

Practica 7. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias IV: El péndulo invertido y el esquema de Velocidad de Verlet

Dr. Ramón Carrillo Bastos

Física Computacional

1. El péndulo invertido.

Considere el movimiento de un péndulo invertido: una masa m fija al final de una barra rígida de longitud l . La barra está fija en un pivote móvil de acuerdo a $h(t) = h_0 \cos \omega t$ como se muestra en la Fig. 1.

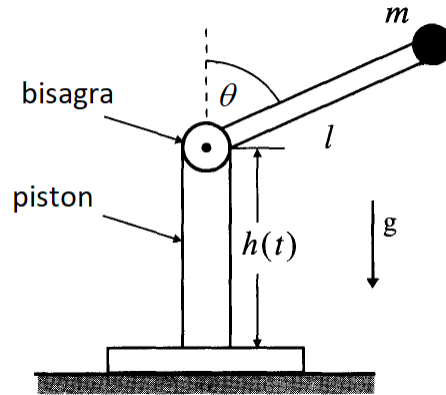


Figura 1: Péndulo invertido.

Considere el carro fijo, (1) demuestre que la ecuación de movimiento es

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 h_0 \sin \theta \cos(\omega t) - g \sin \theta = 0. \quad (1)$$

donde l es la longitud del brazo, ω la frecuencia de movimiento del pistón g es la aceleración a la gravedad y m es la masa.

2. Esquema de velocidad de verlet

El esquema de velocidad de Verlet está definido como

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + \tau \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \tau^2 \mathbf{a}_n. \quad (2)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\tau}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}), \quad (3)$$

(2) demuestre analíticamente que los valores de \mathbf{r}_n dados en este esquema coinciden con los calculados con el método standard de Verlet.

3. Simulación del péndulo invertido.

1. Implemente en un código en Python la solución numérica del péndulo simple con el Esquema de velocidad de Verlet.
 - a) Analice el movimiento cuando $h_0 = 0$ y demuestre que para ciertas condiciones iniciales se recuperan las trayectorias del péndulo simple en aproximación de bajas energías. Compare sus resultados con los obtenidos en la práctica pasada.
 - 1) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.1$ y se calculan 300 pasos.
 - 2) ϕ vs t si $\phi_m = 10$ grados, $\tau = 0.05$ y se calculan 600 pasos.
 - 3) ϕ vs t si $\phi_m = 170$ grados, $\tau = 0.05$ y se calculan 600 pasos.Compare las graficas con las de Euler, Euler-Cromer y Verlet, discuta sus resultados.
 - b) Analice los casos
 - 1) Tome $h_0 \approx 0.1l$ y analice los siguiente casos
 - a' $\omega \ll \sqrt{\frac{g}{l}}$
 - b' $\omega \approx \sqrt{\frac{g}{l}}$
 - c' $\omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$Discuta sus resultados.
 - c) Modifique sus programas para que se grafique $\omega(t)$ y $\phi(t)$, estos es una gráfica del espacio fase. En vez de correr su programa para un número fijo de pasos, modifíquelo para que corra durante el tiempo equivalente a un periodo. Dibuje para angulos iniciales de 10, 45, 90, 120 y 170 grados. Note como la forma de órbita cambia como función del ángulo inicial.
 - d) Para el caso donde $\omega \gg \sqrt{\frac{g}{l}}$ existen soluciones estables en la posición superior, es decir alrededor de $\theta \approx 0$.