

# Práctica 14. Modelo de Lorenz.

Hiram K. Herrera Alcantar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California,  
Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.\*

(Dated: 17 de abril de 2018)

estudian los puntos de equilibrio del modelo de Lorenz, así como la estabilidad de estos puntos. Posteriormente se realiza una simulación numérica del modelo utilizando el método Runge-Kutta de 5to orden, encontrando resultados satisfactorios, se comprueba el comportamiento caótico del sistema.

## I. INTRODUCCIÓN

En 1963, Edward Lorenz, un meteorólogo, publicó un artículo [1] donde estudiaba la posible predicción del clima a largo plazo. Para esto introdujo un modelo simplificado de la convección atmosférica.

El modelo describe el movimiento de convección de un fluido en un pequeño e idealizado que sigue el fenómeno de Rayleigh-Bénard, es decir un fluido situado en un campo gravitatorio y en el que existen variaciones de densidad provocadas por gradientes de temperatura [2].

El modelo consiste en tres ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}\quad (1)$$

las ecuaciones relacionan las propiedades de la capa de un fluido bidimensional calentado uniformemente desde arriba y enfriado desde abajo.

En estas ecuaciones  $\sigma$ ,  $\rho$  y  $\beta$ , son parámetros del sistema, proporcionales al número de Prandtl, número de Rayleigh y de las dimensiones de la capa del fluido, respectivamente. Usualmente se toma  $\beta = 8/3$  y  $\sigma = 10$ .

La variable  $x$  es proporcional a la razón de convección, mientras que  $y$  y  $z$  representan la variación horizontal y vertical de la temperatura respectivamente [3].

Estas ecuaciones describen el comportamiento del atractor de Lorenz (ver Fig. 1), introducido también en el artículo de 1963, para ciertos valores, este sistema describe un comportamiento caótico, debido a la no linealidad de las ecuaciones, este atractor ha sido objeto de diferentes estudios de la teoría del caos.

## II. ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO

Para encontrar los puntos de equilibrio del sistema igualamos a cero las derivadas:

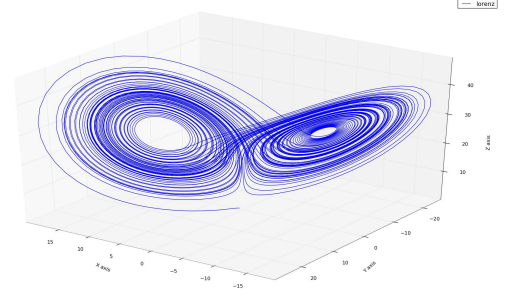


Figura 1. Atractor de Lorenz.

$$\begin{aligned}\sigma(y - x) &= 0 \\ x(\rho - z) - y &= 0 \\ xy - \beta z &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

Los puntos de equilibrio del modelo son,

$$\begin{aligned}P_1 &= (0, 0, 0) \\ P_2 &= (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1) \\ P_3 &= (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)\end{aligned}\quad (3)$$

Analizaremos la estabilidad de estos puntos de equilibrio utilizando la matriz Jacobiana del modelo dada por :

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - z & -1 & -x \\ y & x & -\beta \end{pmatrix}$$

Evaluamos en el punto  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}, \quad (4)$$

\* hiram.herrera@uabc.edu.mx

los eigenvalores de esta matriz son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{1-2\sigma+4\rho\sigma+\sigma^2}-1-\sigma) \\ \lambda_2 &= -\frac{1}{2}(\sqrt{1-2\sigma+4\rho\sigma+\sigma^2}+1+\sigma) \\ \lambda_3 &= -\beta\end{aligned}\quad (5)$$

Si proponemos soluciones de la forma  $x_i(t) = e^{\lambda_i t}$ , y queremos soluciones estables necesitamos que al menos dos de los eigenvalores sean imaginarios completamente, pues así tenemos soluciones oscilatorias, para que esto se cumpla necesitamos las condiciones  $1+\sigma=0$  y  $1-2\sigma+4\rho\sigma+\sigma^2 < 0$ .

De la primera condición obtenemos  $\sigma = -1$ , sin embargo, queremos que los parámetros  $\sigma, \rho, \beta$  sean positivos, por lo que esta condición no se puede satisfacer, implicando que este punto no es estable.

Para el punto  $P_2$ , queremos que todas sus componentes sean reales, por lo que tenemos la condición  $\beta(\rho-1) \geq 1$ ; lo que se cumple si  $(\rho-1) \geq 1$ , el caso  $\rho = 1$  hace que el punto  $P_2$  sea  $P_2 = (0,0,0)$  es decir, recuperamos el punto  $P_1$ , que se demostró no estable, por lo que la única opción para este punto es que  $\rho > 1$ .

De evaluar  $P_2$  obtenemos la matriz Jacobiana:

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{\beta(\rho-1)} \\ \sqrt{\beta(\rho-1)} & \sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix} \quad (6)$$

, cuyos eigenvalores son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\sqrt{\beta(\rho+\sigma)} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{\beta(\rho+\sigma)} \\ \lambda_3 &= -(1+\beta+\sigma)\end{aligned}\quad (7)$$

vemos que los eigenvalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son totalmente imaginarios, implicando que el punto  $P_2$  es estable.

Al analizar el punto  $P_3$  notamos que requerimos la misma condición que para el punto  $P_2$ , es decir,  $\rho > 1$ .

La matriz asociada a  $P_3$  es

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{\beta(\rho-1)} \\ -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\sqrt{\beta(\rho-1)} & -\beta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

cuyos eigenvalores coinciden con los del punto  $P_2$ , implicando que  $P_3$  es también un punto estable.

### III. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MODELO

Para al análisis numérico del modelo de Lorenz se utilizó el método de Runge-Kutta de orden cinco de Butcher (ver Apéndice A), para la solución de las ecuaciones diferenciales.

Se analizaron las siguientes condiciones iniciales:

1.  $\rho = 15$  con  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 22)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 13)$ .
2.  $\rho = 28$  con  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 27)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 25)$ .
3.  $\rho = 148.5$  con  $(x_0, y_0, z_0) = (20, 54, 104)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 4)$ .
4.  $\rho = 28$  con  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 18)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 16)$ .

Los resultados se presentan en la Fig. 2, para la condición 1, Fig. 3 y para la condición 2, Fig. 4 y Fig. 5 para la condición 3 y Fig. 6 y Fig. 7 para la condición 4.

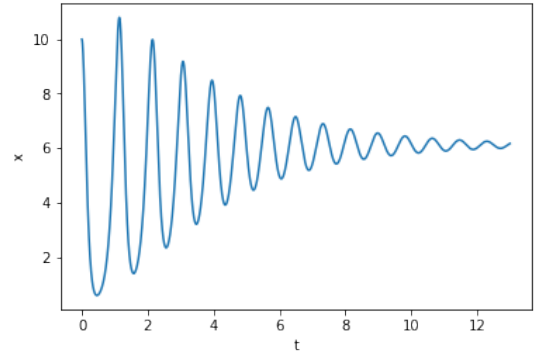


Figura 2. Coordenada  $X$  en función del tiempo  $T$  para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 22)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 13)$  utilizando  $\rho = 15$ .

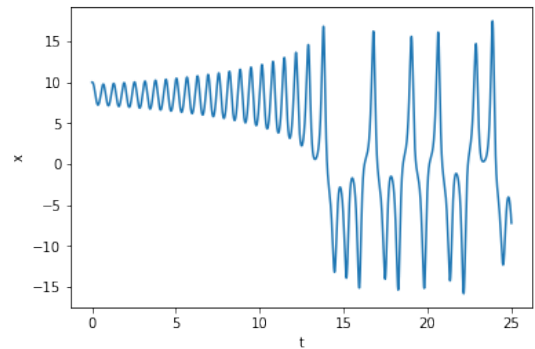


Figura 3. Coordenada  $X$  en función del tiempo  $T$  para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 27)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 25)$  utilizando  $\rho = 28$ .

Posteriormente se realizó una proyección 3D de las condiciones iniciales 3 y 4, que se presentan en las figuras 8 y 9 respectivamente.

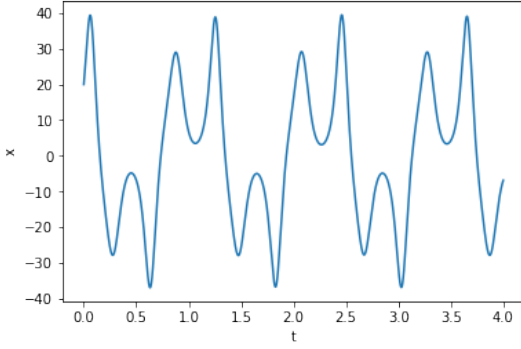


Figura 4. Coordenada  $X$  en función del tiempo  $T$  para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (20, 54, 104)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 4)$  utilizando  $\rho = 148.5$ .

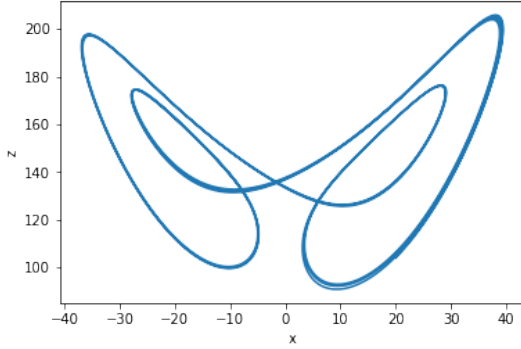


Figura 5. Coordenada  $Z$  en función de la coordenada  $X$  para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (20, 54, 104)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 4)$  utilizando  $\rho = 148.5$ .

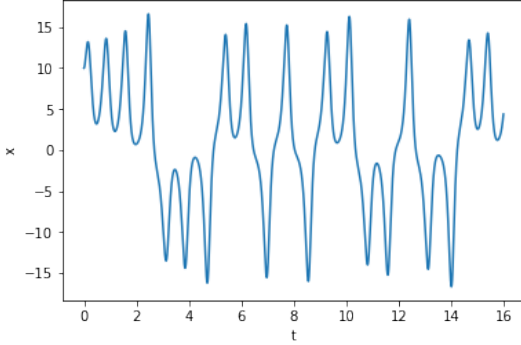


Figura 6. Coordenada  $X$  en función del tiempo  $T$  para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 18)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 16)$  utilizando  $\rho = 28$ .

#### IV. CONCLUSIONES

Como el modelo de Lorenz es un modelo caótico, y cualquier perturbación en las condiciones del problema

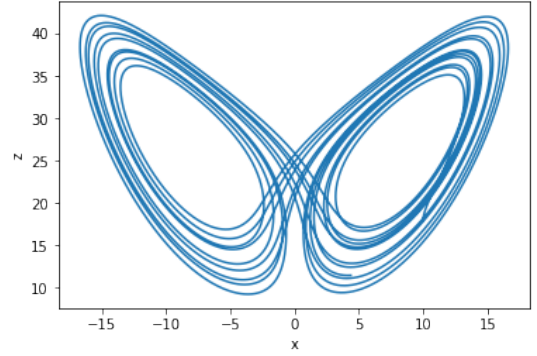


Figura 7. Coordenada  $Z$  en función de la coordenada  $X$  para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 18)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 16)$  utilizando  $\rho = 28$ .

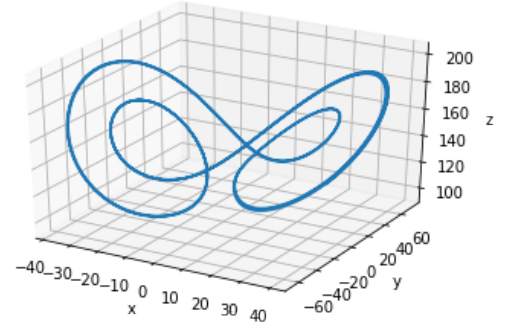


Figura 8. Proyección 3D para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (20, 54, 104)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 4)$  utilizando  $\rho = 148.5$ .

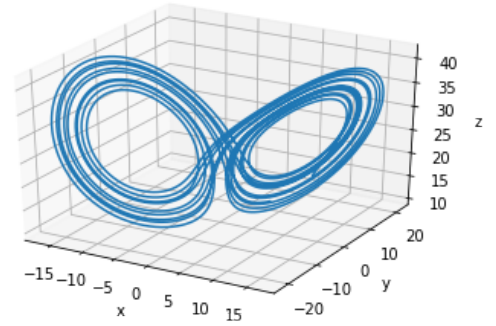


Figura 9. Proyección 3D para la condición inicial  $(x_0, y_0, z_0) = (10, 10, 18)$  y  $(t_0, t_f) = (0, 16)$  utilizando  $\rho = 28$ .

pueden alterar significativamente el resultado, esto puede verse en los resultados obtenidos.

Es necesario utilizar un integrador de ecuaciones de alto orden para evitar errores, en este caso se utilizó el método de Runge-Kutta de 5to orden, por los resultados obtenidos concluimos que este método es

eficiente para este tipo de problemas, por ejemplo, de la Figura 9 reconocemos el atractor de Lorenz, este resultado no habría sido posible con integradores de bajo orden como el método de Euler.

#### Apéndice A: Runge-Kutta de 5to Orden [4]

El método de integración utilizado en esta práctica es el método de Runge-Kutta de 5to orden descrito por Butcher en 1995 en el artículo [5].

Para este método se toma la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Si se tienen la condición inicial para un tiempo inicial  $t_0$ , tal que  $x(t_0) = x_0$ . El método de Runge-Kutta de 5to orden de Butcher se describe por las siguientes ecuaciones:

$$k_1 = hf(x, t)$$

$$k_2 = hf(x + \frac{1}{4}k_1, t + \frac{1}{4}h)$$

$$k_3 = hf(x + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2, t + \frac{1}{4}h)$$

$$k_4 = hf(x - \frac{1}{2}k_2 + k_3, t + \frac{1}{2}h)$$

$$k_5 = hf(x + \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_4, t + \frac{3}{4}h)$$

$$k_6 = hf(x - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5, t + h)$$

Por último tenemos que el valor  $x(t+h)$  esta dado por

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

- 
- [1] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.
  - [2] Alexander V Getling. *Rayleigh-Benard Convection: Structures and Dynamics*, volume 11. World Scientific, 1998.
  - [3] Colin Sparrow. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, volume 41. Springer Science & Business Media, 2012.
  - [4] Md Babul Hossain, Md Jahangir Hossain, Md Musa Miah, and Md Shah Alam. A comparative study on fourth order and butcher's fifth order runge-kutta methods with third order initial value problem (ivp). *Applied and Computational Mathematics*, 6(6):243–253, 2017.
  - [5] JC Butcher. On fifth order runge-kutta methods. *BIT Numerical Mathematics*, 35(2):202–209, 1995.