

Práctica 4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I: El método de Euler

Hiram K. Herrera Alcantar¹

¹Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California,
Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.*

(Dated: 21 de febrero de 2018)

Se utiliza el método de Euler para resolver numéricamente los problemas de una partícula confinada en una caja de longitud L tal que al chocar con las paredes de la caja la partícula se ve reflejada, se analiza el caso unidimensional y bidimensional, después se agrega un campo eléctrico en ambos casos, se comprueba la simplicidad y efectividad del método de Euler para problemas de física relativamente sencillos.

I. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) sirven para modelar problemas que requiere un cambio de variable respecto a otra [1]. La forma clásica de resolver una EDO es conocer el valor inicial de la variable dependiente, y una aplicación muy útil se da en las ecuaciones diferenciales que describen la física.

Un método muy simple de implementar para resolver una EDO es el *Método de Euler*, la ecuación de movimiento que se quiere resolver es de la forma:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{v}); \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad (1)$$

donde \mathbf{a} es la aceleración [2].

El método consiste en aproximar la función para un paso posterior, utilizando la derivada adelantada,

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} \approx \frac{\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)}{h} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (2)$$

así la aproximación es

$$\mathbf{y}_{n+1} \approx \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n) \quad (3)$$

donde se ha definido $y_n = y(t_n)$, como el valor de y al tiempo t_n [3] y h es el tamaño de paso, o bien el paso de tiempo para el caso dinámico. Al aplicar el método de Euler a las ecuaciones diferenciales que teníamos obtenemos

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n h \quad (4)$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \mathbf{v}_n h \quad (5)$$

En las siguientes secciones de esta práctica se resuelven numéricamente problemas consistentes en una partícula atrapada en una caja en los casos de una dimensión y dos dimensiones, utilizando el método de Euler como integrador de ecuaciones de movimiento, posteriormente se analiza el caso donde se tiene un campo eléctrico presente en la caja.

II. PARTÍCULA CLÁSICA EN UNA CAJA UNIDIMENSIONAL

Consideramos una partícula atrapada en una caja unidimensional que sigue el siguiente potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ +\infty & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (6)$$

De tal forma que la partícula se mueve libremente sobre el eje x , para $0 < x < L$, y al llegar a las paredes la fuerza sobre la partícula será infinita y cero dentro de la caja, ocasionando que la velocidad de la partícula cambie de signo cada vez que choque con una pared.

Para resolver este problema se construyó un programa numérico que calcula la posición de la partícula y su velocidad utilizando como integrador el método de Euler descrito anteriormente.

Como un primer experimento se utilizaron como condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$, s y se utilizó un paso de tiempo $\delta t = 0.001$ s en el integrador. Obteniendo los resultados que se muestran en las figuras 1 y 2.

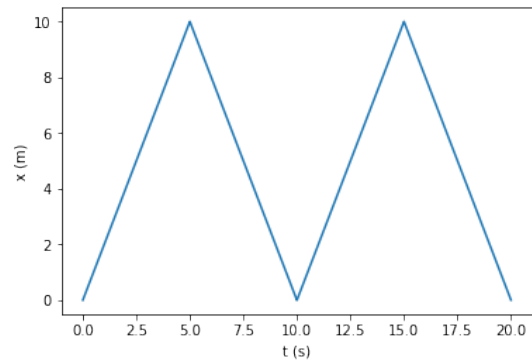


Figura 1. Posición x de la partícula en la caja con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$.

De la figura 1, podemos observar que la partícula parte de la posición 0, y colisiona un total de 4 veces durante

* hiram.herrera@uabc.edu.mx

el tiempo de integración, este comportamiento coincide con el que se espera teóricamente pues en 20 segundos, al llevar una velocidad constante de 2 m/s ésta debería tardar 5 segundos en recorrer los 10 m de longitud de la caja, y en el tiempo total precisamente debería colisionar 4 veces. En cuanto a la figura 2 también observamos el comportamiento esperado, pues la partícula solo cambia entre velocidades de 2 m/s y -2 m/s este cambio de signos ocurre 4 veces, coincidente con las colisiones de la partícula.

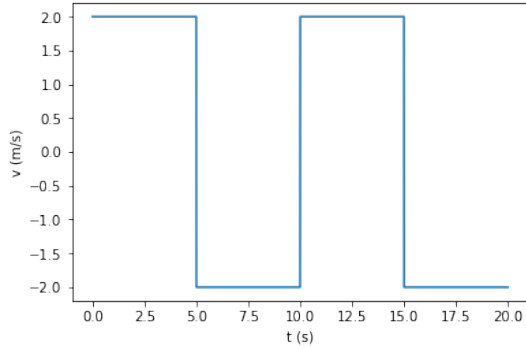


Figura 2. Velocidad v de la partícula en la caja con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$.

Se repitió el experimento utilizando como condiciones iniciales $L = 20$ m, $x_0 = 1$ m, $v_0 = 5$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 30$, con un paso de tiempo $\delta t = 0.005$, obteniendo los resultados de las figuras 3 y 4.

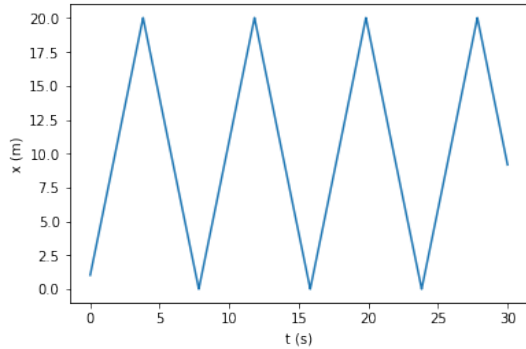


Figura 3. Posición x de la partícula en la caja con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 20$ m, $x_0 = 1$ m, $v_0 = 5$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 30$.

En este experimento nuevamente coinciden los resultados obtenidos con los esperados teóricamente pues en una caja de una longitud de 20 m, si la partícula se mueve a una velocidad de 5 m/s, ésta debe colisionar con la pared de la caja en 4 s, si integramos durante 30 segundos ésta partícula debe colisionar un total de 7 veces, como la partícula parte de una posición inicial de 1 m, al final

de su recorrido ésta debería terminar en la posición de 9 m, que es lo que se observa en la figura 3, la velocidad sigue el mismo comportamiento que el experimento anterior alternando entre signos 7 veces, coincidentes con las colisiones de la partícula en las paredes de la caja.

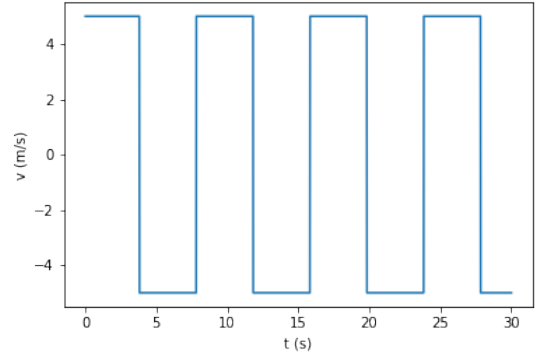


Figura 4. Velocidad v de la partícula en la caja con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 20$ m, $x_0 = 1$ m, $v_0 = 5$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 30$.

III. PARTÍCULA EN UNA CAJA BIDIMENSIONAL

Se considera un caso bidimensional donde la partícula está confinada a una caja de tal forma que la partícula se mueve libremente sobre el eje x , para $0 < x < L_x$ y para el eje y en $0 < y < L_y$, el potencial utilizado para ambos casos es similar al de la sección II, para ambas dimensiones, así al chocar la partícula en las fronteras rebota elásticamente, cambiando el signo de la velocidad normal a la superficie donde se produjo la colisión.

Las condiciones iniciales para este experimento son las siguientes; $L_x = 10$ m, $x_0 = 1$ m, $v_{x0} = 3$ m/s, $L_y = 5$ m, $y_0 = 3$ m, $v_{y0} = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$ y un paso de tiempo $\delta t = 0.001$ s, además se agregó al programa un contador de colisiones para ambas direcciones, encontrando para estas condiciones iniciales un total de 6 colisiones en la dirección X, mientras que para la dirección Y se registraron un total de 8 colisiones, esto se ve en la figura 5.

Algo a notar de este experimento es que al ser colisiones elásticas, la energía se conserva por lo tanto la partícula debe seguir trayectorias cerradas y la figura 5 nos muestra que esto ocurrió al menos en nuestro experimento y para el tiempo de integración dado.

IV. CAJA CON CAMPO ELÉCTRICO

En esta sección se repiten los experimentos de las secciones II y III, pero esta vez se considera que la partícula

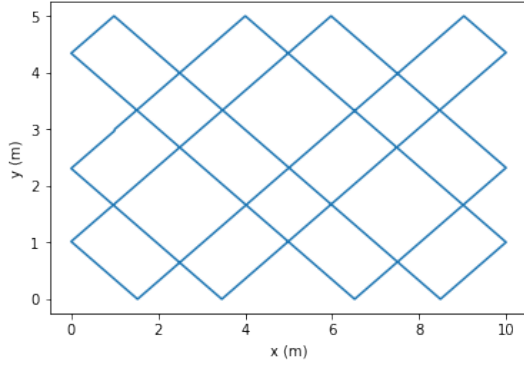


Figura 5. Trayectoria de la partícula en la caja bidimensional para las condiciones iniciales $L_x = 10$ m, $x_0 = 1$ m, $v_{x0} = 3$ m/s, $L_y = 5$ m, $y_0 = 3$ m, $v_{y0} = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$.

tiene una carga q y que existe un campo eléctrico constante, descrito por el potencial $V = qE_0x$ para el caso unidimensional y $V = qE_0^x x + qE_0^y y$ para el caso bidimensional.

Para el caso unidimensional se utilizó una carga unitaria en una caja de lado $L = 10$, y un campo eléctrico $E = 1$, con las condiciones iniciales $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$, como en el primer experimento y un paso del tiempo $\delta t = 0.001$ s.

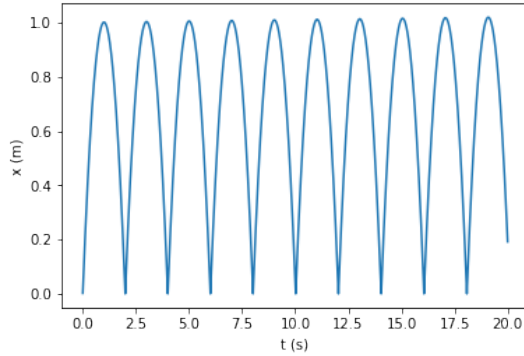


Figura 6. Posición x de una partícula con carga $q = 1$ en una caja con campo eléctrico constante $E = 1$, con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$, $t_f = 20$.

En este caso encontramos que la partícula no alcanza a llegar al extremo derecho de la caja (ver Fig. 6) pues el campo eléctrico la frena, hasta que ésta rebota en la pared del extremo izquierdo repitiendo este ciclo.

En la figura 7 se notan estas disminuciones en la velocidad de la partícula al ser frenada por el campo eléctrico.

Para comprobar que ocurre si la caja es tan pequeña que el campo eléctrico no puede detenerla antes de que ésta colisione con el otro extremo de la caja se utilizó una carga $q = 2$ y un campo eléctrico $E = 0.5$, en

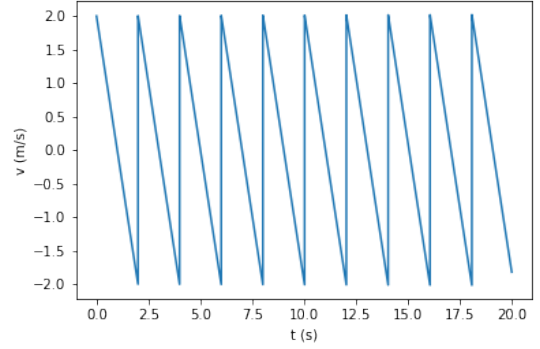


Figura 7. Velocidad v de una partícula con carga $q = 1$ en una caja con campo eléctrico constante $E = 1$, con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$, $t_f = 20$.

una caja de longitud $L = 1.9$ y las condiciones iniciales $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$, $t_f = 20$. Obteniendo la trayectoria que se muestra en la figura 8

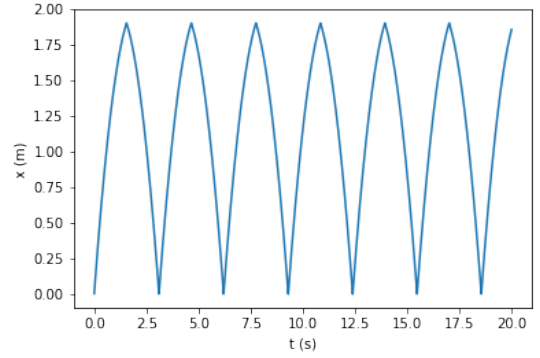


Figura 8. Posición x de una partícula con carga $q = 2$ en una caja con campo eléctrico constante $E = 0.5$, con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$, $t_f = 20$.

Para el comportamiento que nos muestra el gráfico de la figura 8, se espera que en cada que la partícula frene o acelere justo después de una colisión dependiendo si está orientada a favor del campo eléctrico o en contra (Ver Fig.9).

Para el caso bidimensional se utilizó una carga unitaria, en un campo eléctrico con componentes $E_0^x = 3$ y $E_0^y = 1$, con las condiciones iniciales $L_x = 10$ m, $x_0 = 1$ m, $v_{x0} = 3$ m/s, $L_y = 5$ m, $y_0 = 3$ m, $v_{y0} = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$, añadiendo un contador de colisiones para cada dirección; obteniendo un total de 7 colisiones en la dirección X y 6 en la dirección Y , la trayectoria seguida por la partícula bajo estas condiciones se muestra en la figura 10.

Similar al caso de una dimensión los campos eléctricos en cada componente son tales que no permiten que la

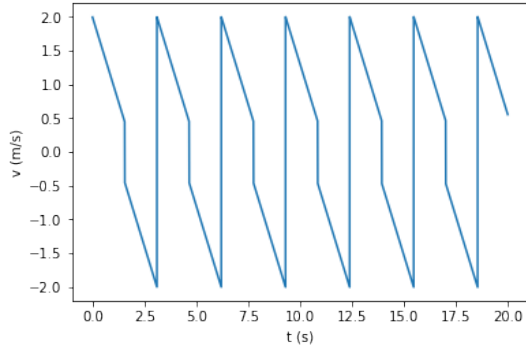


Figura 9. Velocidad v de una partícula con carga $q = 2$ en una caja con campo eléctrico constante $E = 0.5$, con respecto al tiempo para las condiciones iniciales $L = 10$ m, $x_0 = 0$ m, $v_0 = 2$ m/s, $t_0 = 0$, $t_f = 20$.

partícula llegue al otro extremo de la caja, pues frenan a la partícula antes de terminar este recorrido.

V. CONCLUSIONES

La aplicación del método de Euler a los problemas anteriores fue sencilla, comprobando que la simplicidad de este método a veces puede ser útil para resolver un problema de EDO's con valor inicial.

Los resultados obtenidos son satisfactorios pues coinciden con lo que la intuición física y la solución analítica dicta, vemos que al agregar un campo eléctrico en la caja la partícula se comporta muy diferente al caso sin el campo, llevandola a incluso no llegar a colisionar con uno de los lados de la caja, mientras que si el campo eléctrico no está presente la partícula colisiona libremente con los dos lados de la caja.

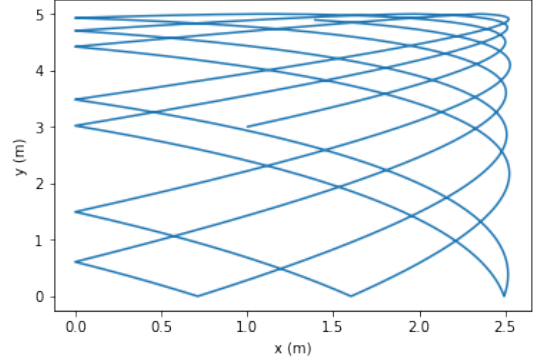


Figura 10. Trayectoria de la partícula con carga $q = 1$ en la caja bidimensional con un campo eléctrico con componentes $E_0^x = 3$ y $E_0^y = 1$ para las condiciones iniciales $L_x = 10$ m, $x_0 = 1$ m, $v_{x0} = 3$ m/s, $L_y = 5$ m, $y_0 = 3$ m, $v_{y0} = 2$ m/s, $t_0 = 0$ s, $t_f = 20$.

-
- [1] Richard L Burden and J Douglas Faires. *Análisis numérico*. Thomson Learning, 2002.
- [2] Alejandro L Garcia. *Numerical methods for physics*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 2000.

- [3] Rubin H Landau, Cristian C Bordeianu, et al. *Computational Physics: Problem Solving with Python*. John Wiley & Sons, 2015.