35. 设 g 为 E 上非负可积函数，则 $\forall \varepsilon > 0$，存在可测集 $A \subset E$

使得 $\int_{E \setminus A} g \, d\lambda < \varepsilon$, $\lambda(A) < \infty$.

证：对任意 $k \geq 1$，取

$$g_k = g \, \mathbb{1}_{\{g \leq k\}}.$$

则 g_k 为 E 上可测函数，且 $g_k \leq g$， $\lim_{k \to \infty} g_k = g$.

由控制收敛定理，

$$\lim_{k \to \infty} \int_E g_k \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda$$

故存在 $N \geq 1$，使得

$$\int_E g \, d\lambda - \int_E g_N \, d\lambda < \varepsilon$$

即

$$\int_E (g - g_N) \, d\lambda < \varepsilon$$

$$\int_{\{g > N\}} g \, d\lambda < \varepsilon.$$

取 $A = \{g > N\}$. 则由 Markov 不等式

$$\lambda(A) = \lambda(g > N) \leq \frac{1}{N} \int_E g \, d\lambda < \infty.$$

39. 设 f 为 $\mathbb{R}$ 上可积函数，求证对任意 $a\in\mathbb{R}$，

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\,\lambda(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\lambda(dx). \qquad (1)$$

证明方法一：

(1) 设 $f\geq 0$。则 右边 $=\int_{0}^{\infty}\lambda(f>t)\,dt$.

因 $\forall t>0$，$\lambda(f(\cdot+a)>t)$

$$= \lambda(\{x\in\mathbb{R}:\ x+a\in f^{-1}((t,+\infty))\})$$

$$= \lambda(\{x\in\mathbb{R}:\ x\in -a+f^{-1}((t,+\infty))\})$$

$$= \lambda(-a+f^{-1}((t,+\infty)))$$

$$= \lambda(f^{-1}(t,+\infty))$$

$$= \lambda(f>t).$$

从而 左边 $=\int_{0}^{+\infty}\lambda(f(\cdot+a)>t)\,dt$

$$= \int_{0}^{\infty}\lambda(f>t)\,dt = \text{右边}.$$

(2) 设 f 为一般可积函数，则对 f^+，f^- 分别应用 (1) 中的结论再相减即可完成证明。

39 证明方法：

(a) 设 $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{M}$, $\lambda(A) < \infty$.

则 $f(x+a) = \mathbb{1}_A(x+a) = \mathbb{1}_{-a+A}(x)$.

因此 $\int_{\mathbb{R}} f(x+a)\lambda(dx) = \lambda(-a+A) = \lambda(A) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx)$.

(b) 设 $f, g \geq 0$, (1) 对 f, g 成立, $\alpha, \beta \geq 0$, 则

$$\int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x+a) + \beta g(x+a))\lambda(dx)$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x+a)\lambda(dx) + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x+a)\lambda(dx)$$

$$= \alpha \int_{\mathbb{R}} f(x)\lambda(dx) + \beta \int_{\mathbb{R}} g(x)\lambda(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\alpha f(x) + \beta g(x))\lambda(dx)$$

由此及(a)可知 (1) 对非负简单函数成立.

(c). 由 Levi 单调收敛定理可知 (1) 对非负可测函数成立.

(d). 设 f 为可积函数, 对 f^+, f^- 分别应用上述结论再相减可知 (1) 对可积函数 f 成立.

41. 设 $C\subset[0,1]$ 为 Cantor 集. $\mathbb{1}_C$ 在 $[0,1]$ 上是否黎曼可积? 若可积, 求其积分.

解: 记 C_n 为经第 n 步后去掉三分集中的区间后所余下的 2^n 个长为 $\frac{1}{3^n}$ 的区间之并. 因此, $\lambda(C_n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$. 因为 $C_n\downarrow C$, 所以 $\mathbb{1}_C\leq\mathbb{1}_{C_n}$, 从而 $\mathbb{1}_C$ 的 Darboux 上和

$$\int^*\mathbb{1}_C \leq \int_0^1 \mathbb{1}_{C_n}(x)\,dx=\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

而 $\mathbb{1}_C$ 的 Darboux 下和显然大于或等于 0. 由于 $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ 可知

$$\int^*\mathbb{1}_C=\int_*\mathbb{1}_C=0.$$

故 $\mathbb{1}_C$ 黎曼可积, 积分为 0.

42. 设 F 为 $[0,1]$ 上的 Cantor-Lebesgue 函数. 求 $\int_0^1 F(x)dx$.

解: 记在康托集的构造中第 n 步去掉的 2^{n-1} 个开区间为

$$I_{n1},\ I_{n2},\ \cdots,\ I_{n,2^{n-1}}.$$

则由 C 的零测集, 故 F 几乎处处等于

$$\tilde{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2k-1}{2^n} \mathbb{1}_{I_{nk}}.$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(x)\,dx &= \int_0^1 \tilde{F}(x)\,dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \frac{2k-1}{2^n} \cdot \frac{1}{3^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (2k-1) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left[2 \times \frac{2^{n-1}(2^{n-1}+1)}{2} - 2^{n-1} \right] \\
&= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

43 设 $p>-1$，求证

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\log\frac{1}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+n)^2}.$$

证明：当 $x\in(0,1)$ 时，

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

故

$$\frac{x^p}{1-x}\log\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+p}\log\frac{1}{x}$$

因上述级数的每一项都是正的，故

$$\int_0^1 \frac{x^p}{1-x}\log\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{n+p}\log\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+p+1)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+p)^2}.$$

上面的第二个等号计算如下：

$$\int_0^1 x^{n+p}\log\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{n+p+1}\left(x^{n+p+1}\right)'(-\log x)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{n+p+1}x^{n+p+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx \quad \text{（分部积分）}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(n+p+1)^2}\left(x^{n+p+1}\right)'dx$$

$$=\frac{1}{(n+p+1)^2}.$$

44. 设 $G\subset[0,1]$ 为开集，求证 $\mathbb{1}_G$ 为黎曼可积的 或用反例说明 $\mathbb{1}_G$ 不是黎曼可积的.

证：G为开集，故G可写为~~有限~~至多可数个互不相交的开区间之并. 故 $\mathbb{1}_G$ 的不连续点集包含于G的构成区间的端点所组成的集合. 因此. $\mathbb{1}_G$ 的不连续点集至多可数. 从而为零测集. 所以 $\mathbb{1}_G$ 是黎曼可积的.

参候友良 P118. 例1.

45. 设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, $f_t(x)=f(x-t)$, $x\in\mathbb{R}$. 求证:

$$\lim_{t\to 0}\|f-f_t\|_1=0.$$

证明: (1) $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}$ 上有紧支撑的连续函数 g 使得

$$\|f-g\|\le \varepsilon/3.$$

(参如候友良(第一版) P116. Thm 4.17)

(2). 设 g 的紧支撑包含于 $[-N,N]$, 则 g 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续.

故存在 $1>\delta>0$, 当 $|t|<\delta$ 时,

$$|g(x-t)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3\cdot 2(N+1)}=\frac{\varepsilon}{6(N+1)}.$$

从而,

$$\begin{aligned}&\|f_t-f\|_1\\ \le\ &\|f_t-g_t\|_1+\|g_t-g\|_1+\|g-f\|_1\\ \le\ &\varepsilon/3+\frac{\varepsilon}{6(N+1)}\cdot 2(N+1)+\varepsilon/3=\varepsilon.\end{aligned}$$

46). 设$a>0$. f为$[0,a]$上可积函数. 求证

$$\int_0^a\int_x^a \frac{f(y)}{y}\,dy\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$$

证:

$$\text{左边} = \int_0^a\int_0^a \frac{f(y)}{y}\mathbb{1}_{[x,a]}(y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^a \frac{f(y)}{y}\mathbb{1}_{[0,y]}(x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^a \frac{f(y)}{y}\,dy \int_0^a \mathbb{1}_{[0,y]}(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{f(y)}{y}\,dy \cdot y$$

$$= \int_0^a f(y)\,dy.$$

这里能使用Fubini定理是因为

$$\int_0^a\int_0^a \left|\frac{f(y)}{y}\mathbb{1}_{[x,a]}(y)\right|dy\,dx$$

$$= \int_0^a\int_0^a \frac{|f(y)|}{y}\cdot\mathbb{1}_{[0,y]}(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{|f(y)|}{y}\,dy \int_0^a \mathbb{1}_{[0,y]}(x)\,dx$$

$$= \int_0^a \frac{|f(y)|}{y}\cdot y\,dy = \int_0^a |f(y)|\,dy < \infty.$$