

Práctica 6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias III: El péndulo y el método de Verlet

Hiram K. Herrera Alcantar¹

¹Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California,
Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.*

(Dated: 9 de marzo de 2018)

Se llega a una ecuación analítica para el periodo de un péndulo simple sin la aproximación de ángulos pequeños; además se da una solución numéricamente la ecuación de movimiento de un péndulo simple con los métodos de Euler, Euler-Cromer, Leap-Frog, Punto Medio y Verlet, se comprueba el aumento del periodo del péndulo cuando se aumenta el ángulo inicial. Se comprueba que los métodos de Euler y Punto Medio no son recomendables para este tipo de problemas. Se analiza el espacio fase del péndulo en función del ángulo inicial.

I. INTRODUCCIÓN

Un péndulo simple es un modelo idealizado que consiste en una masa puntual suspendida de un cordón sin masa e inelástico de longitud L [1] tal como se muestra en la figura 1.

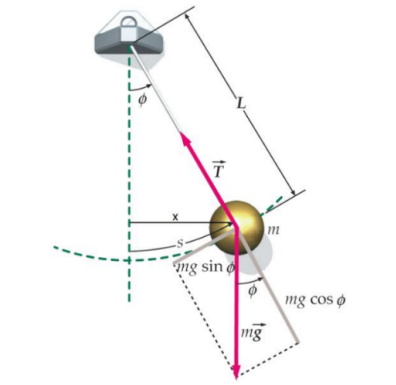


Figura 1. Péndulo simple

Si la masa se mueve a un lado de la posición de equilibrio, ésta oscilará alrededor de esta posición; resulta conveniente describir la posición del péndulo en término del desplazamiento angular ϕ , en este caso la ecuación de movimiento es[2]

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \sin \phi \quad (1)$$

vemos que la fuerza no es proporcional a ϕ sino a $\sin \phi$, en la aproximación para ángulos pequeños $\sin \phi \approx \phi$ por lo que obtenemos la ecuación

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{L} \phi \quad (2)$$

que es justamente la ecuación de movimiento armónico simple.

La solución para esta ecuación diferencial es tal que

$$\phi = C_1 \cos(2\pi t/T_s + C_2)$$

donde C_1 y C_2 son constantes a determinar por las condiciones iniciales y T_s es el periodo aproximado para ángulos pequeños, que esta dado por

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (3)$$

En esta práctica se obtiene una expresión analítica del periodo del un péndulo simple sin la aproximación para ángulos pequeños, además se resuelve numéricamente la trayectoria de un péndulo con el método de Verlet, comparando el resultado con otros métodos utilizados anteriormente como Euler, Euler-Cromer, Leap-Frog y Punto Medio.

Además se calcula el periodo como función del ángulo inicial del péndulo comparando con la formula analítica obtenida y con la aproximación para ángulos pequeños.

II. PERIODO DEL PÉNDULO SIMPLE PARA ÁNGULOS GRANDES

Sabemos que la energía de un péndulo simple de masa m , longitud L y velocidad angular ω es

$$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 - mgL \cos \phi \quad (4)$$

La energía debe conservarse, si el péndulo inicia su movimiento partiendo del reposo a un ángulo máximo ϕ_m su energía inicial es $E = -mgL \cos \phi_m$, entonces tenemos

$$-mgL \cos \phi_m = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 - mgL \cos \phi$$

o bien

$$\omega^2 = \frac{2g}{L}(\cos \phi - \cos \phi_m)$$

* hiram.herrera@uabc.edu.mx

como $\omega = \frac{d\phi}{dt}$, obtenemos la ecuación

$$dt = \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{2g}{L}(\cos\phi - \cos\phi_m)}}$$

usamos la identidad trigonométrica $\cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2\phi$, por lo que nuestra ecuación se transforma en

$$dt = \sqrt{\frac{L}{4g}} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_m/2) - \sin^2(\phi/2)}}$$

podemos integrar la ecuación desde 0 hasta ϕ_m , en este proceso el péndulo hace un cuarto de su periodo, así

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{L}{4g}} \int_0^{\phi_m} \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2(\phi_m/2) - \sin^2(\phi/2)}}$$

definimos un z tal que $\sin z = \frac{\sin(\phi/2)}{\sin(\phi_m/2)}$, la integral que obtenemos es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 z}}$$

donde $x = \sin(\phi_m/2)$, reconocemos la integral elíptica completa de primera especie $K(x)$ [3], así el periodo es

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} K(\sin(\phi_m/2)) \quad (5)$$

para ϕ_m pequeños se obtiene

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} K(\phi_m/2) \quad (6)$$

al expandir $K(\phi_m/2)$ mediante la serie de Taylor obtenemos que el periodo del péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left(1 + \frac{1}{16}\phi_m^2 + \dots\right) \quad (7)$$

nótese que el primer término de la serie corresponde al periodo del péndulo simple para ángulos pequeños.

III. AUMENTO DE LA ENERGÍA CON EL MÉTODO DE EULER

Suponiendo que el péndulo parte de una posición inicial ϕ_0 con una velocidad angular ω_0 , la energía dada por

la ecuación (4) para ángulos pequeños tenemos que la energía sería

$$E_0 = \frac{1}{2}mL^2\omega_0^2 + \frac{1}{2}mgL\phi_0^2 - mgL$$

Utilizando el método de Euler tenemos que $\omega = \omega_0 + a_0 dt$ y $\phi = \phi_0 + \omega_0 dt$ La energía es entonces

$$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}mgL\phi^2 - mgL$$

al sustituir obtenemos

$$E = \frac{1}{2}mL^2(\omega_0 + a_0 dt)^2 + \frac{1}{2}mgL(\phi_0 + \omega_0 dt)^2 - mgL \quad (8)$$

al desarrollar los términos obtenemos que la energía es

$$E = E_0 + (mL^2\omega_0 a_0 + mgL\phi_0 \omega_0)dt + \frac{1}{2}(mL^2 a_0^2 + mgL\omega_0^2)dt^2 \quad (9)$$

se puede notar un aumento monotónico en la energía con el método de Euler con el tiempo.

IV. SIMULACIÓN NUMÉRICA

En esta práctica se utiliza el método de Verlet[4], descrito por las ecuaciones

$$\mathbf{r}_{n+1} = 2\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1} + \tau^2 \mathbf{a}_n \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_{n-1}}{2\tau} \quad (11)$$

Donde se utiliza $\mathbf{r}_{-1} = \mathbf{r}_0 - \tau\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}\tau^2\mathbf{a}_0$.

Primero se resolvieron numéricamente utilizando el método de Euler, los problemas con posición inicial $\phi_m = 10^\circ$, y velocidad inicial $\omega = 0$, primero utilizando $\tau = 0.1$ y 300 pasos (ver Fig. 2) y después con $\tau = 0.05$ con 600 pasos (ver Fig. 3)

En ambas figuras podemos observar que el comportamiento que se predijo en la sección anterior se cumple, pues vemos un aumento en la amplitud de la oscilación en ambos casos, aunque vemos que para un paso de tiempo más pequeño estas diferencias son más pequeñas, por lo que se podrían decir que para lograr un resultado óptimo con este método es necesario emplear un paso de tiempo τ muy pequeño lo cual no es práctico y conlleva un mayor tiempo de computo.

Se repitió el primer experimento esta vez utilizando el método de Verlet (ver Fig.4).

Vemos que la amplitud con el método de Verlet permanece estable, contrario a lo observado en el caso anterior con el método de Euler para el mismo paso de tiempo y la misma cantidad de pasos de integración, entonces de lo anterior vemos que el método de Verlet es más preciso que el método de Euler y con menor pérdida energética.

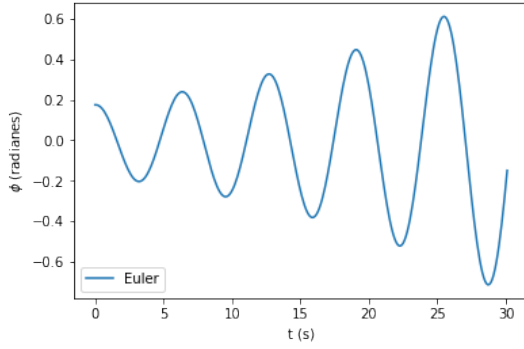


Figura 2. Solución numérica al péndulo simple con el método de Euler con las condiciones iniciales $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.1$ y una integración a 300 pasos.

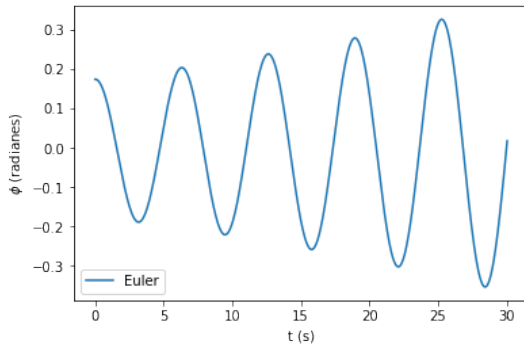


Figura 3. Solución numérica al péndulo simple con el método de Euler con las condiciones iniciales $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.05$ y una integración a 600 pasos.

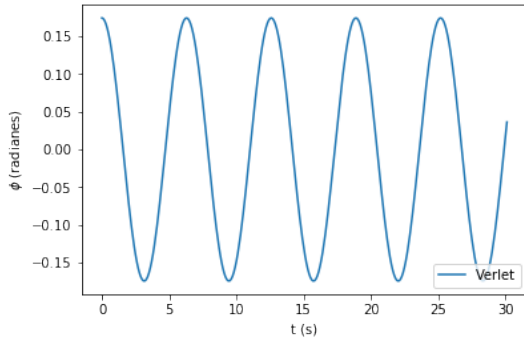


Figura 4. Solución numérica al péndulo simple con el método de Verlet con las condiciones iniciales $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.1$ y una integración a 300 pasos.

Después de comparar estos métodos utilizamos el método de Verlet para resolver el problema con condición inicial $\phi_m = 170^\circ$ y $\omega = 0$ para un paso de tiempo $\tau = 0.05$ integrando 600 pasos (ver Fig.5).

Vemos que para ángulos grandes la trayectoria tiende

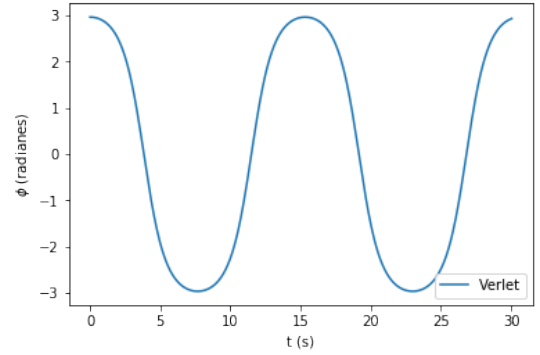


Figura 5. Solución numérica al péndulo simple con el método de Verlet con las condiciones iniciales $\phi_m = 170^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.05$ y una integración a 600 pasos.

a aplanarse cerca de los puntos de equilibrio, además de que se realizan menos oscilaciones que en el caso a 10° , lo que implica que se tiene un tiempo de oscilación mayor, tal como predice la ecuación (7).

Posteriormente se realiza una simulación del péndulo simple con las condiciones iniciales $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.1$ y una integración a 300 pasos (ver Fig. 6), para $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, con paso de tiempo $\tau = 0.05$ a 600 pasos (ver Fig. 6) y por último $\phi_m = 170^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.05$ y una integración a 600 pasos (ver Fig. 8) utilizando los métodos de Euler, Euler-Cromer, Punto Medio, Leap-Frog y Verlet.

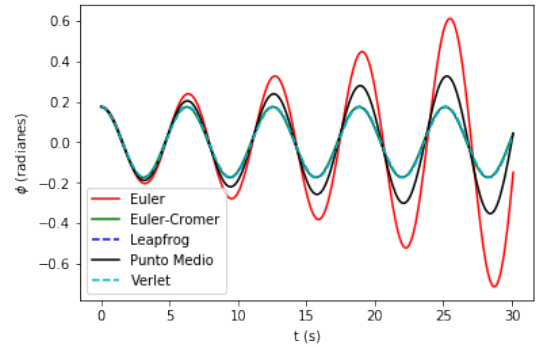


Figura 6. Comparación de los métodos de integración conocidos con las condiciones iniciales $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.1$ y una integración a 300 pasos.

En las figuras 6 y 7 notamos que independientemente del paso de tiempo que se utilice los métodos de Euler y de Punto Medio tienen una pérdida energética considerable para este problema, implicando que es recomendable su uso, por otro lado vemos que las curvas del método de Euler-Cromer, Leap-Frog y Verlet están sobrepuestas, lo que nos indica que los métodos tienen una buena preci-

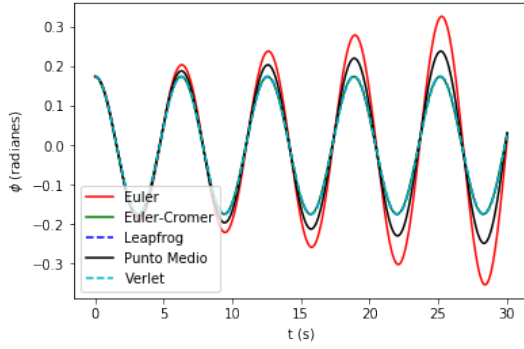


Figura 7. Comparación de los métodos de integración conocidos con las condiciones iniciales $\phi_m = 10^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.05$ y una integración a 600 pasos.

sión, con pequeñas diferencias en los errores energéticos y de periodo.

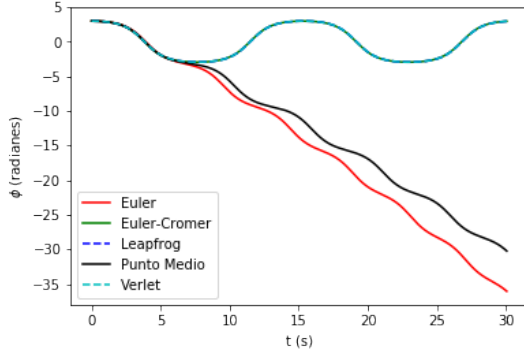


Figura 8. Comparación de los métodos de integración conocidos con las condiciones iniciales $\phi_m = 170^\circ$ y $\omega = 0$, para un paso de tiempo $\tau = 0.05$ y una integración a 600 pasos.

Para ángulos pequeños vemos que todos los métodos oscilan, por otro lado de la figura 8 vemos que el método de punto medio y el de Euler no oscilan, sino que se pierde la oscilación y la posición decae, nuevamente vemos que las gráficas para los métodos de Euler-Cromer, Leap-Frog y Verlet están empalmados comprobando nuevamente su precisión.

V. CALCULO DE LOS PERIODOS

Se modificó el método de Verlet de tal forma que calculara el periodo promedio de oscilación durante la integración, utilizando la ecuación

$$\langle T \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M T_k$$

donde M es el número de periodos efectuados durante la integración y T_k es el intervalo de tiempo estimado en cada oscilación. El error para este está dado por

$$\sigma = s/\sqrt{M}$$

donde

$$s = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^M (T_k - \langle T \rangle)^2}$$

Con lo anterior se generó un gráfico de periodo promedio en función del ángulo inicial que se presenta en la figura 9, en la figura 10 se muestra un aumento de la zona donde la aproximación para ángulos pequeños se buena.

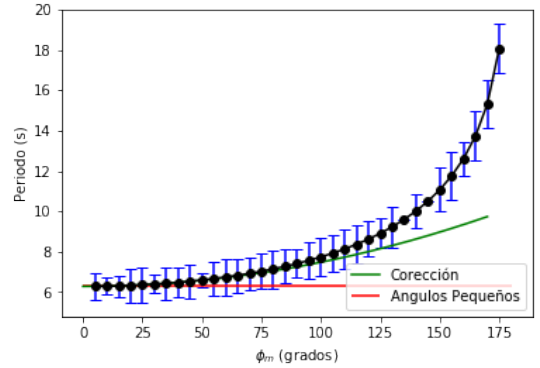


Figura 9. Periodo promedio de Oscilación en función del ángulo ϕ_m , en la curva roja se presenta el periodo esperado para ángulos pequeños mientras que en la verde se muestra el periodo con la corrección dada por la ecuación (7). Las barras de error están multiplicadas por 100.

Se calculó que el error máximo σ en este experimento fue de 1.23 %, además de que el ángulo donde la ecuación del periodo para ángulos pequeños tiene un error menor del 10 % es a partir de 70° .

Nótese que el periodo aumenta exponencialmente conforme el ángulo aumenta, en la curva verde se gráfica la aproximación a primer orden de la ecuación (7), vemos que si se tomaran más términos podríamos recuperar el comportamiento que vemos en el experimento numérico.

VI. ESPACIO FASE

Se modificó el programa para graficar $\omega(t)$ y $\phi(t)$, es decir el espacio fase, se utilizaron los ángulos 10, 45, 90, 120 y 170 grado. Obteniendo el gráfico que se presenta en la figura 11.

Notamos que la órbita cambia en función del ángulo inicial, para 10 y 45 grados el movimiento es periódico, mientras que para ángulos mayores la gráfica no muestra un movimiento periódico para las velocidades.

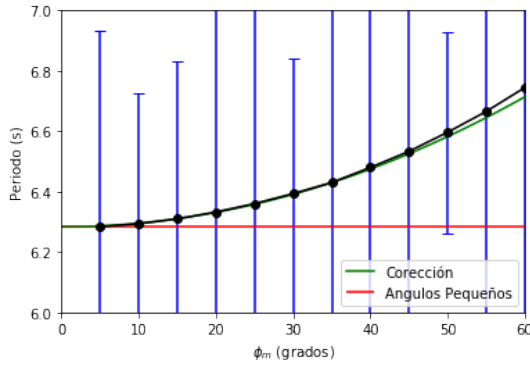


Figura 10. Período promedio de Oscilación en función del ángulo ϕ_m , en ángulos pequeños, vemos que la curva verde representa perfectamente el comportamiento para ángulos menores a 40° . Las barras de error están multiplicadas por 100.

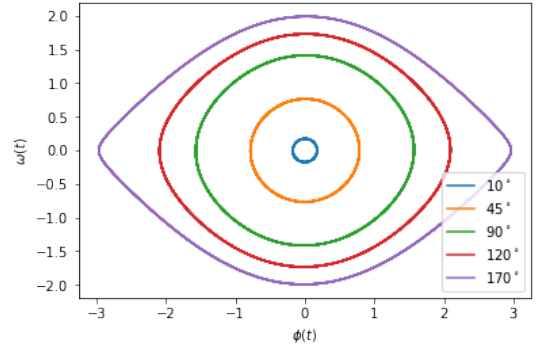


Figura 11. Espacio fase del péndulo para los ángulos 10, 45, 90, 120 y 170.

VII. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos se concluye que los métodos de Euler y Punto Medio no son efectivos para este tipo de problemas, y si se quiere que se conserve la energía en un buen porcentaje es necesario usar un paso de tiempo muy pequeño, esto no es práctico por lo que es mejor recurrir a otros métodos como Euler-Cromer, Leap-Frog y Verlet, que en este experimento tuvieron resultados muy parecidos e igual de efectivos.

El error obtenido con el método Verlet es pequeño aún cuando se utilizan pasos de tiempo relativamente grandes. Por lo que se recomienda su implementación en problemas de este tipo.

Se comprueba que la expresión para el periodo de un péndulo simple para ángulos pequeños no es efectiva para ángulos mayores a 70° para un 10% de error, además se obtiene un comportamiento en el periodo correspondiente al que se predice por la ecuación (7), por lo que se concluye las integraciones realizadas con el método de Verlet son satisfactorias.

-
- [1] H Young, R Freedman, F Sears, and M Zemansky. *Física universitaria*, vol. 1. Naucalpan de Juárez-Mexico: Pearson Educación de México, SA, 2009.
- [2] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.

- [3] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. Academic press, 2011.
- [4] Alejandro L Garcia. *Numerical methods for physics*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 2000.