Practica 6. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias III: El péndulo y el método de Verlet

Dr. Ramón Carrillo Bastos

Física Computacional

1. El péndulo simple.

Considere el movimiento de un péndulo simple como el que se muestra en Fig. 1.

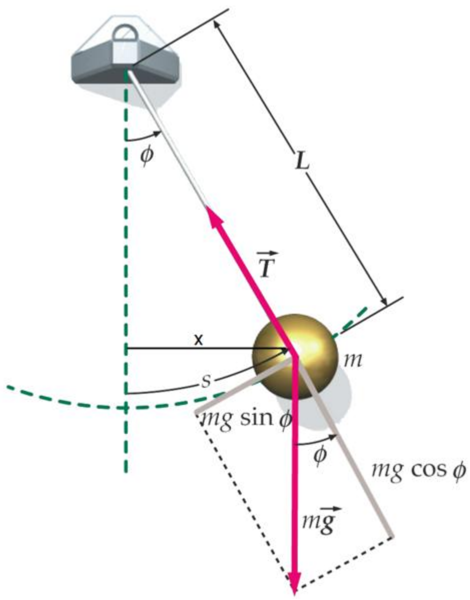

Figura 1: Péndulo simple.

La ecuación de movimiento es

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\sin\phi. \tag{1}$$

donde L es la longitud del brazo, g es la aceleración a la gravedad y m es la masa. La ecuación 1 en aproximación de ángulo pequeño se puede escribir de la siguiente manera,

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{L}\phi. \tag{2}$$

Esta ecuación diferencial es la misma que la de oscilador armónico y por tanto comparten soluciones, de tal manera que

$$\phi = C_1 \cos\left(2\pi t/T_s + C_2\right),$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes que se determinan por condiciones iniciales en ϕ y $\dot{\phi}$, T_s es el periodo de ángulo pequeño y está dado por

$$T_s = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{3}$$

Esta aproximación es razonable para amplitudes de 20 grados o menos.

Desmuestre que el primer término de correción a T_s es de segundo orden en ϕ_m (el ángulo de máximo amplitud) y está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\phi_m^2 + ...\right). \tag{4}$$

2. Métodos de Verlet

Partimos del para de ecuaciones que resultan de la ecuación de Newton

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t), \tag{5}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{a}(\mathbf{r}). \tag{6}$$

Usando las fórmulas centrales para la primera y la segunda derivada, podemos escribir

$$\frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_{n-1}}{2\tau} + O(\tau^2) = \mathbf{v}_n, \tag{7}$$

$$\frac{\mathbf{r}_{n+1} + \mathbf{r}_{n-1} - 2\mathbf{r}_n}{\tau^2} + O(\tau^2) = \mathbf{a}_n, \tag{8}$$

donde $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}(\mathbf{r}_n)$. Acomodando términos obtenemos,

$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_{n-1}}{2\tau} + O(\tau^2), \tag{9}$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = 2\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1} + \tau^2\mathbf{a}_n + O(\tau^4). \tag{10}$$

Las ecuaciones 9 y 10 se conocen como el método de Verlet. Este método, como todo los métodos centrales tiene la desventaja que no se puede «autoiniciar», por ejemplo para $n = 0$ en principio no se conoce $\mathbf{r}_{-1}$. Si bien se podría usar el método de Euler para escribir

$$\mathbf{r}_{-1} = \mathbf{r}_0 - \tau\mathbf{v}_0, \tag{11}$$

se recomienda usar

$$\mathbf{r}_{-1} = \mathbf{r}_0 - \tau\mathbf{v}_0 + \frac{\tau^2}{2}\mathbf{a}(\mathbf{r}_0), \tag{12}$$

para iniciar el método de Verlet, ya que preserva la precisión.

3. Simulación del péndulo.

1. En la aproximación de ángulo pequeño, la energía total del péndulo simple es

   $$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + \frac{1}{2}mgL\phi^2 - mgL. \tag{13}$$

   Demuestre anlíticamente que E incrementa monotónicamente con el tiempo si se usa el método de Euler para calcular el movimiento.

2. Implemente en un código en Python la solución numérica del péndulo simple con el método de Euler. Grafique:

   a) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.1$ y se calculan 300 pasos.

   b) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.05$ y se calculan 600 pasos.
   Compara las gráficas

3. Implemente en un código en Python la solución numérica del péndulo simple con el método de Verlet. Grafique:

   a) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.1$ y se calculan 300 pasos.

   b) ϕ vs t si $\phi_m = 170$ grados, $\tau = 0.05$ y se calculan 600 pasos.
   Compare ambas gráficas

4. Soluciones el problema del péndulo simple con el método de Euler-Cromer, Leap-Frog y el método de punto medio. Encuentre las siguientes gráficas:

   a) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.1$ y se calculan 300 pasos.

   b) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.05$ y se calculan 600 pasos.

   c) ϕ vs t si $\phi_m = 170$ grados, $\tau = 0.05$ y se calculan 600 pasos.
   Compare las graficas con las de Euler y Verlet, discuta sus resultados.

5. Usando el método de Verlet, obtenga una gráfica del periodo T como función del ángulo ϕ_m. Cerciorese o de usar un paso τ suficientemente pequeño tal que se obtenga al menos 1 % de exactitud en T. Para estimar el periodo use

$$\left\langle \tilde{T} \right\rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \tilde{T}_k, \tag{14}$$

   donde M es el número de periodos y $\tilde{T}_k$ es el intervalo de tiempo estimado de cada oscilación (periodo). El error (exactitud) de esta medición se puede estimar usando la desviación estandard de $\tilde{T}$,

$$\sigma = s/\sqrt{M}, \tag{15}$$

   con

$$s = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M} \left(\tilde{T}_k - \left\langle \tilde{T} \right\rangle \right)^2}. \tag{16}$$

   a) En la misma gráfica dibuje la aproximación de angulo pequeño congurente con ecuación 3 y 4.

   b) Estime los valores de ϕ_m para los cuales el error en cada aproximación excede el 10 %.

6. Modifique sus programas para que se grafique $\omega(t)$ y $\phi(t)$, estos es una gráfica del espacio fase. En vez de correr su programa para un número fijo de pasos, modifiquelo para que corrar durante un periodo. Usando el método de Verlet, dibuje para angulos iniciales de 10, 45, 90, 120 y 170 grados. Note como la forma de órbita cambia como función del ángulo inicial.