Practica 5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II: Euler, Euler-Cromer y Punto Medio.

Dr. Ramón Carrillo Bastos

Física Computacional

1. Movimiento de un proyectil

Considere el movimiento de una partícula en movimiento parabólico, digamos una pelota de beisbol 1. Para describir el movimiento necesitamos calcular el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{v}(t)$ para la pelota. La ecuación de movimiento es

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_f(v) - g\hat{\mathbf{y}}. \tag{1}$$

donde m es la masa de la pelota, $\mathbf{F}_f$ es la fuerza de fricción debido al aire, g la aceleración a la gravedad y $\hat{\mathbf{y}}$ el vector unitario en la dirección vertical. El movimiento es dos dimensional, así que podemos ignorar la componente z.

La resitencia del aire incrementa con la velocidad del objeto y la forma precisa de $\mathbf{F}_f$ depende del flujo de aire alrededor del obejto. Comunmente esta fuerza se aproxima como

$$\mathbf{F}_f = -\frac{1}{2}C_a\rho A\left|\mathbf{v}\right|\mathbf{v}. \tag{2}$$

donde C_a es el coeficiente de arrastre, ρ la densidad del aire y A el area transversal del proyectil. El coeficiente de arrastre es un parámetro adimensional que depende de la geometría del proyectil.

Para una esfera suave de radio R moviendose muy lentamen a través de un fluído, el coeficiente de arrastre está dado por la Ley de Stokes,

$$C_d = \frac{12\nu}{Rv} = \frac{12}{\mathrm{Re}},$$

con ν la viscosidad del fluído ($\nu \approx 1.5\times 10$) y $\mathrm{Re} \equiv 2rv/\nu$ es el número de Reynolds. Par aun objeto del tamaño de una pelota de beisbol moviendose a través del aíre, la Ley de Stokes es válida sólo para velocidades menores que 0.2 mm/s ($\mathrm{Re}\approx 1$).

A velocidades más altas (más de 20 cm/s, $\mathrm{Re} > 10^3$), la estela detrás de la esfera desarrolla vórtices y el coeficiente de arrastre es aproximadamente constante ($C_d = 0.5$) para un rango amplio de velocidades. Cuando el número de Reynolds excede el valor crítico, el flujo de la estela se vuelve turbulento y el coeficiente de arrastre se reduce dramáticamente. Esta reducción ocurre porque la turbulencia modifica la región de la estela detrás de la esfera. Para una esfera suave, el número de Reynolds crítico es aproximadamente 3×10^5. Para una pelota de beisbol, este coeficiente de arrastre es menor que en la esfera suave, debido a la costuras,

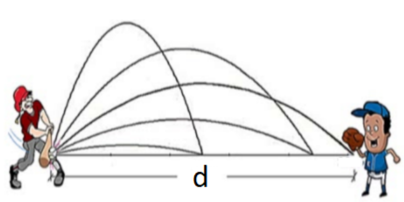

Figura 1: Pelota de beisbol en tiro parábolico.

precipitandola a la zona de turbulencia. Tomamos $C_d \approx 0.35$ como un valor promedio típico en el rango de valores de velocidad para una pelota de beisbol.

La pelota de beisbol tiene una masa de 0.145 kg y un diámetro de 7.4 cm.

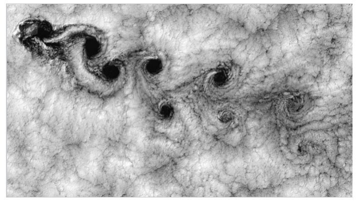

Figura 2: Calle de vórtices de von Kármán en una formación nubosa sobre las Islas Juan Fernández, en la costa de Chile.

Una velocidad típica de un homerun es 50 m/s y un tiro despacio es de 15m/s.

Ejercicios:

1. Encuentre analícamente la velocidad a la que la resistencia del aire iguala la fuerza gravitacional.
2. Desprecie la resistencia del aire y solucione analíticamente el problema, encuentre:
   a) $\mathbf{r}(t)$
   b) $x_{max}(v_0, \theta)$
   c) $y_{max}(v_0, \theta)$
   d) $t_{vuelo}(v_0, \theta)$

   Estos resultados son válidos solo cuando la resistencia del aire es despreciable, sin embargo es necesario tener esta información. Si se sabe la solución analítica en un caso especial, podemos probar nuestro programa con este caso. De hecho uno debe de hacerlo siempre, probar su programa para un caso con solución conocida.
3. Escriba un código que usando el algoritmo de Euler solucione numéricamente la dinámica de una pelota en presencia de fricción.
   a) Usando este programa encuentre la respuesta numérica al inciso anterior 2).
   b) Haga gráficas donde presente la solución numérica y analítica.
4. Hagamos un análisis de los errores. Existen dos tipos de errores el local y el global, esta clasificación refiere al intervalo de tiempo. En un problema típico de trayectoria queremos evaluar $\mathbf{r}(t)$ en el intervalo $t \in \{0, T\}$. el número de pasos es $N_\tau = T/\tau$; note que si se reduce τ, debemos tomar más pasos. Si el error local es $O(\tau^n)$, entonces estimamos el error global como

$$error_{global} \propto N_\tau \times (error_{local}) = N_\tau O(\tau^n) = TO(\tau^{n-1}).$$

   Por ejemplo, el método de Euler tiene un error de truncamiento local de $O(\tau^2)$, pero un error global de $O(\tau)$. Claro es que este análisis nos da solo una aproximación, ya que no sabemos si los errores se acumulan o se cancelan. El error global para un esquema numérico depende altamente en el problema que se está estudiando. Una pregunta que siempre s ehace es: «¿Qué valor eliges para τ?» y la respuesta es: «una valor pequeño como 10^{-8}». Tratemos de hacer algo mejor que eso.

   a) Asumamos que el error de redondeo es despreciable y solo tenemos que preocuparnos por el errorm de truncamiento. El error de truncamiento para el método de Euler es $\tau^2 r'' = \tau^2 a$. Usando solo los órdenes de magnitud, tomando $a \approx 10$ m/s^2, el error en cada paso en la posición es 10^{-1} m, cuando $\tau = 10^{-1}$ s. Si el tiempo de vuelo es $T \approx 10^0$ s. entonces el error global es del orden de un metro. Si un error de esta magntidu es inacpetable entonces debemos reducir el paso τ. En el mundo real generalmente uno no hace esto último, por diversas razones: ecuacion es complicadas, problemas con el redondeo, flojera, etc. Sin embargo uno puede usar su intuición física. Pregúntese a sí mismo: «¿En qué escala de tiempo el movimiento es casi lineal?» Por ejemplo el movimiento de la pelota es parabólico, si la pelota está en el aire solo unos segundos podemos decir que la parabola se peude aproxima a una linea recta. Esto se puede comprobar variando $\tau = 0.1$ a $\tau = 0.01$ y ver si el resultado varía mucho, si no lo ahce entonces nuestra intuición estaba correcta. Algunos programas hacen lo anterior de manera automática, se les llama adaptativos, los vamos a ver más adelante.

b) Caracterice el error local y global en las cantidades del inciso anterior.

2. Métodos de punto medio

Una simplifición simple (y aún sin justificar) es tomar el método de Euler dado por

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \tau \mathbf{a}_n \tag{3}$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \tau \mathbf{v}_n \tag{4}$$

y modificarlo como sigue

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \tau \mathbf{a}_n \tag{5}$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \tau \mathbf{v}_{n+1} \tag{6}$$

Parece una modificación muy sutil, de hecho el error se mantiene del mismo orden pero se hag ganado algo.

1. Pruebe los resultados anteriores con esta modificación que se conoce como el algoritmo de Euler-Cromer.

2. Modifique ahora para usar el método de punto medio, dado por

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \tau \mathbf{a}_n \tag{7}$$

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \tau \frac{\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n}{2} \tag{8}$$

Pruebe los resultados anteriores con este otro método.