

# Práctica 16. Electroestática y sobrerelajación.

Hiram K. Herrera Alcantar<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California,  
Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.\*

(Dated: 2 de mayo de 2018)

Se resuelven numéricamente diversos problemas de condiciones de frontera de electrostática, como el capacitor de placas paralelas, capacitores circulares concéntricos, así como el potencial eléctrico entre dos placas metálicas conectadas que forman un cierto ángulo entre ellas. Se utiliza el método de sobrerelajación, tanto en coordenadas cartesianas como polares, se comprueba la utilidad del método en ambos sistemas coordenados así como su superioridad comparado con el método de relajación usual.

## I. INTRODUCCIÓN

En la física se encuentran diferentes problemas cuya solución son ecuaciones diferenciales parciales, por ejemplo la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, la ecuación de onda, la ecuación de calor y la ecuación de Poisson y Laplace que está presente en los problemas de electrostática [1].

Usualmente para la solución analítica de estos problemas uno recurre a la separación de variables en el sistema de coordenadas más conveniente para la geometría del problema, pero hay ocasiones donde esta tarea es difícil por lo que se recurre a la resolución numérica de estos problemas.

El método más común para la solución de ecuaciones diferenciales parciales es el método de diferencias finitas, utilizando las expansiones de Taylor de las derivadas parciales utilizadas.

Existen diferentes métodos para las diferencias finitas como el método de relajación, sin embargo, en esta práctica se utiliza el método de sobrerelajación con el fin de comparar su eficiencia con el método de relajación normal.

Se utiliza este método para la solución de diferentes problemas de electrostática, además de la visualización de campo eléctrico y líneas equipotenciales en la solución.

## II. EL MÉTODO DE SOBRERELAJACIÓN

Uno de los métodos para solucionar ecuaciones diferenciales parciales más sencillos de implementar es el método de relajación dado por el siguiente algoritmo[2]:

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{4}[\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}] \quad (1)$$

Un inconveniente con este método es que puede ser lento, pues evalúa todos los puntos del potencial a un

paso en términos del paso anterior, sin embargo la convergencia del método se puede acelerar con el método de Gauss-Seidel, que consiste en la siguiente expresión:

$$\Phi_{i,j}^{(new)} = \frac{1}{4}[\Phi_{i+1,j}^{(old)} + \Phi_{i-1,j}^{(new)} + \Phi_{i,j+1}^{(old)} + \Phi_{i,j-1}^{(new)}] \quad (2)$$

este método converge más rápido que el de relajación usual, además produce menos errores de redondeo y utiliza menos memoria.

Otra técnica que se puede utilizar el método de relajación sucesiva que calcula el potencial nuevo como los valores viejos más una corrección  $r$  tal que

$$\Phi_{i,j}^{(new)} = \Phi_{i,j}^{(old)} + r_{i,j} \quad (3)$$

Acoplando este método al método de Gauss-Seidel para encontrar  $r$  podemos reescribir:

$$\begin{aligned} r_{i,j} &= \Phi_{i,j}^{(new)} - \Phi_{i,j}^{(old)} \\ &= \frac{1}{4}[\Phi_{i+1,j}^{(old)} + \Phi_{i-1,j}^{(new)} + \Phi_{i,j+1}^{(old)} + \Phi_{i,j-1}^{(new)}] - \Phi_{i,j}^{(old)} \end{aligned} \quad (4)$$

El método de sobrerelajación es entonces

$$\Phi_{i,j}^{(new)} = \Phi_{i,j}^{(old)} + \Omega r_{i,j} \quad (5)$$

## III. EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN COORDENADAS POLARES.

El método de relajación implementado anteriormente sirve para coordenadas cartesianas exclusivamente, sin embargo puede haber casos en los que es más fácil recurrir al método utilizando otro sistema coordenado, por ejemplo las coordenadas polares.

Partimos de la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} -4\pi\rho(r, \phi) &= \nabla^2\Phi(r, \phi) \\ &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Expandiendo en series de Taylor

---

\* hiram.herrera@uabc.edu.mx

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} &= \frac{\Phi(r + \Delta r, \theta) + \Phi(r - \Delta r, \theta) - 2\Phi(r, \theta)}{(\Delta r)^2} \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} &= \frac{\Phi(r, \theta + \Delta \theta) + \Phi(r, \theta - \Delta \theta) - 2\Phi(r, \theta)}{(\Delta \theta)^2} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{\Phi(r + \Delta r, \theta) - \Phi(r - \Delta r, \theta)}{2(\Delta r)}
\end{aligned} \quad (7)$$

Si tenemos el caso en que  $\Delta r = \Delta \theta = 1$ , como en esta práctica, podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} &= \Phi_{r+1, \theta} + \Phi_{r-1, \theta} - 2\Phi_{r, \theta} \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} &= \Phi_{r, \theta+1} + \Phi_{r, \theta-1} - 2\Phi_{r, \theta} \\
\frac{\partial \Phi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\Phi_{r+1, \theta} - \Phi_{r-1, \theta})
\end{aligned} \quad (8)$$

Si  $\rho = 0$  entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= \Phi_{r+1, \theta} + \Phi_{r-1, \theta} - 2\Phi_{r, \theta} + \frac{1}{2r}(\Phi_{r+1, \theta} - \Phi_{r-1, \theta}) \\
&\quad + \frac{1}{r^2}(\Phi_{r, \theta+1} + \Phi_{r, \theta-1} - 2\Phi_{r, \theta})
\end{aligned} \quad (9)$$

multiplicamos por  $r^2$  y despejamos  $\Phi_{r, \theta}$

$$\begin{aligned}
2(1 + r^2)\Phi_{r, \theta} &= r^2(\Phi_{r+1, \theta} + \Phi_{r-1, \theta}) + \frac{r}{2}(\Phi_{r+1, \theta} - \Phi_{r-1, \theta}) \\
&\quad + (\Phi_{r, \theta+1} + \Phi_{r, \theta-1})
\end{aligned} \quad (10)$$

Así obtenemos el algoritmo

$$\begin{aligned}
\Phi_{r, \theta} &= \frac{1}{r^2 + 1} \left[ \frac{r^2}{2}(\Phi_{r+1, \theta} + \Phi_{r-1, \theta}) + \frac{r}{4}(\Phi_{r+1, \theta} - \Phi_{r-1, \theta}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(\Phi_{r, \theta+1} + \Phi_{r, \theta-1}) \right]
\end{aligned} \quad (11)$$

#### IV. PROBLEMAS

En esta práctica se realiza una serie de problemas tanto numéricos como analíticos.

##### Problema 1

Consiste en resolver numéricamente el potencial de un capacitor de placas paralelas de largo  $w$ , separados una distancia  $d$  en una caja cuadrada aterrizada de largo  $L$ , como se muestra en la Figura 1, además de encontrar las líneas equipotenciales y líneas de campo eléctrico.

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 2

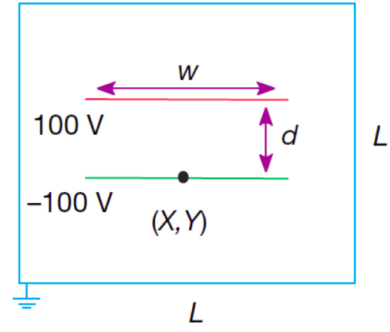


Figura 1. Capacitor de placas paralelas.

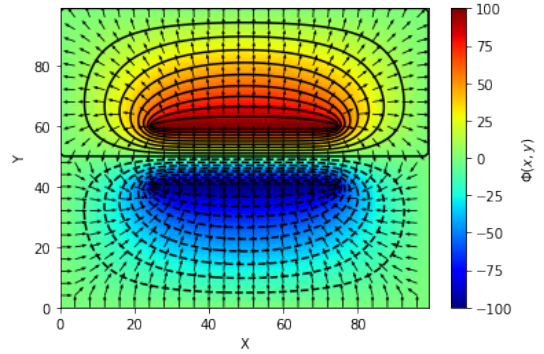


Figura 2. Solución numérica del capacitor de placas paralelas.

##### Problema 2

Consiste en resolver analíticamente el potencial en esquinas metálicas, como se muestra en la Figura 3.

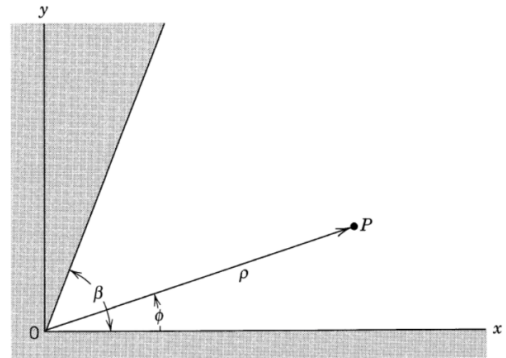


Figura 3. Esquinas metálicas.

Posteriormente se resuelve numéricamente los casos particulares que se muestran en la Figura 4.

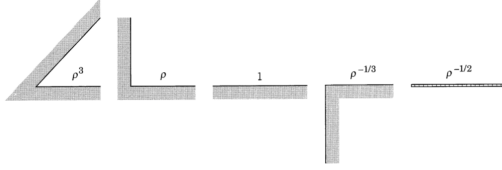


Figura 4. Casos particulares de esquinas metálicas.

#### Solución analítica

Como queremos el potencial en la región libre de cargas la ecuación a resolver es la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (12)$$

Solucionaremos en coordenadas polares, por lo que proponemos una solución de la forma

$$\Phi(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta),$$

Así

$$\Theta \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = 0$$

Multiplicamos por  $r^2$  y dividimos sobre  $\Phi(r, \theta)$ , igualamos el término que solo depende de  $r$  a  $\omega^2$  y el término que depende de  $\theta$  a  $-\omega^2$ , entonces:

Para la parte dependiente de  $r$  obtenemos

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \omega^2 R = 0,$$

cuyas soluciones son

$$R(r) = \begin{cases} A_1 r^\omega + B_1 r^{-\omega}, & \omega \neq 0 \\ A_2 + B_2 \ln(r), & \omega = 0 \end{cases}$$

La parte dependiente de  $\theta$ , es

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -\omega^2 \Theta$$

con soluciones

$$\Theta(\phi) = \begin{cases} C_1 \cos(\omega\theta) + D_1 \sin(\omega\theta), & \omega \neq 0 \\ C_2 + D_2 \theta, & \omega = 0 \end{cases}$$

Aplicado la condición de frontera

$$\Phi(r \geq 0, \theta = 0) = \Phi(r \geq 0, \theta = \beta) = V$$

donde  $V$  es el potencial en los planos.

Resultando que  $C_1 = 0$  y  $D_2 = 0$ . Como también consideramos el origen  $r = 0$ ,  $B_1 = 0$  y  $B_2 = 0$ .

Por lo que tenemos las soluciones

$$\Phi(r, \theta) = \begin{cases} A_1 D_1 r^\omega \sin(\omega r), & \omega \neq 0 \\ A_2 C_2, & \omega = 0 \end{cases}$$

Para que las soluciones cumplan las condiciones de frontera es necesario que se cumpla

$$A_2 C_2 = V$$

$$\sin(\omega 0) = \sin(\omega \beta) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{\beta}, n = 1, 2, \dots$$

Así obtenemos la solución:

$$\Phi(r, \theta) = V + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^{n\pi/\beta} \sin\left(\frac{n\pi\theta}{\beta}\right) \quad (13)$$

#### Solución numérica

Los resultados para los 5 casos particulares presentados en la Figura 4, se muestran en las Figuras 5, 6, 7, 8 y 9.

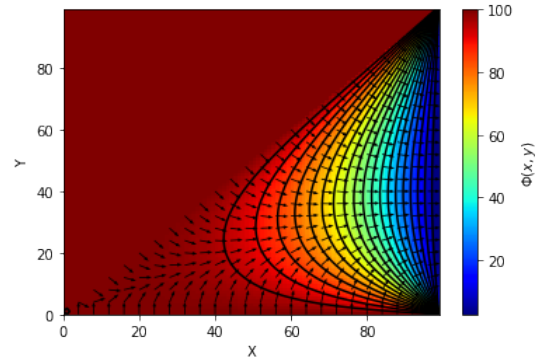


Figura 5. Placas a 45°.

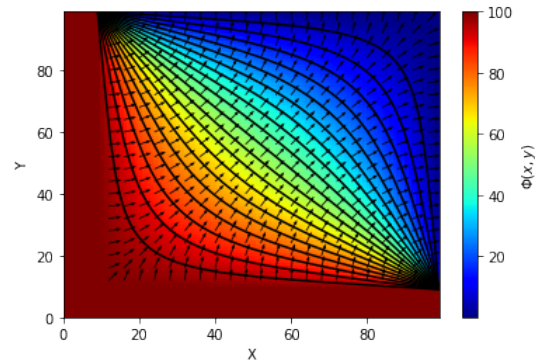


Figura 6. Placas a 90°.

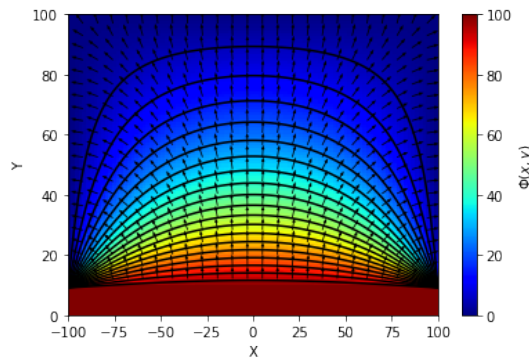


Figura 7. Placas a  $180^\circ$ .

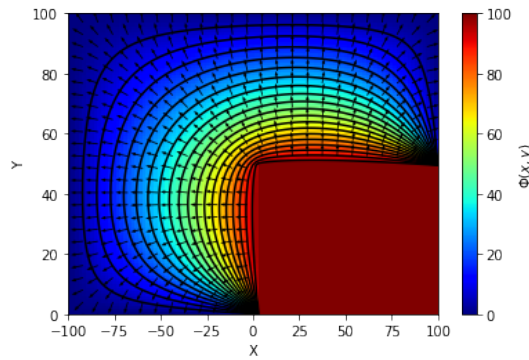


Figura 8. Placas a  $270^\circ$ .

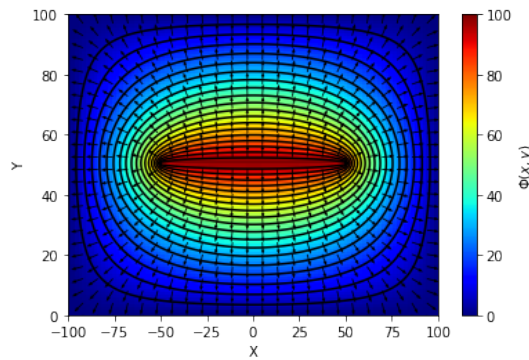


Figura 9. Línea de carga.

### Problema 3

Consiste en solucionar numéricamente el problema de un capacitor de dos discos concéntricos, como se muestra en la Figura 10.

Para este problema se utilizaron los dos métodos descritos en la sección II y III (cartesiano y polar), obteniendo los resultados que se observan en la Figura 11.

En el caso de este problema encontramos que ambos

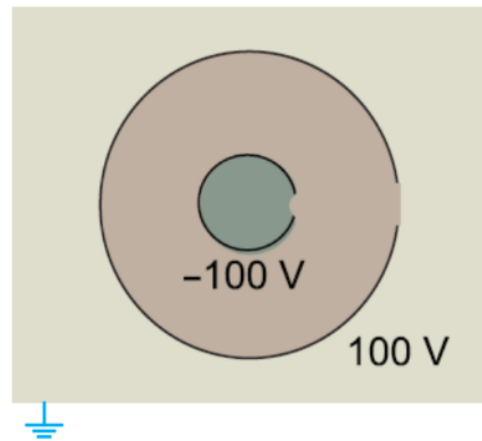
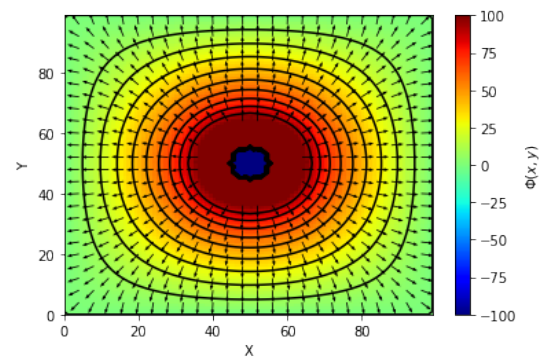
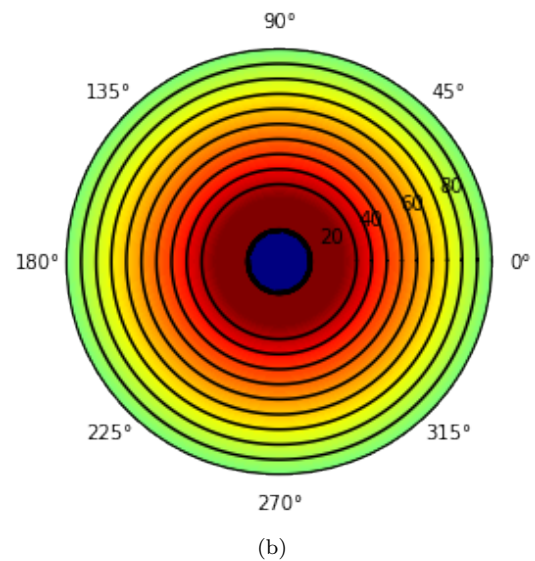


Figura 10. Capacitor de dos discos concéntricos.



(a)



(b)

Figura 11. Solución numérica para el capacitor de dos discos concéntricos en a) Se muestra el resultado para el método en coordenadas cartesianas y b) muestra el resultado del método en coordenadas polares.

métodos obtienen la misma solución, el método en coordenadas polares ofrece una mejor visualización de los anillos del capacitor, pero por otro lado el método en coordenadas cartesianas realizó menos iteraciones bajo las mismas condiciones que el método polar.

#### Problema 4

Este problema es similar a los presentados en el problema 2, en esta ocasión se tiene una región circular de radio  $a$  entre las placas, como se muestra en la Figura 12.

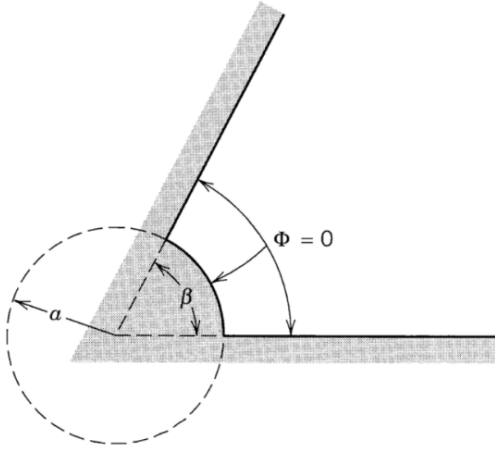


Figura 12. Placas colocadas con un ángulo  $\beta$  y con una región circular de radio  $a$ .

Para la solución numérica de este problema tomamos un ángulo de  $70^\circ$  y que el radio de la región circular es de 30 unidades.

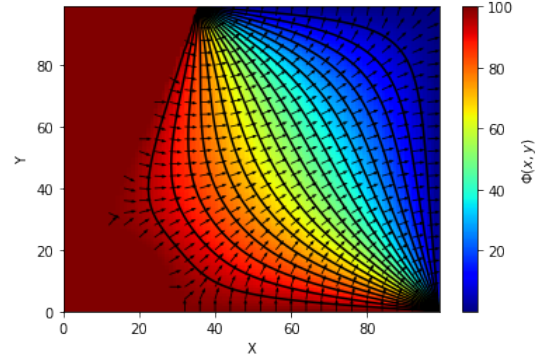
Los resultados se muestran en la Figura 13.

Nuevamente en ambos casos se obtienen soluciones similares, en esta ocasión el método polar convergió en menos iteraciones que el método cartesiano.

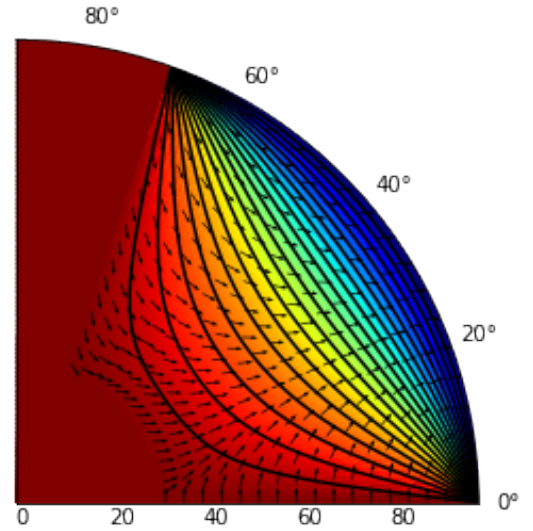
#### V. CONCLUSIONES

En esta práctica comprobamos la rapidez del método de sobrerelajación comparado con el método de relajación usual, pues en prácticas pasadas el problema de placas paralelas requirió al menos 1000 iteraciones, mientras que con el método de sobrerelajación no se excedieron las 200 iteraciones, es decir el algoritmo de sobrerelajación convergió 5 veces más rápido que el usual, obteniendo los mismo resultados.

Además se comprueba la utilidad de manejar diferentes sistemas de coordenadas para estos problemas, pues resulta que en ocasiones hay problemas más sencillos en un sistema coordenado polar por ejemplo que en el sistema cartesiano, incluso si se realizan los dos métodos para un solo problema podemos encontrar que el método



(a)



(b)

Figura 13. Solución numérica para las placas separadas por un ángulo de  $70^\circ$  con una región circular central de radio 30 unidades en a) Se muestra el resultado para el método en coordenadas cartesianas y b) muestra el resultado del método en coordenadas polares.

polar puede converger más rápido que el cartesiano para ciertos problemas, como fue el caso del problema 4.

Se comprueba el uso del método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Poisson o Laplace que se encuentran en muchos problemas de la Física.

- 
- [1] John David Jackson. Classical electrodynamics, 1999.  
 [2] Rubin H Landau, Cristian C Bordeianu, et al. *Computational Physics: Problem Solving with Python*. John Wiley & Sons, 2015.

*tational Physics: Problem Solving with Python*. John Wiley & Sons, 2015.