博士学位论文

中国科学院大学学位论文 LaTeX 模板

作者姓名: 王延泽

指导教师: 李四 教授 中国科学院 xxx 研究所

学位类别: 工学硕士

学科专业: 计算机应用技术

培养单位: 中国科学院 xxx 研究所

2024 年 6 月

LaTeX Thesis Template of UCAS

A dissertation submitted to
University of Chinese Academy of Sciences
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of
Doctor of Philosophy
in Computer Applied Technology
By

Author Name
Supervisor: Professor LI Si

Institute of xxx, Chinese Academy of Sciences

June, 2023

中国科学院大学
学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是本人在导师的指导下独立进行研究工作所取得的成果。承诺除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体享有著作权的研究成果，未在以往任何学位申请中全部或部分提交。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人或集体，均已在文中以明确方式标明或致谢。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：

日　　期：

中国科学院大学
学位论文授权使用声明

本人完全了解并同意遵守中国科学院大学有关收集、保存和使用学位论文的规定，即中国科学院大学有权按照学术研究公开原则和保护知识产权的原则，保留并向国家指定或中国科学院指定机构送交学位论文的电子版和印刷版文件，且电子版与印刷版内容应完全相同，允许该论文被检索、查阅和借阅，公布本学位论文的全部或部分内容，可以采用扫描、影印、缩印等复制手段以及其他法律许可的方式保存、汇编本学位论文。

涉密及延迟公开的学位论文在解密或延迟期后适用本声明。

作者签名：　　　　　　　　导师签名：

日　　期：　　　　　　　　日　　期：

摘　要

中文摘要、英文摘要、目录、论文正文、参考文献、附录、致谢、攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果等均须由另页右页（奇数页）开始。

关键词： 中国科学院大学，学位论文，模板

Abstract

The purpose of this note is to introduce three methods of the Sarkisov program, which aims to factorize birational maps of log Mori fibre spaces.

Key Words: University of Chinese Academy of Sciences, Thesis, LaTeX Template

目 录

图目录

表目录

符号列表

算子

Symbol	Description
Δ	difference
∇	gradient operator
$\delta^{\pm}$	upwind-biased interpolation scheme

缩写

CFD	Computational Fluid Dynamics
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EOS	Equation of State
JWL	Jones-Wilkins-Lee
WENO	Weighted Essentially Non-oscillatory
ZND	Zel'dovich-von Neumann-Doering

第 1 章　绪论

极小模型纲领 (minimal model program, MMP) 的目标是按双有理等价类分类代数簇，并选取选择恰当的代表元。极小模型纲领猜想，每一个代数簇都双有理等价于一个极小模型 (minimal model) 或一个森纤维空间 (Mori fibre space, mfs)，但这样的代表元有时并不唯一，于是自然的问题就是不同代表元之间的关系。对于极小模型的情形，我们有

定理 1.1 (平转连接极小模型)**.** *令 (W, B_W) 为一个 $\mathbb{Q}$-分解的终极对 (terminal pair)，且 $(X, B_X), (Y, B_Y)$ 是它的两个极小模型。那么双有理映射 $X \dashrightarrow Y$ 可以分解为一系列 $(K_X + B_X)$-平转 (flop).*

对于森纤维空间，由 Sarkisov 纲领可知

定理 1.2 (主定理)**.** *令 $f : (X, B) \to S$ 和 $f' : (X', B') \to S'$ 为两个 MMP-连接的 $\mathbb{Q}$-分解 klt 算术森纤维空间，则有双有理映射 Φ:*

$$\begin{tikzcd}
(X, B) \arrow[r, dotted, "\Phi"] \arrow[d, "f"'] & (X', B') \arrow[d, "f'"] \\
S & S'
\end{tikzcd}$$

可以分解为 Sarkisov 连接映射的复合，即

$$\Phi = \Psi_n \circ \cdots \circ \Psi_1$$

其中 $\Psi_i : X_i \dashrightarrow X_{i+1}$ 是下列四种 Sarkisov 连接之一：

I:
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, dotted] \arrow[d, "p"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
X \arrow[d, "f"'] & S_1 \arrow[dl, "t"] \\
S &
\end{tikzcd}$$

II:
$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, dotted] \arrow[d, "p"'] & Z' \arrow[d, "q"] \\
X \arrow[d, "f"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
S \arrow[r, "\sim"] & S_1
\end{tikzcd}$$

III:
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "q"] \\
S \arrow[dr, "s"'] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
 & S_1
\end{tikzcd}$$

IV:
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dotted] \arrow[d, "f"'] & & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
S \arrow[dr, "s"'] & & S_1 \arrow[dl, "t"] \\
 & T &
\end{tikzcd}$$

其中所有 $f : (X, B) \to S$ and $f_1 : (X_1, B_1) \to S_1$ 都是算术森纤维空间，所有 p, q 都是除子压缩，所有虚线的映射都是翻转 (flip)、平转 (flop) 或反向翻转 (inverse flip) 的复合。

在具有叶状结构的代数簇对 (foliated pair) 上有类似结果：

定理 1.3 (主定理 2)**.** *TODO*

Sarkisov 纲领起源于对直纹曲面的分类[?],[?]. 对 terminal 三位代数簇的完整证明由 Corti 给出，使用的是下降法。[?]. 由下降法的 Sarkisov 纲领归纳地构造 Sarkisov 连接。选取一个定义了双有理映射 $\Phi : X \dashrightarrow X'$ 的线性系 $\mathcal{H}$ (或一个一般的除子 $H \in \mathcal{H}$)，那么第一个 Sarkisov 连接 $\psi_1 : X \dashrightarrow X_1$ 由运行一种特殊的极小模型纲领得到，被称为 2-ray game，并且取决于 $\mathcal{H}$ (H) 的选取。接着用 $\Phi_1 = \Phi \circ \psi_1^{-1} : X_1 \dashrightarrow X'$ 替代 $\Phi : X \dashrightarrow X'$ 并重复这一过程。

Sarkisov 次数 (μ, λ, e) 可以度量两个森纤维空间的 "距离"。由 Fano 代数簇的有界性，第一个不变量 μ 落在一个离散集中。第二个不变量典范阈值 (canonical threshold)λ 和第三个不变量相容除子 (crepant divisor) 的个数和代数簇相对于 H 的奇异性质有关。每构造一个 Sarkisov 连接，新的双有理映射 $X_i \dashrightarrow X'$ 的 Sarkisov 次数 (μ_i, λ_i, e_i) 会下降，于是 Sarkisov 纲领将在有限步内终结。

Bruno 和 Matsuki[?] 将这种方法推广到 $\mathbb{Q}$-分解的 klt 奇点的三维代数簇的情形。并且他们给出了任意维 $\mathbb{Q}$-分解 klt 奇点代数簇的 Sarkisov 纲领的下降法的大纲。之后在极小模型纲领中有一些重要进展，例如标量极小模型纲领 (MMP with scaling) 的终结性[?]，lct 的 ACC (accending chain condition)[?]，δ-lc Fano 簇的有界性[?],[?]，这些进展使得 Bruno 和 Matsuki 的大纲部分地可行，剩下的主要问题与算术翻转的终结性和局部算术典范阈值 (local log canonical thresholds) 的 ACC(或者有限性) 有关。本文将这种方法称为下降法，并且在第三章第第一节具体讨论。

利用弱典范模型的有限性[?] (finiteness of weak log canonical models)，Hacon[?] 给出了另一种构造 Sarkisov 纲领的方法，在本文中称之为双标量法，这种方法对所有维数都成立。这两种方法都是通过 2-ray game 来构造 Sarkisov 连接，但是在双标量法中固定了两个森纤维空间的公共算术解消 (W, B_W) 作为 Sarkisov 纲领的 "屋顶"，使得分解中的每一个森纤维空间都是 W 的某个弱算术典范模型。双标量法的 Sarkisov 纲领的终结性由弱算术典范模型的有限性推出，这与标量翻转 (flips with scaling) 的终结性的证明类似。刘继豪[?] 将这种方法推广到了 generalized pairs 的情况。本文第三章第二节介绍这种方法。

利用 Shokurov 的多面体方法[?],[?], Hacon 和 M$^{\mathrm{c}}$Kernan[?] 给出了一种新方法不通过 2-ray game 实现 Sarkisov 纲领。令 W 为 $(X, B) \to S$ 和 $(X', B') \to S'$ 的公共算术解消，则在 W 上有两个除子 D 和 D'，使得 S 和 S' 是 W 相对于 $K_W + D$ 和 $K_W + D'$ 的丰沛模型 (ample model)。进一步，W 的除子的多面体的边界上有其他除子 D_i，每个除子对应一个森纤维空间 $X_i \to S_i$ 和 W 的丰沛模型 S_i。于是在多面体边界上有一条路径连接这些除子 D_i，并且将 Φ 分解为对应的 Sarkisov 连接。Miyamoto[?] 将这种方法应用到了任意特征代数闭域上的 lc 算术曲面或 $\mathbb{Q}$-分解算术曲面。本文将这种方法成为有限模型法，并且在第三章第三节介绍。

在第三章第四节，本文给出三种方法的具体例子。Sarkisov 纲领有许多应用，例如 2 阶 Cremona 群的经典结果。即每一个射影平面的双有理自同构都是由自同构和标准二次映射复合生成。(见[?] Chapter 2)。Takahashi[?] 对算术曲面建立了特殊的 Sarkisov 纲领，并得到了另一个经典代数结论的几何证明：每一个仿射平面的自同构都由仿射自同构和上三角变换复合。(见[?] Chpter 13, Chapter 13)。Lamy[?] 给出了更多其他应用。

foliation mmp

叶状结构的代数簇 (foliated varies) 用子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{T}_X$ 代替切丛，进而用叶状典范除子 (foliated canonical divisor)$K_{\mathcal{F}}$ 代替典范除子 K_X。等人发展了带叶状结构的极小模型纲领，尤其是高维情况的带代数可积的叶状结构的代数簇。于是可以考虑这种情况下的 Sarkisov 纲领。将在第四章介绍。

第 2 章　预备知识

2.1　代数簇与奇点

定义 2.1. 令 (X, B) 为代数簇对，且 $f: Y \to X$ 是它的算术解消，则有

$$K_Y + C = f^*(K_X + B),$$

那么除子 E 的差异数 (discrepancy)$a(E; X, B)$ 定义为

$$a(E; X, B) = -\operatorname{mult}_E C.$$

进一步，定义 (X, B) 的差异数：

$$\operatorname{discrep}(X, B) := \inf\{a(E; X, B) : E \text{ is an exceptional divisor over } X\}$$

和整体差异数

$$\operatorname{totdiscrep}(X, B) := \inf\{a(E; X, B) : E \text{ is a divisor over } X\}.$$

2.2　极小模型纲领

我们将极小模型纲领中出现的代数簇对称为极小模型的**结果** We call the varieties that appear while running an MMP, the **results** of the MMP, and the varieties that appear at the end of the MMP (which are either minimal models or Mori fibre spaces) are the **outputs** of the MMP.

[?] Corollary 1.4.2 Let $\pi : X \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties, and let (X, B) be a $\mathbb{Q}$-factorial klt pair where $K_X + B$ is $\mathbb{R}$-Cartier and B is π-big. Let $C \geqslant 0$ be an $\mathbb{R}$-divisor. If $K_X + B + C$ is klt and π-nef, then we may run the $(K_X + B)$-MMP over U with scaling of C and this MMP terminates.

[?] Corollary 1.3.3 Let $\pi : X \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties, and let (X, B) be a $\mathbb{Q}$-factorial klt pair where $K_X + B$ is $\mathbb{R}$-Cartier. If $K_X + B$ is not π-pesudo-effective, then we may run the $(K_X + B)$-MMP over U and end with a Mori fibre space $g : Y \to Z$.

[?] Corollary 13.7 Let (X, B) be a klt pair and $\mathfrak{C}$ be any set of exceptional divisors E of discrepancy $a(E; X, B) \leqslant 0$. Then there is a birational morphism $f : Z \to X$ and a $\mathbb{Q}$-divisor B_Z such that:

(1)　(Z, B_Z) is klt;

(2)　E is an f-exceptional divisor if and only if $E \in \mathfrak{C}$;

(3)　$\operatorname{mult}_E B_Z = -a(E; X, B)$ if $E \in \mathfrak{C}$, and $f_* B_Z = B$ and $K_Z + B_Z = f^*(K_X + B)$.

In particular, if we take $\mathfrak{C}$ to be the set consisting of all exceptional divisors E of discrepancy $a(E; X, B) \leqslant 0$, then Z is called **terminalization** of X; if we take $\mathfrak{C}$ to be the set consisting of only one exceptional divisor E of discrepancy $a(E; X, B) \leqslant 0$, then $f : Z \to X$ is called a **divisorial extraction**.

[?] Definition 3.3 Two or more pairs $\{(X_i, B_i)\}$ are called **MMP-related** if they are results of $(K_W + B_W)$-MMPs starting from a given log smooth pair (W, B_W).

[?] Proposition 3.4 Let $\{(X_l, B_l)\}$ be a finite set of birational $\mathbb{Q}$-factorial klt pairs, then the following are equivalent:

(1) They are MMP-related;

(2) There is a log smooth pair (W, B_W), and projective birational morphisms $f_l : W \to X_l$ dominating each X_l, such that $f_{l*}B_W = B_l$ and

$$K_W + B_W = f_l^*(K_{X_l} + B_l) + \sum_{exceptional} a_{li}E_{li}$$

with $a_{li} > 0$ for all f_l-exceptional divisors E_{li};

(3) For any two pairs $(X, B = \sum_i b_i B_i), (X', B' = \sum_j b'_j B'_j)$ in the set, $a(B_i; X', B') \geqslant -b_i$ with strict inequality holding if and only if B_i is exceptional over X', and $a(B'_j; X, B) \geqslant -b'_j$ with strict inequality holding if and only if B'_j is exceptional over X.

证明. We give a sketch proof for (3) $\implies$ (2). Let W be a common resolution which dominates each pair $(X_l, B_l = \sum b_{li}B_{li})$ with a birational projective morphism $f_l : W \to X_l$ and that the union $f_{l*}^{-1}B_l \cup E_{li}$ is a divisor with only normal crossing. Let $B_W = \sum_t d_t D_t$ where $d_t = b_{li}$ if D_t coincides with any component of $\cup_l f_{l*}^{-1}B_l$, and $d_t = 1$ if B_t is an exceptional divisor over any of X_l. This is well defined thanks to the condition (3). The inequality condition in the ramification formula for the log pair (W, B_W) also follows from (3). □

2.3 有限极小模型

[?] §2 A rational map $f : X \dashrightarrow Y$ is called a **rational contraction** if there is a resolution $p : W \to X$ and $q : W \to Y$ of f such that p and q are contraction morphisms and p is birational. We say that f is a **birational contraction** if q is, in addition, birational and every p-exceptional divisor is q-exceptional. If in addition, f^{-1} is also a **birational contraction**, then f is called a **small birational map**.

[?] Definition 3.6.1 Let $f : X \dashrightarrow Y$ be a birational map of normal quasi-projective varieties, and $p : W \to X$ and $q : W \to Y$ a resolution of indeterminacy of f. Let D be an $\mathbb{R}$-Cartier divisor on X such that $D_Y = f_*D$ is also $\mathbb{R}$-Cartier. Then f is called ***D*-non-positive** (respectively ***D*-negative**) if

- f does not extract any divisor;

- $E = p^*D - q^*D_Y$ is effective and exceptional over Y (respectively $\operatorname{Supp} p_*E$ contains all f-exceptional divisors).

Recall the definitions of models in[?] [?] Definition 3.6.5 Let $\pi : (X, D) \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties and let D be an $\mathbb{R}$-Cartier divisor on X. Let $f : X \dashrightarrow Y$ be a birational map over U, then Z is a **semiample model** for D over U if f is $(K_X + D)$-non-positive and $K_Y + f_*D$ is semiample over U.

Let $g : X \dashrightarrow Z$ be a rational map over U, then Z is an **ample model** for D over U if there is an ample divisor H over U on Z such that if $p : W \to X$ and $q : W \to Z$ resolves g, then q is a contraction morphism, and we may write $p^*D \sim_{\mathbb{R},U} q^*H + E$, where $E \geqslant 0$ and for any $B \in |p^*D/U|_{\mathbb{R}}$, then $B \geqslant E$. [?] Definition 3.6.7 Let $\pi : (X, D) \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties, if $K_X + D$ is log canonical and $f : X \dashrightarrow Y$ is a birational contraction, then define:

(1) Y is a **weak log canonical model** for $K_X + D$ over U if f is $(K_X + D)$-non-positive and $K_Y + f_*D$ is nef over U;

(2) Y is the **log canonical model** for K_X+D over U if f is (K_X+D)-non-positive and $K_Y + f_*D$ is ample over U;

(3) Y is a **log terminal model** for $K_X + D$ over U if f is $(K_X + D)$-negative and $K_Y + f_*D$ is dlt and nef over U and Y is $\mathbb{Q}$-factorial.

[?] Lemma 3.6.6 Let $\pi : X \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties and let D be an $\mathbb{R}$-Cartier divisor on X.

(1) If $g_i : X \dashrightarrow X_i, i = 1, 2$ are two ample models of D over U, then there is an isomorphism $h : X_1 \to X_2$ and $g_2 = h \circ g_1$.

(2) If $f : X \dashrightarrow Y$ is a semiample model of D over U, then the ample model $g : X \dashrightarrow Z$ of D over U exists and $g = h \circ f$, where $h : Y \to Z$ is a contraction and $f_*D \sim_{\mathbb{R},U} h^*H$ for the ample divisor H corresponding to the ample model Z.

(3) If $f : X \dashrightarrow Y$ is a birational map over U, then f is the ample model of D over U if and only if f is a semiample model of D over U and f_*D is ample over U.

By the above lemma, there is another definition of log canonical models:

Let $\pi : (X, D) \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties, $K_X + D$ log canonical and $f : X \dashrightarrow Y$ a birational map that extracts no divisors, then Y is the **log canonical model** if it is the ample model.

Furthermore, for big boundaries, we have[?] Lemma 3.9.3 Let $\pi : (X, B) \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties. Suppose (X, B) is a klt pair and B is big over U. If $f : X \dashrightarrow Y$ is a weak log canonical model over U, then

- f is a semiample model over U;
- the ample model $g : X \dashrightarrow Z$ over U exists;

• there is a contraction $h : Y \to Z$ such that $K_Y + f_*B \sim_{\mathbb{R},U} h^*H$ for some ample $\mathbb{R}$-divisor H on Z over U.

[?] Definition 1.1.4 Let $\pi : X \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties, and let V be a finite-dimensional affine subspace of $\mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ defined over the rational numbers. Fix an $\mathbb{R}$-divisor $A \geqslant 0$, and then define

$$\mathcal{L}_A(V) = \{D = A + B : B \in V, K_X + D \text{ is log canonical and } B \geqslant 0\}$$
$$\mathcal{E}_{A,\pi}(V) = \{D \in \mathcal{L}_A(V) : K_X + D \text{ is pseudo effective over } U\}$$

Given a birational contraction $f : X \dashrightarrow Y$, define

$$\mathcal{W}_{A,\pi,f}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : f \text{ is a weak log canonical model of } (X, D) \text{ over } U\}$$

Given a rational contraction $g : X \dashrightarrow Z$ over U, define

$$\mathcal{A}_{A,\pi,g}(V) = \{D \in \mathcal{E}_A(V) : g \text{ is the ample model of } (X, D) \text{ over } U\}$$

In addition, let $\mathcal{C}_{A,\pi,g}(V)$ denote the closure of $\mathcal{A}_{A,\pi,g}(V)$ in $\mathcal{L}_A(V)$.

If the base U is clear, or it is a point, then we may omit π and simply write $\mathcal{E}_A(V)$ and $\mathcal{A}_{A,f}$.

[Finiteness of weak log canonical models,[?] Theorem E]

Let $\pi : X \to U$ be a projective morphism of normal quasi-projective varieties, and A be a general divisor relatively ample over U, and $V \subset \mathrm{WDiv}_{\mathbb{R}}(X)$ be a finite-dimensional rational subspace. Suppose that there is a klt pair (X, Δ_0). Then there are finitely many birational maps $f_i : X \dashrightarrow X_i$ over U, $1 \leqslant i \leqslant l$ such that if $f : X \dashrightarrow Y$ is a weak log canonical model of $K_X + D$ over U for some $D \in \mathcal{L}_A(V)$, then there is an index $1 \leqslant i \leqslant l$ and an isomorphism $h_i : X_i \to Y$ such that $f = h_i \circ f_i$.

2.4 叶状结构

第 3 章　Sarkisov 纲领

3.1　下降法

3.2　双标量法

3.3　有限模型法

第 4 章　叶状结构

第 5 章　应用

5.1　结论

参考文献

第 1 章 附录中的公式

对公式的引用如，公式(附 1-1)

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0\\ \frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho E\boldsymbol{V})=\nabla\cdot(k\nabla T)+\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V})\end{cases} \tag{附 1-1}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0\\ \frac{\partial(\rho\boldsymbol{V})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V}\boldsymbol{V})=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}\\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho E\boldsymbol{V})=\nabla\cdot(k\nabla T)+\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{V})\end{cases} \tag{附 1-2}$$

mathtext: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$, mathnormal: $A, F, L, 2, 3, 5, \sigma$, mathrm: $\mathrm{A}, \mathrm{F}, \mathrm{L}, 2, 3, 5, \sigma$.

mathbf: $\mathbf{A}, \mathbf{F}, \mathbf{L}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \boldsymbol{\sigma}$, mathit: $\mathrm{A}, \mathrm{F}, \mathrm{L}, 2, 3, 5, \sigma$, mathsf: $\mathrm{A}, \mathrm{F}, \mathrm{L}, 2, 3, 5, \sigma$.

mathtt: $\mathrm{A}, \mathrm{F}, \mathrm{L}, 2, 3, 5, \sigma$, mathfrak: $\mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{L}, 2, 3, 5, \sigma$, mathbb: $\mathbb{A}, \mathbb{F}, \mathbb{L}, \mathbb{2}, \mathbb{3}, \mathbb{5}, \sigma$.

mathcal: $\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{L}, 2, 3, 5, \sigma$, mathscr: $\mathscr{A}, \mathscr{F}, \mathscr{L}, 2, 3, 5, \sigma$, boldsymbol: $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{L}, 2, 3, 5, \boldsymbol{\sigma}$.

vector: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{n}$, unitvector: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

matrix: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$, unitmatrix: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

tensor: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$, unittensor: $\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{T}, \mathbf{a}, \mathbf{F}, \mathbf{n}$

第 2 章 附录中的图表

附表测试

附表 2-1 这是一个样表

App Table 2-1 This is a sample table

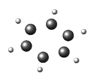
行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8

附表 2-2 这是一个样表

App Table 2-2 This is a sample table

行号	跨多列的标题							
Row 1	1	2	3	4	5	6	7	8

附图测试



附图 2-1 这是一个样图

App Figure 2-1 This is a sample figure

注: 对图片的注释

致　谢

此处填写致谢。

2023 年 6 月

作者简历及攻读学位期间发表的学术论文与其他相关学术成果

作者简历:

××××年××月——××××年××月，在××大学××院（系）获得学士学位。

××××年××月——××××年××月，在××大学××院（系）获得硕士学位。

××××年××月——××××年××月，在中国科学院××研究所（或中国科学院大学××院系）攻读博士/硕士学位。

工作经历:

已发表（或正式接受）的学术论文:

(1) 已发表的工作 1
(2) 已发表的工作 2

申请或已获得的专利:

（无专利时此项不必列出）

参加的研究项目及获奖情况: