

# Práctica 18. Movimiento Browniano.

Hiram K. Herrera Alcantar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California,  
Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.\*

(Dated: 23 de mayo de 2018)

Se realizan diferentes experimentos numéricos relacionados con las variables aleatorias, estos experimentos consisten en analizar el movimiento de caminantes aleatorios en una caja unidimensional, bidimensional y tridimensional, posteriormente se analiza el efecto de una fuerza estocástica en el movimiento de una partícula. Por último se estudia el cambio en la trayectoria de un oscilador armónico con una perturbación estocástica.

## I. INTRODUCCIÓN

Las realizaciones azarosas se han vuelto populares en la implementación de algoritmos, pues a través de ellos se pueden estudiar diversos problemas, uno de los métodos más populares el método de Monte Carlo [1], en este método se generan números aleatorios que siguen una cierta distribución de probabilidad, con esto se pueden estudiar sistemas usuales en la mecánica estadística.

Otro de los problemas en los que el generar números aleatorios es bastante útil es el movimiento browniano, éste es el movimiento aleatorio que se observa en un medio fluido, esto como resultado de los choques entre las partículas de dicho fluido.

Este fenómeno recibe su nombre gracias que el biólogo Robert Brown en 1827, mientras estudiaba las partículas atrapadas en un grano de polen en el agua notó que las partículas se movían de una manera que no podía ser descrita.

Con ayuda de un generador de números aleatorios es posible estudiar este movimiento o al menos reproducirlo.

En esta práctica nos centramos en la simulación de movimiento browniano de una partícula en una caja unidimensional, bidimensional y tridimensional estudiando el efecto del intervalo donde se encuentre el número aleatorio. Posteriormente se estudia cómo afecta una fuerza estocástica en la trayectoria de una partícula. Por último se realiza una simulación del oscilador armónico en presencia de una perturbación estocástica.

## II. IMPLEMENTACIÓN

### A. Caminata Aleatoria

Se realizaron las caminatas aleatorias inicializando la posición del caminante en el origen de cada sistema coordenada, posteriormente se añadió un paso aleatorio en el intervalo  $(a,b)$  tal que:

$$dx_i = (b - a)X + a$$

donde el subíndice  $i$  indica la dimensión en la que se efectúa el paso  $(x,y,z)$ ,  $X$  es un número aleatorio en el intervalo  $(0,1)$ .

El paso resultado era sumado a la posición del caminante, se consideraron cajas con fronteras.

Para el caso de una dimensión se consideró una frontera periódica, es decir, si la partícula llegaba al límite de la caja unidimensional la posición de la partícula se consideraba en el origen de nuevo.

Se realizaron los siguientes experimentos considerando 32 pasos y posteriormente 256:

### Caja Unidimensional

Se consideró una caja unidimensional de 0 a 50, el primer experimento se realizó utilizando pasos de longitud aleatoria en el intervalo  $(0,1)$  (ver Fig. 1 y Fig. 2).

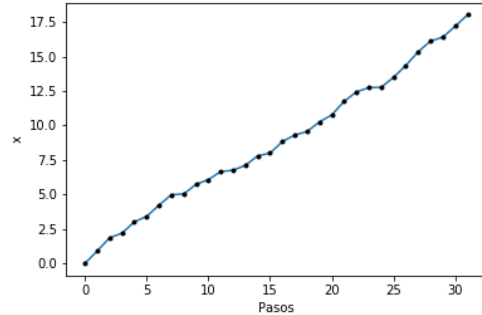


Figura 1. Caminante aleatorio de 32 pasos, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(0,1)$ .

Posteriormente se repitieron los experimentos utilizando un paso de longitud aleatoria en el intervalo  $(-1,1)$  (ver Fig. 3 y Fig. 4).

Nótese que al implementar un paso en el intervalo  $(0,1)$  el caminante avanza constantemente sin retroceder, lo que hace que eventualmente llegue a la frontera, por otro lado en el intervalo  $(-1,1)$  el caminante puede retroceder y de los resultados obtenidos vemos que es poco probable que se acerque a alguna de las fronteras.

\* hiram.herrera@uabc.edu.mx

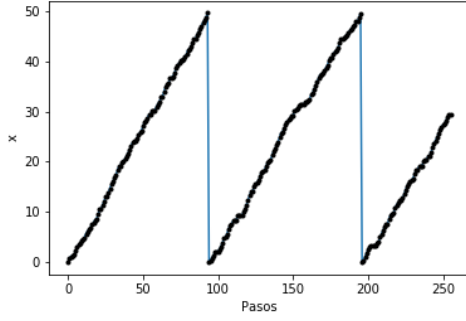


Figura 2. Caminante aleatorio de 256 pasos, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(0,1)$ .

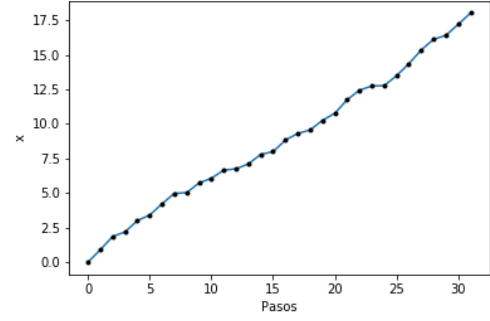


Figura 5. Caminante aleatorio de 32 pasos en caja bidimensional de ancho 10, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(0,1)$ .

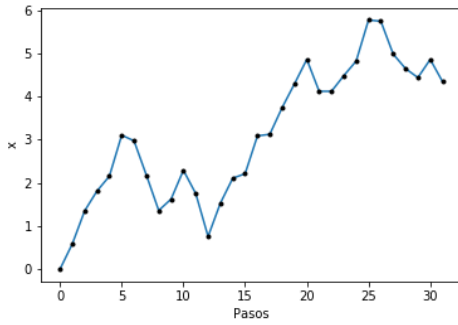


Figura 3. Caminante aleatorio de 32 pasos, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(-1,1)$ .

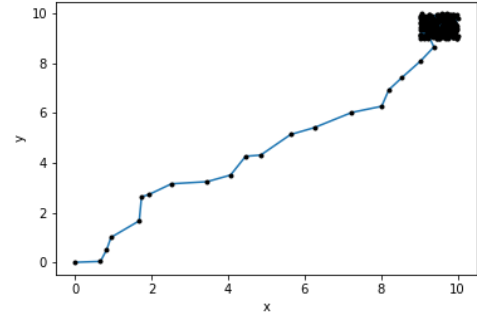


Figura 6. Caminante aleatorio de 256 pasos en caja bidimensional de ancho 10, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(0,1)$ .

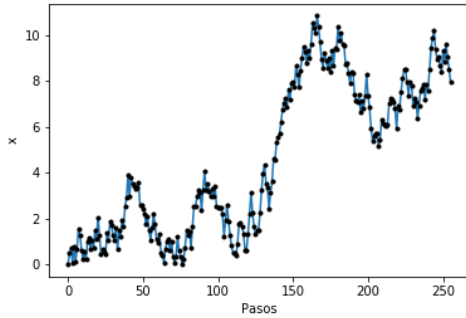


Figura 4. Caminante aleatorio de 256 pasos, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(-1,1)$ .

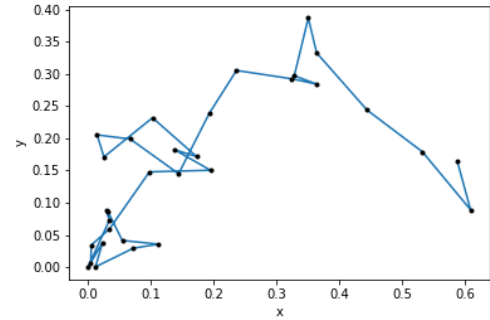


Figura 7. Caminante aleatorio de 32 pasos en caja bidimensional de ancho 10, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(-0.1,0.1)$ .

### *Caja Bidimensional*

Se tomó una caja dimensional de ancho 10, para el primer experimento se tomó un paso aleatorio para cada dimensión en el intervalo  $(0,1)$  (ver Fig. 5 y Fig. 6) y después en el intervalo  $(-0.1,0.1)$  (ver Fig. 7 y Fig. 8).

En este experimento no se tomaron fronteras periódicas sino que se utilizaron fronteras reflexivas, es decir, al llegar la partícula en la frontera se invertía su dirección.

Esta condición genera el problema que se ve en la figura 6 ya que las condiciones utilizadas hacen que el ca-

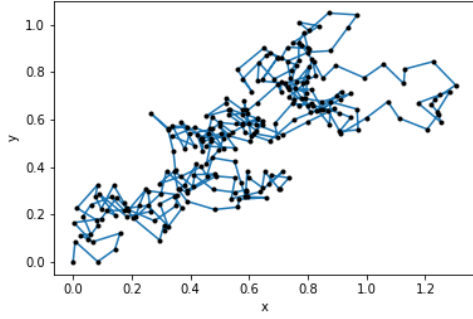


Figura 8. Caminante aleatorio de 256 pasos en caja bidimensional de ancho 10, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(-0.1, 0.1)$ .

minante camine directamente hacia las fronteras, y al ser reflejado se genera la aglomeración que vemos en la esquina de la figura, por otro lado nuevamente observamos que es poco probable que el caminante llegue a las fronteras si se utiliza un paso en un intervalo centrado en 0.

#### *Caja tridimensional*

Por último se tomó una caja tridimensional de ancho 30, utilizando pasos de longitud aleatoria en el intervalo  $(-2, 2)$ , (ver Fig. 9 y Fig. 10).

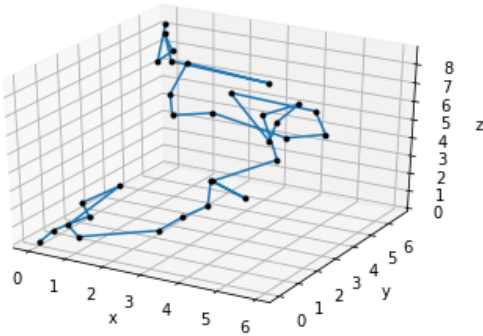


Figura 9. Caminante aleatorio de 32 pasos en caja tridimensional de ancho 30, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(-2, 2)$ .

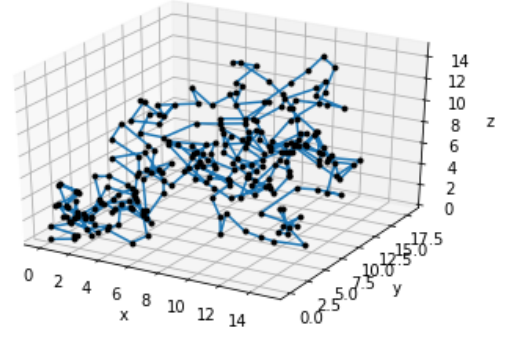


Figura 10. Caminante aleatorio de 256 pasos en caja tridimensional de ancho 30, la longitud de los pasos utilizada es un número aleatorio en el intervalo  $(-2, 2)$ .

### **B. Variables Aleatorias**

Se solucionó el problema de una partícula en presencia de una fuerza aleatoria utilizando los algoritmos de Euler y Leap-frog, para generar la fuerza aleatoria primero se utilizó una distribución aleatoria uniforme en el intervalo  $(-10, 10)$  para cada paso de integración de los métodos mencionados.

Posteriormente se utilizó el algoritmo de Box-Muller [2] para generar una fuerza estocástica con distribución Gaussiana de media cero y desviación estándar unitaria.

Los resultados obtenidos para la distribución uniforme y la distribución Gaussiana para ambos métodos se muestran en las Figuras 11 y 12.

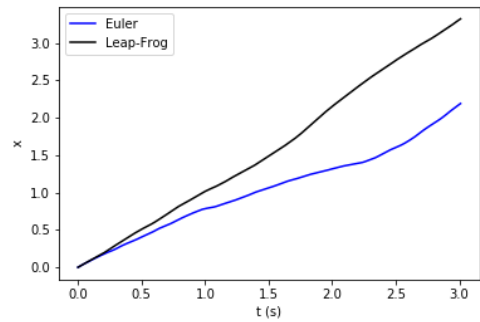


Figura 11. Trayectoria de una partícula sujeta a una fuerza estocástica uniforme en el intervalo  $(-10, 10)$ .

De las figuras podemos ver que el comportamiento para la distribución uniforme tiene comportamientos diferentes en cada realización, y los comportamientos son muy similares a los encontrados en la realización de las caminatas aleatorias.

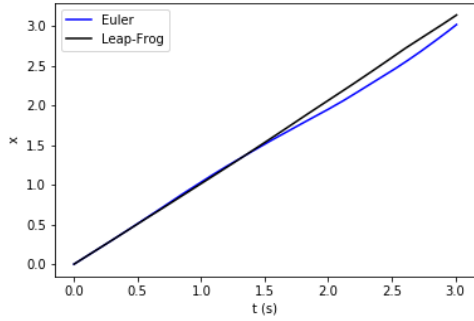


Figura 12. Trayectoria de una partícula sujeta a una fuerza estocástica Gaussiana de media cero y desviación estándar uno.

### III. RETO

Primero se solucionó el problema del oscilador armónico usual con el método de Leap-frog utilizando una frecuencia angular  $\omega = 1$ , la trayectoria puede verse en la Figura 13

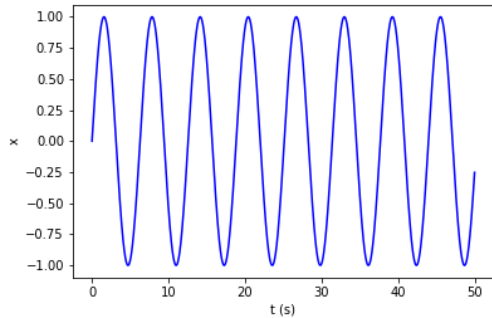


Figura 13. Trayectoria del oscilador armónico con frecuencia angular  $\omega = 1$ .

Posteriormente se realizó un histograma de frecuencias de la posición del oscilador armónico (ver Fig. 14).

Vemos que la partícula se encuentra más probablemente en los extremos de la oscilación en este caso 1 y -1 y en menor frecuencia en el centro.

Después se agregó una perturbación estocástica Gaussiana con media cero, para entender el efecto de esta

perturbación en el oscilador se variaron los valores de la desviación estándar de la Gaussiana entre los valores 1, 1.5, 2, 2.5, 5 y 8. Las trayectorias se pueden observar en la Figura 15 mientras que el histograma de frecuencias de la posición en la Figura 16.

De los resultados obtenidos vemos que hay ciertos valores en los que la partícula sigue el comportamiento del oscilador armónico normal al concentrarse las posiciones con mayor frecuencia en los extremos, por otro lado se

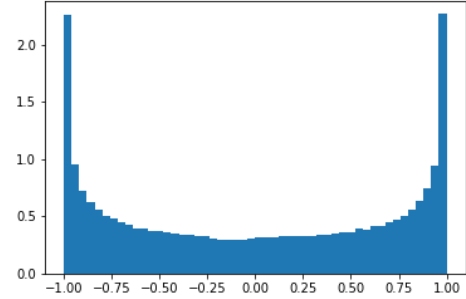


Figura 14. Histograma de frecuencias de la posición del oscilador armónico.

nota que existen ciertos valores de la desviación estándar en los que la partícula está más frecuentemente en el centro de oscilación, esto coincide con los resultados del oscilador armónico cuántico, por lo que se podría buscar los valores de la desviación estándar que recuperan estos resultados.

### IV. CONCLUSIONES

Se comprueba la utilidad de las realizaciones azarosas para el estudio de diferentes sistemas que se pueden presentar en la física, como lo son el movimiento Browniano. En la simulación de el oscilador armónico encontramos que es posible recuperar resultados de la mecánica cuántica utilizando variables estocásticas en la mecánica clásica, por lo que se ve que este tipo de estudios es importante para entender la física detrás de los sistemas que están sujetos a la probabilidad como lo son los sistemas cuánticos o los sistemas termodinámicos microscópicos, que son estudiados en la mecánica cuántica y en la mecánica estadística respectivamente.

[1] Rubin H Landau, Cristian C Bordeianu, et al. *Computational Physics: Problem Solving with Python*. John Wiley & Sons, 2015.

[2] George EP Box, Mervin E Muller, et al. A note on the generation of random normal deviates. *The annals of mathematical statistics*, 29(2):610–611, 1958.

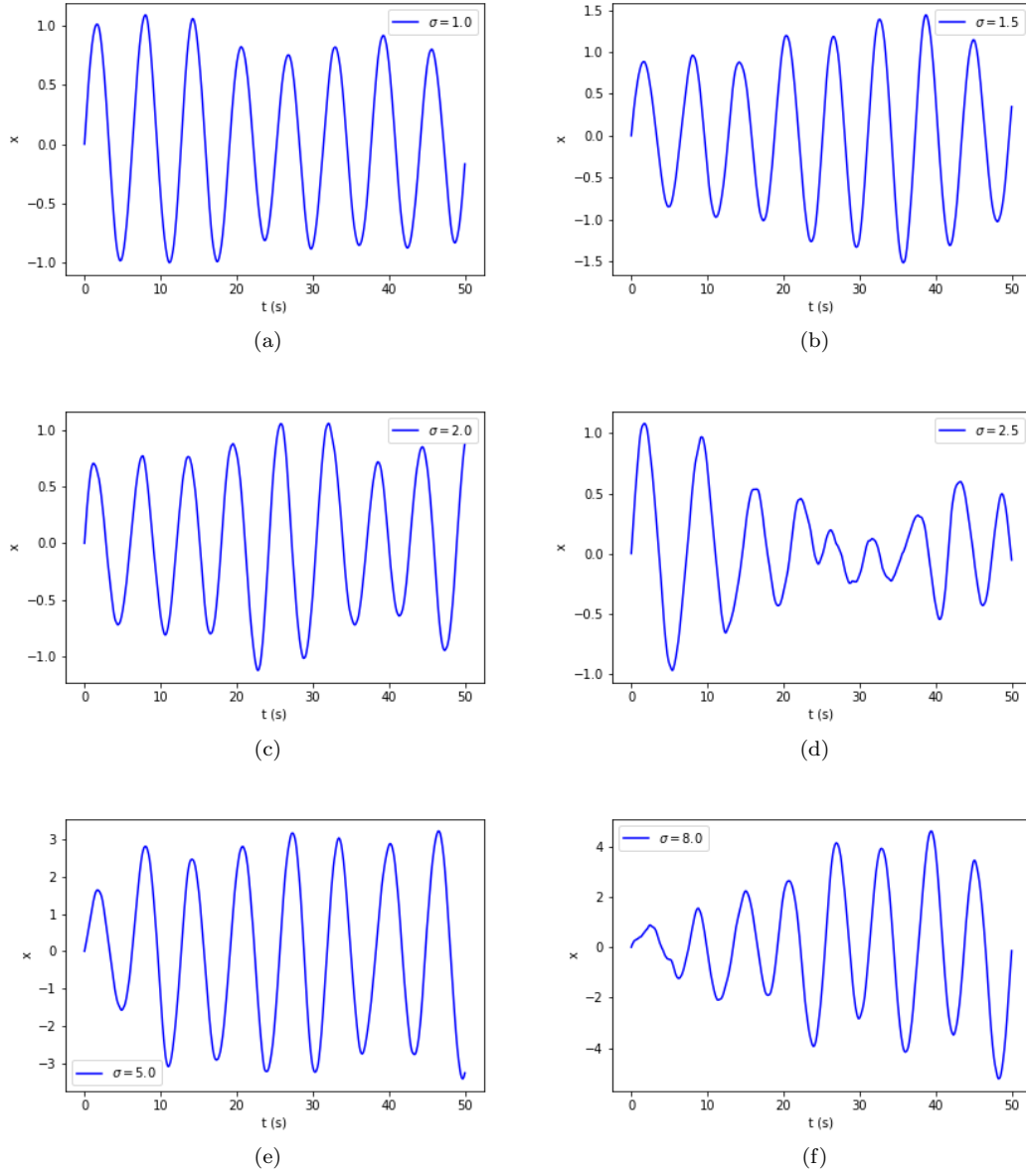


Figura 15. Trayectoria del oscilador armónico con una perturbación estocástica Gaussiana de media cero y desviación estándar  $\sigma$ .

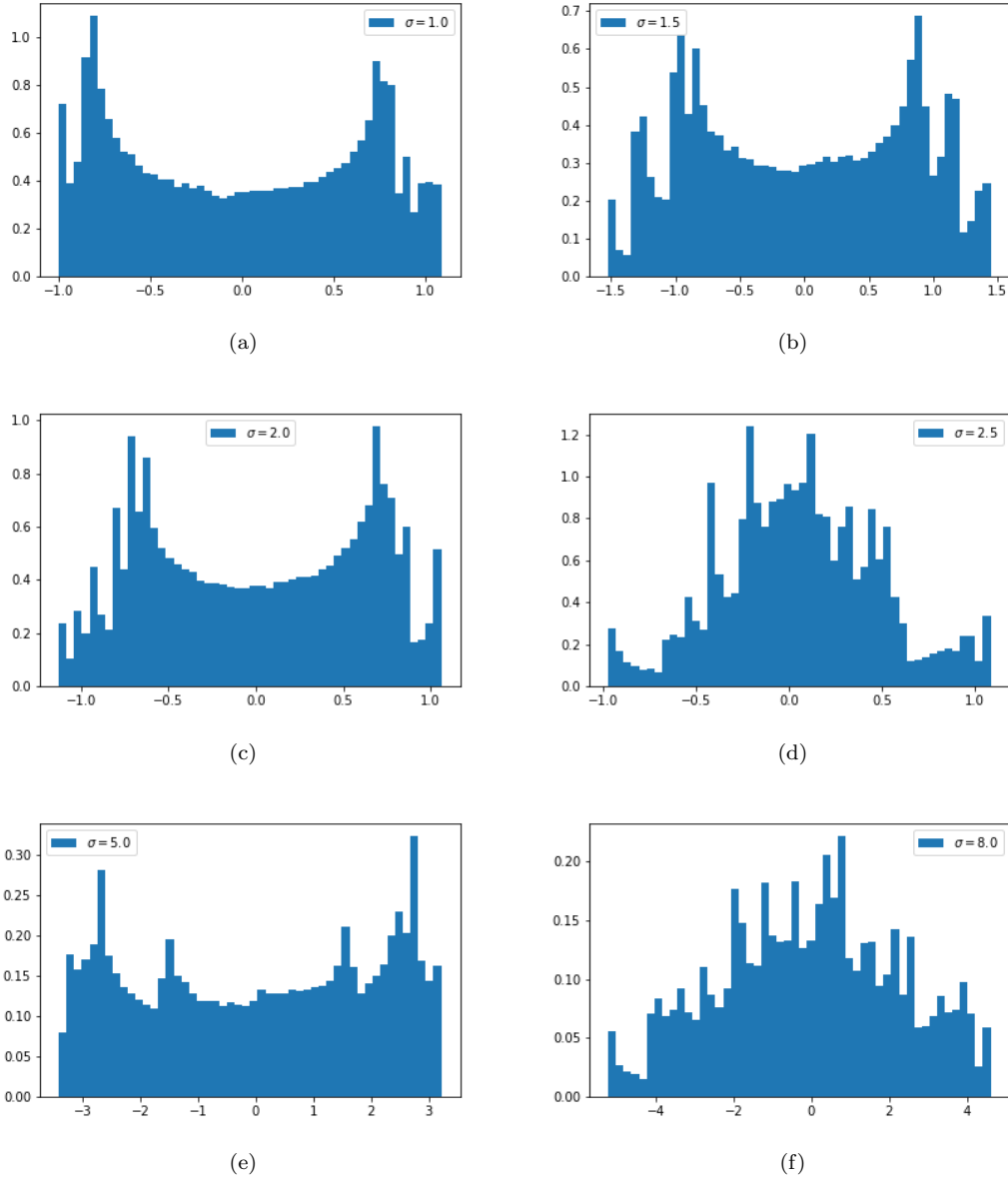


Figura 16. Histograma de frecuencias de la posición de una partícula en un oscilador armónico con una perturbación estocástica Gaussiana de media cero y desviación estándar  $\sigma$ .