Practica 12. Modelo Lotka-Volterra

Dr. Ramón Carrillo Bastos

Física Computacional

1. Problema predador-presa

Un ejemplo clásico del modelo presa depredador es el que representa a la población de linces y conejos de un bosque al norte de Canadá. La razón de la frecuencia con que aparece dicho ejemplo en diferentes textos, es porque la compañíia Hudson Bay anotó cuidadosamente las capturas de estas dos especies en el periodo 1800 - 1900, y se asume que estas capturas son representativas del tamaño de las poblaciones. La Figura 1 representa a las capturas de linces y conejos entre los años 1895 y 1925, apreciándose un comportamiento oscilatorio con un periodo aproximado de 12 años. Nuestro objetivo será el de construir un modelo que explique de forma matemática el comportamiento periodico de este sistema.

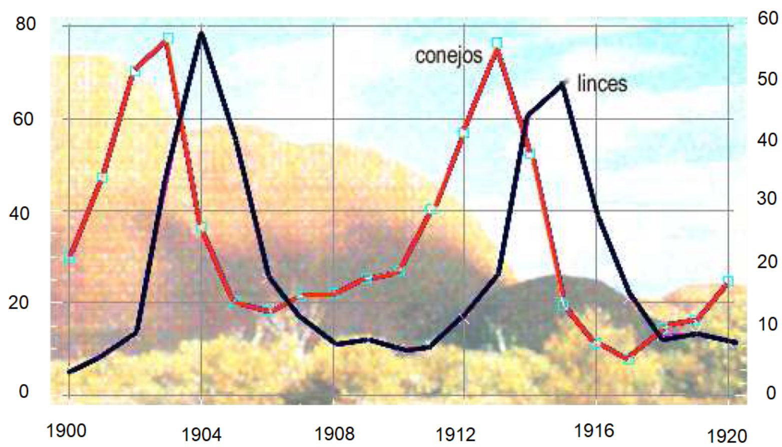

Figura 1: Capturas de linces y conejos de 1895 a 1925

Dicho modelo se conoce como Lotka-Volterra y básicamente consiste en lo siguiente: Sean $x(t)$, $y(t)$ las poblaciones de conejos (presas) y linces (depredadores) respectivamente. La razón de cambio de las presas $x'(t)$ es proporcional en cada momento al número de ellas, $(a_1x(t))$, menos la probabilidad de contacto entre los conejos y los linces, $(a_2x(t)y(t))$. Es decir,

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1 x(t) - a_2 x(t) y(t) . \tag{1}$$

De manera similar, en ausencia de presas la población de linces disminuye a una tasa proporcional al número de ellos, $(-b_1y(t))$, y al incluir los conejos su población aumenta proporcional a la posibilidad de contacto entre las presas y los depredadores $(b_2x(t)y(t))$. Combinando estos factores

$$\frac{dy(t)}{dt} = -b_1 y(t) + b_2 x(t) y(t) . \tag{2}$$

Es evidente que para la realización de dicho modelo se han efectuado un elevado número de simplicaciones de la realidad. Por ejemplo, no se ha tenido en cuenta la variación del clima, las relaciones con otras especies, la presencia del ser humano, y otros factores muy importantes como son la edad de los animales y su distribución espacial. Sin embargo, comprobaremos que este modelo tiene un comportamiento muy parecido al de la Figura 1.

2. Análisis cualitativo del modelo

1. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo anterior.
2. Linealizar el sistema de ecuaciones diferenciales en un entorno de los puntos de equilibrio, para estudiar la estabilidad del sistema.

3. Análisis numérico

La siguiente tabla muestra el índice de capturas de linces y conejos elaborada por la compañia Hudson Bay entre los años 1900 y 1920.

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

Figura 2: Capturas de linces y conejos en miles

Aplique el modelo Lotka-Volterra a estos datos. Para realizar esto considere que

$$\bar{x}(t) = \frac{b_1}{b_2}, \tag{3}$$

$$\bar{y}(t) = \frac{a_1}{a_2}, \tag{4}$$

donde $\bar{x}$ ($\bar{y}$) es el promedio de esa variable,y considere que cuando la población de depredadores sea muy baja, es de esperar que las presas estén creciendo de manera exponencial (hint: use el año 1910). Además una población muy baja de conejos que implica un ritmo elevado en el descenso de la población de linces, se toma en el año 1905-1906 para estimar b_1, a través del descenso.

1. Utilice un método Runge-Kutta de cuarto orden para solucionar la ecuación anterior,
2. Realice gráficas de ambas poblaciones como función del tiempo y compare con los datos experimentales.
3. Realice una gráfica de la población de linces vs la población de conejos, interprete el resultado.

Apéndice: el método de Runge -Kutta de 4to orden

Las ecuaciones de Runge -Kutta de 4to orden son

$$k_1 = hf(x,t), \tag{5}$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{1}{2}k_1, t + \frac{1}{2}h\right), \tag{6}$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{1}{2}k_2, t + \frac{1}{2}h\right), \tag{7}$$

$$k_4 = hf(x + k_3, t + h), \tag{8}$$

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{9}$$