

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

21. huhtikuuta 2018

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Esitietoja	3
3	Uniformiset rakenteet	5
4	Pseudometriikat	12
5	Pseudometriikan määrittelemä uniformiteetti	14
6	Täydellinen uniforminen avaruus	22
7	Täysin säännölliset avaruudet	26
8	Kompaktisointi	30

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Tässä luvussa käydään läpi tutkielmassa käytettäviä topologiaan ja joukkomerkintöihin liittyviä käsitteitä ja merkintätapoja. Perusteellisemmin näistä aiheesta löytyy muun muassa kirjoista General Topology Part 1 [1] ja Topologia II [3].

Sopimus 2.1. Käytämme koko tutkielman ajan merkintää $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon X joukko ja V ja W karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X, \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\},$$

$$W^2 = W \circ W \text{ ja } W^n = W \circ W^{n-1}.$$

Määritelmä 2.3. Topologisen avaruuden (X, \mathcal{T}) osajoukko $A \subset X$ on avoin, jos se on kokoelman $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ alkio.

Määritelmä 2.4. Topologisen avaruuden (X, \mathcal{T}) osajoukko $A \subset X$ on alkion x *ympäristö*, jos on olemassa sellainen avoin osajoukko $B \subset X$, jolla $x \in B \subset A$.

Huomautus 2.5. Topologisen avaruuden avoin osajoukko on jokaisen alkionsa ympäristö.

Määritelmä 2.6. *Ympäristökanta.* Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x *ympäristökanta* (topologiassa \mathcal{T}), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Huomautus 2.7. Topologisen avaruuden (X, \mathcal{T}) alkion $x \in X$ kaikkien ympäristöjen kokoelma $B(x)$ on alkion x ympäristökanta.

Esimerkki 2.8. Jos joukkoperhe $B \subset \mathcal{P}(X)$ on avaruuden (X, \mathcal{T}) kanta ja $x \in X$ alkio, niin joukko $B(x) = \{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella alkiolla $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa (X, \mathcal{T}) , niin kokoelma $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden (X, \mathcal{T}) kanta.

Lause 2.9. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian \mathcal{T} esikanta. Lisäksi \mathcal{T} on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia \mathcal{T} on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. Topologia II [3] Lause 2.19. □

Määritelmä 2.10. *Topologioiden vertailu.* Olkoon X joukko ja \mathcal{T}_1 ja \mathcal{T}_2 topologioita joukolle X . Topologia \mathcal{T}_2 on karkeampi kuin topologia \mathcal{T}_1 , jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin \mathcal{T}_1 on hienompi kuin \mathcal{T}_2 .

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä luvussa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. *Uniforminen rakenne* (tai *uniformiteetti*) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona \mathcal{U} , jolle pätee

- (U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,
- (U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon \mathcal{U} alkioista kuuluu joukkoon \mathcal{U} ,
- (U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,
- (U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,
- (U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformiteetin \mathcal{U} lähistöiksi. Uniformiteetilla \mathcal{U} varustettua joukkoa X sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformiteetin \mathcal{U} lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan V -lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla:

- (Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Kokoelma $\{\emptyset\}$ on ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti tyhjälle joukolle.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja kokoelma $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ uniformiteetti joukolle X . Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin \mathcal{U} kanta, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 3.6. Olkoon X joukko. Kokoelma $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X erään uniformiteetin kanta, jos kokoelmalle B pätee

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Todistus. Olkoon X joukko ja $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ sellainen kokoelma, jolle pätevät ehdot (B1)-(B4). Tällöin olkoon

$$\mathcal{U}_B = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon \mathcal{U}_B määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{U}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että \mathcal{U}_B on uniformiteetti. Käydään läpi uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{U}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X \times X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{U}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W \subset W' \subset X \times X$ niin $W' \in \mathcal{U}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W' \in \mathcal{U}_B$ joukkoja. Joukon \mathcal{U}_B määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon (B1) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan \mathcal{U}_B . Lisäksi joukoiksi W ja W' voidaan valita mielivaltaisia kokoelman \mathcal{U}_B alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon \mathcal{U}_B alkioista kuuluu joukkoon \mathcal{U}_B .

(U3) Jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Ehdon (B2) nojalla $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset V$, joten $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset W$.

(U4) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon \mathcal{U}_B määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V \subset W$. Tällöin ehdon (B3) nojalla joukolle V on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$. Näin ollen joukon \mathcal{U}_B määrittelyn nojalla $V^{-1} \in \mathcal{U}_B$ ja edelleen $W^{-1} \in \mathcal{U}_B$.

(U5) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon \mathcal{U}_B määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset W$. Ehdon (B4) nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V^2 \subset V'$. Joukon \mathcal{U}_B määrittelyn nojalla tällöin $V \in \mathcal{U}_B$ ja siis $V^2 \subset W$.

□

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla \mathcal{U} . Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon tällöin*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \text{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti \mathcal{U} määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkion x ja joukko $B(x)$ on alkion x ympäristökanta kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla \mathcal{U} , $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X . Lisäksi olkoot joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Joukko $V(x)$ on epätyhjä, sillä $x \in V(x)$. Olkoon $W \in \mathcal{U}$ lähistö, jolloin $W(x)$ on alkion x ympäristö. Alkion x ympäristöille $V(x)$ ja $W(x)$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x), \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehdon (U2) nojalla pätee $V \cap W \in \mathcal{U}$. Ehdosta (U1) seuraa, että joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko ja siten huomautuksen 2.7 nojalla ympäristökanta. □

Huomautus 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.9. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ kuvaus. Kuvaus f on *tasaisesti jatkuva* (uniformly continuous), jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.10. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Todistus. Korollaari on suora seuraus määritelmästä 3.9 ja uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdosta (U1). □

Lause 3.11. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f on jatkuva, kun varustetaan joukot X ja X' uniformeettiensa indusoimilla topologioilla.*

Todistus. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden X' uniformeetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion x' ympäristön avaruudessa X' . Korollarin 3.10 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $(g^{-1}V')(x)$ on alkion x ympäristö. Erityisesti ympäristö $(g^{-1}V')(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x, y) \in g^{-1}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva. \square

Lause 3.12. *Olkoot X , X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ ja $g: X' \rightarrow X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow X''$ on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot X , X' ja X'' uniformeja avaruuksia, $f: X \rightarrow X'$ ja $g: X' \rightarrow X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia ja V'' avaruuden X'' lähistö. Tällöin tasaisesti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden X' lähistö V' , jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V , jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle V'' on olemassa lähistö V , jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow X''$ on tasaisesti jatkuva. \square

Määritelmä 3.13. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on *isomorfismi*, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat tasaisesti jatkuvia.

Määritelmä 3.14. *Uniformeettien vertailu.* Olkoon X joukko ja \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformeetteja joukolle X . Uniformeetti \mathcal{U}_2 on karkeampi kuin uniformeetti \mathcal{U}_1 , jos identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin \mathcal{U}_1 on hienompi kuin \mathcal{U}_2 .

Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin \mathcal{U}_1 on aidosti hienompi kuin \mathcal{U}_2 ja vastaavasti \mathcal{U}_2 on aidosti karkeampi kuin \mathcal{U}_1 . Sanotaan, että kahta uniformeettia \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 voidaan vertailla, jos \mathcal{U}_1 on hienompi tai karkeampi kuin \mathcal{U}_2 . Uniformeeteille \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos \mathcal{U}_1 on sekä hienompi että karkeampi kuin \mathcal{U}_2 .

Korollaari 3.15. Olkoon X joukko ja \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U}_1 on hienompi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_2 jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.

Korollaari 3.16. Olkoon X joukko, \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X ja \mathcal{U}_1 on hienompi kuin \mathcal{U}_2 . Tällöin uniformiteetin \mathcal{U}_1 indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin \mathcal{U}_2 indusoima topologia.

Lause 3.17. Olkoon X joukko ja (Y_i, \mathcal{U}_i) uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I . Olkoon $f_i: X \rightarrow Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$, $i \in I$. Tällöin joukko

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille \mathcal{U} .

Todistus. Olkoon X joukko ja (Y_i, \mathcal{U}_i) uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$. Olkoon lisäksi kuvaukset f_i ja g_i ja joukko B kuten yllä. Selvitetään, onko joukko B uniformiteetin kanta käymällä läpi kantalauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot $U_1, U_2 \in B$. Tällöin on olemassa äärelliset osajoukot $J_1, J_2 \subset I$ ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$ kaikilla $i \in J_1$ ja $V_j \in \mathcal{U}_j$ kaikilla $j \in J_2$, joilla

$$U_1 = \bigcap_{i \in J_1} g_i^{\leftarrow}(V_i) \quad \text{ja} \quad U_2 = \bigcap_{j \in J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j).$$

Yhdiste $J_1 \cup J_2$ on äärellinen indeksijoukon I osajoukko, joten

$$U_3 = \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j) \in B$$

ja erityisesti $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(B2) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Jokaisella $V_i \in \mathcal{U}_i$ pätee $\{(y_i, y_i) \mid y_i \in Y_i\} \subset V_i$ ja näin ollen myös jokaisella $g_i^{\leftarrow}(V_i)$ pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset g_i^{\leftarrow}(V_i)$. Siis pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset U$, koska U on leikkaus joukoista $g_i^{\leftarrow}(V_i)$.

(B3) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Uniformiteetin määritelmän ehdon (U4) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin $V_i^{-1} \in \mathcal{U}_i$. Näin ollen

$$U^{-1} = \bigcap_{i \in J} (g_i^{\leftarrow}(V_i))^{-1} = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i^{-1}) \in B,$$

jolloin vaadittu ehto pätee muodossa $U^{-1} \subset U^{-1}$.

(B4) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Uniformiteetin määritelmän ehdon (U5) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin on olemassa sellainen $W_i \in \mathcal{U}_i$, jolla $W_i^2 \subset V_i$. Olkoon

$$A = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i),$$

jolloin $A \in B$ ja näin ollen riittää osoittaa, että $A^2 \subset U$. Määritelmän mukaan $A^2 = \{(x, z) \mid (x, y) \in A \text{ ja } (y, z) \in A\}$. Siis alkioilla $x, z \in X$ pätee $(x, z) \in A^2$ täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $y \in X$, jolla $(x, y) \in A$ ja $(y, z) \in A$. Toisaalta jos $(x, y) \in A$ ja $(y, z) \in A$ niin $(x, y) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ ja $(y, z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ jokaisella $i \in J$. Tällöin $g_i(x, y) \in W_i$ ja $g_i(y, z) \in W_i$, joten $g_i(x, z) \in W_i^2$. Näin ollen $(x, z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i^2)$ jokaisella $i \in J$, joten

$$(x, z) \in \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i^2) \subset \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) = U.$$

Näin ollen $A^2 \subset U$.

Siis joukko B on joukon X erään uniformiteetin kanta. □

Määritelmä 3.18. *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformity).

Olkoon X joukko ja (Y_i, \mathcal{U}_i) uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I . Olkoon $f_i: X \rightarrow Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$ ja $i \in I$. Tällöin joukko

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen, } V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoiman uniformiteetin kanta. (Vrt. edellinen lause.)

Korollaari 3.19. *Olkoon X joukko ja (Y_i, \mathcal{U}_i) uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I . Olkoon $f_i: X \rightarrow Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$. Tällöin kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoima uniformiteetti \mathcal{U} on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat tasaisesti jatkuvia.* \square

Määritelmä 3.20. *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X . Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti \mathcal{U} , joka on kuvausten $\text{id}: X \rightarrow (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta teoksesta General Topology part 2 [2] luvusta IX.

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

$$(P1) \quad f(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X,$$

$$(P2) \quad f(x, y) = f(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

$$(P3) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \text{ kaikilla } x, y, z \in X.$$

Huomautus 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitetaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

$$(M1) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ määritelty kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kaavalla $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ määritelty kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ määrittelee pseudometriikan joukolle X .

Huomautus 4.7. Määritelmän 4.1 ehdon (P3) nojalla epäyhtälöstä $f(x, z) + f(z, y) < \infty$ seuraa $f(x, y) < \infty$. Näin ollen epäyhtälöistä

$$f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z) \text{ ja } f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z)$$

seuraa epäyhtälö $|f(x, z) - f(z, y)| \leq f(x, y)$.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka joukolle X ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus λf , jolla $(\lambda f)(x, y) = \lambda(f(x, y))$ kaikilla $(x, y) \in X \times X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], \quad f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ epäyhtälöstä $f_i(x, y) \leq f_i(x, z) + f_i(z, y)$ seuraa epäyhtälö

$$\sup_{i \in I} f_i(x, y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x, z) + f_i(z, y)).$$

Tällöin kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ missä

$$f(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in X$$

on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittely uniformiteetti

Lause 5.1. Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko, joka on määritelty kaavalla

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n erään uniformiteetin kannan.

Todistus. Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

- (B1) Olkoon $a_1, a_2 \in [0, \infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin kaavasta $|x - y| \leq a_1$ seuraa $|x - y| \leq a_2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,
- (B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in [0, \infty]$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,
- (B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in [0, \infty]$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

- (B4) Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $(x, z), (z, y) \in U_a$, eli $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x - y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0, \infty]$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n uniformiteetin kannan. \square

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 5.2. *Olkoon X joukko ja f pseudometriikka joukolle X . Tällöin pseudometriikka f määrittelee sellaisen uniformiteetin joukolle X , jonka kannan muodostaa kokoelma*

$$B = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}.$$

Todistus. Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku. Näin ollen $f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X$ on joukko. Merkitään $U_a = f^{\leftarrow}[0, a]$ ja käydään läpi lauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot $a_1, a_2 \in [0, \infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin pätee

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a] \subset f^{\leftarrow}[0, b] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan määritelmän 4.1 ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x, x) = 0$. Toisin sanoen pistepareista (x, x) muodostuvan joukon $\{(x, x) \mid x \in X\}$ jokainen alkio kuvautuu pseudometriikassa nollassi. Näin ollen joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ sisältyy jokaisen suljetun välin $[0, a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0, a]$ kaikilla $a \in [0, \infty]$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(x, y) \in U_a \Leftrightarrow (y, x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $x, y, z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $(x, z), (z, y) \in U_a$, eli $f(x, z) \leq a$ ja $f(z, y) \leq a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x, y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0, \infty]$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\} = \{f^{\leftarrow}[0, a] \mid a \in [0, \infty]\}$ muodostaa joukon X uniformiteetin kannan. \square

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X . Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittelevät jotkut uniformiteetit joukolle X . Pseudometriikat f ja g ovat *ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

Korollaari 5.4. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X . Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan f määräämä uniformiteetti \mathcal{U}_f on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti \mathcal{U}_g , jos ja vain jos jokaiselle $a \in [0, \infty]$ on olemassa sellainen $b \in [0, \infty]$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$.

Jos lisäksi jokaiselle $a \in [0, \infty]$ on olemassa $b \in [0, \infty]$, jolla $f(x, y) \leq b \Rightarrow g(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$, niin f ja g ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

Todistus. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X . Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan f määrittelemän uniformiteetin \mathcal{U}_f kannan muodostaa kokoelma

$$B_f = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}.$$

Tällöin uniformiteetti \mathcal{U}_f on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin \mathcal{U}_g kannan muodostaa kokoelma

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}$$

ja uniformiteetti \mathcal{U}_g on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

\Rightarrow Olkoon uniformiteetti \mathcal{U}_f karkeampi kuin \mathcal{U}_g ja näin ollen määritelmän 3.14 mukaan identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan jokaiselle maalijoukon lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähtöjoukon lähistö $V \in \mathcal{U}_g$ niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(x, y) \in V'$ kaikilla $x, y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä voidaan edeltävä ehto muotoilla seuraavasti: Jokaisella $a \in [0, \infty]$ on olemassa $b \in [0, \infty]$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, eli $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$.

\Leftarrow Oletetaan, että jokaiselle luvulle $a \in [0, \infty]$ on olemassa sellainen $b \in [0, \infty]$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$, eli $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, kaikilla $x, y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin \mathcal{U}_f kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0, a']$ missä $a' \in [0, \infty]$ on olemassa uniformiteetin \mathcal{U}_g kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0, b']$ missä $b' \in [0, \infty]$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b'] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a']$. Näin ollen identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva ja siten uniformiteetti \mathcal{U}_g on uniformiteettia \mathcal{U}_f hienompi. Siis pseudometriikan f määräämä uniformiteetti \mathcal{U}_f on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti \mathcal{U}_g .

Lisäksi määritelmistä 3.14 ja 5.3 seuraa, että jos \mathcal{U}_f on sekä hienompi että karkeampi kuin \mathcal{U}_g , niin pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja. \square

Määritelmä 5.5. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Pseudometriikkojen f_i määrittelemien uniformiteettien \mathcal{U}_{f_i} perheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i \in I}$ pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i \in I}$ määrittelemäksi uniformiteetiksi.

Määritelmä 5.6. Olkoon X joukko ja olkoot $(f_i)_{i \in I}$ ja $(g_j)_{j \in J}$ joukon X pseudometriikkaperheitä. Perheet (f_i) ja (g_j) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit ovat samoja.

Määritelmä 5.7. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon $H \subset I$ äärellinen joukko ja $g_H: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ kuvaus, jolla $g_H(x, y) = \sup_{i \in H} f_i(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Kuvaus g_H on pseudometriikka (esimerkki 4.10) ja siten voidaan muodostaa pseudometriikkaperhe $(g_H) := (g_H)_{H \subset I \text{ äärellinen}}$. Näin muodostettu pseudometriikkaperhe (g_H) on *saturoitu* (saturated) ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i \in I}$.

Lause 5.8. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon (g_H) pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla $(f_i)_{i \in I}$. Saturoidusta pseudometriikkaperheestä (g_H) otetun äärellisen osaperheen $(g_A) := \{g_{A_1}, g_{A_2}, \dots, g_{A_n}\} \subset (g_H)$ pienin yläraja $\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen (g_H) .

Todistus. Saturoidun pseudometriikkaperheen (g_H) äärellisen osaperheen (g_A) jäsenet ovat kuvauksia, joilla $g_{A_j}(x, y) = \sup_{i \in A_j} f_i(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen osaperheen (g_A) pienin yläraja $\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}$ on kuvaus, jolla

$$\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}(x, y) = \sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \left(\sup_{i \in A_j} f_i(x, y) \right) = \sup_{\substack{j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ i \in A_j}} f_i(x, y) = \sup_{i \in \bigcup_{j=1}^n A_j} f_i(x, y).$$

Joukko $\bigcup_{j=1}^n A_j \subset I$ on äärellisten joukkojen yhdisteenä äärellinen ja siten osaperheen (g_A) pienin yläraja $\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen (g_H) . \square

Lause 5.9. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon (g_H) pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i \in I}$. Tällöin perhe (g_H) on ekvivalentti perheen $(f_i)_{i \in I}$ kanssa.*

Todistus. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i \in I}$ määrittelemä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i \in I}$ pienin yläraja $\sup_{i \in I} \mathcal{U}_{f_i}$, eli pienin uniformiteetti, joka sisältää \mathcal{U}_{f_i} kaikilla $i \in I$. Vastaavasti pseudometriikkaperheen (g_H) määrittelemä uniformiteetti on $\sup_{H \subset I}$ äärellinen \mathcal{U}_{g_H} .

Pseudometriikkaperheet $(f_i)_{i \in I}$ ja (g_H) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit $\mathcal{U}_f := \sup_{i \in I} \mathcal{U}_{f_i}$ ja $\mathcal{U}_g := \sup_{H \subset I} \mathcal{U}_{g_H}$ ovat samoja.

Määritelmän 5.7 nojalla jokaiselle pseudometriikalle $f_j \in (f_i)_{i \in I}$ löytyy pseudometriikka $g_{\{j\}} \in (g_H)$ niin, että $g_{\{j\}}(x, y) = \sup_{i \in \{j\}} f_i(x, y) = f_j(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Siis $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}_g$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{U}_{g_{H'}} \subset \mathcal{U}_f$ jokaisella äärellisellä osajoukolla $H' \subset I$.

Kesken. □

Korollari 5.10. *Jokaiselle pseudometriikkaperheelle löytyy aina ekvivalentti saturoitu pseudometriikkaperhe ja näin ollen pseudometriikkaperheen voidaan olettaa olevan saturoitu.* □

Lause 5.11. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon lisäksi $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, $g(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$ joukon X pseudometriikka. Mikäli indeksijoukko I on äärellinen on perheen $(f_i)_{i \in I}$ määräämä uniformiteetti sama kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti.*

Todistus. Olkoon X joukko, I äärellinen indeksijoukko, $(f_i)_{i \in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe ja $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, $g(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$ joukon X pseudometriikka. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i \in I}$ määräämä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i \in I}$ pienin yläraja \mathcal{U}_f , jonka kanta on joukko

$$B_f = \left\{ \bigcap_{i \in J} V_i \mid J \subset I, V_i \in \mathcal{U}_{f_i} \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

ja siis $\mathcal{U}_f = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_f\}$. Indeksijoukko I on äärellinen, joten jokaiselle alkioparille $(x, y) \in X \times X$ löytyy indeksi $i_{(x, y)} \in I$ niin, että $f_i(x, y) \leq f_{i_{(x, y)}}(x, y)$ kaikilla $i \in I$. Näin ollen jokaisella $a \in [0, \infty]$ pätee

$$g^{\leftarrow}[0, a] = \{(x, y) \in X \times X \mid f_i(x, y) \leq a \text{ kaikilla } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} f_i^{\leftarrow}[0, a].$$

Pseudometriikan g määräämän uniformiteetin kanta on siis

$$B_g = \{g^\leftarrow[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\} = \left\{ \bigcap_{i \in I} f_i^\leftarrow[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty] \right\}.$$

Lauseen 5.2 nojalla jokaisella $i \in I$ alkukuvat $f_i^\leftarrow[0, a]$, $a \in [0, \infty]$ muodostavat kannan uniformiteetille \mathcal{U}_{f_i} . Erityisesti jokaiselle $V_i \in \mathcal{U}_{f_i}$ löytyy $a \in [0, \infty]$, jolla $f_i^\leftarrow[0, a] \subset V_i$. Näin ollen kannan B_g määrittelemälle uniformiteetille \mathcal{U}_g pätee

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_g &= \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_g\} \\ &= \left\{ W \subset X \times X \mid \bigcap_{i \in I} f_i^\leftarrow[0, a] \subset W \text{ jollain } a \in [0, \infty] \right\} \\ &= \left\{ W \subset X \times X \mid \bigcap_{i \in I} V_i \subset W \text{ jollain } V_i \in \mathcal{U}_i, i \in I \right\} \\ &= \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_f\} \\ &= \mathcal{U}_f. \end{aligned}$$

Siis $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g$. □

Korollari 5.12. *Olkoon uniformiteetit \mathcal{U} ja \mathcal{U}' saturoitujen perheiden $(f_i)_{i \in I}$ ja $(g_j)_{j \in J}$ määräämiä. Uniformiteetti \mathcal{U} on karkeampi kuin uniformiteetti \mathcal{U}' , jos jokaisella $i \in I$ ja $a \in [0, \infty]$ löytyy $j \in J$ ja $b \in [0, \infty]$, joilla ehdosta $g_j(x, y) \leq b$ seuraa $f_i(x, y) \leq a$. Vastaavasti tällöin uniformiteetti \mathcal{U}' on hienompi kuin uniformiteetti \mathcal{U} . □*

Lemma 5.13. *Olkoon X joukko ja \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X . Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i \in I}$, joka määrittelee uniformiteetin \mathcal{U} .*

Todistus. Jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ määritellään karteesisen tulon $X \times X$ osajoukoista muodostuva perhe $B_V = (U_n)$, jolla $U_1 \subset V$ ja $U_{n+1}^2 \subset U_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nyt B_V on kanta eräälle joukon X uniformiteetille \mathcal{U}_V , joka on karkeampi kuin \mathcal{U} . Erityisesti \mathcal{U} on uniformiteettien $\mathcal{U}_V, V \in \mathcal{U}$ pienin yläraja. Näin ollen kantojen leikkaus

$$\left\{ \bigcap_{V \in H} U_V \mid H \subset \mathcal{U} \text{ äärellinen}, U_V \in B_V \right\}$$

on numeroituva kanta uniformiteetille \mathcal{U} . Tällöin lemma on seuraus lauseesta 5.14.

Kesken: Onko \mathcal{U} :n mahtavuudella vaikutusta? □

Lause 5.14. Olkoon X joukko ja \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X . Jos uniformiteetilla \mathcal{U} on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka $f: X \times X \rightarrow [0, \infty]$, jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin \mathcal{U} kanssa.

Todistus. Olkoon (V_n) numeroituva kanta uniformiteetille \mathcal{U} . Tällöin olkoon (U_n) perhe symmetrisiä uniformiteetin \mathcal{U} lähistöjä, joilla $U_1 \subset V_1$ ja $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$. Nyt (U_n) on myös uniformiteetin \mathcal{U} kanta ja erityisesti $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$.

Olkoon $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ kuvaus, jolla

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } (x, y) \in U_n \text{ kaikilla } n \geq 1, \\ 1 & , \text{ jos } (x, y) \notin U_1, \\ 2^{-k} & , \text{ jos } (x, y) \in U_n \text{ kaikilla } n \leq k \text{ ja } (x, y) \notin U_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt g on symmetrinen, positiivinen ja $g(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $f: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ ja $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$ joukon X alkioista muodostuva jono, jossa $z_0 = x$ ja $z_p = y$. Kuvauksen f määrittelystä seuraa, että f on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat $f(x, y) \geq 0$ ja $f(x, x) = 0$ pätevät kaikilla $x, y \in X$. Siis f on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$(5.15) \quad \frac{1}{2} g(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli $f(x, y) \leq g(x, y)$ seuraa siitä, että

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^1 g(z_i, z_{i+1}) = g(z_0, z_1) = g(x, y).$$

Kaavan 5.15 vasen puoli, eli $\frac{1}{2} g(x, y) \leq f(x, y)$ osoitetaan induktion avulla. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Nyt jokaisella $p + 1$ alkion jonolla joukon X alkioita $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$, jolla $z_0 = x$ ja $z_p = y$, saadaan induktio-oletukseksi

$$(5.16) \quad \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(x, y).$$

Jos $p = 1$, niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x, y) \geq \frac{1}{2} g(x, y).$$

Merkitään

$$(5.17) \quad a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

jolloin induktio-oletus voidaan kirjoittaa muodossa $a \geq \frac{1}{2}g(x, y)$. Määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 1$, joten jos $a \geq 1/2$, niin yhtälö 5.16 pätee muodossa $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}g(x, y)$. Oletetaan, että $a < 1/2$ ja että h on suurin niistä indekseistä q , joilla $\sum_{i < q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Tällöin

$$\sum_{i < h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja lisäksi} \quad \sum_{i > h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2,$$

sillä $\sum_{i < h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$. Edeltävien kaavojen ja induktio-oletuksen nojalla (sijoituksella $p = h$) pätee

$$\frac{1}{2}a \geq \sum_{i < h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(x, z_h),$$

eli $g(x, z_h) \leq a$. Toisaalta yllä olevien kaavojen nojalla pätee myös

$$\frac{1}{2}a \geq \sum_{i > h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(z_{h+1}, y),$$

eli $g(z_{h+1}, y) \leq a$. Toisaalta luvun a määrittelyn nojalla $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $2^{-k} \leq a$. Tällöin oletuksesta $a < 1/2$ seuraa $k \geq 2$ ja kuvauksen g määrittelystä seuraa, että $(x, z_h) \in U_k$, $(z_h, z_{h+1}) \in U_k$ ja $(z_{h+1}, y) \in U_k$. Nyt $(x, y) \in U_k^3$ ja lähistöperheen (U_n) määrittelyn nojalla $(x, y) \in U_{k-1}$. Kuvauksen g määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$, eli $\frac{1}{2}g(x, y) \leq a$.

Näin ollen kaavan 5.15 epäyhtälöt pätevät ja niistä seuraa, että jokaisella $a > 0$ pätee $U_k \subset f^{\leftarrow}([0, a])$, kun $2^{-k} < a$. Toisaalta myös $f^{\leftarrow}([0, a]) \subset U_k$, joten joukot $f^{\leftarrow}([0, a])$ muodostavat kannan uniformiteetille \mathcal{U} . Siis löydettiin pseudometriikka f , joka määrittelee uniformiteetin \mathcal{U} . \square

Luku 6

Täydellinen uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään täydellinen uniforminen avaruus minimaalisten Cauchy-filtterien avulla.

Sellaiselle joukolle, jolle on määritelty uniformiteetti voidaan määritellä uniformiteetin lähistöjen suhteen *tarpeeksi pienet* osajoukot. Osajoukko on lähistön suhteen tarpeeksi pieni silloin, kun kaikki osajoukon alkiot ovat tarpeeksi lähellä toisiaan kyseisen lähistön suhteen (huomautus 3.2). Näin saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 6.1. Olkoon X joukko, \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Osajoukko $A \subset X$ on V -*pieni*, jos jokaisella pisteparilla $x, y \in A$ pätee $(x, y) \in V$, eli jos $A \times A \subset V$.

Lause 6.2. Olkoon X joukko, \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon lisäksi $A \subset X$ ja $B \subset X$ V -*pieniä* osajoukkoja, joiden leikkaus on epätyhjä. Tällöin yhdiste $A \cup B$ on V^2 -*pieni*.

Todistus. Olkoot $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in A \cap B$ alkioita. Tällöin alkioarit (x, z) ja (z, y) kuuluvat lähistöön V ja näin ollen alkioari (x, y) kuuluu joukkoon V^2 . \square

Määritelmä 6.3. *Filtteri.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ potenssijoukon epätyhjä osajoukko. Joukko \mathcal{F} on *filtteri* joukolle X , jos sille pätee uniformiteetin ehtojen (U1) ja (U2) lisäksi seuraava ehto:

(F) Joukko \mathcal{F} on epätyhjä eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon \mathcal{F} .

Määritelmä 6.4. *Filtterin kanta.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filtteri joukossa X . Tällöin joukko $B \subset \mathcal{F}$ on filtterin \mathcal{F} kanta, jos jokaiselle filtterin alkioille $V \in \mathcal{F}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 6.5. Olkoon X uniforminen avaruus. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X)$ on erään filtterin \mathcal{F} kanta, jos ehdon (F) lisäksi pätee ehto:

(B_F) Jos $A_1, A_2 \in B$, niin on olemassa sellainen $A_3 \in B$, jolla $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Todistus. Olkoon X uniforminen avaruus ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ sellainen joukko, jolle pätevät ehdot (F) ja (B_F) .

Tällöin olkoon

$$\mathcal{F}_B = \{W \subset X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon \mathcal{F}_B määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkioille $W \in \mathcal{F}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{F}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että \mathcal{F}_B on filtti. Käydään läpi filttiin määritelmän 6.3 ehdot:

- (U1) Jos $W \in \mathcal{F}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{F}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W \subset W' \subset X$ niin $W' \in \mathcal{F}_B$.
- (U2) Olkoon $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W' \in \mathcal{F}_B$ joukkoja. Joukon \mathcal{F}_B määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon (B_F) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan \mathcal{F}_B . Lisäksi joukoiksi W ja W' voidaan valita mielivaltaisia kokoelman \mathcal{F}_B alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon \mathcal{F}_B alkioista kuuluu joukkoon \mathcal{F}_B .
- (F) Ehto (F) pätee joukolle B , joten joukon \mathcal{F}_B määrittelyn nojalla \mathcal{F}_B ei ole tyhjä joukko eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon \mathcal{F}_B .

□

Määritelmä 6.6. *Filttereiden vertailu.* Olkoon X joukko ja \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 filttäreitä joukolle X . Filtti \mathcal{F}_2 on karkeampi kuin filtti \mathcal{F}_1 , jos $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Tällöin \mathcal{F}_1 on hienompi kuin \mathcal{F}_2 . Jos lisäksi pätee $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, niin \mathcal{F}_1 on aidosti hienompi kuin \mathcal{F}_2 ja vastaavasti \mathcal{F}_2 on aidosti karkeampi kuin \mathcal{F}_1 .

Sanotaan, että kahta filttiä \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 voidaan vertailla, jos \mathcal{F}_1 on hienompi tai karkeampi kuin \mathcal{F}_2 .

Filtterit \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 ovat samoja, eli $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, jos \mathcal{F}_1 on sekä hienompi että karkeampi kuin \mathcal{F}_2 .

Lause 6.7. *Olkoon X joukko ja \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 filttäreitä joukolle X . Olkoon lisäksi B_1 kanta filttiä \mathcal{F}_1 ja B_2 kanta filttiä \mathcal{F}_2 . Tällöin filtti \mathcal{F}_1 on hienompi kuin filtti \mathcal{F}_2 jos ja vain jos jokaiselle $A_2 \in B_2$ löytyy sellainen $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$.*

Todistus. Olkoon X joukko, \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 filttäreitä joukolle X , B_1 kanta filttiä \mathcal{F}_1 ja B_2 kanta filttiä \mathcal{F}_2 .

\Rightarrow Olkoon filtteri \mathcal{F}_1 on hienompi kuin filtteri \mathcal{F}_2 , eli $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Olkoon $A_2 \in B_2$ alkio. Tällöin pätee $A_2 \in \mathcal{F}_1$, sillä $B_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Näin ollen filtterin kannan määritelmän nojalla alkio $A_2 \in \mathcal{F}_1$ löytyy kannan B_1 alkio A_1 , jolla $A_1 \subset A_2$.

\Leftarrow Oletetaan, että jokaiselle $A'_2 \in B_2$ löytyy sellainen $A'_1 \in B_1$, jolla $A'_1 \subset A'_2$. Olkoon $V \in \mathcal{F}_2$ alkio. Tällöin filtterin määritelmän nojalla löytyy $A_2 \in B_2$, jolla $A_2 \subset V$. Toisaalta oletuksen nojalla löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$. Siis alkio V löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset V$. Toisaalta $B_1 \subset \mathcal{F}_1$, joten $A_1 \in \mathcal{F}_1$.

Siis alkio $V \in \mathcal{F}_2$ löytyy alkio $A_1 \in \mathcal{F}_1$, jolla $A_1 \subset V$. Näin ollen ehdon (U1) nojalla $V \in \mathcal{F}_1$ ja edelleen $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Siis filtteri \mathcal{F}_1 on hienompi kuin filtteri \mathcal{F}_2 .

□

Määritelmä 6.8. Olkoon X joukko ja \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 filttereitä joukolle X . Olkoon lisäksi B_1 kanta filtterille \mathcal{F}_1 ja B_2 kanta filtterille \mathcal{F}_2 . Kannat B_1 ja B_2 ovat *ekvivalentteja*, jos filttrit \mathcal{F}_1 ja \mathcal{F}_2 ovat samoja.

Määritelmä 6.9. Olkoon X joukko, \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X ja \mathcal{F} filtteri joukossa X . Filtreriä \mathcal{F} sanotaan *Cauchy-filtreriksi*, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy osajoukko $A \subset X$, joka on V -pieni ja kuuluu filtteriin \mathcal{F} .

Cauchy-filtrerit sisältävät siis mielivaltaisen pieniä joukkoja.

Lause 6.10. *Topologisessa avaruudessa osajoukon (vastaavasti alkion) kaikkien ympäristöjen joukko on filtteri, jota sanotaan ympäristöfilitteriksi.* □

Määritelmä 6.11. *Filtterin raja-arvo.* Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus ja \mathcal{F} filtteri joukossa X . Alkio $x \in X$ on filtterin \mathcal{F} *raja-arvo*, jos filtteri \mathcal{F} on hienompi kuin alkion x ympäristöfilitteri. Sanomme, että filtteri \mathcal{F} *suppenee* (converge) kohti alkioita x .

Lisäksi, jos B on filtterin \mathcal{F} kanta ja alkio x on filtterin \mathcal{F} raja-arvo, niin alkio x on myös kannan B raja-arvo ja kanta B suppenee kohti alkioita x .

Lause 6.12. *Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus, $x \in X$ alkio ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ erään filtterin kanta. Kanta B suppenee kohti alkioita x , jos ja vain jos jokainen alkion x ympäristö sisältää jonkin kannan B jäsenen.* □

Uniformeissa avaruuksissa Cauchy-filttereillä ei välttämättä ole raja-arvoa.

Määritelmä 6.13. Uniforminen avaruus on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-filtteri suppenee.

Lause 6.14. *Uniformisessa avaruudessa jokainen suppeneva filtteri on Cauchy-filtteri.*

Todistus. Olkoon (X, \mathcal{U}) uniforminen avaruus, \mathcal{F} suppeneva filtti joukossa X ja $x \in X$ sellainen alkio, jota kohti \mathcal{F} suppenee. Tällöin alkion x ympäristöfiltti $B(x)$ sisältyy filttiin \mathcal{F} . Näin ollen jokaisella lähistöllä $V' \in \mathcal{U}$ pätee $V'(x) \in \mathcal{F}$.

Olkoon nyt $V \in \mathcal{U}$ lähistö ja $x \in X$ alkio. Huomautuksen 3.3 ehdon (Ua) nojalla on olemassa sellainen lähistö $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^{-1} \circ W \subset V$. Huomataan, että joukko

$$W(x) \times W(x) = \{(y_1, y_2) \mid (x, y_1) \in W, (x, y_2) \in W\}$$

sisältyy joukkoon

$$W^{-1} \circ W = \{(y_1, y_2) \mid \text{on olemassa } x', \text{ jolla } (y_1, x') \in W^{-1}, (x', y_2) \in W\}.$$

Siis lähistölle V löydettiin osajoukko $W(x) \subset X$, jolla $W(x) \times W(x) \subset W^{-1} \circ W \subset V$ ja $W(x) \in \mathcal{F}$. Määritelmän 6.9 nojalla \mathcal{F} on Cauchy-filtteri. \square

Lause 6.15. Minimaalinen Cauchy-filtteri. *Olkoon (X, \mathcal{U}) uniforminen avaruus. Jokaiselle joukon X Cauchy-filtterille \mathcal{F} on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchy-filtteri \mathcal{F}_0 , joka on karkeampi kuin \mathcal{F} , eli $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Jos B on kanta filttiin \mathcal{F} ja G on uniformeetin \mathcal{U} symmetristen lähistöjen kanta, niin kokoelma $B_0 = \{V(M) \mid M \in B, V \in G\}$ missä $V(M) = \{y \mid (x, y) \in V, x \in M\}$ on filttin \mathcal{F} minimaalisen Cauchy-filtterin \mathcal{F}_0 kanta.*

Todistus. Tarkistetaan kannan ehdot joukolle B_0 :

1. Olkoot $V_1(M_1), V_2(M_2) \in B_0$ joukkoja. Nyt $M_1, M_2 \in B$, joten on olemassa joukko $M_3 \in B$, jolla pätee $M_3 \subset M_1 \cap M_2$. Toisaalta $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, joten on olemassa joukko $V_3 \in \mathcal{U}$, jolla pätee $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Näin ollen joukko $V_3(M_3) = \{y \mid (x, y) \in V_3, x \in M_3\}$ on joukon $(V_1 \cap V_2)(M_1 \cap M_2) = V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$ osajoukko, eli $V_3(M_3) \subset V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$.
2. Olkoon $M \in B$ joukko ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Tällöin joukko M on epätyhjä, joten myös joukko $V(M)$ on epätyhjä. Näin ollen tyhjä joukko ei ole joukon B_0 alkio.

Jokaisella $M \in B$ ja $V \in \mathcal{U}$ pätee $M \subset V(M)$, joten erityisesti jokaiselle $V(M) \in B_0$ löytyy sellainen $M \in B$, jolla $M \subset V(M)$. Näin ollen lauseen 6.7 nojalla minimaalinen Cauchy-filtteri \mathcal{F}_0 on karkeampi kuin filtti \mathcal{F} . \square

Luku 7

Täysin säännölliset avaruudet

Tässä luvussa esitellään uniformisoituva (uniformizable) topologinen avaruus ja annetaan tätä karakterisoiva ehto.

Määritelmä 7.1. Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus ja \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X . Olkoon lisäksi $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ uniformiteetin \mathcal{U} indusoima topologia joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U} on *yhteensopiva* topologian \mathcal{T} kanssa, jos topologiat $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ja \mathcal{T} ovat samoja.

Määritelmä 7.2. Topologinen avaruus (X, \mathcal{T}) on *uniformisoituva*, jos joukolle X voidaan muodostaa topologian \mathcal{T} kanssa yhteensopiva uniformiteetti.

Lause 7.3. Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus. Avaruuden (X, \mathcal{T}) uniformisoituvuus on yhtäpitävää seuraavan ehdon kanssa:

(Z) Kaikkien alkioiden $x \in X$ kaikilla ympäristöillä $V \subset X$ on olemassa jatkuva reaalivertainen kuvaus $f: X \rightarrow [0, 1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V$.

Todistus. Näytetään ensin, että ehto on välttämätön. Olkoon (X, \mathcal{T}) uniformisoituva topologinen avaruus, x_0 alkio ja V_0 alkion x_0 ympäristö. Olkoon \mathcal{U} topologian \mathcal{T} kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Lauseen 5.13 nojalla uniformiteetille \mathcal{U} voidaan määritellä pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i \in I}$, joka indusoi uniformiteetin \mathcal{U} . Lisäksi korollaan 5.10 nojalla voidaan olettaa pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i \in I}$ olevan saturoitu. Tällöin määritelmän 5.2 nojalla on olemassa $a \in [0, \infty]$, $\alpha \in I$ ja pseudometriikka $f_\alpha \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_\alpha(x_0, x_0) = 0$ ja $f_\alpha(x_0, x) \geq a$ kaikilla $x \in X \setminus V_0$. Tämän seurauksena kuvaus $g: X \rightarrow [0, 1]$ kaavalla $g(x) = \inf(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x))$ pisteelle x_0 ja ympäristölle V_0 toteuttaa ehdon (Z).

Toisaalta ehto on myös riittävä: Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus, jolla ehto (Z) pätee. Olkoon $x_0 \in X$ alkio, $V_0 \subset X$ alkion x_0 ympäristö ja $f: X \rightarrow [0, 1]$ ehdon (Z) antama kuvaus alkiolle x_0 ja sen ympäristölle V_0 . Tällöin kuvaus $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ kaavalla $g(x_0, x) = f(x)$ on pseudometriikka. Olkoon \mathcal{U} pseudometriikan g määräämä

uniformiteetti ja $a \in [0, \infty]$ luku. Tällöin $g^\leftarrow[0, a] = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq a\}$ on lähistö pseudometriikan g määräämässä uniformiteetissa \mathcal{U} . Merkitään $g^\leftarrow[0, a] = U_a$, jolloin joukko $U_a(x_0) = \{y \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristö uniformiteetin \mathcal{U} indusoimassa topologiassa \mathcal{T}' . Joukkojen määrittelyistä seuraa, että jos $a < 1$, niin $U_a(x) \subset V_0$ ja tällöin kokoelma $B = \{U_a(x_0) \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristökanta topologiassa \mathcal{T} .

Siis avaruus (X, \mathcal{T}) , joka toteuttaa ehdon (Z) on uniformisoituva. \square

Määritelmä 7.4. Topologinen avaruus on *Hausdorff*, jos jokaisella pisteellä on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 7.5. Topologinen avaruus X on *säännöllinen* (regular), jos jokaisella suljetulla joukolla $A \subset X$ ja jokaisella pisteellä $x \in X, x \notin A$ on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 7.6. Topologinen avaruus on *täysin säännöllinen* (completely regular), jos se on uniformisoituva ja Hausdorff.

Lause 7.7. *Täysin säännöllisen avaruuden aliavaruus on täysin säännöllinen.*

Todistus. Olkoon (X, \mathcal{T}) täysin säännöllinen avaruus ja $A \subset X$ aliavaruus. Olkoon lisäksi $V \subset A$ avoin osajoukko ja $x \in V$ alkio. Nyt $V = B \cap U$ jollain avoimella osajoukolla $U \subset X$. Lauseen 7.3 ominaisuuden (Z) nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $f: X \rightarrow [0, 1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus U$. Näin ollen kuvauksen f rajoittuma $f|_A: A \rightarrow [0, 1]$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$ on ominaisuuden (Z) mukainen jatkuva kuvaus pisteelle $x \in A$ ja pisteen x ympäristölle $V \subset A$. Siis A on täysin säännöllinen. \square

Merkitään $I = [0, 1]$.

Sopimus 7.8. Oletetaan, että X on topologinen avaruus. Merkitään kaikkien jatkuvien kuvausten $f: X \rightarrow I$ joukkoa symbolilla I^X . Tällöin $(I_f)_{f \in I^X}$ on yksikkövälien perhe, joka on indeksoitu joukolla I^X . Merkitään yksikkövälien perheen $(I_f)_{f \in I^X}$ tuloa

$$P^X = \prod_{f \in I^X} I_f = \left\{ \prod_{f \in I^X} \{t_f\} \mid t_f \in I \text{ kaikilla } f \in I^X \right\}.$$

Käytämme koko luvun ajan joukon P^X alkioista merkintää $\{t_f\}$ tarkoittamaan alkioita $\prod_{f \in I^X} \{t_f\}$, jossa $t_f \in I$ kaikilla $f \in I^X$.

Lause 7.9. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Tällöin X voidaan upottaa yksikkövälien tuloon P^X . Erityisesti kaavalla $\rho(x) = \{f(x)_f\}$, $x \in X$ määritelty kuvaus $\rho: X \rightarrow \rho X \subset P^X$ on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho: X \rightarrow \rho X \subset P^X$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $\rho(x) = \{f(x)_f\}$ kaikilla $x \in X$. Kuvaus ρ on homeomorfismi, jos se on injekttiivinen, jatkuva ja avoin kuvaus.

Ensinnäkin kuvaus ρ on injektio: Olkoon $x, y \in X, x \neq y$. Avaruus X on Hausdorff, joten pisteellä x on sellainen ympäristö $A \subset X$, johon alkio y ei kuulu. Avaruus X on täysin säännöllinen, joten on olemassa sellainen kuvaus $f \in I^X$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(z) = 1$ kaikilla $z \in X \setminus A$. Erityisesti $f(y) = 1 \neq 0 = f(x)$ ja näin ollen $\rho(x) \neq \rho(y)$.

Toiseksi kuvaus ρ on projektiokuvausten $(P_f \circ \rho)(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$ ja $f \in I^X$ yhdisteenä jatkuva.

Viimeiseksi kuvaus ρ on avoin: Avointen joukkojen perhe

$$(U_f)_{f \in I^X} = \{f^{-1}[0, 1[\subset X \mid f \in I^X\}$$

muodostaa ympäristökannan: Avoimelle osajoukolle $U \subset X$ ja sen alkioille $x \in U$ on olemassa kuvaus $f_1 \in I^X$, jolla $f_1(x) = 0$ ja $f_1(y) = 1, y \in X \setminus U$. Nyt $V = f_1^{-1}[0, 1[\subset X$ on avoin, $V \in (U_f)_{f \in I^X}$ ja $V \subset U$. Näin ollen avoimelle osajoukolle $U \subset X$ löydettiin joukko $V \in (U_f)_{f \in I^X}$, jolla $V \subset U$. Perhe $(U_f)_{f \in I^X}$ on siis ympäristökanta. Ympäristökannan jäsenen $V_{f_0} \in (U_f)_{f \in I^X}$ kuva

$$\rho V_{f_0} = \{\{t_f\} \mid t_{f_0} < 1\} \cap \rho X$$

on avoin joukossa ρX ja näin ollen kuvaus ρ on avoin. □

Lemma 7.10. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho: X \rightarrow P^X$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $\rho(x) = \{f(x)\}$ kaikilla $x \in X$. Olkoon lisäksi Y topologialla varustettu joukko ja $h: X \rightarrow Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $g: \rho X \rightarrow Y$, jolla $h(x) = (g \circ \rho)(x)$ kaikilla $x \in X$. □*

Lause 7.11. *Olkoot X ja Y täysin säännöllisiä avaruuksia ja $h: X \rightarrow Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $H: P^X \rightarrow P^Y$ niin, että oheinen kaavio kommutoi.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho_1 \\ P^X & \xrightarrow{H} & P^Y \end{array}$$

Erityisesti $H|_{\overline{\rho X}}: \overline{\rho X} \rightarrow \overline{\rho_1 Y}$.

Todistus. Olkoot X ja Y täysin säännöllisiä avaruuksia ja $h: X \rightarrow Y$ jatkuva kuvaus. Olkoon $g \in I^Y$ kuvaus. Tällöin $(g \circ h) \in I^X$ ja kaavalla $h_g(\{t_f\}) = t_{g \circ h}$ voidaan määritellä

kuvaus $h_g: P^X \rightarrow I_g$. Nyt h_g on projektiokuvaus, joka samaistaa yksikkövälit I_g ja $I_{g \circ h}$. Kuvaus h_g on jatkuva, joten kaavalla

$$H(\{t_f\}) = \{h_g(\{t_f\})\}, \quad \{t_f\} \in P^X$$

voidaan muodostaa jatkuva kuvaus $H: P^X \rightarrow P^Y$. Nyt kuvauksen H määrittelyn nojalla pätee

$$(H \circ \rho)(x) = (H(\rho(x))) = H(\{f(x)\}) = \{h_g(\{f(x)\})\} = \{((g \circ h)(x))_g\}$$

ja lauseen 7.9 nojalla

$$(\rho_1 \circ h)(x) = \rho_1(h(x)) = \{g(h(x))_g\} = \{((g \circ h)(x))_g\}.$$

Näin ollen annettu kaavio kommutoi.

Kaavion kommutoinnin nojalla $H(\rho X) \subset \rho_1 Y$ ja näin ollen $\overline{H(\rho X)} \subset \overline{\rho_1 Y}$. Kuvauksen H jatkuvuuden nojalla $H(\overline{\rho X}) \subset \overline{H(\rho X)}$. Nyt $H(\overline{\rho X}) \subset \overline{\rho_1 Y}$ ja siis $H|_{\overline{\rho X}}: \overline{\rho X} \rightarrow \overline{\rho_1 Y}$. \square

Luku 8

Kompaktisointi

Määritelmä 8.1. Topologisen avaruuden X kompaktisointi on pari (\hat{X}, h) , jossa \hat{X} on kompakti Hausdorff avaruus ja h on sellainen homeomorfismi $X \rightarrow h(X) \subset \hat{X}$, jolla $h(X)$ on tiheä avaruudessa \hat{X} , eli $\overline{h(X)} = \hat{X}$.

Huomautus 8.2. Usein samaistetaan avaruus X ja osajoukko $h(X) \subset \hat{X}$ ja sanotaan, että \hat{X} on avaruuden X kompaktisointi.

Lemma 8.3. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Tällöin olkoon $\rho: X \rightarrow P^X$ lauseen 7.9 mukainen upotus missä P^X on yksikkövälien tulona kompakti. Erityisesti $\overline{\rho X}$ on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti. Merkitään $\beta X = \overline{\rho X}$ ja sanotaan, että pari $(\beta X, \rho)$ on avaruuden X Stone-Čech kompaktisointi.

Lause 8.4. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Avaruuden X Stone-Čech kompaktisoinnille $(\beta X, \rho)$ pätee seuraava ominaisuus:

- Jokaiselle kompaktille Y ja jokaiselle jatkuvalla kuvauksella $f: X \rightarrow Y$ on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $F: \beta X \rightarrow Y$ niin, että $f = F \circ \rho$.

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus, Y kompakti avaruus ja $f: X \rightarrow Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin lauseen 7.11 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $\phi: \beta X \rightarrow \beta Y$ niin, että oheinen kaavio kommutoi.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho_1 \\ \beta X & \xrightarrow{\phi} & \beta Y \end{array}$$

Avaruus Y on kompakti, joten kuvaus $\rho_1: Y \rightarrow \beta Y$ on homeomorfismi. Näin ollen on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $\rho_1^{-1}: \beta Y \rightarrow Y$. Voidaan nyt valita $F: \beta X \rightarrow Y$ asettamalla $F(a) = (\rho_1^{-1} \circ \phi)(a) = \rho_1^{-1}(\phi(a))$ kaikilla $a \in \beta X$. Nyt $f(x) = (F \circ \rho)(x)$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi kompaktisoinnin määritelmän nojalla X on tiheä joukossa βX ja näin ollen kuvaus F on yksikäsitteinen. \square

Lause 8.5. *Stone-Čech kompaktisoinnin yksikäsitteisyys. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja (\hat{X}, h) sellainen avaruuden X kompaktisointi, jolla on lauseen 8.4 kuvaileva ominaisuus. Tällöin \hat{X} ja Stone-Čech kompaktisointi βX ovat homeomorfisia.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus, $(\beta X, \rho)$ avaruuden X Stone-Čech kompaktisointi ja (\hat{X}, h) sellainen avaruuden X kompaktisointi, jolla on lauseen 8.4 kuvaileva ominaisuus. Samaistetaan X , hX ja ρX , jolloin voidaan mieltää X joukkojen βX ja \hat{X} osajoukoksi. Olkoon $i: X \rightarrow X$ identtinen kuvaus. Nyt lauseen 8.4 ominaisuuden nojalla kompaktisoinnille βX , kompaktille joukolle \hat{X} ja kuvaukselle i on olemassa jatkuva kuvaus $F: \beta X \rightarrow \hat{X}$, jolla $F(x) = (F \circ \rho)(x) = i(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Vastaavasti on olemassa jatkuva kuvaus $G: \hat{X} \rightarrow \beta X$, jolla $G(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Nyt kuvaukset $(F \circ G)|_X$ ja $(G \circ F)|_X$ ovat identtisiä kuvauksia. Lisäksi X on tiheä joukoissa βX ja \hat{X} , joten kuvaukset $F \circ G = 1_{\hat{X}}$ ja $G \circ F = 1_{\beta X}$ ovat identtisiä kuvauksia. Siis kuvaus F on homeomorfismi avaruuksien βX ja \hat{X} välille. \square

Lause 8.6. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Stone-Čech kompaktisointi βX on laajin kompaktisointi avaruudelle X : Jos \hat{X} on avaruuden X kompaktisointi, niin \hat{X} on avaruuden βX tekijäavaruus.*

Todistus. Lauseen 8.4 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $F: \beta X \rightarrow \hat{X}$, jolla $F(x) = x$ kaikilla $x \in X$. βX on kompakti, joten $F(\beta X)$ on suljettu joukko, joka sisältää tiheän osajoukon $X \subset \hat{X}$. Näin ollen $\overline{F(\beta X)} \subset \hat{X}$ ja siten kuvaus F on surjektio. Olkoon \sim sellainen ekvivalenssirelaatio, jolla $a \sim a'$ jos ja vain jos $F(a) = F(a')$, kun $a, a' \in \beta X$. Nyt voidaan määritellä kuvaus $F_\sim: \beta X / \sim \rightarrow \hat{X}$, jolla $F_\sim([a]) = F(a)$. Kuvaus F_\sim on injektio, sillä jos $x, y \in \beta X$ ja $[x] \neq [y]$ niin $F_\sim([x]) = F(x) \neq F(y) = F_\sim([y])$. Olkoon $\rho: \beta X \rightarrow \beta X / \sim$ projektiokuvaus, jolla $\rho(a) = [a]$ kaikilla $a \in \beta X$. Kuvaus F on jatkuva, ρ on projektiokuvauksena jatkuva ja $F = F_\sim \circ \rho$, joten F_\sim on jatkuva.

(Puuttuu perustelu miksi F_\sim on avoin.)

Tällöin kompaktisointi \hat{X} on homeomorfinen tekijäavaruuden $\beta X / \sim$ kanssa. \square

Kirjallisuutta

- [1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.
- [2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.
- [4] James Dugundji: Topology, 11. korjattu painos, Allyn and Bacon, 1976.