图像处理 第二次作业

数学三班 李岳锴 200810301

第二章 GCRSF模型

1. 写出GCRSF模型的能量泛函，并说明GCRSF模型与RSF模型的区别与联系。

(1) GCRSF模型能量泛函：

$$E^{GCRSF}(\phi)=\int_\Omega g(|\nabla u_0(\mathbf{x})|)|\nabla(\phi(\mathbf{x}))|d\mathbf{x} + \int_\Omega \phi(\mathbf{x})(\lambda_1 e_1(\mathbf{x})-\lambda_2 e_2(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$$

其中，$e_i(i=1,2)$定义如下：

$$e_i(\mathbf{x})=\int_\Omega K_\sigma(\mathbf{y}-\mathbf{x})|u_0(\mathbf{x})-f_i(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}$$

$g(\xi)$为边缘检测函数，定义如下：

$$g(\xi)=\frac{1}{1+\beta|\xi|^2}\quad(\beta\geq 0)$$

其中β是一个用来决定分割的细节水平的常量。

(2) GCRSF模型与RSF模型的联系：

- GCRSF模型是RSF模型的改进。由于RSF模型是非凸的，在求解过程中容易陷入局部极小值，且收敛速度慢，因此我们考虑在RSF模型的基础上进行非凸化改进。
- GCRSF模型与RSF模型的一个共同之处在于，GCRSF模型同样需要事先计算$f_1(x)$与$f_2(x)$，且表达式与RSF模型相同。

(3) GCRSF模型与RSF模型的区别：

- 能量泛函不同：

GCRSF模型的能量泛函$E^{GCRSF}(\phi)$，是从RSF模型的能量泛函关于水平集函数ϕ的梯度下降流方程出发，去掉水平集正则项，应用全局凸分割方法的思想进行简化，推导出一个与原方程具有相同静态解的简化版凸梯度下降流方程，再基于该凸梯度下降流方程推导出的。新提出的能量泛函可以看作是原RSF模型的能量泛函$\mathcal{F}_\mathcal{E}^{RSF}(\phi,f_1,f_2)$的凸化与改进。总之，**GCRSF模型具有全局凸的能量泛函，而RSF模型的能量泛函是非凸的。**

- 新引入了边缘检测函数:

为了更加容易地检测物体边缘，在能量泛函$E^{GCRSF}(\phi)$中加入了一个非负的边缘检测函数$g(\xi)$。这样，新提出的GCRSF模型又可以看做是GAC模型与凸化以及简化的RSF模型的一个完美的结合。

- 优化方法不同:

由于极小化GCRSF模型的能量泛函$E^{GCRSF}(\phi)$属于$L1$正则问题，因此GCRSF模型可以使用Split Bregman方法来极小化能量泛函。而RSF模型的能量泛函$\mathcal{F}_{\mathcal{E}}^{RSF}(\phi,f_1,f_2)$不具有这种特殊的结构，因此极小化RSF模型的能量泛函时，只能使用标准的梯度下降法。**Split Bregman方法的应用保证了GCRSF模型比原始的RSF模型迭代具有更快的收敛速度。**

2. 写出极小化GCRSF模型的Split Bregman算法流程，对其中的字符作说明，并说明该算法是如何实现极小化的。

(1) 算法流程:

在进行极小化之前，我们将能量泛函写成$L1$问题的标准形式:

$$E^{GCRSF}(\phi) = |\nabla\phi|_g + \langle\phi, r\rangle$$

其中$|*|_g$表示加权的全变分范数$|\nabla\phi|_g = \int_\Omega g(|\nabla u_0(\mathbf{x})|)|\nabla\phi(\mathbf{x})|d\mathbf{x}$;
$r(\mathbf{x}) = \lambda_1 e_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 e_2(\mathbf{x}), \langle\phi, r\rangle = \int_\Omega \phi(\mathbf{x})r(\mathbf{x})d\mathbf{x}$

于是，极小化GCRSF模型的能量泛函可以写成如下极小化问题:

$$\min_{a_0\le\phi\le b_0}\left(|\nabla\phi|_g + \langle\phi, r\rangle\right)$$

① 引入辅助变量$\vec{d} = (d_x, d_y)$，则原问题等价于解如下约束极小化问题:

$$\min_{\substack{a_0\le\phi\le b_0\\ \vec{d}}}\left(|\vec{d}|_g + \langle\phi, r\rangle\right)\ s.t.\ \vec{d} = \nabla\phi$$

② 引入二次约束函数，将①中约束极小化问题转化为无约束极小化问题:

$$\left(\phi^*,\ \vec{d}^*\right) = \arg\min_{\substack{a_0<b_0\\ \vec{d}}}\left(|\vec{d}|_g + \langle\phi, r\rangle + \frac{\lambda}{2}\|\vec{d} - \nabla\phi\|^2\right)$$

其中，λ为正常数.

③ 考虑到二次约束函数仅仅近似地对条件$d = \Phi(u)$进行约束,而事实上希望精确地或严格地强制该约束条件，因此考虑Split Bregman迭代算法:

$$\left(\phi^{k+1}, \vec{d}^{k+1}\right) = \arg\min_{\substack{a_0<b_0 \\ \vec{d}}} \left(|\vec{d}|_g + \left\langle \phi, r^k \right\rangle + \frac{\lambda}{2} \|\vec{d} - \nabla\phi - \vec{b}^k\|^2 \right)$$

$$\vec{b}^{k+1} = \vec{b}^k + (\nabla\phi^{k+1} - \vec{d}^{k+1}),\ \vec{b}^0 = \mathbf{0} = (0,0)$$

这样，将原L1正则问题转化为求解一系列无约束优化问题和Bregman迭代的问题.

④分别关于u和d交替极小化：

$$\phi^{k+1} = \arg\min_{a_0\le\phi\le b_0} \left(\langle \phi, r^k \rangle + \frac{\lambda}{2} \|\vec{d}^k - \nabla\phi - \vec{b}^k\|^2 \right)$$

$$\vec{d}^{k+1} = \arg\min_{\vec{d}} \left(|\vec{d}|_g + \frac{\lambda}{2} \|\vec{d} - \nabla\phi^{k+1} - b^k\|^2 \right)$$

对于第一步，因为已经将ϕ从$L1$项中分离出来，关于ϕ的优化问题现在是可微的，下面我们应用变分方法和Gauss-Seidel方法，解关于ϕ的极小化问题：

> 首先考虑极小点ϕ^{k+1}满足的欧拉-拉格朗日方程：
>
> $$\Delta\phi^{k+1} = \frac{1}{\lambda} r^k + \nabla\cdot(\vec{d}^k - \vec{b}^k)(a_0 \le \phi^{k+1} \le b_0)$$
>
> 对于此拉普拉斯方程，我们使用Gauss-Seidel方法求解。对于图像中的每一个像素点(i,j)，$\phi_{i,j}^{k+1}$可由以下格式迭代：
>
> $$\begin{cases} \alpha_{i,j}^k = d_{x,i-1,j}^k - d_{x,i,j}^k + d_{y,i,j-1}^k - d_{y,i,j}^k - \left(b_{x,i-1,j}^k - b_{x,i,j}^k + b_{y,i,j-1}^k - b_{y,i,j}^k \right) \\ \beta_{i,j}^k = \frac{1}{4}\left(\phi_{i-1,j}^k + \phi_{i+1,j}^k + \phi_{i,j-1}^k + \phi_{i,j+1}^k - \frac{1}{\lambda} r_{i,j}^k + \alpha_{i,j}^k \right) \\ \phi_{i,j}^{k+1} = \max\left\{ \min\left\{ \beta_{i,j}^k, b_0 \right\}, a_0 \right\} \end{cases}$$

对于第二步，利用向量值shrinkage算子显式地计算出$\vec{d}^{k+1}$：

$$\vec{d}^{k+1} = \mathrm{shrink}_g\left(\vec{b}^k + \nabla\phi^{k+1}, \frac{1}{\lambda} \right) = \mathrm{shrink}\left(\vec{b}^k + \nabla\phi^{k+1}, \frac{g}{\lambda} \right)$$

其中$\mathrm{shink}(\mathbf{x},\gamma) = \begin{cases} \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\max(|\mathbf{x}| - \gamma, 0), \mathbf{x} \ne 0 \\ 0, \mathbf{x} = 0 \end{cases}$

(2) 极小化过程迭代的收敛性：

定理2.6告诉我们，极小化GCRSF模型能量泛函的Split Bregman迭代算法中的$(\phi^{k+1}, \vec{d}^{k+1})$与$\vec{b}^{k+1}$在如下意义下收敛：当$k \to \infty$时，$\|\vec{d}^k - \nabla\phi^k\| \to 0$与$\|\phi^k - \phi^*\| \to 0$，其中$\phi^*$是原始极小化问题的解。**这说明，由Split Bregman方法得到的关于$(\phi^{k+1}, \vec{d}^{k+1})$与$\vec{b}^{k+1}$的无约束问题，与原始极小化问题是等价的。**

第三章 自动结合局部与全局信息的活动轮廓模型

1. 写出LGIF模型的能量泛函，并说明LGIF模型中拟合能量与LIF能量和GIF能量的关系。

(1) LGIF模型能量泛函：

$$F_{\varepsilon}^{LGIF}(\phi, f_1, f_2, c_1, c_2) = E_{\varepsilon}^{LGIF}(\phi, f_1, f_2, c_1, c_2) + \nu\mathcal{L}_{\varepsilon}(\phi) + \mu\mathcal{P}(\phi)$$

其中：

$$\nu\mathcal{L}_{\varepsilon}(\phi) = \nu\int_{\Omega} |\nabla H_{\varepsilon}(\phi(\boldsymbol{x}))| d\boldsymbol{x}$$

$$\mu\mathcal{P}(\phi) = \mu\int_{\Omega} \frac{1}{2}(|\nabla\phi(\boldsymbol{x})| - 1)^2 d\boldsymbol{x}$$

E_{ε}^{LGIF}的具体含义如下：

> 定义局部强度拟合（LIF）能量：
>
> $$E^{LIF}(\phi, f_1, f_2) = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_{\Omega}\left(\int_{\Omega} K_{\sigma}(\mathbf{x}-\mathbf{y})|u_0(\mathbf{y}) - f_i(\mathbf{x})|^2 M_i(\phi(\mathbf{y}))d\mathbf{y}\right)d\mathbf{x}$$
>
> 定义全局强度拟合（GIF）能量：
>
> $$E^{GIF}(\phi, c_1, c_2) = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\int_{\Omega} |u_0(\mathbf{x}) - c_i|^2 M_i(\phi(\mathbf{x}))d\mathbf{x}$$
>
> 定义局部和全局强度拟合能量：
>
> $$E^{LGIF}(\phi, f_1, f_2, c_1, c_2) = (1-\omega)E^{LIF}(\phi, f_1, f_2) + \omega E^{GIF}(\phi, c_1, c_2)$$
>
> 对E^{LGIF}进行近似，即使用M_i^{ε}替换拟合能量中的M_i，就得到了E_{ε}^{LGIF}

(2) LGIF模型中拟合能量与LIF能量和GIF能量的关系：

从上式中，我们可以看出，局部和全局强度拟合能量正是由LIF能量与GIF能量按权重ω进行加权得到的。ω越大，全局强度拟合能量就越大；ω越小，局部强度拟合能量就越大。根据实际情况调整LGIF模型中的ω值，就可以实现对不同对比度图像的检测。

2. 给出LGIF能量泛函关于水平集函数ϕ的梯度下降流方程：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \delta_c(\phi)(F_1 + F_2) + \nu\delta_c(\phi)\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right) + \mu\left(\nabla^2\phi - \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right)$$

推导出自动结合局部与全局信息的活动轮廓模型的能量泛函。

①去掉水平集正则项：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\delta_c(\phi)(F_1+F_2)+\nu\delta_c(\phi)\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)$$

②不失一般性，令$\nu=1$：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=\delta_\varepsilon(\phi)\left[(F_1+F_2)+\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)\right]$$

③注意到$\delta_\varepsilon(\phi)\neq 0$处处成立，根据全局凸分割方法的思想，下面简化的梯度下降流方程与原方程有相同的静态解：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}=(F_1+F_2)+\mathrm{div}\left(\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right)$$

④基于上述简化的梯度下降流方程，定义如下新的能量泛函：

$$E(\phi)=\int_\Omega|\nabla(\phi(\mathbf{x}))|d\mathbf{x}+\int_\Omega\phi(\mathbf{x})s(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

其中$s(\mathbf{x})=-(F_1(\mathbf{x})+F_2(\mathbf{x}))$

⑤为了更加容易地检测图像的边界，我们在能量泛函中引入一个非负的边缘检测函数$g(\xi)$。通过将加权的全变分范数的形式引入能量泛函中，因此得到自动结合局部与全局信息的活动轮廓模型的能量泛函：

$$E(\phi)=\int_\Omega g(|\nabla u_0(\boldsymbol{x})|)|\nabla(\phi(\boldsymbol{x}))|d\boldsymbol{x}+\int_\Omega\phi(\boldsymbol{x})s(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$$

3. 给出权函数的定义并说明其作用。

权函数定义为：

$$\omega=\gamma\cdot average(LCR_W)\cdot(1-LCR_W)$$

其中γ是一个固定的参数，LCR_W表示给定图像的局部对比度，定义如下：

$$LCR_W(\mathbf{x})=\frac{V_{max}-V_{min}}{V}$$

其中W表示局部窗口的大小，V_max和V_min分别表示该局部窗口内图像强度的最大值和最小值。V_g表示给定图像的强度水平，对于灰度图像来说，它的值是255

权函数的大小反映了在一个局部区域内，图像强度变化有多快。在相对光滑的区域，$LCR_W(x)$的值较小，而在靠近物体边缘处的区域，$LCR_W(x)$的值较大。$average(LCR_W)$是LCR_W在整个图像上的平均值，它反映了图像的整体对比度信息。对于具有较强整体对比度的图像，可以认为图像具有比较明显的背景和前景，因此在整体上增加全局拟合项的权值。

$(1-LCR_W)$则在所有区域内自动地调整全局拟合项的权值，使得该权值在局部对比度较高的区域内较小，而在局部对比度较低的区域内较大。

因此，权函数的值会随着图像的不同位置自动变化，它由给定图像自身的图像强度决定。通过使用这个权函数，不需要对不同的图像选择合适的权值，新模型可以根据图像自身的强度信息自动地平衡局部拟合项和全局拟合项的作用，即是自动结合图像的局部与全局信息，从而更加准确地分割给定的图像。这也是新模型优于LGIF模型的一大特点。