NE}(S) - \{0\} \cap M_{B,\nu}^\perp$ 使得

$$0 = Z.M_{B,\nu} = Z.(\nu M + B) + r_{M,B}(K_S.Z) > r_{M,B}(K_S.Z)$$

因此 $K_S.Z < 0$.

- 当 $\nu \geq \nu_B$ 时, 有

$$\{0\} \neq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M_{B,\nu}^\perp \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M^\perp = F$$

事实上, 如果 $Z \in \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M_{B,\nu}^\perp$, 由 $M_{B,\nu} + B + r_{M,B} K_S$ 是数值有效的, 可得

$$0 = Z.M_{B,\nu} = Z.(\nu_B M + B + r_{M,B} K_S) + (\nu - \nu_B)Z.M \geq (\nu - \nu_B)Z.M \geq 0$$

因此 $M.Z = 0$.

- 如果 $\dim(F) \geq 2$, 我们可以找到一个丰富除子类 B 使得面 $\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M_{B,\nu_B+1}^\perp$ 有更小的维数. 事实上, 我们可以选出 $N_1(S)$ 的一组基 B_1, \dots, B_ρ , 它们都是丰富除子类. 若对所有的 $1 \leq i \leq \rho$ 都有

$$\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M_{B,\nu_{B_i}+1}^\perp = F$$

这导致所有的超平面 $(B_i + r_{M,B_i} K_S)^\perp$ 都包含面 F . 那么应用引理 2, 令 $W = N_1(S)^\vee$, 对所有的 $1 \leq i \leq \rho$, ν_i 是线性映射

$$\nu_i : D \in N_1(S) \rightarrow B_i.D \in \mathbb{R}$$

$\lambda_i = r_{M,B_i}$, 且 ν 是线性映射

$$\nu : D \in N_1(S) \rightarrow K_S.D \in \mathbb{R}$$

得到 $\dim(\langle \nu_i + \lambda_i \nu \rangle_{1 \leq i \leq \rho}) \geq \rho - 1$, 但是 $\dim F \geq 2$, 所以矛盾. 总之, 存在一个 $i \in \{1, \dots, \rho\}$ 使得

$$\{0\} \neq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M_{B_i,\nu}^\perp \subsetneq F$$

是我们所需要的.

以上性质证明了引理 3.5. □

证明第二步

引理 3.7 令 $\{R_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ 为极端射线族. 若每个 l 都存在一个数值有效除子类 L_l 使得

$$\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap L_l^\perp = \overline{NE}(S) \cap L_l^\perp = R_l$$

那么有

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{l \in \mathcal{L}} \overline{R_l}$$

证明: 容易看出 $\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{l \in \mathcal{L}} \overline{R_l} \subseteq \overline{NE}(S)$. 反证法, 假设这个包含是严格的, 那我们可以得到 $Z \in \overline{NE}(S) - (\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{l \in \mathcal{L}} \overline{R_l})$. 然后我们可以找到一个除子类 D 使得 $D \cdot Z < 0$ 且 $\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{l \in \mathcal{L}} \overline{R_l} \subseteq NE(S)_{D > 0}$.

注意到 $D^\perp \cap K_S^\perp \cap \overline{NE}(S) = \{0\}$. 这样我们就可以找到一个负有理数 a 使得 $A := D + aK_S$ 是一个丰富除子类. 这里的详细证明参考 ([11], 7.3.1, page37,)

通过有理性定理我们找到一个数值有效且不丰富的除子类

$$M := A + rK_S = D + (a + r)K_S$$

其中 $r \in \mathbb{Q}_{>0}$, 且 $\overline{NE}(S) \cap M^\perp \neq \{0\}$. 令 $C_0 \neq 0$ 是 $\overline{NE}(S) \cap M^\perp$ 中的一个除子类, 那么

$$0 = M \cdot C = A \cdot C + rK_S \cdot C$$

可以推出 $K_S \cdot C < 0$, 所以 $\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M^\perp \neq \{0\}$. 那么根据证明的第一步, 存在某条极端曲线 $R \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap M^\perp$. 由于

$$0 \leq M \cdot Z = D \cdot Z + (a + r)K_S \cdot Z < (a + r)K_S \cdot Z$$

且 $K_S \cdot Z < 0$, 所以有 $a + r < 0$. 然后令 C 是射线 R 的一个生成元, 所以我们有

$$0 = M \cdot C = D \cdot C + (a + r)K_S \cdot C$$

由 $a + r < 0$ 和 $K_S \cdot C < 0$, 得出 $D \cdot C < 0$, 这与 $\sum_{l \in \mathcal{L}} \overline{R_l} \subseteq NE(S)_{D > 0}$ 矛盾. \square

证明第三步

引理 3.8 令 $\{R_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ 是引理 3.5 中的极端曲线族, 那么 $\{R_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ 在半空间 $\overline{NE}(S)_{K_S < 0}$ 中是离散的, 因此有

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_{l \in \mathcal{L}} R_l$$

证明：对任意的 $l \in \mathcal{L}$ ，都有一个数值有效除子类使得如下等式成立

$$\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap L_l^\perp = \overline{NE}(S) \cap L_l^\perp = R_l$$

那么通过引理 3.10 的证明，对每个丰富除子类 A 都有

$$\{0\} \neq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap (L_l)_{A, v_A+1}^\perp \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap (L_l)^\perp$$

因此有

$$R_l = \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap (L_l)_{A, v_A+1}^\perp$$

令 C_l 为 R_l 的一个生成元，那么 $C_l \cdot (L_l)_{A, v_A+1} = 0$ 导致

$$(A + r_{L_l, A} K_S) \cdot C_l = 0, \text{ 因此有 } r_{L_l, A} = -\frac{A \cdot C_l}{K_S \cdot C_l}$$

现在固定一个丰富除子类 H 和和一个正实数 $\varepsilon > 0$ ，并且跟 R_l 满足 $(K_S + \varepsilon H) \cdot C_l < 0$ ，这意味着

$$-\frac{H \cdot C_l}{r_{L_l, H}} = K_S \cdot C_l < -\varepsilon H \cdot C_l, \text{ 因此有 } r_{L_l, H} < \frac{1}{\varepsilon}.$$

由于 $r_{L_l, H}$ 的分母是有界的，所以只有有限多种可能，因此 L_l 也只有有限多种可能，所以 R_l 只有有限多种可能. \square

证明第四步

定理 3.7 (压缩定理) 令 $\{R_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ 是引理 3.7 中的极端曲线族. 对于每一个 $l \in \mathcal{L}$ ，存在一个极端压缩

$$\varphi_l : S \rightarrow V_l$$

使得任意被 φ_l 收缩的曲线 C 都有 $C \in R_l$.

反之，每一个极端压缩都压缩极端族 $\{R_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ 中的某条曲线.

证明：对任意的 $l \in \mathcal{L}$ ，都有一个数值有效除子类使得如下等式成立

$$\overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap L_l^\perp = \overline{NE}(S) \cap L_l^\perp = R_l$$

那么对于任意的 $l \in \mathcal{L}$ 都有 $L_l^\perp \cap K_S^\perp \cap \overline{NE}(S) = \{0\}$. 因此固定某个 $l \in \mathcal{L}$ ，令 $R = R_l, L = L_l$ ，我们有 $A = L - rK_S$ 是丰富的，如果 $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ 足够小，那么 $r = r_A$. 将无基点定理应用到 L 上，并取 Stein 分解后得到的具有连通纤维的态射就是极端压缩映射 $\phi_L : S \rightarrow V_L$.

反之, 令 $\varphi: S \rightarrow V$ 是极端压缩映射, H 是 V 上的丰富除子, 那么 $L := \varphi^*(H)$ 是数值有效且不丰富的, 由极端压缩的定义有

$$\overline{NE}(S) \cap L^\perp = \overline{NE}(S)_{K_S < 0} \cap L^\perp = R$$

其中 R 是由曲线 C 生成的极端射线, 且 C 被 φ 压缩到一个点. \square

证明第五步

引理 3.9 令 $\{R_l\}_{l \in \mathcal{L}}$ 是引理 3.7 中的极端曲线族. 对于任意的 $l \in \mathcal{L}$, 存在一条 R_l 中光滑有理曲线 C , 使得 $1 \leq -C.K_S \leq 3$.

证明: 令 $\varphi: S \rightarrow V$ 是一个压缩了 R 中曲线的极端压缩态射. 如果 $\dim(V) = 2$, 那么根据极端压缩定理证明中的讨论, R 中只有唯一一条不可约曲线被 φ 压缩, 并且这是一条 (-1) -曲线 E , 满足 $E.K_S = -1$. 如果 $\dim(V) = 1$, 那么被 φ 压缩的曲线 F 是 φ 的光滑有理纤维, 满足 $F^2 = 0, F.K_S = -2$. 最后, 如果 $\dim(V) = 0$, 那么 $\rho = 1$. 那么由分母有界定理证明中情形 (b) 的讨论, 有 $S \simeq \mathbb{P}^2$, 且如果 C 是一条直线, 有 $C.K_S = -3$, 且 R 由 C 生成.

以上 5 步证明了锥定理. \square

3.4 曲面的极小模纲领

曲面的极小模纲领是: 给定一个曲面 S , 要么得到一个与原曲面 S 双有理等价的曲面 X , 且典范除子 K_X 是数值有效的; 要么得到一个纤维化 $S' \rightarrow Z$, 其中 S' 与原曲面 S 双有理等价, 使得 $\dim Z < \dim S'$, 且纤维为 \mathbb{P}^1 或者 \mathbb{P}^2 . 第一种情况得到的曲面称为原曲面的极小模型 (Strong Minimal Model), 第二种情形称为森纤维空间.

假定原曲面为 S , 极小模纲领的具体过程如下:

步骤 1: 如果 K_S 是数值有效的, 那么算法到此完结, 并且说 S 就是强极小的. 特别的, S 是极小曲面 (不含有 (-1) -曲线的曲面称作极小曲面). 因为如果 S 有 (-1) -曲线 E , 那么可得 $K_S.E = -1$, 由于 K_S 是数值有效的, 所以这不可能.

步骤 2: 如果 K_S 不是数值有效的, 那么存在一个极端压缩 $\varphi: S \rightarrow V$, 其中 V 是光滑的. 如果 $\dim(V) < 2$, 说 $\varphi: S \rightarrow V$ 是一个森纤维空间, 算法到此结束; 如果 $\dim(V) = 2$, 则把 S 换成 V , 回到第一步.

在这个算法经历过有限次运算后得到:

• 要么是一个双有理态射 $f: S \rightarrow S'$ 是由一些爆缩 (-1) -曲线复合得到, 且 $K_{S'}$ 是数值有效的, 所以 S' 是 S 的极小模型.

• 要么是一个双有理态射 $f: S \rightarrow S'$, 也是由一些爆缩 (-1) -曲线复合得到, 并且 S' 有态射 $\varphi: S' \rightarrow V$ 使得 S' 构成一个森纤维空间. 具体的说, 如果 $\dim(V) = 1$, 那么 S' 是一个 V 上的直纹面; 如果 $\dim(V) = 0$, 那么 $S' \cong \mathbb{P}^2$.

注意到这个算法在应用时有一定的自由度的, 所以, 同一个曲面得到的结果可能不是唯一的. 不过, 这些结果在只差一个双有理变换的情况下是唯一的. 我们将会看到同一曲面不可能既得到极小模型, 也得到森纤维空间. 但是, 同一曲面可能得到不同的森纤维空间. 例如, \mathbb{F}_1 爆缩 (-1) -曲线后得到 \mathbb{P}^2 是一个森纤维空间; 但同时 $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ 也是一个森纤维空间, 它们并不相同.

相比之下, 我们有如下定理:

定理 3.8 (极小模型的唯一性定理) ([5], Chapter 7, Theorem 7.1) 令 S' 是一个极小模型. 如果 S 是一个曲面, 且 $f: S' \dashrightarrow S$ 是一个双有理映射, 那么, f 是一个双有理态射.

特殊的, 如果 S, S' 都是极小模型, 且 $f: S' \dashrightarrow S$ 是一个双有理映射, 那么 f 是一个同构.

证明: 将 f 分解为如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow q & \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

其中, p, q 是胀开的复合. 我们假设在上面的交换图中 p 是由最少次胀开复合得到的. 这种操作通常称为 $f: S' \dashrightarrow S$ 的极小消解 (minimal resolution).

如果 p 是同构, 我们就已经证完了. 如果不是, 由分歧公式 (ramification formula) 可得

$$K_X = q^*(K_S) + R = p^*(K_{S'}) + R'$$

其中 R, R' 都是有效除子. 存在一个 (-1) -曲线 $E \leq R$, 即 q 的最后一个胀开的例外除子. 并且

$$-1 = E.K_X = E.(p^*K_{S'} + R') \geq E.R'$$

由于 $K_{S'}$ 是数值有效的, 所以 $p^*K_{S'}$ 是数值有效的, 因此 $E \leq R'$, 故有 p 和 q 都能压缩 E . 这意味着, 如果 $\pi: X \rightarrow X'$ 是对 E 做的爆缩, p 和 q 都可以通过

π 分解, 即有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X' & & \\ p' \downarrow & \searrow q' & \\ S' & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

其中 $p = p' \circ \pi$ 且 $q = q' \circ \pi$. 这是一个矛盾, 因为 p' 是比 p 更少的胀开的复合.

特殊的, 如果 S', S 都是极小模型, 且 $f : S' \dashrightarrow S$ 是一个双有理映射, 令 $g : S \dashrightarrow S'$ 是它的双有理逆映射, 由定理的上一个结论, 它们都是双有理态射, 且复合起来在一个大开集上是恒等映射, 由于极小模型是可分的, 所以有且只有唯一的方法可以把大开集上的恒等映射延拓到 S 和 S' 上, 所以 f 和 g 复合起来是恒等映射, 故有 f 是一个同构.

在曲面的情况有如下定理, 告诉我们森纤维空间是什么样子.

定理 3.9 (曲面的森纤维空间) ([10], Chapter 1, Theorem 1-4-4) 令 S 是一个 2 维森纤维空间, 极端压缩映射为 $\phi : S \rightarrow W$, 那么只存在如下两种情形:

情形 1: 当 $\dim W = 1$ 时.

此时, ϕ 的每个纤维同构于 \mathbb{P}^1 . 具体的说, $\phi : S \rightarrow W$ 是一条光滑射影曲线上的 \mathbb{P}^1 丛;

情形 2: 当 $\dim W = 0$ 时.

此时, $S \cong \mathbb{P}^2$ 且 $\phi : S \cong \mathbb{P}^2 \rightarrow W = \text{pt}$ 是常值映射.

第 4 章 曲面的 Sarkisov 纲领

本章简要介绍曲面的 Sarkisov 纲领 (Sarkisov program). 曲面的 Sarkisov 纲领是将曲面森纤维空间之间的双有理映射分解成有限个 Sarkisov 连接映射 (Sarkisov link). 所以我们接下来要定义 Sarkisov 连接映射, 并且证明每个森纤维空间之间非同构双有理映射都可以分解成有限个 Sarkisov 连接映射, 这个经典结果也被称作 Noether-Castelnuovo 定理.

以下内容中的森纤维空间均指维数为 2 的森纤维空间, 即曲面森纤维空间.

4.1 Noether-Castelnuovo 定理

我们先陈述 Noether-Castelnuovo 定理, 并简单介绍它的证明思路

定理 4.1 (Noether-Castelnuovo) 令 $p: S \rightarrow C$ 和 $p': S' \rightarrow C'$ 是两个森纤维空间, $\phi: S \dashrightarrow S'$ 是两个曲面间的双有理映射, 构成如下图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & S' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ C & & C' \end{array}$$

那么, ϕ 可以写成有限个以下四种类型的映射的复合, 这四种类型映射统称为 Sarkisov 连接映射.

类型一

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \longleftarrow & \mathbb{F}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{pt} & \longleftarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

其中 pt 是单点集, $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是 \mathbb{P}^2 胀开一个点的态射, 并且 $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ 使得 \mathbb{F}_1 成为 \mathbb{P}^1 上的一个直纹面 (scroll over \mathbb{P}^1).

类型三

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \text{pt} \end{array}$$

类型一映射反向所得.

类型二

$$\begin{array}{ccccc} S & \longleftarrow & Z & \longrightarrow & S' \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ C & & = & & C \end{array}$$

其中 $S \rightarrow C$ 和 $S' \rightarrow C$ 是 \mathbb{P}^1 -线丛, 且 $S \leftarrow Z \rightarrow S'$ 是一个基本变换, 参见本文第 2 章, 定义 2.10.

类型四

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & & = & & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = \mathbb{F}_0 \\ p_1 \downarrow & & & & \downarrow p_2 \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & pt & \longleftarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

其中 pt 是单点集, 且 p_1, p_2 分别是 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 到每个分量的投影.

要证明 Noether-Castelnuovo 定理, 我们要介绍 Sarkisov 算法 (Sarkisov Algorithm), 这个算法可以将双有理映射分解成 Sarkisov 连接映射. 为证明不会分解成无限个 Sarkisov 连接映射, 我们定义一个双有理映射的量, 并证明它在 Sarkisov 算法中严格减小, 并且只能减小有限次. 这个量就是 Sarkisov 次数.

接下来的几节中, 我们介绍 Sarkisov 次数、Noether-Fano-Iskovskih 定理和 Sarkisov 算法, 并完成 Noether-Castelnuovo 定理的证明.

4.2 Sarkisov 次数

我们现在定义双有理映射 $\phi: S \dashrightarrow S'$ 的 Sarkisov 次数.

首先介绍一些需要的知识.

定义 4.1 (映射的丰富性) 令 $f: X \rightarrow T$ 是一个代数簇或者概型之间的本征映射, 并且 L 是 X 上的线丛.

1) 称 L 是相对于 f 极丰富的, 或者 f -极丰富的 (f -very ample), 如果典范映射 $p: f^*f_*L \rightarrow L$ 是一个满射, 且定义了一个嵌入满足如下交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & \mathbb{P}(f_*L) \\ & \searrow f & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

2) 称 L 是相对于 f 丰富的, 或者说 f -丰富的 (f -ample), 如果存在某个正整数 m , 使得 $L^{\otimes m}$ 是 f -极丰富的.

定理 4.2 令 $f: X \rightarrow T$ 是一个射影概型间的态射, L 是 X 上的线丛, A 是 T 上丰富线丛. 如果 L 是 f -丰富的, 那么, 对所有足够大的正整数 m , 都有 $L \otimes f^*(A^{\otimes m})$ 是 X 上的丰富线丛.

证明: 由于 A 是 T 上的丰富线丛, 由丰富线丛的定义 (参见 [7], 153 页), 存在某个足够大的正整数 p , 使得 $f_*L \otimes A^p$ 是由整体截面生成的.

那么 $f^*(f_*L \otimes A^p)$ 也是由整体截面生成的, 即, 存在正整数 r 使得 $\mathcal{O}_X^r \rightarrow f^*(f_*L \otimes A^p)$ 是一个满射.

现在用 L 替代 L 的高阶幂, 我们可以假设 $f^*f_*L \rightarrow L$ 是一个满射, 因为 L 是 f -丰富的.

所以, 我们有满射

$$\mathcal{O}_X^r = f^*\mathcal{O}_T^r \twoheadrightarrow f^*(f_*L \otimes A^p) = f^*f_*L \otimes f^*A^p \twoheadrightarrow L \otimes f^*A^p.$$

由 [7], Chap II, 命题 7.12, 上面这个满射 $f^*\mathcal{O}_T^r \twoheadrightarrow L \otimes f^*A^p$ 诱导出态射 $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{O}_T^r) = \mathbb{P}^{r-1} \times T$, 并且有如下图

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}(\mathcal{O}_T^r) = \mathbb{P}^{r-1} \times T & & \\ & \searrow f & \swarrow \text{pr}_2 & \searrow \text{pr}_1 & \\ & & T & & \mathbb{P}^{r-1} \end{array}$$

所以 $L \otimes f^*A^p = \phi^*(\text{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1))$, 所以 $L \otimes f^*A^{p+q} = \phi^*(\text{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \otimes \text{pr}_2^*A^q)$, 再由 [7], Chap II, 命题 7.10 b), 存在足够大的正整数 q 使得 $\text{pr}_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \otimes \text{pr}_2^*A^q$ 是丰富的.

另一方面, ϕ 是一个有限态射. 事实上, 记 ϕ 的纤维 $X_t, t \in T$, 如果 $t \neq t'$, 那么 $\phi(X_t) \cap \phi(X_{t'}) = \emptyset$, 所以 L 是 f -丰富的可以推出 $L|_{X_t}$ 是丰富的, 所以 $\phi|_{X_t}$ 是有限的, 故有 ϕ 是拟有限的. 与假设 ϕ 是射影的结合起来, 由 [7], Chap III, Exercise 11.2 可得, ϕ 是有限态射. 因此 $L \otimes f^*A^{p+q}$ 是丰富线丛. \square

作为定理 4.2 的直接推论, 我们有如下引理.

引理 4.1 令 $p': S' \rightarrow C'$ 是一个森纤维空间, 那么存在一个 C' 上的极丰富除子 A' , 使得 $-K_{S'} + p'^*A'$ 是 S 上丰富除子.

令 A' 是 C' 上的一个极丰富除子. 由引理 4.1, 存在一个足够大的正整数 μ' 使得 $H' := \mu'(-K_{S'} + p'^*A')$ 是极丰富的. 再用 $\mu'A$ 替换 A' 就得到 $H' = -\mu'K_{S'} + p'^*A'$ 是极丰富的. 再令 $L_{S'} := |H'|$ 是由 H' 生成的完全线性系. 设 L_S 是 $L_{S'}$ 经过双有理变换得到的线性系, 即 $L_S = \{\sigma_*\sigma'^*D, D \in L_{S'}\}$, σ 是 ϕ 的解消态射, 我们可以进一步假设这是极小解消.

定义 4.2 (Sarkisov 次数) 令 $p : S \rightarrow C$ 和 $p' : S' \rightarrow C'$ 表示两个森纤维空间, 令 $\phi : S \dashrightarrow S'$ 是一个双有理映射, 令 L_S 是 $L_{S'}$ 经过双有理变换得到的线性系, $D \in L_S$ 是 L_S 中的一个除子, 定义 μ 是满足以下方程的有理数

$$(\mu K_S + D).F = 0$$

其中 F 是任意一条 p 可缩曲线; 定义 λ 是 L_S 的极大重数, 即, L_S 的一般元在基点处的重数的最大值; 定义 l 是 L_S 取到极大重数的基点个数. (μ, λ, l) 这个三元数组即为 ϕ 的 Sarkisov 次数.

注: 在证明 Noether-Castelnuovo 定理时, 需要用到 Sarkisov 次数在字典序下只能严格减小有限次, 由于 λ 和 l 的取值范围是 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$, 所以只需证明 μ 的取值范围是 $\frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的一个子集合, 这样在字典序下, 任意 Sarkisov 次数都只能严格减小有限次.

由 μ 的定义方程为

$$(\mu K_S + D).F = 0$$

因此有

$$\mu = \frac{D.F}{-K_S.F}$$

由于 L_S 是数值有效的, 所以 $D.F \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

接下来我们将分情况讨论 $K_S.F$:

情形一: 当 $p : S \rightarrow C$ 是 $p : \mathbb{P}^2 \rightarrow \text{pt}$ 时, μ 的定义方程为

$$(\mu K_{\mathbb{P}^2} + D).F = 0$$

其中 F 是 \mathbb{P}^2 上任意曲线, 因此存在正整数 m , \mathbb{P}^2 上直线 l_0 , 使得 F 与 ml_0 线性等价. 将其代入化简得

$$\mu = \frac{D.l_0}{-K_{\mathbb{P}^2}.l_0} = \frac{D.l_0}{3} \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

因此情形一满足要求.

情形二: 当 $p : S \rightarrow C$ 是 C 上的 \mathbb{P}^1 -线丛时, 类似情形一, 需要计算 $K_S.F$.

由伴随公式有,

$$(K_S + F).F = \deg K_F$$

由于 F 是 $p : S \rightarrow C$ 的纤维有 $F^2 = 0$, 因此上一式化简为

$$K_S.F = \deg K_F$$

又因为 $p: S \rightarrow C$ 是一个 \mathbb{P}^1 -线丛, 所以有纤维 F 同构于 \mathbb{P}^1 , 故有

$$K_S.F = \deg K_{\mathbb{P}^1} = \deg \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) = -2$$

所以有

$$\mu = \frac{D.F}{2} \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

因此情形二也满足条件. 综上所述, 对于任意的 μ , $\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{\geq 0}$.

4.3 Noether-Fano-Iskovskih 定理

接下来我们介绍 Noether-Fano-Iskovskih 定理.

定理 4.3 (Noether-Fano-Iskovskih) 令 (μ, λ, l) 是 $\phi: S \dashrightarrow S'$ 的 Sarkisov 次数, 如果 $\lambda \leq \mu$ 且 $K_S + \frac{1}{\mu}L_S$ 是数值有效的, 那么 ϕ 是一个同构.

证明: 这个证明分为以下三步.

第一步: 证明 $\mu = \mu'$.

在引理 4.1 中, 我们有 $H' + \mu'K_{S'} = p'^*(A')$, 其中 H' 和 A' 都是极丰富的. 因此, 对所有的 $\varepsilon > 0$ 有

$$(1 + \varepsilon)H' + \mu'K_S = \varepsilon H' + H' + \mu'K_{S'} = \varepsilon H' + p'^*(A')$$

是丰富的. 那么当 $0 < t < \mu'$ 时

$$\frac{1}{t}H' + K_{S'}$$

是丰富的. 因此经由 ϕ 的双有理变换, $\frac{1}{t}H' + K_{S'}$ 与任意的移动曲线正相交, 特别地, 被 $p: S \rightarrow C$ 压缩成一个点的纤维 F .

简单的计算有

$$\begin{aligned} \sigma'^*\left(\frac{1}{t}H' + K_{S'}\right) &= \frac{1}{t}\sigma'^*(H') + (K_X - E) \\ &= \frac{1}{t}\sigma'^*(H') + (\sigma^*(K_S) + \sum_{k=1}^n a_k E_k - E) \end{aligned}$$

其中 E 是一个有效除子, 因此

$$\sigma_*(\sigma'^*\left(\frac{1}{t}H' + K_{S'}\right)) = \frac{1}{t}H + K_S - \sigma_*(E), \text{ 其中 } H := \sigma_*(\sigma'^*(H'))$$

所以如果 F 是一条移动的曲线, 因此也是数值有效的, 特别地, 也是 $p: S \rightarrow C$ 的一个纤维, 如果 $0 < t < \mu'$, 我们有

$$\left(\frac{1}{t}H + K_S\right).F = \sigma_*(\sigma'^*\left(\frac{1}{t}H' + K_{S'}\right)).F + \sigma_*(E).F \geq \sigma_*(\sigma'^*\left(\frac{1}{t}H' + K_{S'}\right)).F > 0$$

因此 $\mu \geq \mu'$.

另一方面, 我们有

$$\left(\frac{1}{t}H' + K_{S'}\right).F' < 0, \text{ 当 } t > \mu' \text{ 时}$$

其中 F' 是 $p': S' \rightarrow C'$ 的纤维. 事实上, 当 $t > \mu'$ 时, 我们有

$$F'.(H' + tK_{S'}) = F'.(p'^*(A') + (t - \mu')K_{S'}) = (t - \mu')F'.K_{S'} < 0$$

用 ϕ 做变换得到, 当 $t > \mu'$ 时, $\frac{1}{t}H + K_S - \sigma'_*(E)$ 不是数值有效的. 事实上, 如果 Z 是 F' 的变换, 即 $Z = \sigma_*\sigma'^*F'$, 我们有 $F'.\sigma'_*(E) = 0$, 因此 $Z.\sigma'_*(E) = 0$, 从而当 $t > \mu'$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{t}H + K_S\right).Z &= \left(\frac{1}{t}H + K_S - \sigma'_*(E)\right).Z \\ &= \sigma_*\sigma'^*(H' + tK_{S'}).\sigma_*\sigma'^*F' \\ &= \sigma'^*(H' + tK_{S'}).\sigma'^*F' \\ &= (H' + tK_{S'}).F' < 0 \end{aligned}$$

由于 $K_S + \frac{1}{\mu}H$ 是数值有效的, 我们必须有 $\mu \leq \mu'$, 因此 $\mu = \mu'$ 得证.

第二步: 伴随不变量.

由 ϕ 不确定消解

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \sigma \downarrow & \searrow \sigma' & \\ S & \xrightarrow{\phi} & S' \end{array}$$

可令

$$\begin{aligned} K_X &= \sigma^*(K_S) + \sum_{k=1}^n a_k E_k \\ L_X &:= \sigma'^*(L') = \sigma^*(L) - \sum_{k=1}^n b_k E_k \end{aligned}$$

其中 E_1, \dots, E_n 是不同的被 σ 压缩的曲线, a_1, \dots, a_n 是正整数, b_1, \dots, b_n 是非负整数. 那么由 $\lambda \leq \mu$ 有

$$K_X + \frac{1}{\mu}L_X = \sigma^*\left(K_S + \frac{1}{\mu}L\right) + \sum_{k=1}^n r_k E_k, \text{ 其中 } r_k = a_k - \frac{1}{\mu}b_k \geq a_k - \frac{1}{\lambda}b_k \geq 0$$

并且

$$\sum_{k=1}^n r_k E_k \leq R := \sum_{k=1}^n a_k E_k$$

其中 R 是 $\sigma: X \rightarrow S$ 的分歧除子 (ramification).

另一方面,

$$K_X + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}_X = \sigma'^*(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') + R', \text{ 其中 } R' = \sum_{h=1}^m r'_h E'_h$$

其中 R' 包含在 σ' 的分歧除子内, E'_1, \dots, E'_m 是被 σ' 压缩的不可约曲线, r'_1, \dots, r'_m 是正整数.

这一步的核心是要证明

$$\sum_{k=1}^n r_k E_k = \sum_{h=1}^m r'_h E'_h \quad (4.1)$$

这导致

$$\sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}) = \sigma'^*(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') \quad (4.2)$$

这个等式说明了我们为什么称呼它为伴随不变量.

为了证明 (4.1), 我们用 F_l 表示曲线 E_1, \dots, E_n 和曲线 E'_1, \dots, E'_m . 根据惯例指标 l 在以下集合中变化:

- $l \in S_\sigma$, 如果 F_l 被 σ 压缩成一个点, 而不是被 σ' 压缩成一个点;
- $l \in S_{\sigma'}$, 如果 F_l 被 σ' 压缩成一个点, 而不是被 σ 压缩成一个点;
- $l \in S_{\sigma, \sigma'}$, 如果 F_l 既被 σ 压缩成一个点, 也被 σ' 压缩成一个点.

那么

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n r_k E_k &= \sum_{l \in S_\sigma} r_l F_l + \sum_{l \in S_{\sigma, \sigma'}} r_l F_l \\ \sum_{h=1}^m r'_h E'_h &= \sum_{l \in S_{\sigma'}} r'_l F_l + \sum_{l \in S_{\sigma, \sigma'}} r'_l F_l \end{aligned}$$

我们有

$$\sum_{k=1}^n r_k E_k + \sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}) = \sigma'^*(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') + \sum_{h=1}^m r'_h E'_h$$

因此有

$$\sum_{l \in S_\sigma} r_l F_l + \sum_{l \in S_{\sigma, \sigma'}} (r_l - r'_l) F_l = \sigma'^*(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') - \sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}) + \sum_{l \in S_{\sigma'}} r'_l F_l \quad (4.3)$$

类似的有

$$\sum_{l \in S_{\sigma'}} r'_l F_l + \sum_{l \in S_{\sigma, \sigma'}} (r'_l - r_l) F_l = \sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}) - \sigma'^*(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') + \sum_{l \in S_{\sigma}} r_l F_l. \quad (4.4)$$

此时，我们需要如下引理：

引理 4.2 (负性引理) 令 $f: V \rightarrow T$ 是两个曲面 V 和 T 之间的双有理态射. 令 E_1, \dots, E_n 是不同的不可约曲线, $E = \sum_{i=1}^n a_i E_i$ 是一个被 f 收缩到一点的有效除子. 若对于所有的 $i \in \{1, \dots, n\}$, 都有 $E \cdot E_i \geq 0$, 那么对于所有的 $i \in \{1, \dots, n\}$, 都有 $a_i \leq 0$.

证明： 如果存在 $j \in \{1, \dots, n\}$ 使得 $a_j > 0$. 我们有

$$\begin{aligned} 0 \leq E \cdot (\sum_{a_i > 0} a_i E_i) &= (\sum_{a_i \leq 0} a_i E_i + \sum_{a_i > 0} a_i E_i) \cdot (\sum_{a_i > 0} a_i E_i) \\ &= (\sum_{a_i \leq 0} a_i E_i) \cdot (\sum_{a_i > 0} a_i E_i) + (\sum_{a_i > 0} a_i E_i)^2 < 0 \end{aligned}$$

由于 $\sum_{a_i > 0} a_i E_i$ 收缩到一个点, 所以 $(\sum_{a_i > 0} a_i E_i)^2 < 0$ 且 $(\sum_{a_i \leq 0} a_i E_i) \cdot (\sum_{a_i > 0} a_i E_i) \leq 0$, 所以矛盾. \square

将这个引理应用在 (4.3) 两端的 F_s 和 $s \in S_{\sigma} \cup S_{\sigma, \sigma'}$ 上, 得到

$$\begin{aligned} &(\sum_{l \in S_{\sigma}} r_l F_l + \sum_{l \in S_{\sigma, \sigma'}} (r_l - r'_l) F_l) \cdot F_s \\ &= \sigma'^*(K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') \cdot F_s - \sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}) \cdot F_s + (\sum_{l \in S_{\sigma'}} r'_l F_l) \cdot F_s \end{aligned}$$

由于 $K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}' = \frac{1}{\mu} p'^*(A')$ 是数值有效的, 所以上个等式右边做和的三项中, 第一项是非负的. 第二项等于零, 第三项是非负的, 因此有

$$(\sum_{l \in S_{\sigma}} r_l F_l + \sum_{l \in S_{\sigma, \sigma'}} (r_l - r'_l) F_l) \cdot F_s \geq 0, \text{ 对所有 } s \in S_{\sigma} \cup S_{\sigma, \sigma'}.$$

由负性引理可得

$$r_l \leq \begin{cases} 0 & \text{当 } l \in S_{\sigma} \text{ 时} \\ r'_l & \text{当 } l \in S_{\sigma, \sigma'} \text{ 时} \end{cases}$$

以同样的方法讨论 (4.4) 得到

$$r'_l \leq \begin{cases} r_l & \text{当 } l \in S_{\sigma, \sigma'} \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } l \in S_{\sigma'} \text{ 时} \end{cases}$$

总之

$$r_l = 0, \text{ 当 } l \in S_\sigma \text{ 时};$$

$$r'_l = 0, \text{ 当 } l \in S_{\sigma'} \text{ 时};$$

$$r_l = r'_l, \text{ 当 } l \in S_{\sigma, \sigma'} \text{ 时}$$

这证明了 (4.1).

第三步：总结

我们有

$$R \geq \sum_{k=1}^n r_k E_k = \sum_{h=1}^m r'_h E'_h = R'$$

并且所有的除子都同时可以被 σ' 和 σ 压缩到一个点. 由 σ' 的极小性的假设, 我们有 σ' 是恒等映射, 因此 $X = S'$, 且 $\sigma = \phi^{-1}$.

现在考虑这个复合映射 $S' \xrightarrow{\sigma} S \xrightarrow{p} C$, 并且令 Γ 是这个复合映射的一条一般的纤维. 由于映射 $p: S \rightarrow C$ 的一般的纤维是连通的, 所以 Γ 也是连通的. 由 μ 的定义和在第二步中 (4.2) 的证明, 得到

$$0 = \Gamma \cdot \sigma^*(K_S + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}) = \Gamma \cdot (K_{S'} + \frac{1}{\mu} \mathcal{L}') = \frac{1}{\mu} \Gamma \cdot p'^*(A')$$

这说明 Γ 被 p' 压缩到一个点. 由刚性定理 ([4], 引理 1.15) 存在一个态射 $g: C \rightarrow C'$ 使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\phi^{-1}} & S' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ C & \xrightarrow{g} & C' \end{array}$$

注意到 ϕ^{-1} 是双有理态射. 如果 ϕ^{-1} 不是一个同构, 那么有 S' 中某条曲线 E 被 ϕ^{-1} 压缩成一个点, 但是 E 被 p' 压缩成一个点. 由于 p' 纤维中的曲线都是数值等价的, 所以矛盾. 这证明了 ϕ^{-1} 是同构, 所以有 ϕ 是同构. \square

4.4 Sarkisov 算法

接下来我们介绍 Sarkisov 算法, 并且利用它完成 Noether-Castelnuovo 定理的证明. 以下沿用 Noether-Castelnuovo 定理的符号.

对于森纤维空间的双有理映射 ϕ , 我们分情况讨论, 使得 ϕ 在每种情况都可以分解为一个 Sarkisov 连接映射和一个双有理映射的复合, 并且在有限次迭代后得到的双有理映射是同构, 则算法终止.

情况 1: 当 $\lambda \leq \mu$ 时, 再细分为两种情况

子情况 1.1: 当 $K_S + \frac{1}{\mu}L_S$ 是数值有效的, 此时由 Noether-Fano-Iskovskih 定理有, ϕ 是同构.

子情况 1.2: 当 $K_S + \frac{1}{\mu}L_S$ 不是数值有效的, 由于森纤维空间只有 $p: \mathbb{P}^2 \rightarrow \text{pt}$ 或者 $p: S \rightarrow C$ 是一个 C 上的 \mathbb{P}^1 -线丛这两种情况. 断言不可能是 \mathbb{P}^2 映射到一个点的情况. 这是因为由 μ 的定义有, 任意一条被 p 压缩到一点的曲线 F , 都有 $(\mu K_S + L_S).F = 0$. 又因为 $p: \mathbb{P}^2 \rightarrow \text{pt}$ 将所有的曲线都压缩到一个点, 这与 $K_S + \frac{1}{\mu}L_S$ 不是数值有效的矛盾.

所以我们假设 $p: S \rightarrow C$ 是一个 C 上的 \mathbb{P}^1 -线丛这种情况. 由于 $K_S + \frac{1}{\mu}L_S$ 不是数值有效的, 所以存在某条曲线 F' 使得 $(K_S + \frac{1}{\mu}L_S).F' < 0$, 但是 L_S 是数值有效的, 所以 $\frac{1}{\mu}L_S.F' \geq 0$, 所以 $K_S.F' < 0$. 所以存在另外一个极端压缩映射, 记这个新的极端压缩为 $q: S \rightarrow T$. 由于 S 不同构于 \mathbb{P}^2 , 所以 $q: S \rightarrow T$ 是压缩 (-1) -曲线, 或者是另一个 \mathbb{P}^1 -线丛.

如果 $q: S \rightarrow T$ 压缩到 (-1) -曲线, 那么 $\text{Num}(T) \simeq \mathbb{Z}$, 因此有 $T \simeq \mathbb{P}^2$, 且有

$$\begin{array}{ccc} S = \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{q} & T = \mathbb{P}^2 := S_1 \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ C = \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \text{pt} := C_1 \end{array}$$

这是三型 Sarkisov 链接态射.

如果 $q: S \rightarrow T$ 压缩到另一个 \mathbb{P}^1 -线丛. 由于 T 被 $p: S \rightarrow C$ 的纤维支配, 纤维同构于 \mathbb{P}^1 , 所以 $T \simeq \mathbb{P}^1$. 同理可得 $C \simeq \mathbb{P}^1$. 设 D 是 $q: S \rightarrow T$ 的纤维构成的类, 所以 $D^2 = 0$.

接下来只需要证明 $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. 反之, 假设 $S = \mathbb{F}_a$, 其中 $a > 0$. 那么存在 $p: S = \mathbb{F}_a \rightarrow \mathbb{P}^1$ 唯一一个截面 E 使得 $E^2 = -a < 0$. 这个截面 E 是 $\overline{NE}(S)$ 的另一条极值射线, 从而诱导出极端压缩映射 $q: S \rightarrow T$. 由上面的讨论知 $E^2 = D^2 = 0$ 矛盾, 所以 $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. 此时是第四型连接映射.

断言: 在上面的两种情况中, 对于新的森纤维空间 $p_1: S_1 \rightarrow C_1$ 有 $\mu_1 < \mu$.

证明: 在如下情形时

$$\begin{array}{ccc} S = \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{q} & T = \mathbb{P}^2 := S_1 \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ C = \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \text{pt} := C_1 \end{array}$$

由于 $q: S = \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是涨开, 所以设 $E \subset \mathbb{F}_1$ 是例外曲线, 也是 (-1) -曲线. 再设 l_0 是 \mathbb{P}^2 的直线, 那么 $p: S \rightarrow \mathbb{P}^1$ 的纤维有: $F = q^*(l_0) - E$ 和 $K_S = q^*(-3l_0) + E$. 并且所有 L_S 都是 $q^*(al_0) - bE, (a, b \in \mathbb{N})$ 这种形式, 因此有

$$K_S + \frac{1}{\mu}L_S = q^*\left((-3 + \frac{a}{\mu})l_0\right) + \left(1 - \frac{b}{\mu}\right)E \Rightarrow (K_S + \frac{1}{\mu}L_S).E = \frac{b}{\mu} - 1 < 0$$

其中最后的不等式是因为 $(K_S + \frac{1}{\mu}L_S)$ 不是数值有效的, 但是由 μ 的定义有, F 是 $p: S \rightarrow C$ 的纤维,

$$\begin{aligned} 0 &= (K_S + \frac{1}{\mu}L_S).F = (q^*\left((-3 + \frac{a}{\mu})l_0\right) + \left(1 - \frac{b}{\mu}\right)E).(q^*(l_0) - E) \\ &= -3 + \frac{a}{\mu} + 1 - \frac{b}{\mu} > -3 + \frac{a}{\mu} \end{aligned}$$

所以有

$$(K_{S_1} + \frac{1}{\mu}L_{S_1}).F_1 = m^2(-3 + \frac{a}{\mu})l_0.l_0 = m^2(-3 + \frac{a}{\mu}) < 0$$

其中 F_1 是 $p_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow \text{pt}$ 的纤维, 且 $F_1 = ml_0, m \in \mathbb{Z}_{>0}$. 又由 μ_1 的定义有

$$0 = (K_{S_1} + \frac{1}{\mu_1}L_{S_1}).F_1 = m(-3 + \frac{a}{\mu_1})$$

所以 $\mu_1 < \mu$.

在如下情形时

$$\begin{array}{ccc} S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & = & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 = S = S_1 \\ p \downarrow & & \downarrow q=p_1 \\ C = \mathbb{P}^1 & \longrightarrow \text{pt} \longleftarrow & \mathbb{P}^1 = C_1 \end{array}$$

令 F, F_1 分别表示 $p: S \rightarrow \mathbb{P}^1, q: S_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ 的纤维. 由 μ, μ_1 的定义和 $K_S + \frac{1}{\mu}L_S$ 不是数值有效的有

$$(K_S + \frac{1}{\mu}L_S).F_1 < 0 = (K_{S_1} + \frac{1}{\mu_1}L_{S_1}).F_1$$

又因为 $S = S_1$, 所以 $K_S = K_{S_1}, L_S = L_{S_1}$, 所以 $\mu_1 < \mu$.

情况 2: 当 $\lambda > \mu$ 时, 根据森纤维空间分作两种情况讨论.

情况 2.1 当 $S \simeq \mathbb{P}^2$ 时, 选择 S 一个达到极大重数的基点, 在这点做涨开, 得到例外曲线 E , 所以我们得到一型 Sarkisov 连接映射,

$$\begin{array}{ccc} S = \mathbb{P}^2 & \xleftarrow{f} & \mathbb{F}_1 = S_1 \\ \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \text{pt} & \longleftarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

如果 l_0 是 \mathbb{P}^2 的一条直线, 我们有 $L_S = al_0, (a \in \mathbb{N})$, 并且有

$$K_{S_1} = f^*(K_S) + E = f^*(-3l_0) + E$$

$$L_{S_1} = f^*(L_S) - \lambda E = f^*(al_0) - \lambda E$$

$$F_1 = f^*(l_0) - E$$

因此有

$$\begin{aligned} K_{S_1} + \frac{1}{\mu}L_{S_1} &= f^*(-3l_0) + E + \frac{1}{\mu}(f^*(al_0) - \lambda E) \\ &= (-3 + \frac{a}{\mu})f^*(l_0) + (1 - \frac{\lambda}{\mu})E \end{aligned}$$

计算后可得

$$\begin{aligned} (K_{S_1} + \frac{1}{\mu}L_{S_1}).F_1 &= ((-3 + \frac{a}{\mu})f^*(l_0) + (1 - \frac{\lambda}{\mu})E).(f^*(l_0) - E) \\ &= -3 + \frac{a}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} + 1 \end{aligned}$$

由于 $\lambda > \mu$, 可得 $-\frac{\lambda}{\mu} + 1 < 0$ 又因为

$$0 = (K_S + \frac{1}{\mu}L_S).l_0 = (-3 + \frac{a}{\mu})l_0.l_0 = -3 + \frac{a}{\mu}$$

有 $(K_{S_1} + \frac{1}{\mu}L_{S_1}).F_1 < 0$. 所以有 $\mu_1 < \mu$.

情形 2.2 当 $p: S \rightarrow C$ 是一个 \mathbb{P}^1 -线丛. 我们在 S 中一个基点 x 做基本变换得到如下交换图

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ S & \xrightarrow{\quad f \quad} & S_1 \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ C & & C_1 \end{array}$$

令 F 是 $p: S \rightarrow C$ 的一条纤维, 并且过基点 x , 通过 $\alpha: Z \rightarrow S$ 拉回到 Z 后得到 $F' + E$, 其中 F' 是 F 的严格形变, 且 E 是例外曲线, 然后 F' 通过 $\beta: Z \rightarrow S_1$ 收缩到了点, 并且 E 在 β 下的像, 记作 F_1 , 是 p_1 的纤维, 且过点 x_1 .

由伴随公式有 $K_S.F = -2$ 所以

$$0 = (K_S + \frac{1}{\mu}L_S).F = -2 + \frac{1}{\mu}L_S.F$$

所以有 $L_S.F = 2\mu$.

接下来计算 x_1 的重数, 设 x_1 的重数为 m , 断言 $m = L_Z.F'$, 其中 $L_Z = \alpha^*L_S - \lambda E$. 事实上, 由 $\beta_*L_Z = L_{S_1}$ 有, $\beta^*(\beta_*L_Z) = \beta^*(L_{S_1}) = L_Z + mF'$, 所以利用射影公式有 $L_Z.F' = (\beta^*\beta_*L_Z - mF').F' = 0 - mF'.F' = m$. 这样就证明了断言.

接下来计算 $L_Z.F'$. 简单计算有

$$\begin{aligned} L_S.F &= \alpha^*L_S.\alpha^*F \\ &= (L_Z + \lambda E).(F' + E) \\ &= L_Z.F' + L_Z.E + \lambda E.F' + \lambda E^2 \\ &= L_Z.F' + \lambda + \lambda - \lambda \end{aligned}$$

综合 $L_S.F = 2\mu$ 有 $m = L_Z.F' = 2\mu - \lambda$.

因此有 x_1 的重数是 $2\mu - \lambda$, 由假设的 $\mu < \lambda$ 有 $2\mu - \lambda < \lambda$. 如果 $\lambda_1 = \lambda$, 那么有 $l_1 < l$. 此外, 我们还要证明 $\mu_1 = \mu$. 令 $G = \alpha^*(F) = \beta^*(F_1)$, 有

$$\begin{aligned} K_Z &= \alpha^*(K_S) + E \\ L_Z &= \alpha^*(L_S) - \lambda E \\ K_Z + \frac{1}{\mu}L_Z &= \alpha^*(K_S + \frac{1}{\mu}L_S) + (1 - \frac{\lambda}{\mu})E \end{aligned}$$

因此有

$$(K_Z + \frac{1}{\mu}L_Z).G = \alpha^*(K_S + \frac{1}{\mu}L_S).\alpha^*(F) = (K_S + \frac{1}{\mu}L_S).F = 0$$

通过 $\beta: Z \rightarrow S_1$ 变换 K_Z, L_Z, G 计算可得

$$0 = (K_Z + \frac{1}{\mu}L_Z).G = \beta^*(K_{S_1} + \frac{1}{\mu}L_{S_1}).\beta^*(F_1) = (K_{S_1} + \frac{1}{\mu}L_{S_1}).F_1$$

这就证明了 $\mu_1 = \mu$.

所以在这种情况下我们也证明了 Sarkisov 次数降低了, 并且由于 λ 和 l 属于非负整数, $\mu \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$, 所以 Sarkisov 算法在有限步结束, 这样就证明了 Noether-Castelnuovo 定理.

接下来计算一个例子.

例 4.1 (将 \mathbb{P}^2 上标准二次变换分解为 Sarkisov 连接映射) 对于 \mathbb{P}^2 上的标准二次变换

$$S := \mathbb{P}^2 \dashrightarrow S := \mathbb{P}^2$$

$$[x_0 : x_1 : x_2] \longmapsto [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1]$$

若令 $L_{S'} = |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$, 则 $L_S = \text{Span}\{x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1\} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$. 所以 L_S 的基点有三个, 分别是 $A = [1:0:0], B = [0:1:0], C = [0:0:1]$ 且每个基点的重数都是 1, 所以 $\lambda = 1, l = 3$. 根据之前的讨论有

$$\mu = \frac{D \cdot l_0}{3} = \frac{2}{3}$$

其中 $D \in L_S$. 所以 ϕ 的 Sarkisov 次数是 $(\frac{2}{3}, 1, 3)$.

接下来根据 Sarkisov 算法分解 ϕ . 此时 $\lambda = 1 > \mu = \frac{2}{3}$, 且 $S = \mathbb{P}^2$, 属于 Sarkisov 算法中子情况 2.1, 所以分解出来一个一型 Sarkisov 连接映射, 如下图所示

$$\begin{array}{ccc} S = \mathbb{P}^2 & \longleftarrow & S_1 := \mathbb{F}_1 \\ p \downarrow & & \downarrow p_1 \\ \text{pt} & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

不妨设这个一型 Sarkisov 连接映射 $S_1 \rightarrow S$ 是胀开的 A 点, 且令 B_1, C_1 分别是 B, C 在这个映射下的像, 现在来计算 $\phi: S_1 \dashrightarrow S'$ 的 Sarkisov 次数. μ_1 要满足定义方程 $(K_{S_1} + \frac{1}{\mu_1} L_{S_1}) \cdot F_1 = 0$, 其中 $K_{S_1} \cdot F_1 = \deg \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) = -2, L_{S_1} \cdot F_1 = 1$, 所以 $\mu_1 = \frac{1}{2} < \frac{2}{3} = \mu$. 此时 $\lambda_1 = 1, l_1 = 2$. 那么 $\phi_1: S_1 \dashrightarrow S'$ 的 Sarkisov 次数是 $(\frac{1}{2}, 1, 2)$.

由于 $\lambda_1 > \mu_1$, 且 $S_1 = \mathbb{F}_1$, 所以属于 Sarkisov 算法中的子情况 2.2, 所以不妨对点 B_1 做基本变换, 这是一个二型 Sarkisov 连接映射, 由于 B_1 不在 (-1) -曲线上, 所以得到的曲面 $S_2 = \mathbb{F}_0$, 故有如下图

$$\begin{array}{ccc} S_1 = \mathbb{F}_1 & \dashrightarrow & S_2 = \mathbb{F}_0 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

由前面 Sarkisov 算法中情形 2.2 的讨论, $\mu_2 = \mu_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \lambda_1 = 1$ 不变, $l_2 = 1 < l_1 = 2$ 减小, 所以 Sarkisov 次数降低为 $(\frac{1}{2}, 1, 1)$.

此时 $\lambda_2 > \mu_2$, 且 $S_2 = \mathbb{F}_0$, 仍然属于 Sarkisov 算法中的子情况 2.2. 令 C_2 是 C_1 在基本变换下的像, 再对 C_2 做基本变换, 分解出一个二型 Sarkisov 连接映射, 可得如下图

$$\begin{array}{ccc} S_2 = \mathbb{F}_0 & \dashrightarrow & S_3 := \mathbb{F}_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow p_3 \\ \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

仍然由前面 Sarkisov 算法中情形 2.2 的讨论, $\mu_3 = \mu_2 = \frac{1}{2}$ 不变, $\lambda_3 = 0 < \lambda_2 = 1$ 减小, 所以 Sarkisov 次数降低为 $(\frac{1}{2}, 0, *)$, 其中 $*$ 表示没有定义.

最后 $\lambda_3 = 0 \leq \mu_3 = \frac{1}{2}$, 但是 $K_{S_3} + \frac{1}{\mu_3}L_{S_3}$ 不是数值有效的, 属于子情况 1.2, 故爆缩 $S_3 = \mathbb{F}_1$ 的 (-1) -曲线, 这样得到一个三型 Sarkisov 连接映射, 得到如下图

$$\begin{array}{ccc} S_3 = \mathbb{F}_1 & \dashrightarrow & S_4 := \mathbb{P}^2 \\ p_3 \downarrow & & \downarrow p_4 \\ \mathbb{P}^1 & & \text{pt} \end{array}$$

由 μ_4 的定义方程有

$$(K_{S_4} + \frac{1}{\mu_4}L_{S_4}).l_0 = 0$$

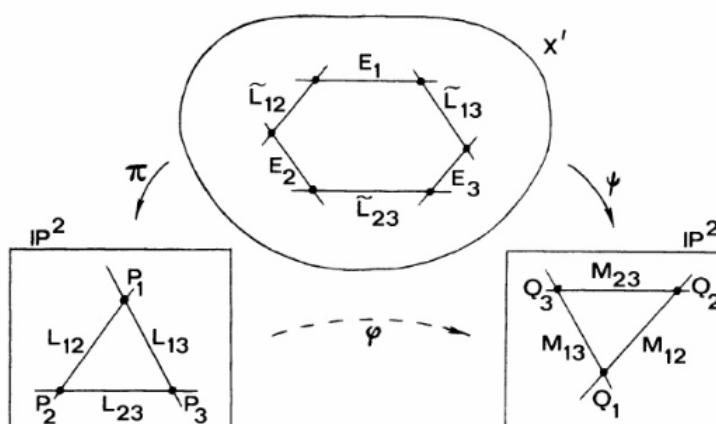
其中 l_0 是 \mathbb{P}^2 的直线. 又因为 $K_{S_4}.l_0 = -3, L_{S_4}.l_0 = 1$ 所以有 $\mu_4 = \frac{1}{3}$, 所以 Sarkisov 次数为 $(\frac{1}{3}, 0, *)$.

此时 $\lambda_4 = 0 \leq \mu_4 = \frac{1}{3}$, 且有 $K_{S_4} + \frac{1}{\mu_4}L_{S_4}$ 是数值有效的, 所以 $\phi_4: S_4 \rightarrow S'$ 是同构, 算法结束.

故标准二次映射 $\phi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 分解为如下映射

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbb{P}^2 & \dashleftarrow & \mathbb{F}_1 & \dashrightarrow & \mathbb{F}_0 & \dashrightarrow & \mathbb{F}_1 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\phi_4} & \mathbb{P}^2 \\ p \downarrow & & p_1 \downarrow & & p_2 \downarrow & & p_3 \downarrow & & p_4 \downarrow & & p' \downarrow \\ \text{pt} & & \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 & & \mathbb{P}^1 & & \text{pt} & & \text{pt} \end{array}$$

其中 ϕ_4 是同构, 且第一行的映射复合后是标准二次映射 ϕ . (以下是示意图, 引用自 [7], 398 页)



第 5 章 射影平面的双有理自同构群

本章将应用第 4 章的主要结果——Noether-Castelnuovo 定理——证明射影平面 \mathbb{P}^2 的双有理自同构群是由 \mathbb{P}^2 的自同构群和标准二次变换生成的. 本章的证明参见 [8], 第二章, 其他证明可参考 [5], 第 15 章.

定义 5.1 ([8], 第二章, 定义 2.28) 射影平面间的双有理映射 $\psi: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 如果满足以下等价条件中的一条就称它是 de Jonquières 的:

1. 在复合上合适的线性变换 $l: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ 后, 双有理映射 $\psi' = l\psi$ 可以分解成如下形式

$$\mathbb{P}^2 \xrightarrow{\varepsilon^{-1}} \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{P}^2$$

其中 $\varepsilon: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ 是 \mathbb{P}^2 在一点的胀开, α 是平方双有理映射 (square birational map), 即, α 与 $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ 结构态射交换, 故有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{F}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

2. 存在过 \mathbb{P}^2 中一点 P 的一束直线, 经 ψ 映射后是过 \mathbb{P}^2 中一点 Q 的一束直线.

3. 双有理映射 ψ 是由线性系 Γ 生成, Γ 是一个特征为 $(n-1, 1, \dots, 1)$ 的 n 次平面曲线生成的线性系. 这说明 Γ 只有一个 $n-1$ 重基点, 剩下的都是一重基点.

射影平面 \mathbb{P}^2 上的任意二次变换都是 de Jonquières, 因为任何决定变换的线性系的基点都是一重的, 这满足等价定义 3.

例 5.1 在相差一个线性变换下, 射影平面 \mathbb{P}^2 的二次变换仅有以下三种.

1. 标准二次变换 $(x_0: x_1: x_2) \dashrightarrow (x_1x_2: x_0x_2: x_0x_1)$.
2. 二次变换 $(x_0: x_1: x_2) \dashrightarrow (x_0x_2: x_1x_2: x_0^2)$.
3. 二次变换 $(x_0: x_1: x_2) \dashrightarrow (x_0^2: x_0x_1: x_1^2 + x_0x_2)$.

第 2 章介绍了 \mathbb{F}_q 的定义, 这里简单介绍 \mathbb{F}_q 的 Picard 群和相交数的结果. 参见 [8], 51 页. \mathbb{F}_q 的 Picard 群是由纤维所在的类 A 和负截面所在的类 B 生成的自由 Abelian 群. 这两个生成元类的相交数有如下结果

$$A^2 = 0 \quad AB = 1 \quad B^2 = -q.$$

并且 \mathbb{F}_q 的典范除子 $K_{\mathbb{F}_q} = -(2+q)A - 2B$.

定理 5.1 每个射影平面 \mathbb{P}^2 到射影平面 \mathbb{P}^2 的双有理映射都是由有限多个 de Jonquières 映射复合而成的.

这条定理是下面定理的推论, 是 Castelnuovo 在 1901 年证明的.

定理 5.2 给定一个射影平面上的双有理自同构 ϕ , 存在一个 de Jonquières 映射 ψ 使得 $\phi \circ \psi^{-1}$ 的 Sarkisov 次数严格小于 ϕ 的 Sarkisov 次数.

证明: 在分解 ϕ 的过程中, 我们以一个胀开 $\varepsilon^{-1}: \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ 开始, 接着是一系列有理规则曲面的基本变换 $\mathbb{F}_q \dashrightarrow \mathbb{F}_{q+1}$. 最后, 或者是接上一个爆缩 $\varepsilon: \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$, 此时, 已经有满足条件的 de Jonquières 映射; 或者, 我们得到 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 且 \mathbb{F}_0 上存在点 P , 它的重数 $\frac{a}{2} < m \leq \frac{b}{2}$. 此时, 为了得到 de Jonquières 映射, 我们不想算法中那样交换因子, 而是复合上一个双有理映射 $\mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, 它由线性系 $|aA + bB|$ 的子系生成. 事实上, 只需要在 \mathbb{F}_0 上先复合一个中心点在 P 的基本变换 $\mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$, 然后接上一个爆缩 $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2$. 我们得到了所求的 de Jonquières 映射, 它是通过如下复合得到:

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^2.$$

故有, 由 ϕ 诱导出的映射 $\mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 是由线性系 $|(a+b-m)A + bB|$ 的子系定义的, 因此

$$s - \deg(\phi \circ \psi^{-1}) = \frac{a+b-m}{3} < \frac{b}{2}. \square$$

为了分解 de Jonquières 变换, 我们需要以下定理.

定理 5.3 ([8], Chapter 2, Theorem 2.9) 令 S 是一个光滑射影曲面, 那么 S 有理当且仅当 S 有一个二维可动线性系 Γ 满足

$$\Gamma^2 - \sum m_i^2 = 1, \text{ 且 } K_S \cdot \Gamma + \sum m_i = -3$$

其中 m_i 是 Γ 的基点的重数, 包含无限近的基点.

下面我们开始分解 de Jonquières 变换.

定理 5.4 每个 de Jonquières 变换都是线性映射和标准二次变换的复合.

证明: 以下是 Nagata 1960 年的证明 (参见 [9], Theorem 6) 首先我们证明平方双有理映射 $\alpha: \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ 可以分解成有限个双有理映射 α_{QP} 的复合. 令 $P \in \mathbb{F}_1$

是一个不在 (-1) -曲线 E 上的点, Q 是另一个点, 有可能距 P 无限近. 因此, 我们有双有理变换 $\alpha_{QP} = \alpha_Q \alpha_P : \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$.

断言 α 是有限个 α_{QP} 这种类型的双有理变换的复合. 我们先定义一个离散不变量, 并通过降低这个离散不变量证明这个断言. 令 $P \in \mathbb{F}_1$, 可能是无限近点. 这意味着 $P \in S$ 是曲面 $S \rightarrow \mathbb{F}_1$ 的实点, 其中曲面 S 是 \mathbb{F}_1 涨开一系列光滑点得到. 我们定义点 P 的等级, 记作 $h(P)$, 是所需要的涨开次数的最小值. 特殊的, $h(P) = 0$ 当且仅当 $P \in \mathbb{F}_1$. 我们说无穷近点 P 不在曲线 E 上, 如果 P 不在 E 的双有理变换上.

令 $\alpha : \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ 是一个平方映射, 即, 它把一般纤维映到一般纤维. 那么, 由于 ε 把一般纤维映到直线, 所以复合得到的映射

$$\mathbb{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{F}_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{P}^2$$

是由线性系 Γ 给出, Γ 是 $|aA + B|$ 的子系, 其中 a 是正整数.

利用定理 5.2, 我们计算 Γ 一共有多少基点 (算重数). 由定理 5.2 有 $K_S \cdot \Gamma + \sum m_i = -3$, 所以 Γ 的基点个数为

$$\begin{aligned} r &= \sum m_i \\ &= -K_S \cdot \Gamma - 3 \\ &= -(-3A - 2B) \cdot (aA + B) - 3 \\ &= 2a - 2. \end{aligned}$$

令 P 是 Γ 的基点, 且重数是 m_P . 且令 A 是过点 P 的一条纤维. 那么 $m_P \leq A \cdot \Gamma = 1$, 所以 $m_P = 1$. 由于基点一共有 $2a - 2$ 个, 如果我们涨开点 P , A 的双有理形变 A' 与 Γ' 的相交数为 0, 所以 A' 可以通过 Γ 压缩. 同理, 曲线 E 上的基点个数最多为 $E \cdot \Gamma = a - 1$. 如果 $a > 1$, 那么不是所有的基点都在 E 上.

如果 $a = 1$, 那么 Γ 没有基点, 所以 α 是一个同构.

如果 $a > 1$, 我们对 (r, h) 按字典序进行归纳, 其中, r 是线性系 Γ 的基点个数, 包括无限近点, h 是不在曲线 E 上的基点的最小等级.

如果 $h = 0$, 那么存在一个基点 $P \in \mathbb{F}_1$ 不在曲线 E 上. 令 Q 是另一个基点, 且 Q 在 E 上, 可以相对 P 无限近. 定义双有理映射 $\alpha \circ \alpha_{QP}^{-1}$ 的线性系 Γ' 属于线性系 $|(a - 1)A + B|$, 类似于对 Γ 的计算, Γ' 基点为 $2(a - 1) - 2$ 个, 因此 $(r', h') = (2a - 4, h)$ 降低.

如果 $h > 0$, 那么取一个足够一般的点 P , 不一定要是基点, 且令 $Q \in B \subset \mathbb{F}_1$ 是等级最低的基点. 定义双有理映射的 $\alpha \circ \alpha_{QP}^{-1}$ 的线性系 Γ' 属于 $|aA + B|$, 基点总数 r 不变, 但是点 Q 的等级降低, 所以不变量 $(r', h') = (r, h - 1)$, 因此不变量降低.

综上所述, 我们可以通过不断的复合 α_{QP} 型的映射降低不变量 (r, h) . 根据归纳假设, α 是个平方映射时得证.

现在只要证明

$$\varepsilon \circ \alpha_{QP} \circ \varepsilon^{-1} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

是标准二次映射的复合即可, 其中 $\varepsilon : \mathbb{F}_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ 是爆缩负截面. 分三种情况考虑:

情况 (A): Q 不是 P 的无限近点, 且 Q 不属于 (-1) -曲线 E . 此时, 由本文第 4 章例 4.1 $\varepsilon \circ \alpha_{QP} \circ \varepsilon^{-1}$ 就是标准二次映射.

情况 (B): Q 不是 P 的无限近点, 且 $Q \in E$. 此时 $\varepsilon \circ \alpha_{QP} \circ \varepsilon^{-1}$ 是一个二次映射. 选择一般点 R 得到

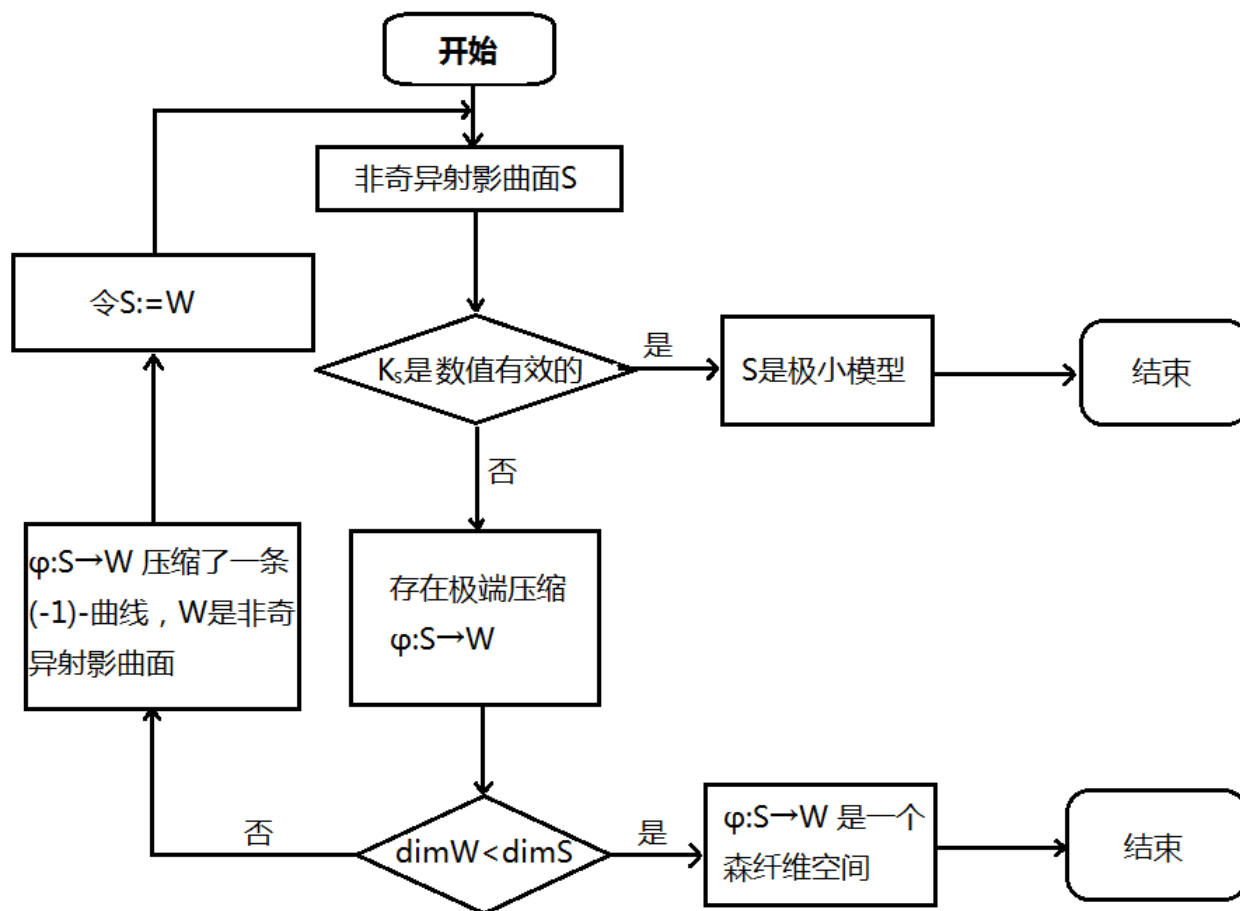
$$\varepsilon \circ \alpha_{QP} \circ \varepsilon^{-1} = (\varepsilon \circ \alpha_Q \circ \alpha_R \circ \varepsilon^{-1}) \circ (\varepsilon \circ \alpha_R^{-1} \circ \alpha_P \circ \varepsilon^{-1})$$

其中 $\varepsilon \circ \alpha_Q \circ \alpha_R \circ \varepsilon^{-1}$, $\varepsilon \circ \alpha_R^{-1} \circ \alpha_P \circ \varepsilon^{-1}$ 满足情况 A 的条件, 所以是两个标准二次映射的复合.

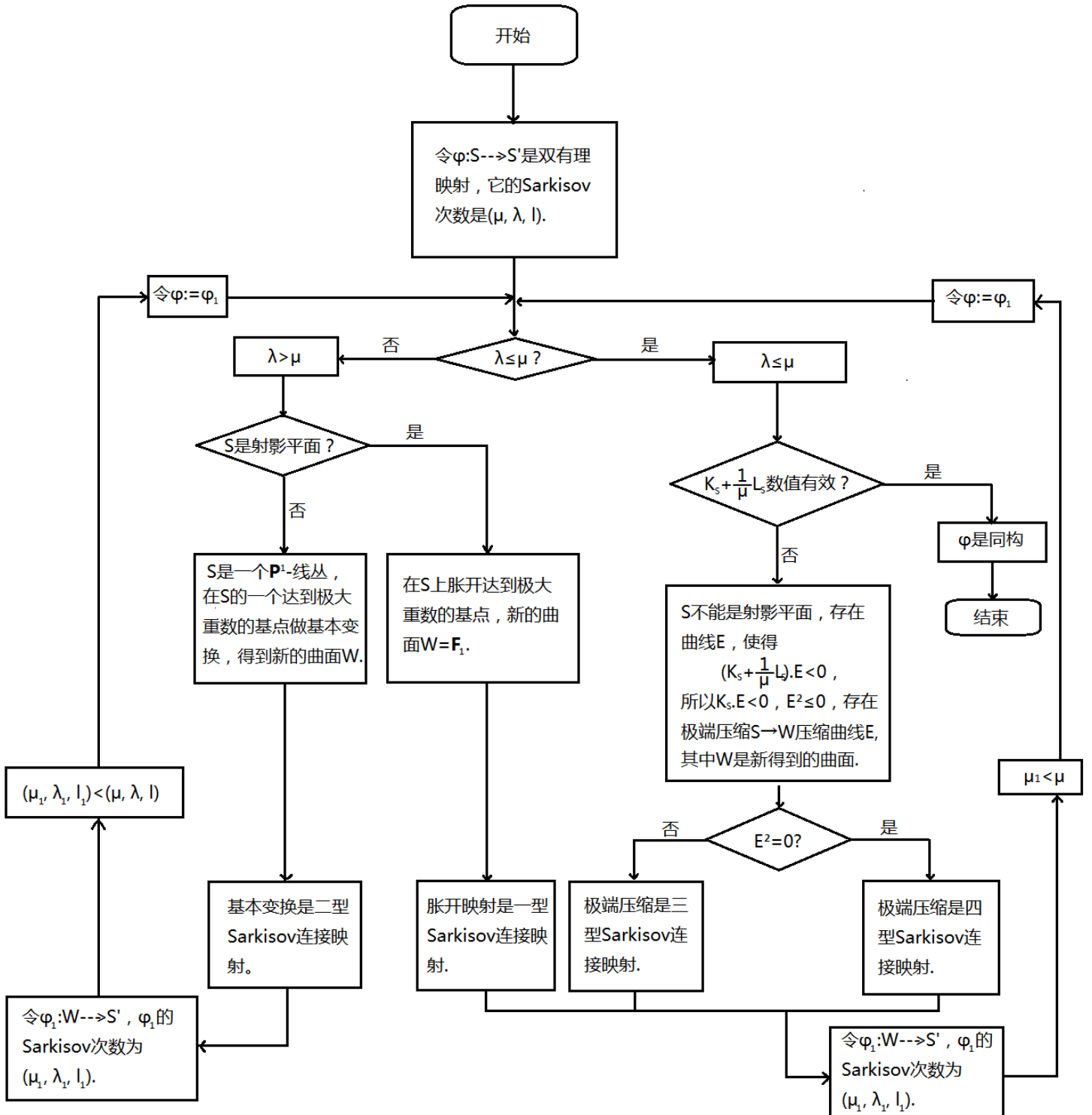
情况 (C): 如果 Q 是 P 的无限近点, 那么 $\varepsilon \circ \alpha_{QP} \circ \varepsilon^{-1}$ 是二次映射 $(x_0 : x_1 : x_2) \dashrightarrow (x_0 x_2 : x_1 x_2 : x_0^2)$. 它与标准二次映射只差一个同构. \square

这样就射影平面 \mathbb{P}^2 是的双有理自同构群是由线性映射和标准二次变换生成的.

附录 A 曲面的极小模型纲领流程图



附录 B Sarkisov 算法流程图



参考文献

- [1] Kawamata, Yujiro Flops connect minimal models. Publ. Res. Inst. Math. Sci. 44 (2008), no. 2, 419–423.
- [2] Hacon, Christopher D.; McKernan, James The Sarkisov program. J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 2, 389–405.
- [3] Kollár, János; Mori, Shigefumi Birational geometry of algebraic varieties. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. viii+254 pp.
- [4] Debarre, Olivier Higher-dimensional algebraic geometry. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001. xiv+233 pp.
- [5] Ciliberto, Ciro Classification of complex algebraic surfaces. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, [2020], 2020. ix+133 pp.
- [6] Blanc, Jérémy Simple relations in the Cremona group. Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), no. 5, 1495–1500.
- [7] Hartshorne, Robin Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 1977. Zbl 0367.14001.
- [8] Kollár, János; Smith, Karen E.; Corti, Alessio Rational and Nearly Rational Varieties. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 92, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [9] Nagata, Masayoshi On Rational Surfaces. I. Irreducible Curves of Arithmetic Genus 0 or 1, 1960. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A Math. 32, 351–370. MR 23#A3739.
- [10] Matsuki, Kenji Introduction to the Mori Program, Universitext, Springer, 2002. Zbl 0988.14007.
- [11] Birkar, Caucher Lectures on Birational Geometry arXiv:1210.2670.

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与研究成果

无。

作者简历

刘子琳，辽宁省辽阳市人，中国科学院数学与系统科学研究院硕士研究生。

致 谢

时间转瞬即逝，三年的求学生涯到此结束，这段学习生活经历让我对这三年的这一切充满感恩。

感谢学校！感谢中国科学院大学！感谢中国科学院数学与系统科学研究院！是学校与学院提供给我一个优良的学习环境，给了我一个可以探求世界上无比奥妙的数学的机会。我衷心的对此表示感谢！

感谢家人！感谢远在家中的父亲！也感谢陪伴在我身边的母亲！父亲在家数年，没有一句抱怨，只盼着我能够学成归来，人生有成。母亲伴我几载，为我遮风挡雨，惟愿我能勤学敬业，平平安安。他们付出了太多，是我的几行文字不能表达的，是我的几段记忆不能承载的，更是我未来的几十年人生无法回报的。儿子感谢你们，也愿你们身体健康，幸福永远。

感谢同学！感谢学习中给予我帮助的徐政同学！感谢一起度过一年的舍友周子鉴同学！感谢我的同门肖珊珊同学！感谢我的答辩秘书殷乾元同学！感谢虽然没有提到但是相遇的同学，你们是我这段宝贵记忆里不可或缺的组成部分。

感谢老师！感谢数学所所长张平老师！感谢我的导师陈亦飞老师！感谢代数学的胡永泉、申旭老师！感谢李群基础的吴英毅老师！感谢代数拓扑的余建明老师！感谢李理论基础的聂思安老师！感谢代数拓扑 I, II 的潘建中、苏阳老师！也感谢那些虽然没列出来但是关心过，教导过我的老师！

我最最感谢我的恩师陈亦飞老师，没有陈老师的循循善诱，悉心教诲，无私的帮助和付出就没有我今天的成绩。因为我个人身体原因，学位论文起步较晚，陈老师对此十分上心，从题目的选定到文章的内容，再到论文的修改，陈老师付出巨大的精力在其上，最忙时每天和我讨论数次，甚至出差在外也修改我的论文到深夜。很长一段时间都影响到了陈老师的休息，学生十分不安。回过头才发现“一日为师，终身为父”这简单的话语竟有如此的分量。学生不才，感谢您给予我的所有帮助与付出，也愿您能身体健康，事业有成！

时间如流水，万物终化沙。但是这三年的一切都成为我灵魂中的灯塔，照亮我的人生，也长存于我心。