第三次作业

2024 年 4 月 24 日

1.

x	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7
$\sin x$	0.6442	0.7833	0.8912	0.9636	0.9975	0.9917

根据上表构造差商表格，并构建四点牛顿插值多项式，逼近 sin(1.0)

2. 采用和上题相同的表格，解决以下问题：

   (1). 构造对应的前向差分表格和后向差分表格。

   (2). 构建四点牛顿前插公式以近似计算sin(0.74)，并估算相关的截断误差。

   (3). 构建四点牛顿后插公式以近似计算sin(1.6)，并估算相关的截断误差。

3. 已知函数 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在 $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ 处的值,

   (1). 线性插值求 $\sin\frac{\pi}{12}$ 的近似

   (2). 二次插值求 $\cos\frac{\pi}{5}$ 的近似值. 并作误差估计.

4. 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为$n+1$个互异插值节点，$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 为Lagrange插值基函数，试证明：

   (1). $\sum_{j=0}^{n} l_j(x) \equiv 1$;

   (2). $\sum_{j=0}^{n} x_j^k l_j(x) \equiv x^k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$;

   (3). $\sum_{j=0}^{n} (x_j - x)^k l_j(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n$;

(4).

$$\sum_{j=0}^{n} l_j(0)x_j^k = \begin{cases} 1, k=0; \\ 0, k=1,2,\cdots,n; \\ (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_n, \quad k=n+1. \end{cases}$$

5. 已知 $f(x)=5x^6+2x^4+3x+1$. 求 $f\left[2^0 2^1 \cdots 2^6\right]$ 及 $f\left[2^0 2^1 \cdots 2^7\right]$.

6. 求函数 f 在指定区间和函数类 Φ 上的最佳平方逼近多项式:

(1). $f(x)=\cos\pi x, [0,1], \Phi=\mathrm{span}\{1,x,x^2\}$;

(2). $f(x)=|x|, [-1,1], \Phi=\mathrm{span}\left\{1,x^2,x^4\right\}$;

7. 已知实验数据如下

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

用最小二乘法求形如 $y=a+bx^2$ 的经验公式,并计算均方误差.

8. 已知一组实验数据

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y	4.00	6.40	8.00	8.80	9.22	9.50	9.70	9.86

试用 $y=\frac{t}{at+b}$ 来拟合.