目　录

目　录

第 1 章　预备知识

1.1　代数簇与奇点

定义 1.1. 令 (X,B) 为代数簇对，且 $f:Y\to X$ 是它的算术解消，则有

$$K_Y+C=f^*(K_X+B),$$

那么除子 E 的差异数 (discrepancy)$a(E;X,B)$ 定义为

$$a(E;X,B)=-\operatorname{mult}_E C.$$

进一步，定义 (X,B) 的差异数：

$$\operatorname{discrep}(X,B):=\inf\{a(E;X,B): E \text{ is an exceptional divisor over } X\}$$

和整体差异数

$$\operatorname{totdiscrep}(X,B):=\inf\{a(E;X,B): E \text{ is a divisor over } X\}.$$

1.2　极小模型纲领

我们将极小模型纲领中出现的代数簇对称为极小模型的**结果**，将 MMP 停止处的代数簇称为 MMP 的**输出** (要么是极小模型，要么是森纤维空间)。对于极小模型纲领，有如下结果。

定理 1.1 (标量 MMP 的终结定理)**. ?** *, Corollary 1.4.2]* 令 $\pi:X\to U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射，且 (X,B) 是 $\mathbb{Q}$-分解 *klt* 代数簇对，其中 K_X+B $\mathbb{R}$-*Cartier* 除子，且 B 是 π-*big*。若 $C\geqslant 0$ 为 $\mathbb{R}$-除子，且 K_X+B+C 是 *klt* 和 π-数值有效 *(nef)*，那么在 U 上运行 C-标量的 (K_X+B)-*MMP*，那么这个极小模型纲领将终结。

定理 1.2 (极小模型输出)**. ?** *, Corollary 1.3.3]* 令 $\pi:X\to U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射，且 (X,B) 是 $\mathbb{Q}$-分解 *klt* 代数簇对，其中 K_X+B 是 $\mathbb{R}$-*Cartier* 除子。若 K_X+B 不是 π-伪有效的，那么运行 U 上的 (K_X+B)-*MMP*，将终结于森纤维空间 $g:Y\to Z$。

推论 1.3. *Hacon [6, Corollary 13.7]* 令 (X,B) 为 *klt* 代数簇对，$\mathfrak{C}$ 是任意差异数满足 $a(E;X,B)\leqslant 0$ 的例外除子 E 的集合，那么有双有理态射 $f:Z\to X$ 和 $\mathbb{Q}$-除子 B_Z 使得：

(1)　(Z,B_Z) 是 *klt* 代数簇对；

(2)　E 是 f-例外除子当且仅当 $E\in\mathfrak{C}$；

(3) 若 $E \in \mathfrak{C}$ 则 $\mathrm{mult}_E B_Z = -a(E; X, B)$，且 $f_* B_Z = B$ 和 $K_Z + B_Z = f^*(K_X + B)$。

特别的，若却 $\mathfrak{C}$ 为所有差异数满足 $a(E; X, B) \leqslant 0$ 的例外除子 E 的集合，那么 Z 被称为 X 的 **终端化** *(terminalization)*；若取 e $\mathfrak{C}$ 为仅包含一个差异数满足 $a(E; X, B) \leqslant 0$ 的例外除子，那么 $f : Z \to X$ 被称为 **除子解压** (***divisorial extraction***).

定义 1.2. Bruno 等 [4, Definition 3.3] 如果多个代数簇对 $\{(X_i, B_i)\}$ 是从算术光滑的代数簇对 (W, B_W) 的 $(K_W + B_W)$-MMP 的不同结果，则称它们为 MMP-相关的 (**MMP-related**) if they are results of $(K_W + B_W)$-MMPs starting from a given log smooth pair (W, B_W).

引理 1.4. *Bruno 等 [4, Proposition 3.4] 令 $\{(X_l, B_l)\}$ 为有限多个互相双有理等价的 $\mathbb{Q}$-分解 klt 代数簇对，那么下列条件等价：*

(1) 它们是 MMP-相关的；

(2) 存在一个算术光滑代数簇对 (W, B_W) 和一组射影双有理态射 $f_l : W \to X_l$ 支配每个 X_l，满足 $f_{l*} B_W = B_l$ 和分歧等式

$$K_W + B_W = f_l^*(K_{X_l} + B_l) + \sum_{exceptional} a_{li} E_{li}$$

其中对每个 f_l-例外除子 E_{li} 满足 $a_{li} > 0$ 的不等式条件；

(3) 对任意两个代数簇对 $(X, B = \sum_i b_i B_i), (X', B' = \sum_j b'_j B'_j)$，有 $a(B_i; X', B') \geqslant -b_i$ 且严格不等式成立当且仅当 B_i 是 X' 上的例外除子。同样的，有 $a(B'_j; X, B) \geqslant -b'_j$ 且严格不等式成立当且仅当 B'_j 是 X 上的例外除子。

证明. 我们给出 (3) $\Longrightarrow$ (2) 的简略证明：令 W 为支配每个代数簇对 $(X_l, B_l = \sum b_{li} B_{li})$ 的算术光滑解消，并有射影双有理态射 $f_l : W \to X_l$，它们例外除子的并 $f_{l*}^{-1} B_l \cup E_{li}$ 是一个横截相交的除子。令 $B_W = \sum_t d_t D_t$，其中如果 D_t 是 $\cup_l f_{l*}^{-1} B_l$ 中的某个素除子则 $d_t = b_{li}$，如果 B_t 是每个 X_l 上的例外除子，则 $d_t = 1$。由条件 (3)，这是定义良好的。那么 (W, B_W) 上的分歧等式 (ramification formula) 中的不等式条件也由 (3) 得到。 □

1.3 有限极小模型

定义 1.3. Hacon 等 [8, §2] 对有理映射 $f : X \dashrightarrow Y$ 若有 f 的解消 $p : W \to X$ 和 $q : W \to Y$ 满足 p 和 q 都是压缩态射且 p 双有理态射，则称 f 为有理压缩映射 (**rational contraction**) 。若 q 也是双有理态射，且每个 p-例外除子都是 q-例外除子，则称 f 为双有理压缩映射 (**birational contraction**)。如果 f^{-1} 也是双有理压缩映射，则称 f 为小双有理映射 (**small birational map**)。

定义 1.4. **?** , Definition 3.6.1]令 $f : X \dashrightarrow Y$ 为正规拟射影代数簇间的双有理映射，且 $p : W \to X$ 和 $q : W \to Y$ 是 f 的解消。若 D 是 X 上的 $\mathbb{R}$-Cartier 除子，满足 $D_Y = f_*D$ 也是 $\mathbb{R}$-Cartier 除子，那么如果满足

- f 不解压任何除子 (即 f 是双有理压缩);
- $E = p^*D - q^*D_Y$ 是 Y 上的有效除子 (对应的，$\mathrm{Supp}\, p_*E$ 包含全部 f-例外除子)。

则称 f 为 D-非正性的 (***D*-non-positive**)，对应的，D-负性的 (***D*-negative**)。

回顾双有理代数几何中关于模型的定义 **?**]:

定义 1.5. **?** , Definition 3.6.5] 令 $\pi : (X, D) \to U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射，$K_X + D$ 是 X 上的 $\mathbb{R}$-Cartier 除子，且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上的双有理映射。如果 f 是 $(K_X + D)$-非正性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上半丰沛的，那么称 Z 和 f 为关于 D 的半丰沛模型。

令 $g : X \dashrightarrow Z$ 为 U 上的有理映射，$p : W \to X$ 和 $q : W \to Z$ 是对 g 的解消，其中 q 是压缩态射。若 Z 上有 U 上的丰沛除子 H，且 $p^*(K_X + D) \sim_{\mathbb{R},U} q^*H + E$，其中 E 满足对任意的 $B \in |p^*(K_X + D)/U|_{\mathbb{R}}$ 都有 $B \geqslant E$，则称 Z 是 X 关于 D 的**丰沛模型 (ample model)**。

定义 1.6. **?** , Definition 3.6.7] 令 $\pi : (X, D) \to U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射，若 $K_X + D$ 是 lc 且 $f : X \dashrightarrow Y$ 是双有理压缩映射，那么有如下定义:

(1) 如果 f 是 $(K_X + D)$-非正性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上数值有效的，则称 Y 为关于 D 在 U 的 **弱算术典范模型 (weak log canonical model)**;

(2) 如果 f 是 $(K_X + D)$-非正性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上丰沛的，则称 Y 为关于 D 在 U 的 **算术典范模型 (log canonical model)**;

(3) 如果 f 是 $(K_X + D)$-负性的且 $K_Y + f_*D$ 是 U 上数值有效的和 $\mathbb{Q}$-分解的，并且具有 dlt 奇点，则称 Y 为关于 D 在 U 的 **算术终端模型 (log terminal model)**。

引理 1.5. **?** *, lemma 3.6.6]* *令 $\pi : X \to U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射，且 D 是 X 上的 $\mathbb{R}$-Cartier 除子。*

(1) 如果 $g_i : X \dashrightarrow X_i, i = 1, 2$ 是关于 D 的 U 上的两个丰沛模型，那么有同构态射 $h : X_1 \to X_2$ 满足 $g_2 = h \circ g_1$。即丰沛模型在同构意义下唯一。

(2) 如果 $f : X \dashrightarrow Y$ 是 U 上关于 D 的半丰沛模型，那么 U 上关于 D 的丰沛模型 $g : X \dashrightarrow Z$ 存在，并且 $g = h \circ f$，其中 $h : Y \to Z$ 是压缩态射，Z 上有对应丰沛除子 H 满足 $f_*D \sim_{\mathbb{R},U} h^*H$。

(3) 若 $f: X \dashrightarrow Y$ 是 U 上双有理映射，那么 f 是关于 D 在 U 上的丰沛模型当且仅当 f 是关于 D 在 U 上的半丰沛模型且 f_*D 在 U 上丰沛。

根据上述引理，有算术典范模型的等价定义：

定义 1.7. 令 $\pi: (X, D) \to U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射，$K_X + D$ 有 lc 奇点且 $f: X \dashrightarrow Y$ 是不解压任何除子的双有理映射。如果 Y 是关于 D 在 U 上的丰沛模型，那么称之为**算术典范模型** (**log canonical model**)。

进一步，对于边界是大除子的代数簇对，还有

引理 1.6. **?** *, lemma 3.9.3]* 令 $\pi: (X, B) \to U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射，且 (X, B) 是具有 *klt* 奇点的代数簇对，B 在 U 上是大除子。如果哦 $f: X \dashrightarrow Y$ 是 U 上弱算术典范模型，那么

- f 是 U 上半丰沛模型；
- U 上的丰沛模型 $g: X \dashrightarrow Z$ 存在；
- 存在压缩态射 $h: Y \to Z$ 和 Z 上在 U 上丰沛的 $\mathbb{R}$-除子，使得 $K_Y + f_*B \sim_{\mathbb{R},U} h^*H$。

下面给出除子的多面体相关的定义和定理：

定义 1.8. **?** , Definition 1.1.4] 令 $\pi: X \to U$ 为正规拟射影代数簇间的射影态射，且 V 是 $\mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 的定义在有理数上的优先为子射影空间。取定一个 $\mathbb{R}$-除子 $A \geqslant 0$，定义：

$$\mathcal{L}_A(V) = \{D = A + B : B \in V, K_X + D \text{有 lc 奇点且} B \geqslant 0\}$$
$$\mathcal{E}_{A,\pi}(V) = \{D \in \mathcal{L}_A(V) : K_X + D \text{ 是}U\text{上的伪有效除子}\}$$

令 $f: X \dashrightarrow Y$ 为 U 上的双有理压缩映射，定义

$$\mathcal{W}_{A,\pi,f}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : f\text{是}(X, D) \text{ 在}U\text{上的弱算术典范模型}\}$$

令 $g: X \dashrightarrow Z$ 是 U 上的有理压缩映射，定义

$$\mathcal{A}_{A,\pi,g}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : g\text{是}(X, D) \text{ 在}U\text{上的丰沛模型}\}$$

进一步，将 $\mathcal{A}_{A,\pi,g}(V)$ 在 $\mathcal{L}_A(V)$ 中的闭包记作 $\mathcal{C}_{A,\pi,g}(V)$。

如果基底 U 是清楚的，或是一个点，那么我们省略 π，简单记作 $\mathcal{E}_A(V)$ 和 $\mathcal{A}_{A,f}$。

定理 1.7 (弱算术典范模型有限性, **?**] Theorem E)**.** 令 $\pi: X \to U$ 是正规拟射影代数簇间的射影态射，且 A 是一个一般的在 U 上丰沛的 $\mathbb{R}$-除子，且 $V \subset \mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ 是定义在有理数上的有限维线性子空间，假设存在具有 *klt* 奇点的代数簇对 (X, Δ_0)。那么存在有限多个 U 上的双有理映射 $f_i: X \dashrightarrow X_i, 1 \leqslant i \leqslant l$ ，若某个 $D \in \mathcal{L}_A(V)$ 有关于 D 的在 U 上的弱算术典范模型 $f: X \dashrightarrow Y$，那么对某个 $1 \leqslant i \leqslant l$ 存在同构态射 $h_i: X_i \to Y$ 使得 $f = h_i \circ f_i$。

1.4　叶状结构

这一节介绍带叶状结构的代数簇对的基本知识。

第 2 章　Sarkisov 纲领

2.1　下降法

2.2　双标量法

2.3　有限模型法

参考文献

[1] Sarkisov V G. BIRATIONAL AUTOMORPHISMS OF CONIC BUNDLES [J/OL]. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 1981, 17(1): 177-202. DOI: 10.1070/IM1981v017n01ABEH001326.

[2] Sarkisov V G. On conic bundle structures [J]. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 1982, 46(2): 371-408, 432.

[3] Corti A. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov [J]. Journal of Algebraic Geometry, 1995, 1995(4): 223-254.

[4] Bruno A, Matsuki K. Log Sarkisov program [J/OL]. Internat. J. Math., 1997, 8(4): 451-494. https://doi.org/10.1142/S0129167X97000238.

[5] Birkar C. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties [J/OL]. Annals of Mathematics, 2021, 193(2): 347 - 405. https://doi.org/10.4007/annals.2021.193.2.1.

[6] Hacon C D. The Minimal model program for Varieties of log general type [J/OL]. Wiadomości Matematyczne, 2012, 48(2): 49. DOI: 10.14708/wm.v48i2.317.

[7] Liu J. Sarkisov program for generalized pairs [J]. Osaka J. Math., 2021, 58(4): 899-920.

[8] Hacon C, McKernan J. The Sarkisov program [J/OL]. Journal of Algebraic Geometry, 2012, 22(2): 389-405. DOI: 10.1090/S1056-3911-2012-00599-2.

[9] Miyamoto K. The sarkisov program on log surfaces [J]. arXiv: Algebraic Geometry, 2019, 2019: 114-114.