第四章　自由曲线与曲面（一）

第四章 曲线与曲面

- **概述**
- 参数曲线基础
- 参数多项式曲线
- 三次Hermite曲线
- Bezier曲线
- B样条曲线

概　述

- 曲线的分类
  - 规则曲线
    - 可用初等解析函数来描述
  - 自由曲线
    - 无法用初等解析函数来描述
    - 光滑，连续，没有拐点
  - 随机曲线
    - 处处连续，处处不光滑，处处不可导
    - 地图边界，海岸线，水波，超声

概　述

- 研究分支
  - 计算几何
    - 1969 Minsky, Papert提出
    - 1972 A.R.Forrest给出正式定义
  - CAGD (Computer Aided Geometrical Design)
    - 1974 Barnhill, Riesenfeld, 美国Utah大学的一次国际会议上提出
    - 北航施法中
    - 浙大谭建荣

概　述

- 研究内容
  - 对几何外形信息的计算机表示
  - 对几何外形信息的分析与综合
  - 对几何外形信息的控制与显示

概　述

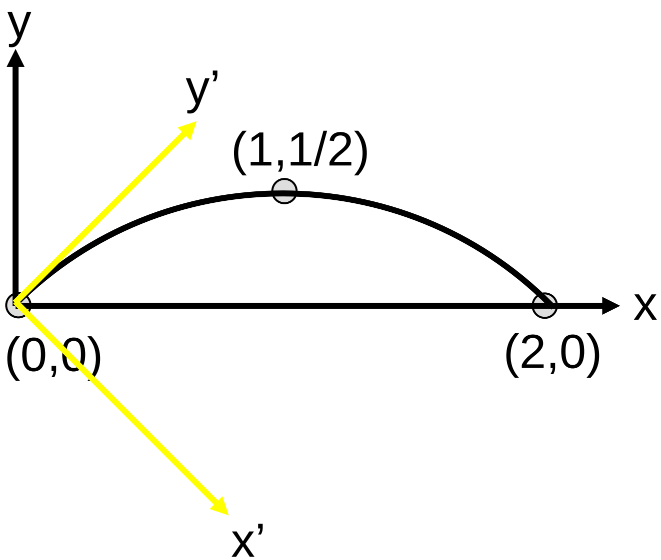
- 对形状数学描述的要求？
- 从计算机对形状处理的角度来看

（1）唯一性

（2）几何不变性

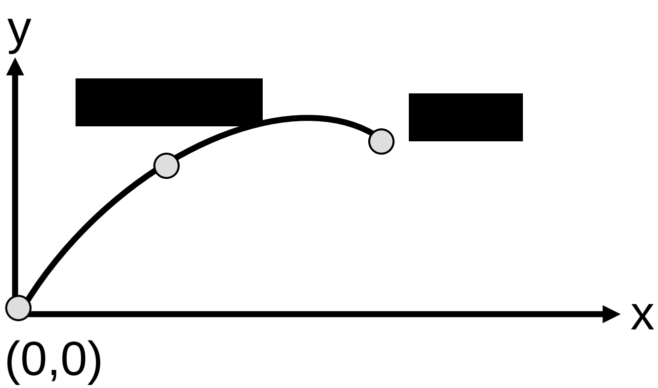
对在不同测量坐标系测得的同一组数据点进行拟合，用同样的数学方法得到的拟合曲线形状不变。

概　述



$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

$$y = -\frac{8}{3\sqrt{2}}x^2 + \frac{11}{3}x$$



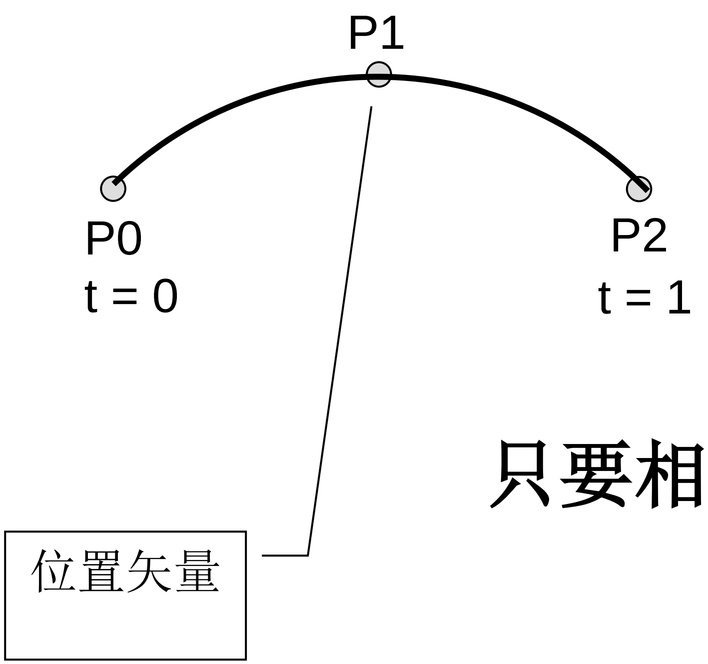
用标量函数表达拟合曲线时，

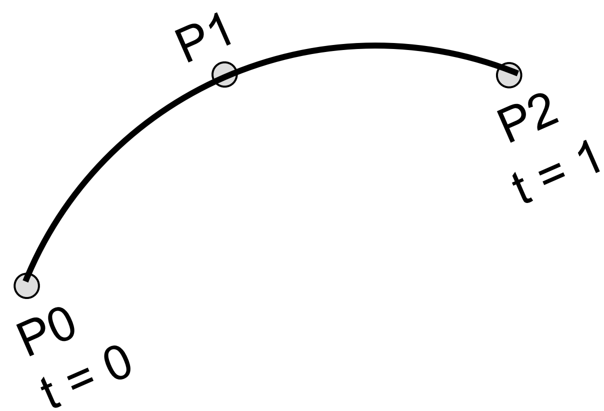
曲线的形状随坐标系的选取而变，说明什么？

概　述

- **矢量参数函数方程：**

$$P(t) = 2(t-0.5)(t-1)P0 - 4t(t-1)P1 + 2t(t-0.5)P2$$





只要相对位置不变，则形状就不变

概　述

（3）易于定界

（4）统一性：

统一的数学表示，便于建立统一的数据库

标量函数：平面曲线 $y = f(x)$

空间曲线 $y = f(x)$

$z = g(x)$

矢量函数：平面曲线 $P(t) = [x(t) \quad y(t)]$

空间曲线 $P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

概　述

- **从形状表示与设计的角度来看**

  （1）丰富的表达能力：表达两类曲线曲面

  （2）易于实现光滑连接

  （3）形状易于预测、控制和修改

  （4）几何意义直观，设计不必考虑其数学表达

- **自由曲线曲面的发展过程**
- 目标：美观，且物理性能最佳
- 1963年，美国波音飞机公司，Ferguson双三次曲面片
- 1964~1967年，美国MIT，Coons双三次曲面片
- 1971年，法国雷诺汽车公司，Bezier曲线曲面
- 1974年，美国通用汽车公司，Cordon和Riesenfeld, Forrest, B样条曲线曲面
- 1975年，美国Syracuse大学，Versprille有理B样条
- 80年代，Piegl和Tiller, NURBS方法

参数曲线基础（1/7）

- 曲线的表示形式
  - 非参数表示
    - 显式表示

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

    - 隐式表示

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

参数曲线基础（1/7）

- 非参数表示形式方程（无论是显式还是隐式）存在下述问题
  - 与坐标轴相关
  - 会出现斜率为无穷大的情形（如垂线）
  - 对于非平面曲线、曲面，难以用常系数的非参数化函数表示
  - 不便于计算机编程

参数曲线基础（2/7）

- 参数表示

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)]$$

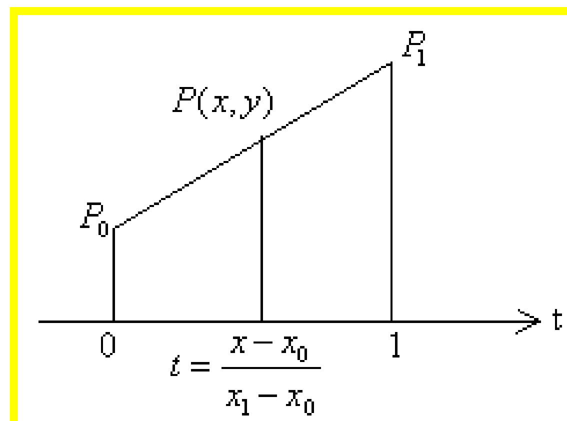
- 参数的含义
  - 时间，距离，角度，比例等等
  - 规范参数区间[0，1]

参数曲线基础（3/7）

- 参数矢量表示形式
  - 例子：直线段的参数表示

$$P = P(t) = P0 + t(P1 - P0) = (1-t)P0 + tP1 \qquad t \in [0,1]$$

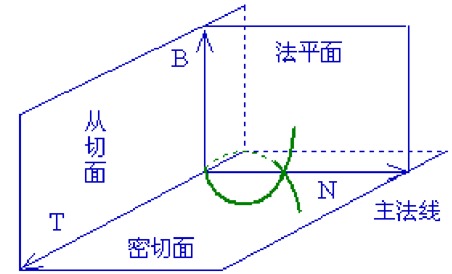
- 参数表示与隐式表示的相互转换



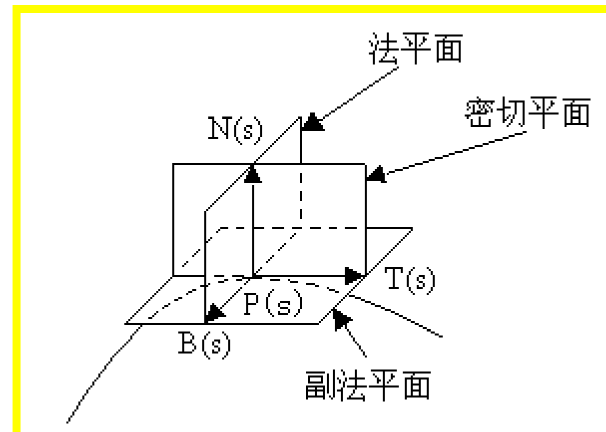
参数曲线基础（4/7）

- 切矢量 $T(t)$单位切矢量
  - 坐标变量关于参数的变化率

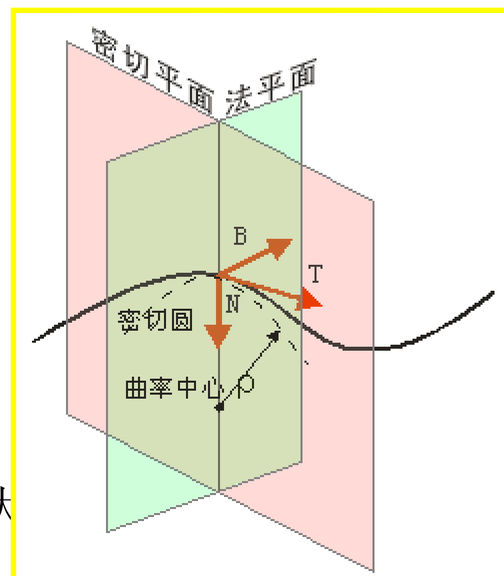
$$P'(t)=\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

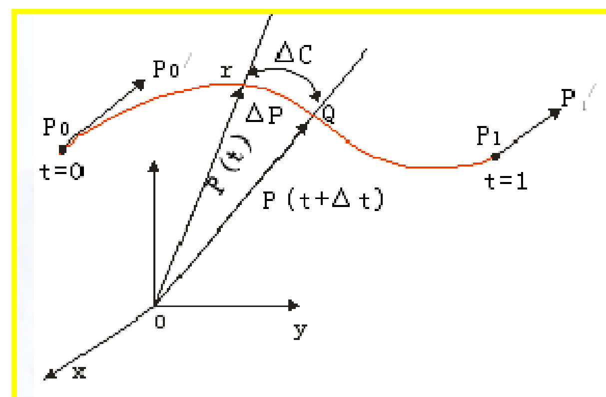


- 主法矢量 $N(t)$
  - 主法矢量与切矢量垂直



- 副法矢量 $B(t)\overset{\text{记}}{=}T(t)\times N(t)$
- 曲率
  - 曲线的弯曲程度
- 曲率半径
  - 曲率的倒数





参数曲线基础（5/7）

- 参数连续性
  - 传统的、严格的连续性
  - 称曲线**P = P(t)**在$t = t_0$处**n**阶参数连续，如果它在 t_0处**n**阶左右导数存在，并且满足

$$\left.\frac{d^k P(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0^-} = \left.\frac{d^k P(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0^+}, k = 0,1,\cdots n$$

  - 记号 C^n

参数曲线基础（6/7）

- 几何连续性
  - 直观的、易于交互控制的连续性
  - 不包括与参数有关的那些信息，如切矢模长
  - **0**阶几何连续
    - 称曲线**P=P(t)**在 $t = t_0$ 处**0**阶几何连续，如果它在 处t_0 位置连续，即

$$P(t_0^-) = P(t_0^+)$$

    - 记为 GC^0
  - **1**阶几何连续
    - 称曲线**P=P(t)**在 $t = t_0$处**1**阶几何连续，如果它在该处 GC^0**,**并且切矢量方向连续

$$P'(t_0^-) = \alpha \cdot P'(t_0^+) \qquad \alpha > 0 \text{为任一常数}$$

    - 记为 GC^0

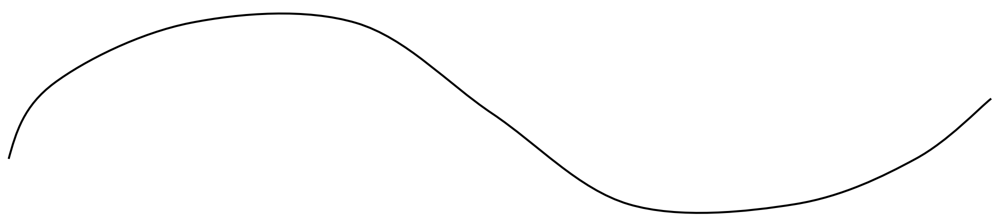
参数曲线基础（7/7）

- **2阶几何连续**
  - 称曲线P=P(t)在 $t=t_0$ 处2阶几何连续，如果它在 t_0 处

（1）位置和切线方向连续 GC^1

（2）副法矢量方向连续 $B(t_0^-)=B(t_0^+)$

（3）曲率连续 $k(t_0^-)=k(t_0^+)$



参数曲线基础（7/7）

- 曲线光顺性准则
- 光顺性——fairness
  - CAGD中的一个重要概念
- 判据或准则
  - 二阶几何连续
    - 二阶参数连续并不一定能保证切线方向和曲率连续
    - 切线方向和曲率连续也不一定必须二阶参数连续
  - 不存在奇异点与多余拐点
  - 曲率变化较小
  - 应变能较小（绝对曲率较小）

曲线曲面拟合方法

- 已知条件的表示方法
  - 一系列有序的离散数据点
    - 型值点
    - 控制点
  - 边界条件
  - 连续性要求

曲线曲面拟合方法

- 生成方法
  - 插值
    - 点点通过型值点
    - 插值算法：线性插值、抛物样条插值、Hermite插值
  - 逼近
    - 提供的是存在误差的实验数据
      - 最小二乘法、回归分析
    - 提供的是构造曲线的轮廓线用的控制点
      - Bezier曲线、B样条曲线等
  - 拟合

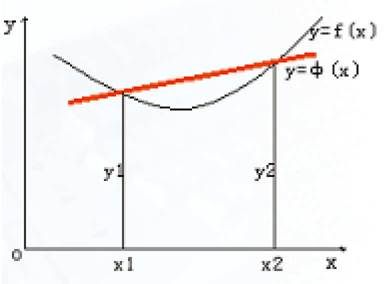


图6.1.7 线性插值

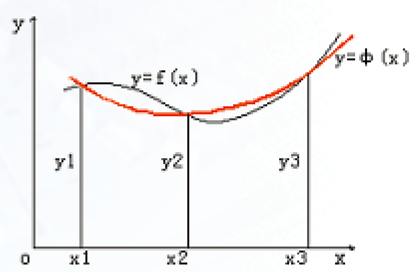


图6.1.9 抛物线插值

拟合：指在曲线、曲面的设计过程中，用插值或逼近方法使生成的曲线、曲面达到某些设计要求。

第四章 曲线与曲面

- 概述
- 参数曲线基础
- **参数多项式曲线**
- 三次Hermite曲线
- Bezier曲线
- B样条曲线

参数多项式曲线（1/5）

- 为什么采用参数多项式曲线
  - 表示最简单
  - 理论和应用最成熟
- 定义--n次多项式曲线

$$
\begin{cases}
x(t) = x_0 + x_1 \cdot t + \cdots + x_n \cdot t^n \\
y(t) = y_0 + y_1 \cdot t + \cdots + y_n \cdot t^n \qquad t \in [0,1] \\
z(t) = z_0 + z_1 \cdot t + \cdots + z_n \cdot t^n
\end{cases}
$$

参数多项式曲线（2/5）

- 矢量表示形式

$$P(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \\ z_0 & z_1 & \cdots & z_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix}\overset{\text{记为}}{=} C\cdot T \qquad t\in[0,1]$$

- 加权和形式

代数系数矩阵形式

$$P(t)=C\cdot T=P_0+t\cdot P_1\cdots t^n\cdot P_n=\begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \ldots & P_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \ldots \\ t^n \end{bmatrix} \qquad t\in[0,1]$$

- 缺点
  - P_i 没有明显的几何意义
  - P_i 与曲线的关系不明确，导致曲线的形状控制困难

参数多项式曲线（3/5）

- 矩阵表示
  - 矩阵分解

    $C = G \bullet M$

    几何系数矩阵或边界条件矩阵形式

    $P(t) = C \bullet T = G \bullet M \bullet T = G \bullet F \quad t \in [0,1] \qquad M = G^{-1} \bullet C$

  - 几何矩阵

    $$G = \begin{bmatrix} G_0 & G_1 & \cdots & G_n \end{bmatrix}$$

  - 控制顶点 G_i
  - 基矩阵M
    - $M \bullet T$确定了一组基函数

参数多项式曲线（4/5）

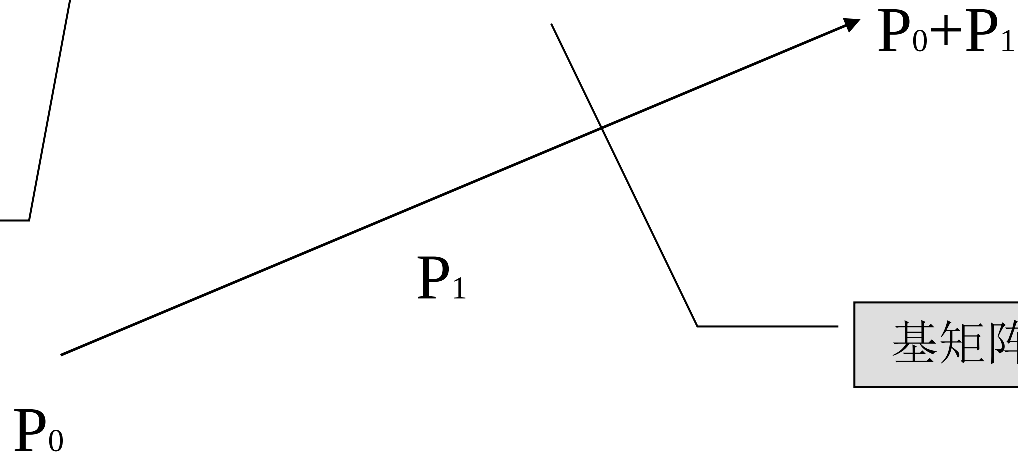
- 例子—直线段的矩阵表示

$$P(t) = P_0 + tP_1 = P_0(1-t) + (P_0 + P_1)t$$

$$= \begin{bmatrix} P_0 & P_0 + P_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad t \in [0,1]$$

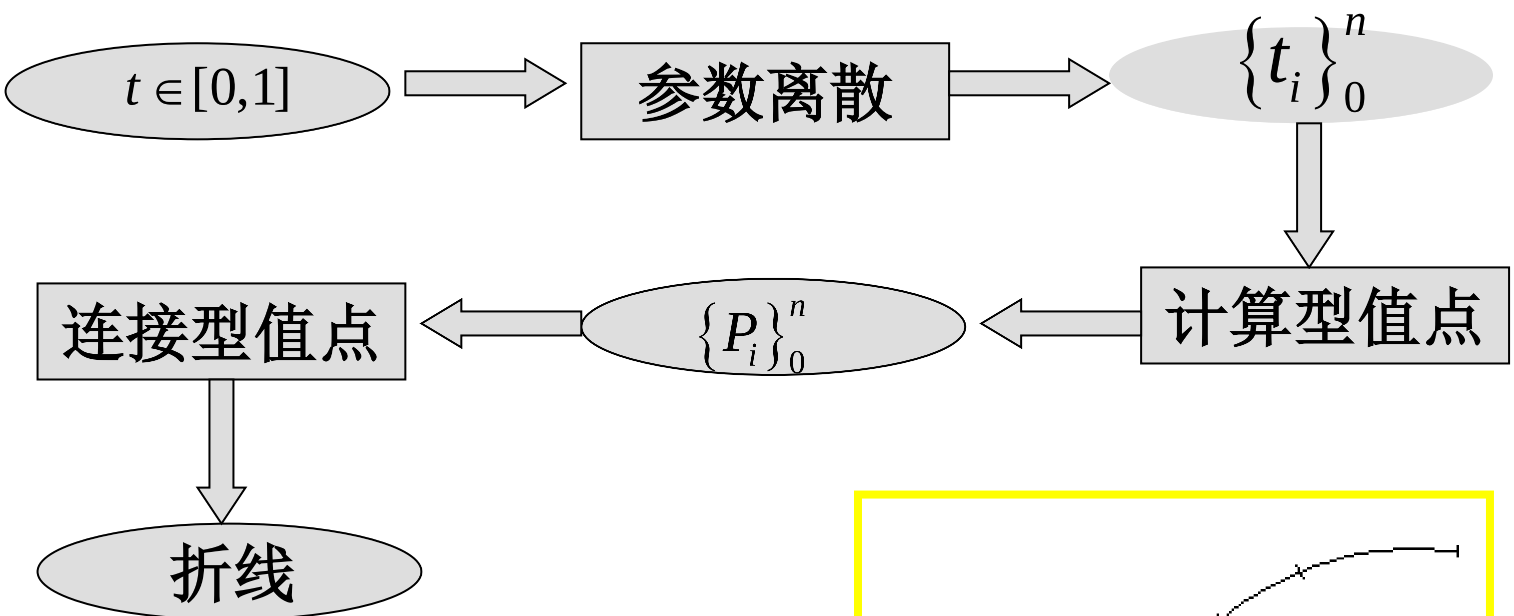
几何矩阵G

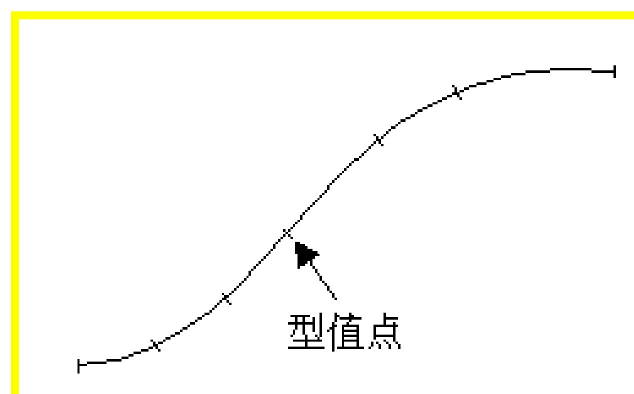
基矩阵MT



参数多项式曲线（5/5）

- 参数多项式曲线的生成





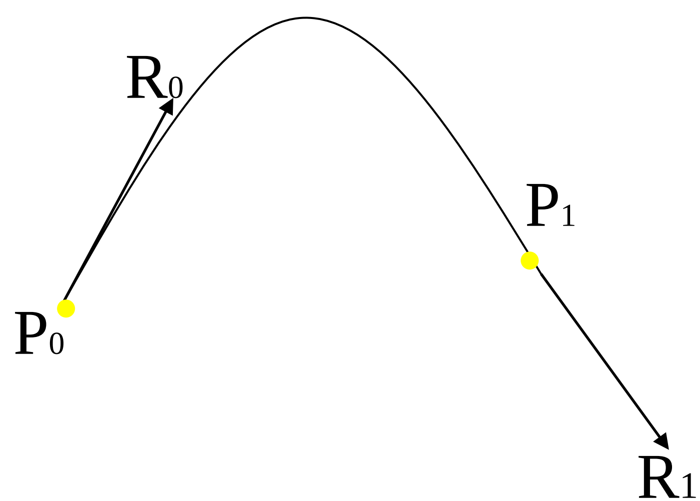
第四章 曲线与曲面

- 概述
- 参数曲线基础
- 参数多项式曲线
- **三次Hermite曲线**
- Bezier曲线
- B样条曲线

三次Hermite曲线(1/7)

- 定义
  - 给定4个矢量 P_0, P_1, R_0, R_1，称满足条件的三次多项式曲线P(t)为Hermite曲线

$$P(0) = P_0, P(1) = P_1$$
$$P'(0) = R_0, P'(1) = R_1$$



三次Hermite曲线(2/7)

- 矩阵表示
  - 条件

$$G_H \bullet M_H \bullet T\,|_{t=0} = G_H \bullet M_H \bullet \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = P_0$$

$$G_H \bullet M_H \bullet T\,|_{t=1} = G_H \bullet M_H \bullet \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = P_1$$

$$G_H \bullet M_H \bullet T'\,|_{t=0} = G_H \bullet M_H \bullet \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = R_0$$

$$G_H \bullet M_H \bullet T'\,|_{t=1} = G_H \bullet M_H \bullet \begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix} = R_1$$

三次Hermite曲线(3/7)

- 合并

$$\Rightarrow G_H \bullet M_H \bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & R_0 & R_1 \end{bmatrix} \overset{\text{取为}}{=} G_H$$

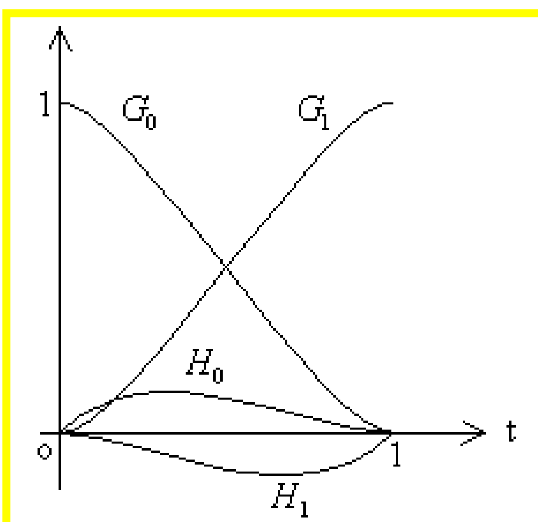
- 解

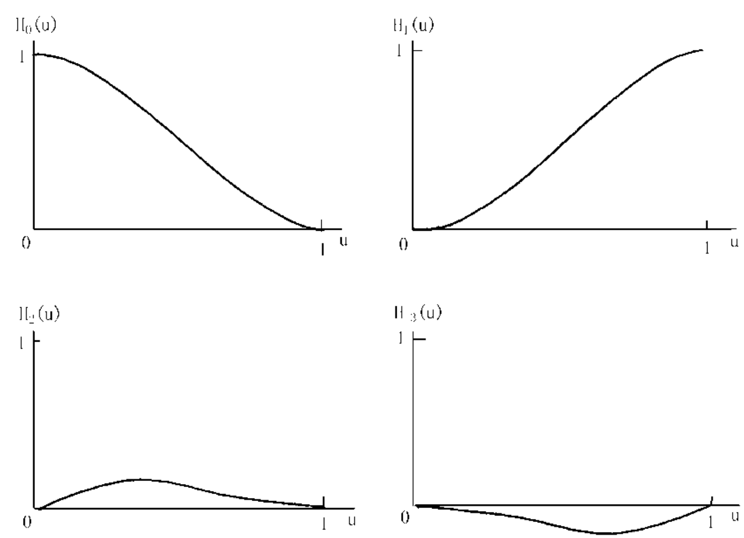
$$M_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

三次Hermite曲线(4/7)

- 基矩阵与基函数（调和函数）

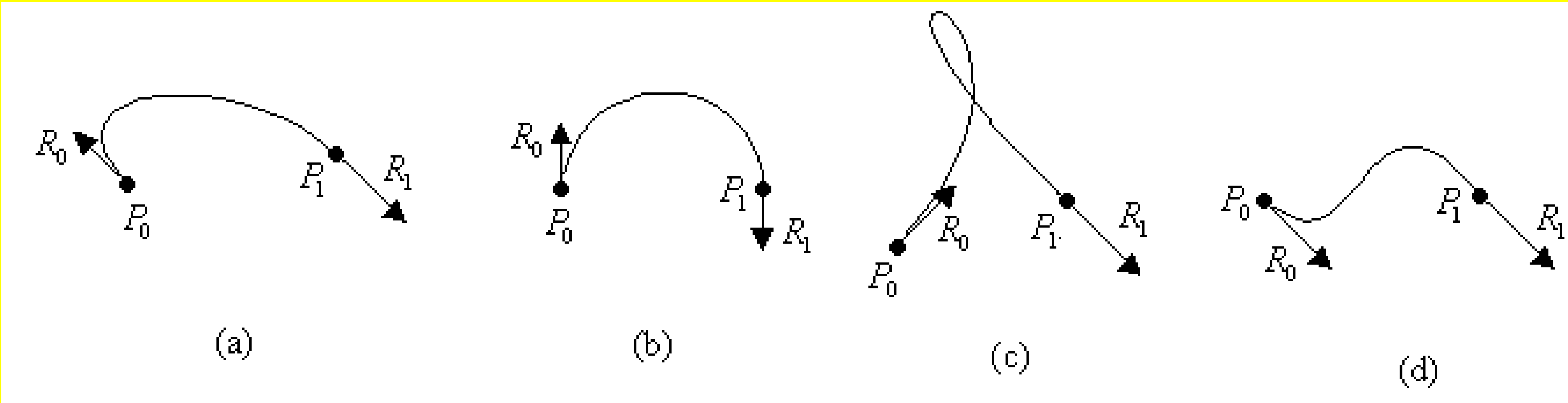
$$M_H \bullet T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3t+2t^3 \\ 3t^2-2t^3 \\ t-2t^2+t^3 \\ -t^2+t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_0(t) \\ G_1(t) \\ H_0(t) \\ H_1(t) \end{bmatrix}$$



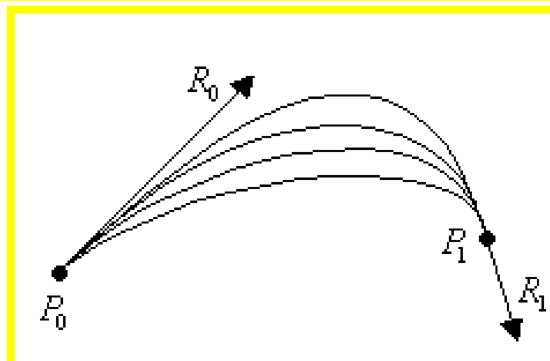


三次Hermite曲线(5/7)

- **形状控制**
  - 改变端点位置矢量 P_0, P_1
  - 调节切矢量 R_0, R_1 的方向



  - 调节切矢量R_0, R_1 的长度

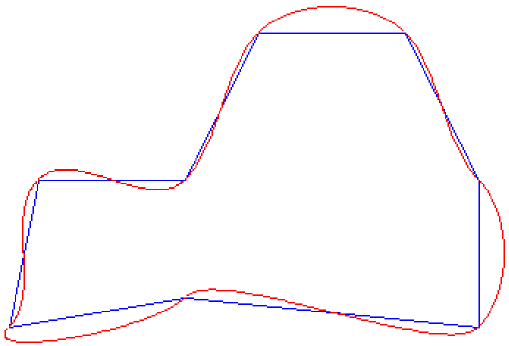


三次Hermite曲线(6/7)

- 几何变换
  - 对曲线变换等价于对控制顶点变换

- 三次参数样条曲线
  - 样条?
  - 曲线的定义
    - 给定参数节点 $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ ，型值点 $\{P_i\}_{i=0}^{n}$ ，求一条 C^2 的分段三次参数曲线 $P(t)(t\in[t_0,t_n])$ ，使 $P(t)|_{t=t_i}$ 。P(t)称为三次参数样条曲线

三次Hermite曲线(7/7)



- 优点：
  - 简单，易于理解
- 缺点：
  - 难于给出两个端点处的切线矢量作为初始条件
  - 不方便
- 所有参数插值曲线的缺点：
  - 只限于作一条点点通过给定数据点的曲线
  - 只适用于插值场合，如外形的数学放样
  - 不适合于外形设计

Question?