Isabelle/HOLによるLevy-Prokhorov距離の形式化

平田　路和
東京工業大学

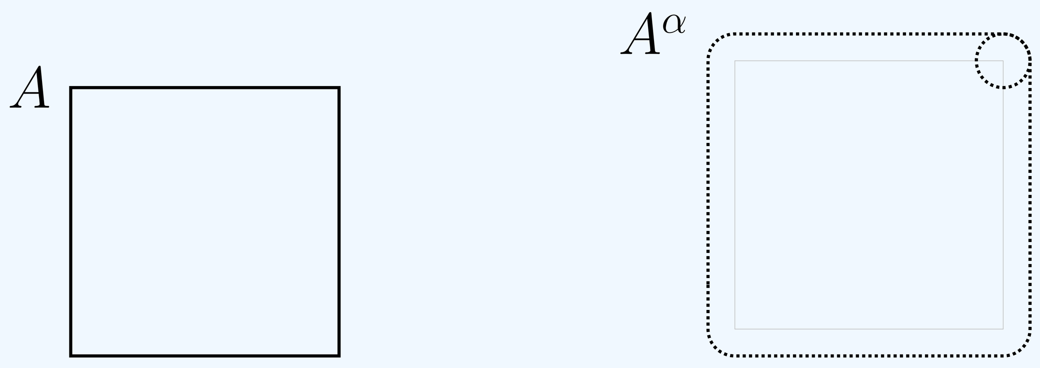
1. 概要

Levy-Prokhorov距離: 距離空間上の有限測度間の距離
弱収束の "距離づけ"

(X, d)を距離空間，$\mathcal{P} = \{X\text{上の有限測度}\}$，$\mu, \nu \in \mathcal{P}$

$$d_{\mathcal{P}}(\mu, \nu) = \inf\{\alpha > 0.\ \forall A \in \Sigma_X.\ \mu(A) \le \nu(A^\alpha) + \alpha \wedge \nu(A) \le \mu(A^\alpha) + \alpha\}$$

ただし，$A^\alpha = \bigcup_{x \in A} ball(x, \alpha)$．$(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$は距離空間となる．



本研究の形式化

- 測度の弱収束(フィルターで一般化されたPortmanteau定理)
- 測度の弱収束位相空間
- Levy-Prokhorov距離とその性質
- Prokhorovの定理と必要な補題: Rieszの表現定理，Alaogluの定理
  - Prokhorovの定理: 測度列に対する収束部分列の存在性の証明に用いられる
    中心極限定理，最適カップリングの存在定理(最適輸送理論)，Sanovの定理等
  - Rieszの表現定理: 正線型汎函数を積分表示
    本の証明[Rudin, 1987]: 9ページ，Isabelle: 約2,100行
- 標準ボレル空間上の有限測度がなす可測空間が標準ボレル空間
  - よい性質を持つ可測空間のクラス
    準ボレル空間理論，Disintegration定理などで用いられる

2. 準備

Isabelle/HOLでの距離空間

- 型クラス版[Hölzl et.al.,ITP2013]: 型全体上の距離
- 集合版[Paulson,2023]: 集合+距離関数

本研究は集合版を利用

Isabelle/HOLでの収束
フィルターによる一般化

$(\square \longrightarrow \square)\ \square$ in $\square :: (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha\ filter \Rightarrow \beta\ topology \Rightarrow bool$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff (x_n \longrightarrow x)\ \ sequentially\ \text{in}\ \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (f \longrightarrow L)\ \ (at\ a)\ \text{in}\ \mathbb{R}$$

(位相空間が明らかな場合はin以降を省略)

3. 測度の弱収束

フィルターで一般化．証明は$F = sequentially$の時と同じ流れ

測度の弱収束

$(\mu_i \Rightarrow_{\mathrm{wc}} \mu)\ F \overset{\text{def}}{\iff} \forall f \in \mathrm{C_b}(X).\ (\int f d\mu_i \longrightarrow \int f d\mu)\ F$

弱収束の同値な条件(Portmanteauの定理)を形式化した．

測度の弱収束位相: $\mathcal{O}_{\mathrm{wc}}$

$\forall f \in \mathrm{C_b}(X).(\lambda\mu.\ \int f d\mu) : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ が連続になるような最弱の位相

定理: $(\mu_i \longrightarrow \mu)\ F$ in $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\mathrm{wc}}) \iff (\mu_i \Rightarrow_{\mathrm{wc}} \mu)\ F$

4. Levy-Prokhorov距離

```
locale Levy_Prokhorov = Metric_space +
  fixes 𝒫
  defines "𝒫 ≡ {N. sets N = sets (borel_of mtopology) ∧ finite_measure N}"
begin

definition LPm :: "'a measure ⇒ 'a measure ⇒ real" where
"LPm N L ≡ if N ∈ 𝒫 ∧ L ∈ 𝒫 then (⨅ {e. e > 0 ∧ (∀A∈sets (borel_of mtopology).
                                      measure N A ≤ measure L (⋃a∈A. mball a e) + e
                                     ∧ measure L A ≤ measure N (⋃a∈A. mball a e) + e)})
           else 0"
```

```
sublocale LPm: Metric_space 𝒫 LPm
```

定理: $(\mu_i \longrightarrow \mu)\ F$ in $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}}) \Longrightarrow (\mu_i \Rightarrow_{\mathrm{wc}} \mu)\ F$

定理: Xが可分の時，$(\mu_i \Rightarrow_{\mathrm{wc}} \mu)\ F \Longrightarrow (\mu_i \longrightarrow \mu)\ F$ in $(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}})$

系: Xが可分の時，$(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}}) = (\mathcal{P}, \mathcal{O}_{\mathrm{wc}})$

収束の同値性をフィルターで一般化したので，開(閉)集合の収束による特徴づけを使うことができる．

定理: Xが可分なら$(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}})$も可分

定理: Xが可分完備なら$(\mathcal{P}, \mathcal{O}_{d_{\mathcal{P}}})$も可分完備(要Prokhorovの定理)

5. Prokhorovの定理

$\Gamma(\subseteq \mathcal{P})$が緊密 $\overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0.\ \exists K : \text{compact}.\ \forall \mu \in \Gamma.\ \mu(X - K) < \varepsilon$

$r \ge 0, \mathcal{P}_r = \mathcal{P} \cap \{\mu.\ \mu(X) \le r\}, \Gamma \subseteq \mathcal{P}_r$とする

Prokhorovの定理: Xが可分完備の時以下は同値

1. Γが相対コンパクト
2. Γが緊密

「2ならば1」は以下の形で使える．(完備性必要なし)

$$\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}(\subseteq \mathcal{P}_r)\text{が緊密} \Rightarrow \exists \mu_{n_k} : \text{部分列}, \exists \mu.\ (\mu_{n_k} \Rightarrow_{\mathrm{wc}} \mu)\ \ sequentially \qquad (1)$$

必要な補題: Rieszの表現定理

X:コンパクトハウスドルフ，正線型汎函数: $\varphi : \mathrm{C}(X) \to X$

i.e. $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g) \wedge (f \ge 0 \Longrightarrow \varphi(f) \ge 0)$

とすると一意な測度νがあって以下が成立．

$$\forall f \in C(X).\ \varphi(f) = \int f d\nu$$

必要な補題: Alaogluの定理

Y: 内積ベクトル空間，Y^*: 双対空間

$B^* = \{\varphi \in Y^*, \|\varphi\| \le r\}$は弱*-コンパクト

欲しい形の証明には集合版ベクトル空間が必要
Isabelle/HOLの集合版ベクトル空間ライブラリは小さい
$Y = C(X)$の場合のみ証明

6. 標準ボレル空間

$\mathcal{P}$上のσ-代数:$\Sigma_{\mathcal{P}}$

$\forall A \in \Sigma_X.\ (\lambda\mu.\ \mu(A)) : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$が可測になるような最弱の$\sigma$-代数

$\mathcal{P}_{\mathrm{sprob}} = \mathcal{P} \cap \{\text{劣確率測度}\}$，　$\mathcal{P}_{\mathrm{prob}} = \mathcal{P} \cap \{\text{確率測度}\}$

$\mathcal{P}_{\mathrm{sprob}}$や$\mathcal{P}_{\mathrm{prob}}$は(劣)マルコフ核の定義でも使われる

定理: Xが可分完備なら$\Sigma_{\mathcal{P}} = \sigma[\mathcal{O}_{\mathrm{wc}}]$
Levy-Prokhorov距離を用いた証明を与えた

系: Xが標準ボレル空間なら$\mathcal{P}, \mathcal{P}_{\mathrm{sprob}}, \mathcal{P}_{\mathrm{prob}}$も標準ボレル空間

標準ボレル空間: 可分で完備な距離づけ可能位相空間に生成されるボレル空間

7. 関連研究・参考文献

- Isabelle/HOL

$\mathbb{R}$上確率測度列についての弱収束
$\mathbb{R}$上の確率測度についてProkhorovの定理(1)の形

- Lean

弱収束，弱収束位相, Rieszの表現定理
Levy-Prokhorov距離は現在形式化されている最中

- PVS, Mizar

Riesz の表現定理(の原型バージョン)

1. W.Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw Hill; 3rd edition, 1987.
2. J.Hölzl, F.Immler, B. Huffman, *Type Classes and Filters for Mathematical Analysis in Isabelle/HOL*, ITP2013, Springer Berlin Heidelberg.
3. L.C.Paulson, *Porting the HOL Light metric space library*, https://lawrencecpaulson.github.io/2023/07/12/Metric_spaces.html, 2023, Accessed: December 31. 2023.
4. O.Gaans, *Probability Measures on Metric Space*, https://www.math.leidenuniv.nl/~vangaans/jancol1.pdf, Accessed: March 2. 2023.
5. C.E.Heil, *Alaoglu's Theorem*, https://heil.math.gatech.edu/6338/summer08/section9f.pdf, Lecture note on MATH 6338 (Real Analysis II) at Gerogia Insisute of Technology, 2008, Accessed: January 5, 2024