Práctica 5. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias II: Euler, Euler-Cromer y Punto Medio

Hiram K. Herrera Alcantar[1]

[1] *Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma de Baja California, Apartado Postal 1880, 22800 Ensenada, Baja California, México.* *

(Dated: 27 de febrero de 2018)

Se resuelve analíticamente la ecuación de movimiento de una pelota en movimiento parabólico sin resistencia al aire. Además se utilizan los métodos de Euler, Euler-Cromer y Punto medio para la solución numérica de este problema comparando su precisión con la solución analítica encontrada. Por último se resuelve el problema numérico donde se incorpora la resistencia al aire.

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas clásicos en la física es la descripción del movimiento de proyectiles en dos dimensiones, es decir, en movimiento parabólico. Generalmente para la resolución de este problema se desprecia la resistencia que presenta el aire al movimiento del proyectil, y se procede a resolver la ecuaciones de básicas de cinemática [1], pero el caso más general y acercado a lo que se experimenta en la vida real es considerar esta resistencia.

Para la descripción del movimiento del proyectil es necesario resolver la ecuación de movimiento dada por:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}_f(v) - g\hat{\mathbf{y}}, \tag{1}$$

donde m es la masa del proyectil, la fuerza debida a la resistencia del aire es $\mathbf{F}_f(v)$, la aceleración debida a la gravedad es g y $\hat{\mathbf{y}}$ es el versor en la dirección vertical y [2].

La resistencia al aire incrementa conforme aumenta la velocidad del objeto, dependiendo del flujo de aire al rededor del proyectil, usualmente ésta se aproxima a

$$\mathbf{F}_f(v) = -\frac{1}{2}C_d\rho A|\mathbf{v}|\mathbf{v}, \tag{2}$$

donde C_d es el coeficiente de arrastre, ρ la densidad del aire y A es el área de la sección transversal del proyectil.

En esta práctica se encuentra la velocidad a la que la fuerza de gravedad es igual a la fuerza que ejerce la resistencia al aire, además se resuelven analíticamente las ecuaciones de movimiento para un movimiento parabólico sin resistencia al aire, para fin de comparar con las soluciones numéricas que se generan con los métodos de Euler, Euler-Cromer y Punto Medio como integradores de ecuaciones diferenciales.

II. SOLUCIONES ANALÍTICAS

En esta sección se resuelven analíticamente la velocidad a la que la fuerza de gravedad es igual a la resistencia del aire; y se solucionan analíticamente las ecuaciones de movimiento del proyectil sin resistencia al aire.

A. Igualdad de la fuerza gravedad con la resistencia al aire

Para este problema no nos interesa la componente x del problema por lo que nos enfocamos a la velocidad en dirección de y, partiendo de la ecuación

$$\frac{1}{m}\vec{F}_{fy}(v) - g = 0,$$

entonces;

$$\frac{1}{2m}C_d\rho A|\mathbf{v}|v_y - g = 0,$$

tomando en cuenta una caída libre entonces $\mathbf{v} = v_y$, entonces despejando v_y obtenemos:

$$\boxed{v_y = \sqrt{\frac{2mg}{C_d\rho A}}} \tag{3}$$

se toma que la densidad del aire es $\rho = 1.225$ kg/m^3, y se asume que el proyectil es una esfera perfecta por lo que $A = \pi * R^2$, siendo R el radio de la esfera; en este problema nos enfocaremos a la solución para una pelota de béisbol de masa $m = 0.145$ kg y diámetro 7.4 cm; tomamos $C_d \approx 0.35$ como un valor promedio típico en el rango de valores de velocidad para la pelota.

De lo anterior calculamos que la velocidad que una pelota de béisbol debe tener para que esto ocurra es $v_y = 39.26$ m/s

B. Soluciones a la ecuación de movimiento

Para la solución analítica despreciamos la resistencia al aire, entonces

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -g\hat{\mathbf{y}}, \tag{4}$$

* hiram.herrera@uabc.edu.mx

entonces tenemos las ecuaciones de movimiento para cada componente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ ; \ \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

partiendo de las condiciones iniciales $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0)$ y $\mathbf{v_0} = (v_{x0}, v_{y0})$ integramos con respecto al tiempo dos veces tenemos que

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t \ ; \ y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

o bien podemos escribirlo de forma compacta en:

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{r_0} + \mathbf{v_0} - \tfrac{1}{2}gt^2\hat{\mathbf{y}}} \tag{5}$$

si el proyectil inicia su vuelo desde el origen y su velocidad está a un ángulo θ sobre la horizontal, de la solución de $y(t)$ $y(t) = 0$, entonces

$$v_0 sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

así el tiempo de vuelo es:

$$\boxed{t_{vuelo} = \tfrac{2v_0}{g}\sin\theta} \tag{6}$$

con el tiempo de vuelo calculado tenemos que x_{max} se alcanza en el tiempo de vuelo entonces de sustituir el tiempo de vuelo en la ecuación de $x(t)$ tenemos que:

$$\boxed{x_{max} = \tfrac{2v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \tfrac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)} \tag{7}$$

donde se ha utilizado la identidad trigonométrica $2\cos\theta\sin\theta = \sin(2\theta)$.

Por último sabemos que si se parte del origen y_{max} se alcanza en la mitad del tiempo de vuelo entonces, de sustituir esto en la ecuación de $y(t)$ obtenemos

$$\boxed{y_{max} = \tfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta} \tag{8}$$

III. SOLUCIONES NUMÉRICAS

Para las soluciones numéricas del problema de tiro parabólico utilizaremos los siguientes métodos de integración

A. Método de Euler

Las ecuaciones para el método de Euler son de la forma:

$$\mathbf{v_{n+1}} = \mathbf{v_n} + \tau\mathbf{a_n} \tag{9}$$

$$\mathbf{r_{n+1}} = \mathbf{r_n} + \tau\mathbf{v_n} \tag{10}$$

primero se tomó el valor $\tau = 0.1$, con la condición inicial de que la pelota de béisbol parte del origen con una velocidad $v_0 = 15$ m/s a un ángulo de 45° sobre la horizontal, para estas condiciones se tienen los valores teóricos $x_{max} = 22.96$ m, $y_{max} = 5.74$ m y $t_{vuelo} = 2.17$ s, al integrar la ecuación de movimiento con este método y τ se obtuvo un error porcentual del 6.25 % para x_{max}, 9.36 % para y_{max} y 6.25 % para t_{vuelo}. Obteniendo la trayectoria que se muestra en la figura 1.

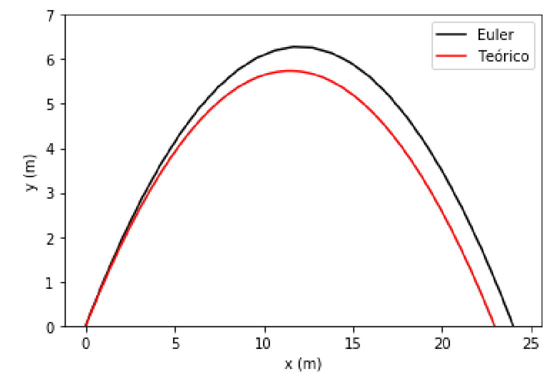

Figura 1. Trayectoria de la pelota de béisbol con el método de Euler para un paso de tiempo $\tau = 0.1$ y condiciones iniciales $\mathbf{r_0} = 0$, $v_0 = 15$ m/s y $\theta = 45°$.

El error en $xmax$ corresponde a aproximadamente un metro, que también se ve reflejado en el gráfico por lo que no es aceptable entonces se reduce el paso de tiempo a $\tau = 0.01$, obteniendo un error porcentual del 0.71 % para x_{max}, 0.93 % para y_{max} y 0.71 % para t_{vuelo} y la trayectoria que se muestra en la figura 2.

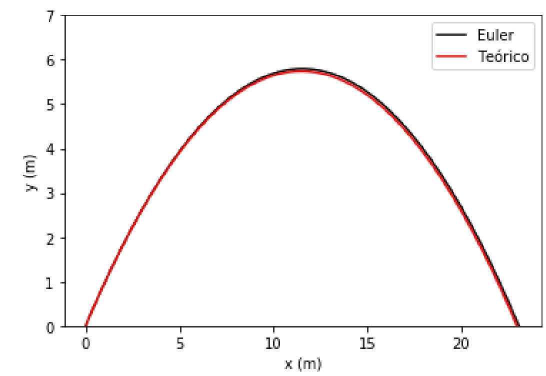

Figura 2. Trayectoria de la pelota de béisbol con el método de Euler para un paso de tiempo $\tau = 0.01$ y condiciones iniciales $\mathbf{r_0} = 0$, $v_0 = 15$ m/s y $\theta = 45°$.

Vemos que el error se redujo considerablemente al reducir el paso del tiempo un orden de magnitud, por lo que utilizaremos este mismo paso de tiempo para los siguientes métodos para comprobar cual de los tres es más efectivo para este problema.

B. Método de Euler-Cromer

Es una simple modificación del método de Euler; las ecuaciones para este método son de la forma:

$$\mathbf{v_{n+1}} = \mathbf{v_n} + \tau \mathbf{a_n} \tag{11}$$
$$\mathbf{r_{n+1}} = \mathbf{r_n} + \tau \mathbf{v_{n+1}} \tag{12}$$

Con las mismas condiciones iniciales que se utilizaron para el método de Euler y un paso de tiempo $\tau = 0.01$ obtenemos los errores porcentuales 0.21 % para x_{max}, 0.92 % para y_{max} y 0.21 % para t_{vuelo} con la trayectoria que se muestra en la figura 3.

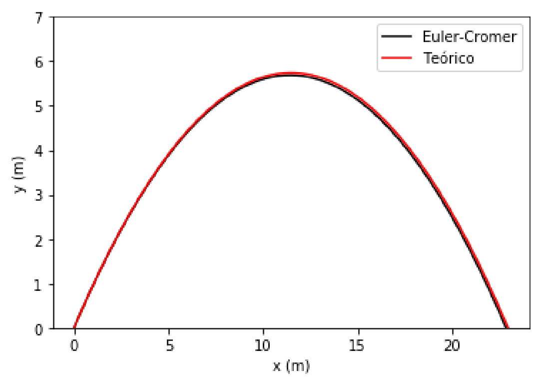

Figura 3. Trayectoria de la pelota de béisbol con el método de Euler-Cromer para un paso de tiempo $\tau = 0.01$ y condiciones iniciales $\mathbf{r_0} = 0$, $v_0 = 15$ m/s y $\theta = 45°$.

Vemos que vamos las mismas circunstancias este método es superior al método de Euler ligeramente.

C. Método del Punto medio

El método del punto medio parte de las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{v_{n+1}} = v_n + \tau \mathbf{a_n} \tag{13}$$
$$\mathbf{r_{n+1}} = \mathbf{r_n} + \tau \frac{\mathbf{v_{n+1}} + \mathbf{v_n}}{2} \tag{14}$$

Utilizando las mismas condiciones iniciales de los problemas anteriores y el paso de tiempo $\tau = 0.01$ obtenemos un error porcentual 0.21 % para x_{max}, 4.5×10^{-4} % para y_{max} y 0.21 % para t_{vuelo}

La trayectoria que se muestra en la figura 4, en esta figura notamos que no se puede distinguir la solución numérica de la teórica, esto es de esperarse pues el error en y_{max} es muy pequeño.

De lo anterior se concluye que par este problema la mejor opción a elegir es el método del Punto Medio, pues si bien se obtuvieron errores en x_{max} y t_{vuelo} similares a los del método de Euler-Cromer, el error en y_{max} es considerablemente menor.

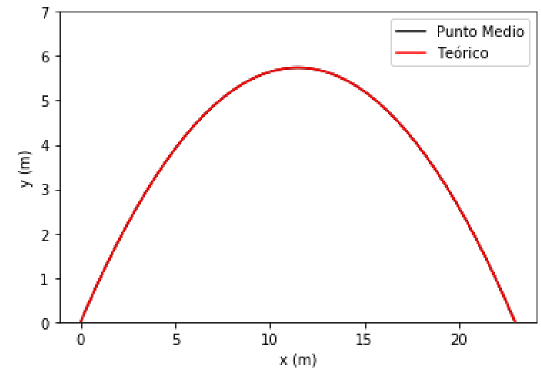

Figura 4. Trayectoria de la pelota de béisbol con el método de Punto Medio para un paso de tiempo $\tau = 0.01$ y condiciones iniciales $\mathbf{r_0} = 0$, $v_0 = 15$ m/s y $\theta = 45°$.

D. Resistencia al Aire.

Dado que el método del Punto Medio fue el mejor para el problema de movimiento parabólico sin resistencia al aire, lo utilizaremos para resolver el problema donde se considera la resistencia al aire, nuevamente tomamos como condición inicial que la pelota parte del origen, pero dado que no se notara una diferencia apreciable para la velocidad de 15 m/s tomamos 50 m/s como nuestra velocidad inicial a un ángulo $\theta = 45°$ sobre la horizontal.

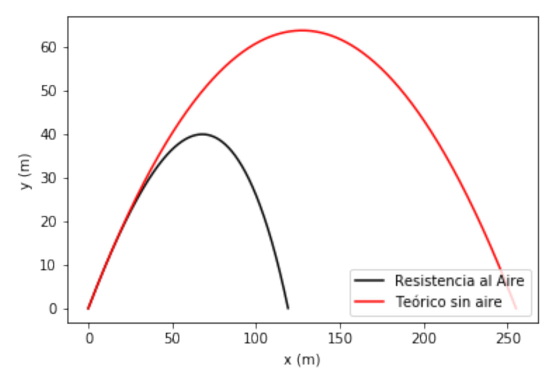

Figura 5. Trayectoria de la pelota de béisbol con el método de Punto Medio para un paso de tiempo $\tau = 0.01$ y condiciones iniciales $\mathbf{r_0} = 0$, $v_0 = 50$ m/s y $\theta = 45°$ donde se ha considerado la resistencia al aire.

De la figura 5, vemos que el alcance de la pelota se ve reducido a aproximadamente 125 m, menos de la mitad del valor teórico sin resistencia al aire, además se nota que la trayectoria de la pelota cambia a una caída muy recta, en lugar del movimiento parabólico usual.

IV. CONCLUSIONES

De los resultados obtenidos se concluye que para la solución numérica del movimiento parabólico sin resistencia al aire de los tres métodos utilizados el más eficiente y preciso es el método del Punto Medio, además se obtuvo que al reducir el paso del tiempo en un orden de magnitud el error porcentual también se ve reducido, considerablemente, por lo que es importante utilizar un paso de tiempo acorde al problema que se desea resolver.

Por último se deja en claro la importancia de los métodos numéricos pues fue posible predecir la trayectoria de una pelota en presencia de resistencia al aire, ya que este es un problema difícil de resolver analíticamente.

[1] Jerry D WILSON and Anthony J Buffa. Física (2ª edición). *Editorial Prentice-Hall. México*, 1996.

[2] Alejandro L Garcia. *Numerical methods for physics*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 2000.