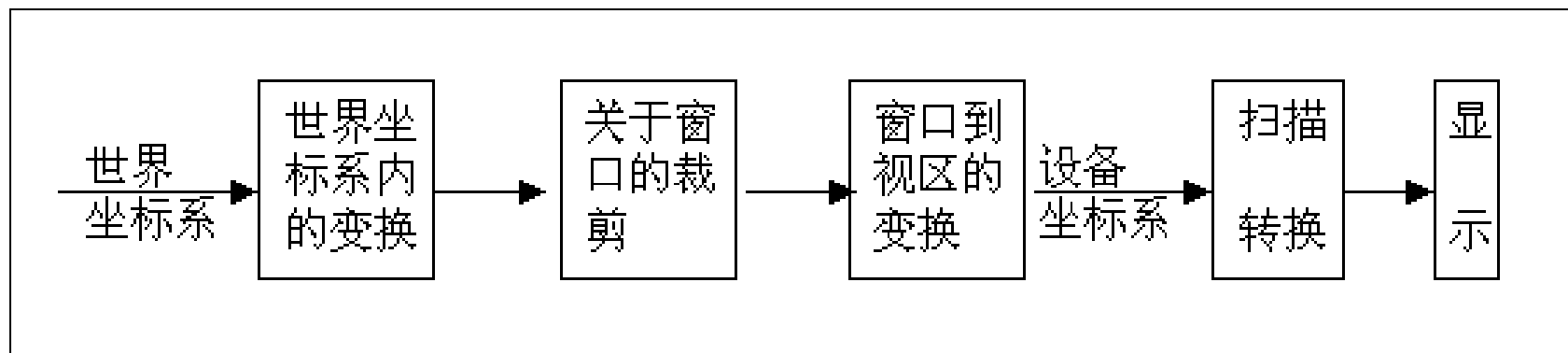
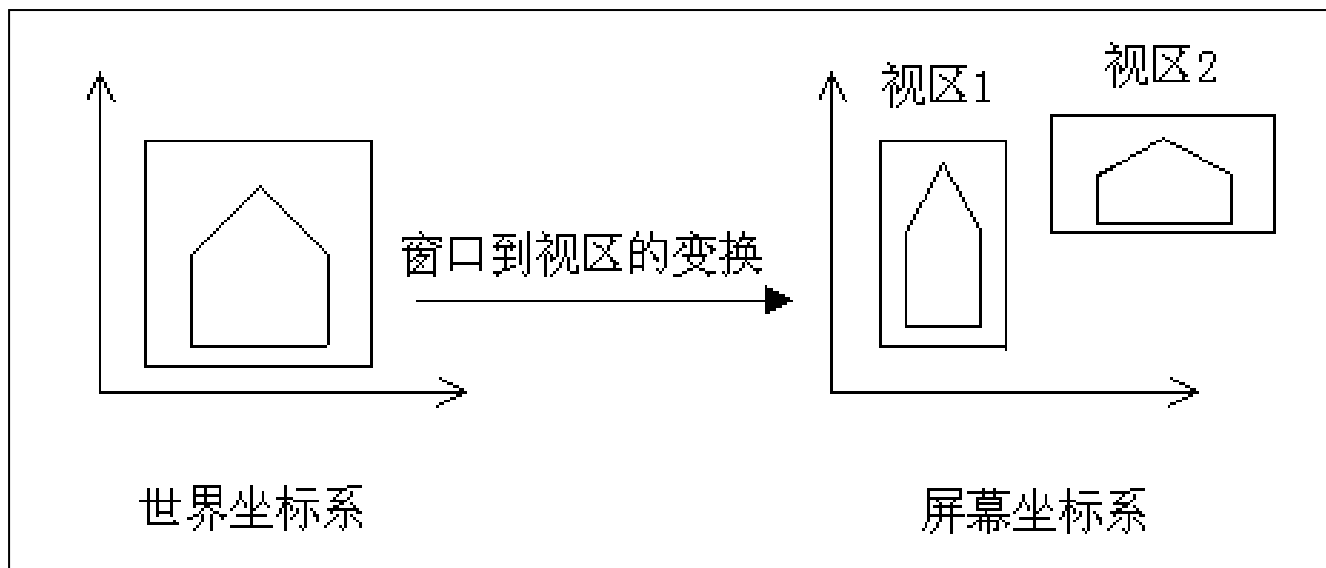


第五章

图形变换与裁剪

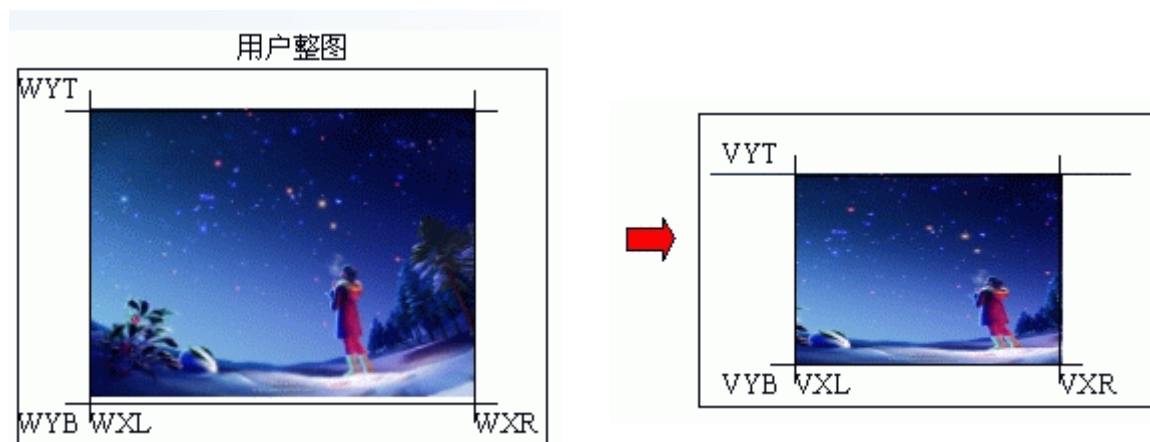
二维图形的显示流程



5.1 窗口视图变换

1. 窗口和视图区

- 用户坐标系（world coordinate system, 简称 WC）
- 设备坐标系（device coordinate system, 简称 DC）
- 窗口区（window）
- 视图区（viewport）



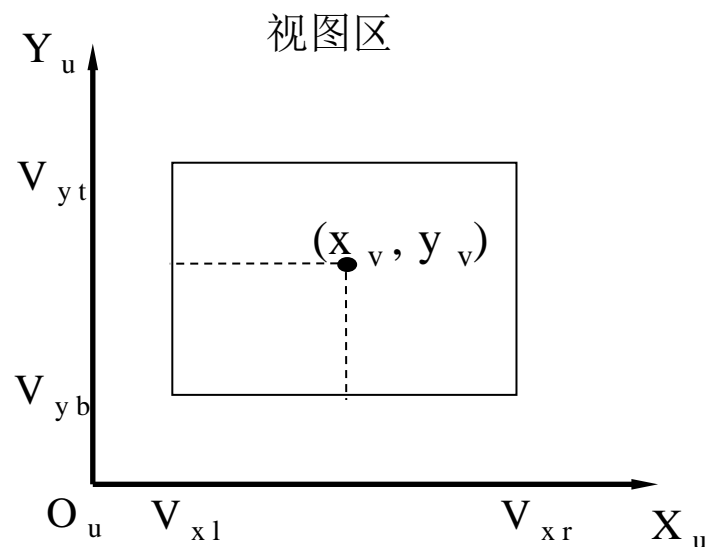
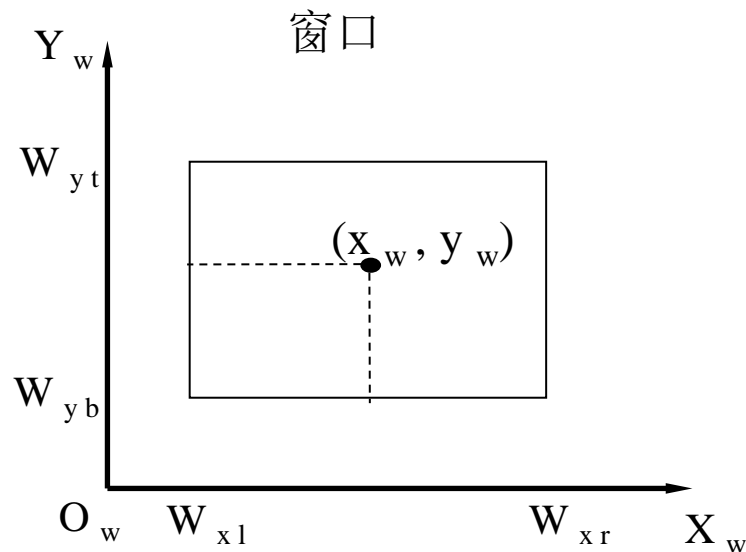
2.窗口到视图区的变换

窗口区与视图区间的映射关系:

窗口区中的任一点 (x_w, y_w)
与视图区中的任一点 (x_v, y_v) 存在如下对应关系:

$$\frac{x_v - v_{xl}}{x_w - w_{xl}} = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} \quad (5-1)$$

$$\frac{y_v - v_{yb}}{y_w - w_{yb}} = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} \quad (5-2)$$



窗口与视图区的对应关系

由式 (5-1) 和式 (5-2) 可分别解得:

$$x_v = \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} (x_w - w_{xl}) + v_{xl} \quad (5-3)$$

$$y_v = \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} (y_w - w_{yb}) + v_{yb} \quad (5-4)$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad a &= \frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} & c &= -\frac{v_{xr} - v_{xl}}{w_{xr} - w_{xl}} w_{xl} + v_{xl} \\ b &= \frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} & d &= -\frac{v_{yt} - v_{yb}}{w_{yt} - w_{yb}} w_{yb} + v_{yb} \end{aligned}$$

有

$$x_v = ax_w + b \quad (5-5)$$

$$x_v = ax_w + b \quad (5-6)$$

5.2 二维图形几何变换

5.2.1 二维图形几何变换的原理

二维图形由点或直线段组成

直线段可由其端点坐标定义

二维图形的几何变换：对点或对直线段端点的变换

$$P = [x \quad y] \longrightarrow P' = [x' \quad y']$$

5.2.2 几种典型的二维图形几何变换

1. 平移变换 (translation)

T_x 平行于x轴的方向上的移动量

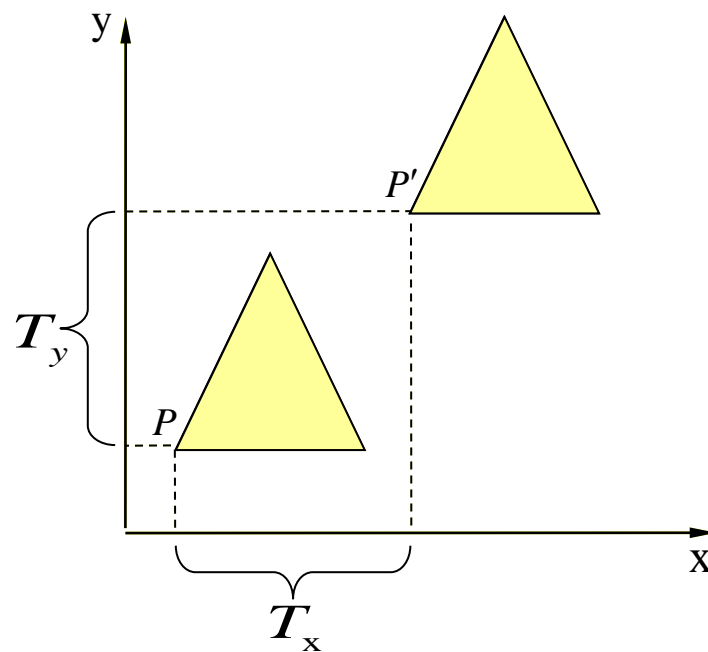
T_y 平行于y轴的方向上的移动量

几何关系

$$\begin{cases} x' = x + T_x \\ y' = y + T_y \end{cases} \quad (5-7)$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x & T_y \end{bmatrix} \quad (5-8)$$



平移变换

2.比例变换 (scale)

指相对于原点的比例变换

S_x 平行于x轴的方向上的缩放量

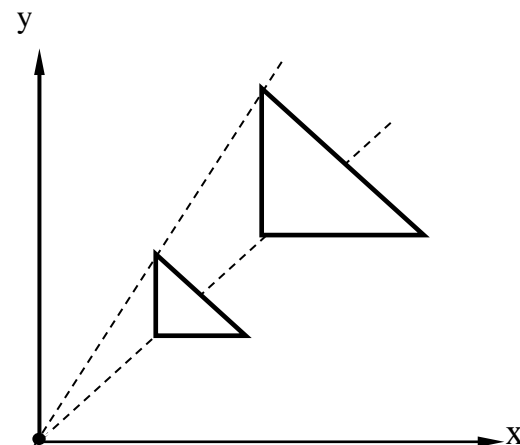
S_y 平行于y轴的方向上的缩放量

几何关系

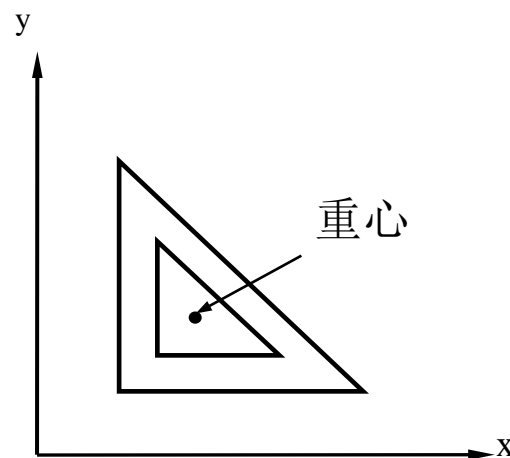
$$\begin{cases} x' = x * S_x \\ y' = y * S_y \end{cases} \quad (5-9)$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} \quad (5-10)$$



相对于原点的比例变换



相对于重心的比例变换

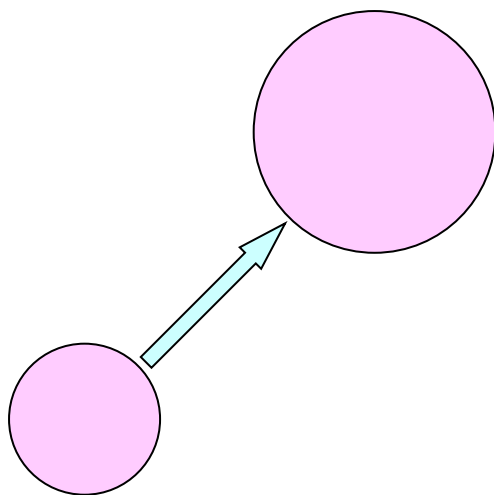
■ 比例变换的性质

当 $S_x = S_y$ 时，变换前的图形与变换后的图形相似

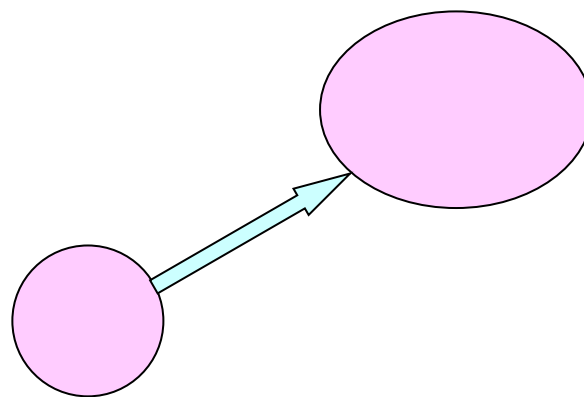
当 $S_x = S_y$ 时，图形将放大，并远离坐标原点

当 $S_x = S_y$ 时，图形将缩小，并靠近坐标原点

当 $S_x \neq S_y$ 时，图形将发生畸变



$$S_x = S_y > 1$$



$$S_x \neq S_y$$

3.旋转变换 (rotation)

点P绕原点逆时针转 θ 度角
(设逆时针旋转方向为正方向)

几何关系

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases} \quad (5-11)$$

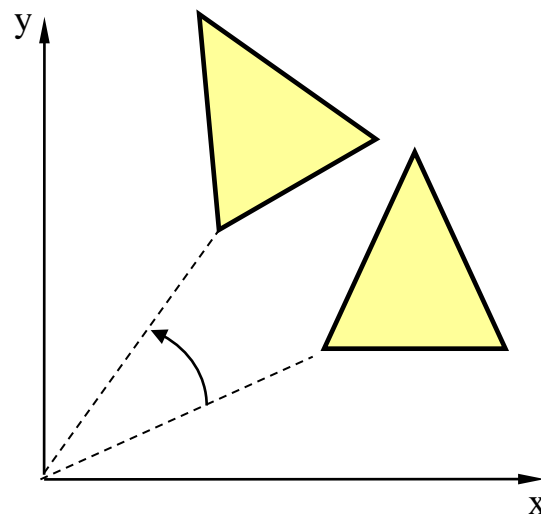
$$\begin{cases} x' = r \cos(\theta + \phi) = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \\ y' = r \sin(\theta + \phi) = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \end{cases} \quad (5-12)$$

将式 (5-11) 代入式 (5-12) 得:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (5-13)$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (5-14)$$



旋转变换

5.2.3 齐次坐标 (homogeneous coordinates) 技术

1. 齐次坐标技术的引入

平移、比例和旋转等变换的组合变换

处理形式不统一，将很难把它们级联在一起。

2. 变换具有统一表示形式的优点

- 便于变换合成
- 便于硬件实现

3. 齐次坐标技术的基本思想

把一个 n 维空间中的几何问题转换到 $n+1$ 维空间中解决。

4. 齐次坐标表示

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow (\omega x_1, \omega x_2, \dots, \omega x_n, \omega)$$

有n个分量的向量

有n+1个分量的向量

哑元或标量因子

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega) \longrightarrow (x_1 / \omega, x_2 / \omega, \dots, x_n / \omega)$$

齐次坐标表示不是唯一的

$\omega = 1$ 规格化的齐次坐标

5.基本几何变换的齐次坐标表示

■ 平移变换 $[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$

■ 比例变换 $[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

■ 旋转变换: $[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
逆时针为正

6. 无穷远点或无穷远区域的齐次坐标表示

时，齐次坐标 $(x_1, x_2, \dots, x_n, \omega)$ 表示一个 n 维的无穷远点

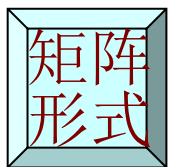
5.2.3常用的二维几何变换

1.对称变换（symmetry）（反射变换或镜像变换）

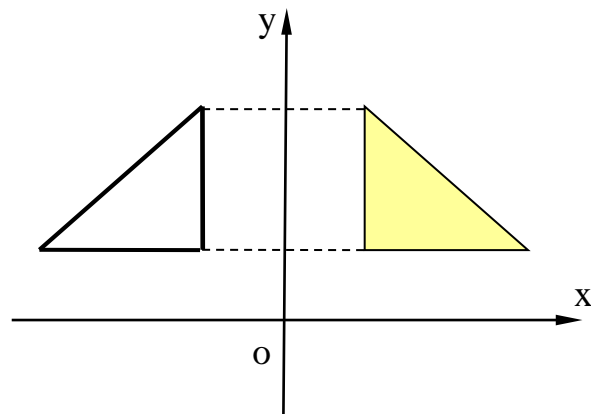
（1）相对于y轴对称



$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y & 1 \end{bmatrix}$$

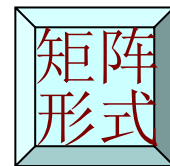


对称变换（1）

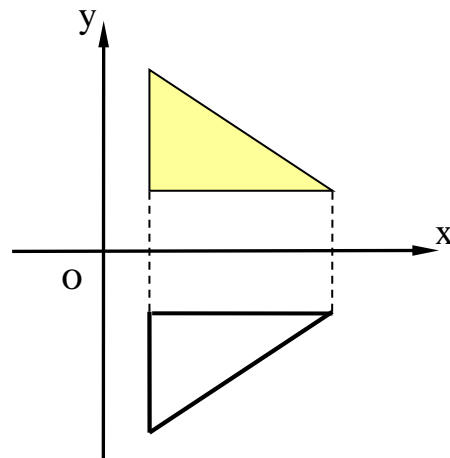
（2）相对于x轴对称



$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y & 1 \end{bmatrix}$$

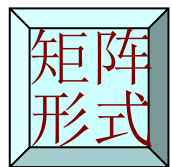


对称变换（2）

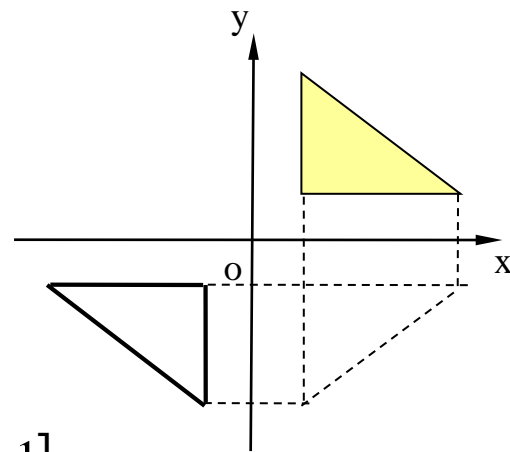
(3) 相对于原点对称 (即中心对称)



$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



$$[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ -y \ 1]$$

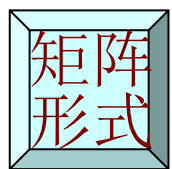


对称变换 (3)

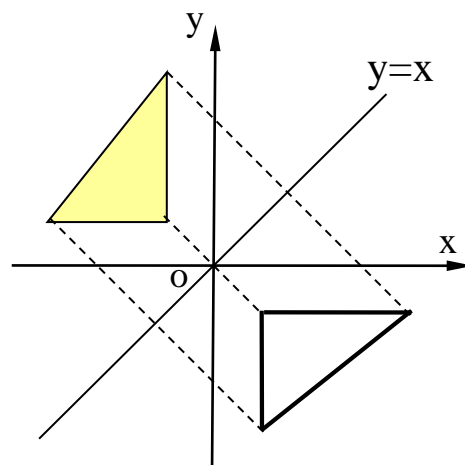
(4) 相对于直线 $y=x$ 对称



$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



$$[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [y \ x \ 1]$$



对称变换 (4)

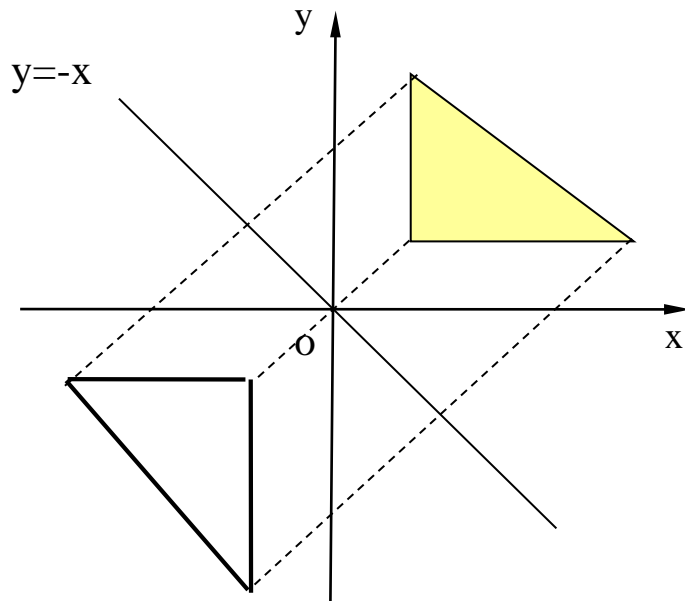
(5) 相对于直线 $y=-x$ 对称

几何关系

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -x & 1 \end{bmatrix}$$



对称变换 (5)

2.错切变换 (shear)

(1) 沿 x 轴方向关于 y 轴错切

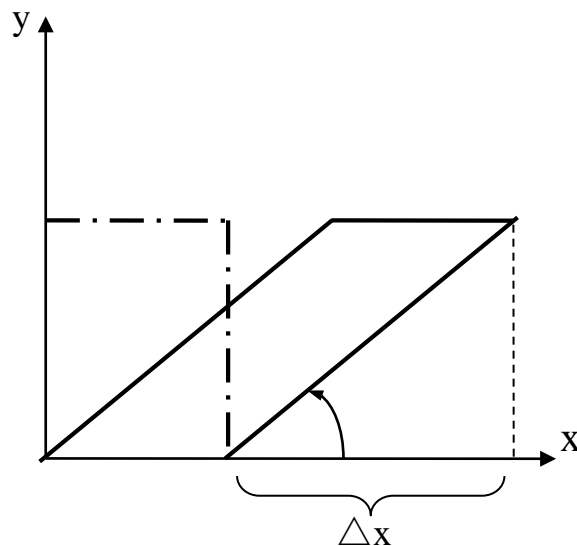
将图形上关于y轴的平行线沿x方向推成 θ 角的倾斜线，而保持y坐标不变。

几何关系

$$\begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y \end{cases}$$

令 $a = \operatorname{ctg} \theta$ 有 $\Delta x = y \operatorname{ctg} \theta = ay$

代入得
$$\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = y \end{cases}$$



错切变换 (1)

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ay & y & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 沿 y 轴方向关于 x 轴错切

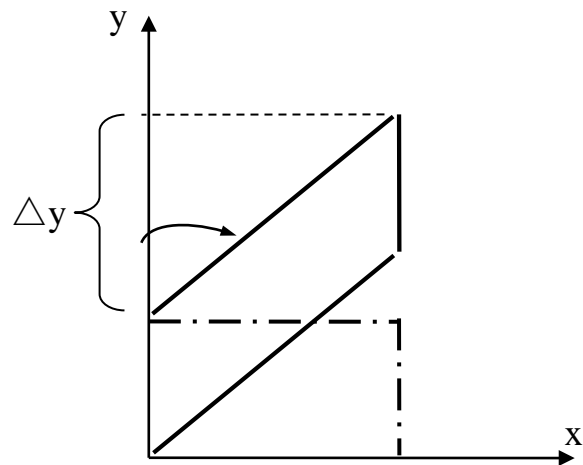
将图形上关于 x 轴的平行线沿 y 方向推成 Ψ 角的倾斜线，而保持 x 坐标不变。

几何关系

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \Delta y \end{cases}$$

令 $b = \operatorname{ctg} \phi$ 有 $\Delta y = x \operatorname{ctg} \phi = bx$

代入得
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + bx \end{cases}$$



矩阵形式

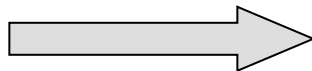
$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & bx + y & 1 \end{bmatrix}$$

错切变换 (2)

5.3.3 二维组合变换

■ 问题：如何实现复杂变换？

变换分解



变换合成

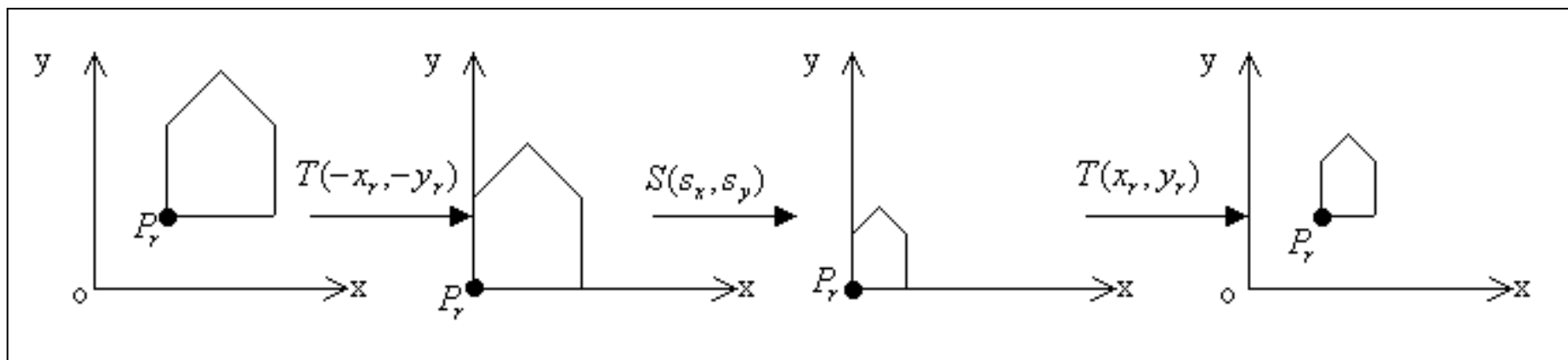
1. 相对于任意点 (x_0, y_0) 的比例变换

对任意点比例变换的步骤：

(1) 平移变换

(2) 相对于原点的比例变换

(3) 平移变换



■ 当 (x_0, y_0) 为图形重心的坐标时，这种变换实现的是相对于重心的比例变换。

令

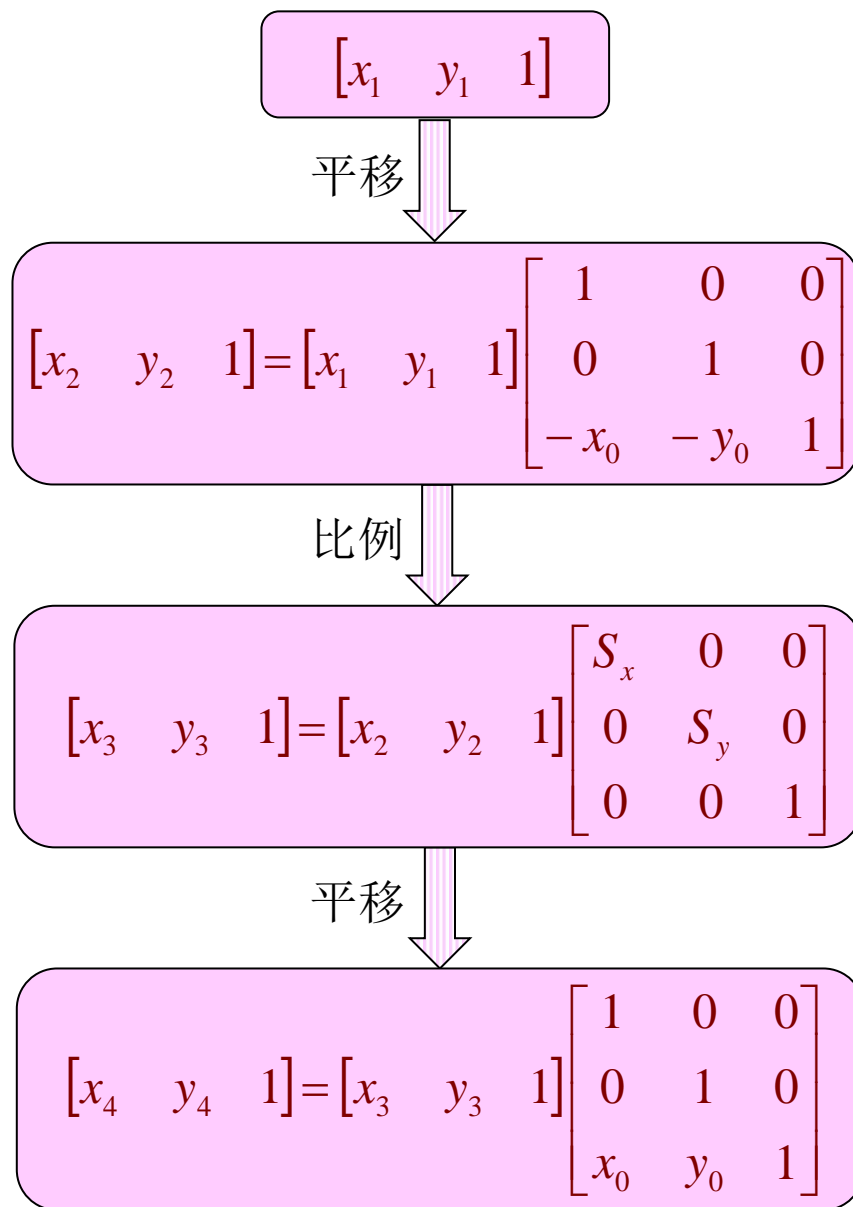
$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

则有

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

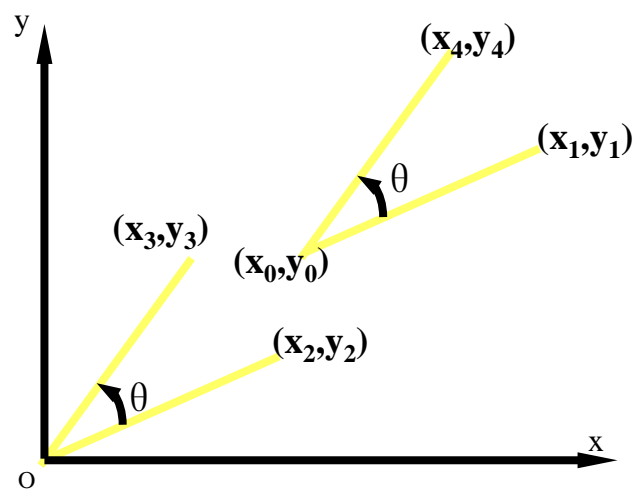


任意点比例变换示意图

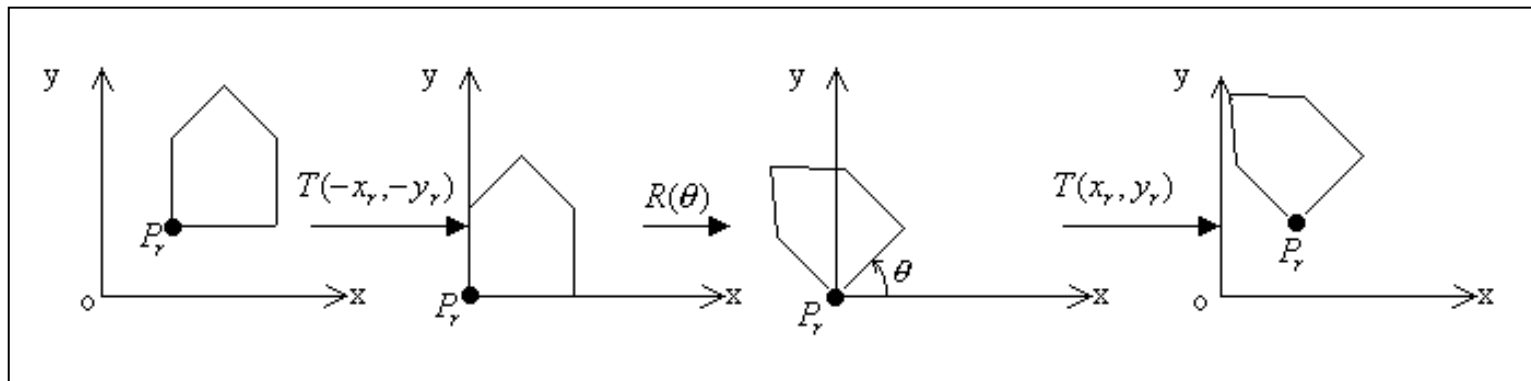
2. 绕任意点 (x_0, y_0) 的旋转变换

绕任意点旋转变换的步骤：

- (1) 平移变换
- (2) 对图形绕原点进行旋转变换
- (3) 平移变换



相对于任意点 (x_0, y_0) 的旋转变换



令

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_0 & -y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

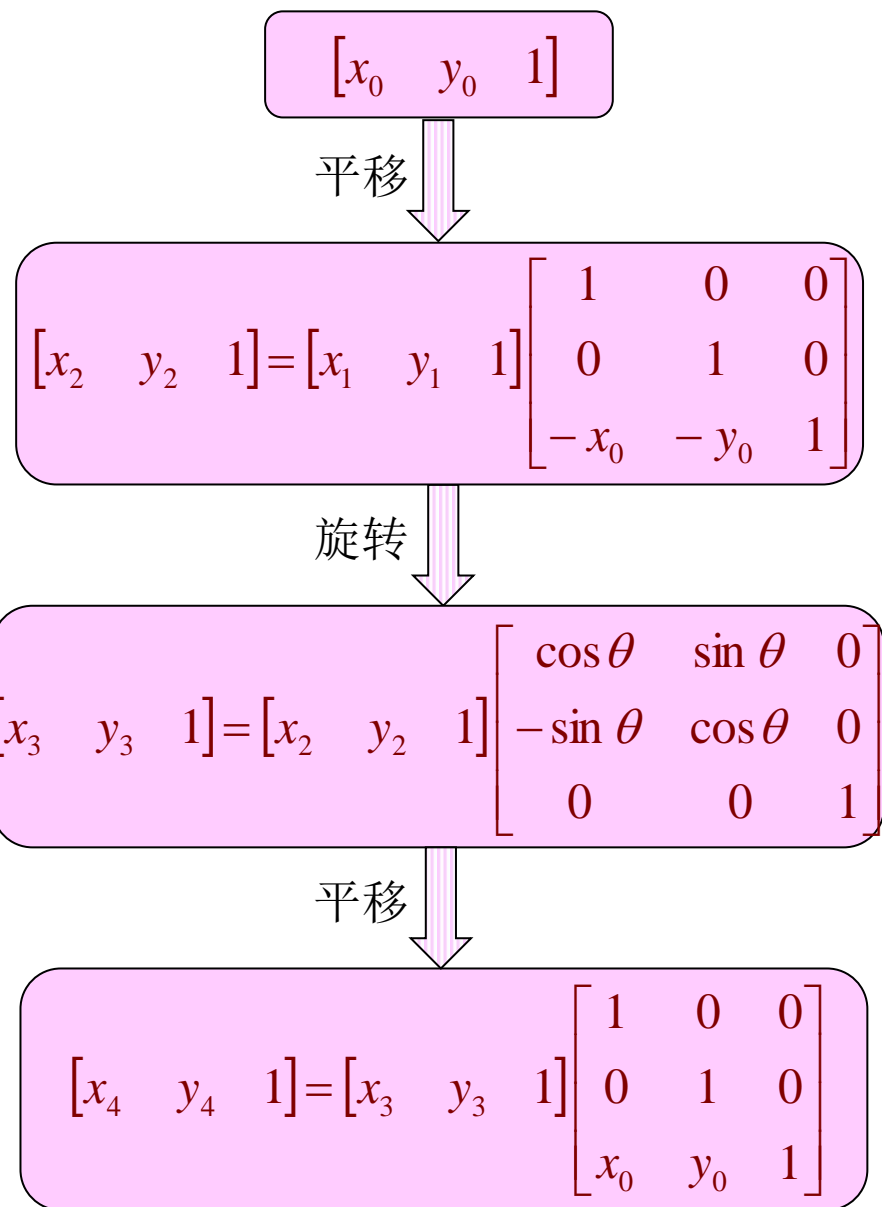
$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = T_1 R T_2$$

则有

$$= \begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 & y_4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} T_1 R T_2 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} T$$



任意点旋转变换示意图

- 变换的结果与变换的顺序有关（矩阵乘法不可交换）
- 变换的固定坐标系模式
 - 相对于同一个固定坐标系
 - 先调用的变换先执行，后调用的变换后执行

三维几何变换 (1/7)

■ 三维齐次坐标

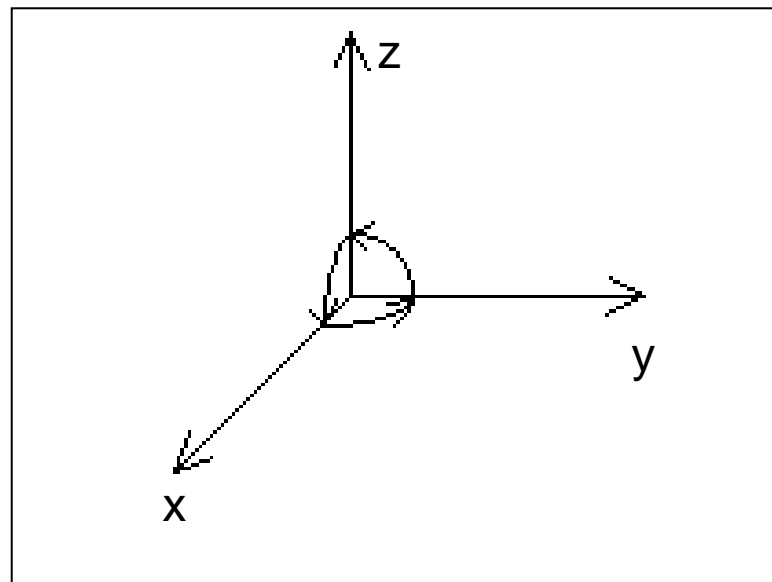
■ (x, y, z) 点对应的齐次坐标为

$$(x_h, y_h, z_h, h)$$

$$x_h = hx, y_h = hy, z_h = hz, h \neq 0$$

■ 标准齐次坐标 $(x, y, z, 1)$

■ 右手坐标系



三维几何变换 (2/7)

■ 平移变换

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

■ 放缩变换

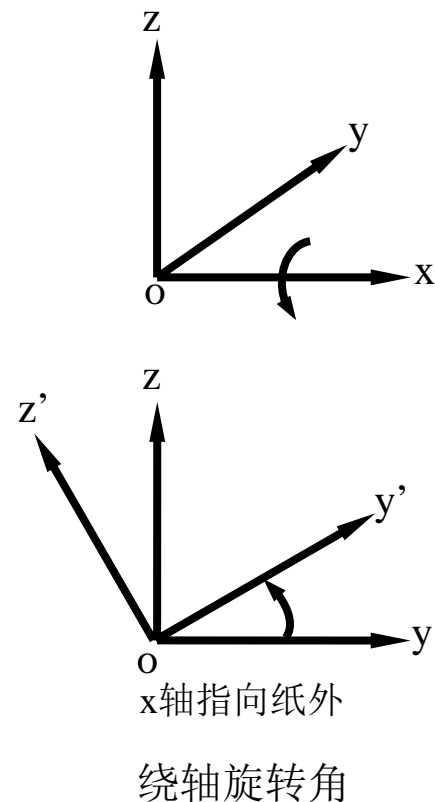
$$S = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维几何变换 (3/7)

- 旋转变换: 右手螺旋方向为正
 - 绕x轴

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



三维几何变换 (4/7)

— 绕y轴

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 绕y轴旋转:

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

— 绕z轴

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 绕z轴旋转:

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维几何变换 (5/7)

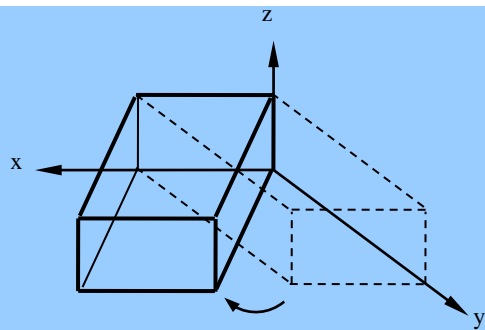
■ 对称变换

– 关于坐标平面 xy 的对称变换

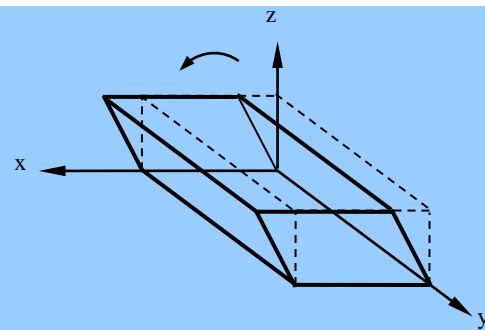
$$SY_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维几何变换

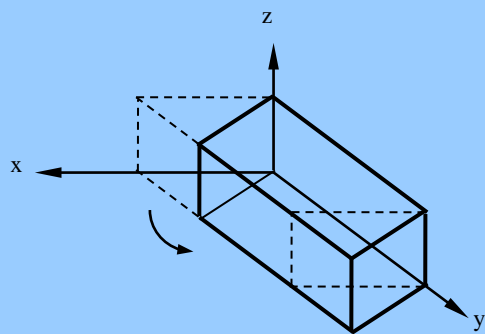
■ 错切变换



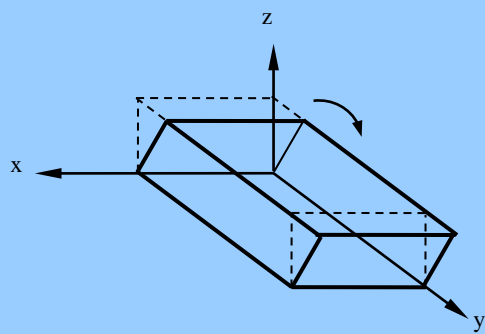
沿x含y错切



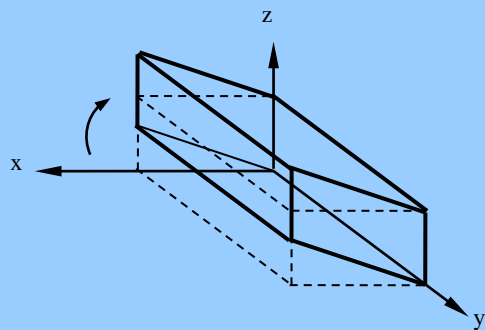
沿x含z错切



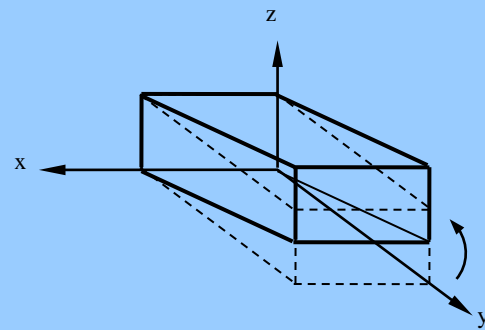
沿y含x错切



沿y含z错切



沿z含x错切



沿z含y错切

三维错切变换

三维几何变换 (7/7)

■ 三维变换的一般形式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$