Práctica 12. Modelo Lotka-Volterra.

Hiram K. Herrera Alcantar[1]

[1] *Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California, Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.* *

(Dated: 11 de abril de 2018)

Se construye un modelo de Lotka-Volterra para la población de linces y conejos registrada por la compañia Hudson Bay entre los años 1900 y 1922. Se demuestra la efectividad del modelo de Lotka-Volterra para el estudio de los sistemas biológicos depredador-presa. Además se estudian los puntos de equilibrio del modelo así como su estabilidad.

I. INTRODUCCIÓN

La relación dinámica entre depredadores y presas es uno de los temas dominantes en la ecología. Para estudiar este problema se han implementado diversos modelos, uno de los más sencillos y notables es el modelo de Lotka-Volterra, dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= a_1 x - a_2 xy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -b_1 y + b_2 xy \end{aligned} \tag{1}$$

donde a_1 es la taza de crecimiento de crecimiento de las presas cuando no hay depredadores, b_1 es la taza de disminución de la población de los depredadores cuando no hay presas, los términos cruzados de las ecuaciones indican que entre más depredadores y presas hay, se transfiere mayor densidad de población de las presas a lo depredadores.

Este modelo fue propuesto por Alfred Lotka en 1920 [1], en el artículo *Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems*, en este artículo Lotka estudió los puntos de equilibrio del modelo así como la evolución de la población de las especies. Posteriormente en 1926 Vito Volterra, un físico y matemático, desarrolló independientemente del modelo de Lotka, esta misma ecuación después de interesarse en la biología.

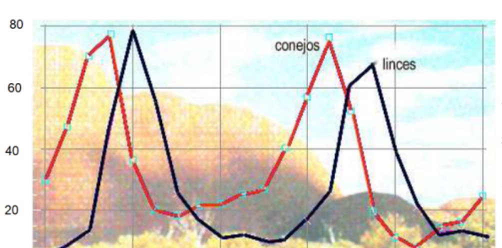

Figura 1. Capturas de linces y conejos de 1900 a 1922.

En esta práctica estudiaremos la utilidad del modelo de Lotka-Volterra para el ejemplo de la población de linces y conejos en un bosque al norte de Canadá. Usando como referencia datos de la compañia Hudson Bay entre los años 1900 y 1922. Estos datos se muestra gráficamente en la Figura 1

II. ANÁLISIS CUALITATIVO DEL MODELO

Primero encontraremos los puntos de equilibrio del modelo, en este punto las derivadas tienen que ser cero de esta forma

$$\begin{aligned} x(a_1 - a_2 y) &= 0 \\ y(-b_1 + b_2 x) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Los puntos de equilibrio son entonces los puntos $P_1 = (0,0)$ que representa la extinción de ambas especies y $P_2 = \left(\frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2}\right)$.

Para analizar la estabilidad de los puntos de equilibrio tomamos la matriz Jacobiana dada por:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 y & -a_2 x \\ b_2 y & -b_1 + b_2 x \end{pmatrix}$$

Evaluamos el jacobiano en el punto $P_1 = (0,0)$ y obtenemos,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -b_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

los eigenvalores de esta matriz son $\lambda_1 = a_1$ y $\lambda_2 = -b_1$, al ser de signos contrarios los eigenvalores de signos contrarios, esto indica que el punto P_1 es un punto silla, con soluciones que crecen exponencialmente en x y decrecen exponencialmente en y. Con soluciones de la forma

$$x(t) = c_1 e^{a_1 t},\ y(t) = c_2 e^{-b_1 t}.$$

El que este punto sea un punto silla indica que es inestable, lo cual implica que la extinción de las especies es difícil en este modelo.

* hiram.herrera@uabc.edu.mx

Ahora evaluamos el jacobiano en el punto $P_2 = \left(\frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2}\right)$, obtenemos:

$$J\left(\frac{b_1}{b_2}, \frac{a_1}{a_2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_2 b_1}{b_2} \\ -\frac{a_1 b_2}{a_2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

los eigenvalores de esta matriz son $\lambda_1 = i\sqrt{a_1 b_1}$ y $\lambda_2 = -i\sqrt{a_1 b_1}$, como estos eigenvalores son imaginarios y conjugados entre si, este punto estable es elíptico, por lo tanto las soluciones son periódicas, oscilando en una elipse al rededor del punto fijo con periodo$\sqrt{a_1 b_1}$. Por lo que este punto fijo es estable.

III. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MODELO

Utilizamos la siguiente tabla con el índice de capturas de linces y conejos elaborada por la compañía Hudson Bay entre los años 1900 y 1920:

Tabla I. Captura de conejos y linces en miles.

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

Aplicamos el modelo de Lotka-Volterra para estos datos para calcular los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 haremos uso de los valores medios:

$$\overline{x}(t) = \frac{b_1}{b_2},\ \overline{y}(t) = \frac{a_1}{a_2}$$

De los datos de la tabla se tiene que $\overline{x}(t) = 34.08$ y $\overline{y}(t) = 20.167$.

También consideramos que cuando la población de linces es muy baja, es de esperar que la población de conejos crezca de manera exponencial y por otro lado que una población baja de conejos implica un ritmo exponencial en el descenso de la población de linces, es decir:

$$x(t) = x(0)e^{a_1},\ y(t) = y(0)e^{-b_1},$$

por lo tanto,

$$a_1 = \ln\left(\frac{x(t)}{x(0)}\right),\ b_1 = -\ln\left(\frac{y(t)}{y(0)}\right),$$

para calcular a_1 se toman los valores de los años 1905-1906 y para b_1 tomamos los años 1910-1911, entonces

$$a_1 = \ln\left(\frac{40.3}{27.1}\right) = 0.3968,\ b_1 = -\ln\left(\frac{19}{41.7}\right) = 0.786,$$

con lo que obtenemos que los parámetros para nuestro modelo son: $a_1 = 0.3968$, $a_2 = 0.0197$, $b_1 = 0.7861$ y $b_2 = 0.023$.

Con este modelo se utilizó el método de Runge-Kutta [2] de cuarto orden para la solución de las ecuaciones diferenciales, obteniendo los resultados mostrados en las figuras 2 y 3.

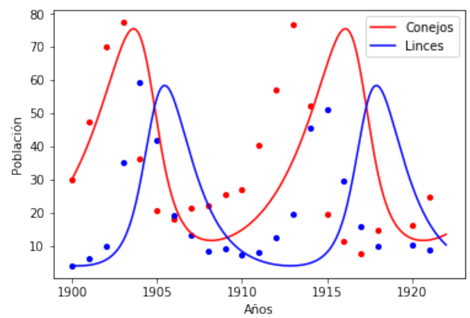

Figura 2. Ajuste de datos.

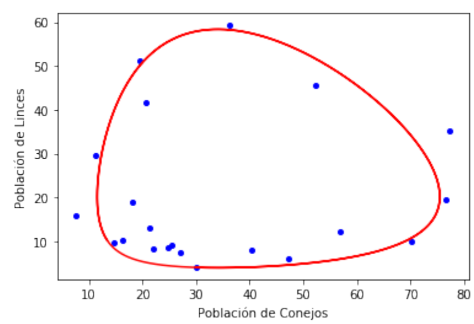

Figura 3. Ajuste de órbitas.

IV. CONCLUSIONES

De la Figura 2 se observa que el modelo, aunque tiene ciertas desviaciones y no se apega fielmente a los datos, tiene el comportamiento oscilatorio que se espera, por lo que se puede concluir que el modelo de Lotka-Volterra a pesar de tener muchas simplificaciones es efectivo para describir el comportamiento. Para que el modelo siguiera precisamente los datos habría que considerar factores externos además de la población de las especies.

[1] Nicolas Bacaër. *A short history of mathematical population dynamics.* Springer Science & Business Media, 2011.

[2] Richard L Burden and J Douglas Faires. *Análisis numérico.* Thomson Learning,, 2002.