

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

28. maaliskuuta 2017

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Esitietoja	3
3	Uniformiset rakenteet	4
4	Pseudometriikat	8
5	Pseudometriikan määrittämä uniformisuus	10
6	Uniformisoituvat avaruudet	14
7	Hausdorff uniforminen avaruus	15

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Olkoon X joukko ja V ja W karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\}$$

ja $W^2 = W \circ W$.

Määritelmä 2.1. *Ympäristö.*

Määritelmä 2.2. *Topologian ympäristökanta.* Olkoon (X, \mathcal{T}) topologinen avaruus ja $x \in X$. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x *ympäristökanta* (topologiassa \mathcal{T}), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Esimerkki 2.3. Jos B on avaruuden (X, \mathcal{T}) kanta ja $x \in X$, niin $\{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa (X, \mathcal{T}) , niin $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden (X, \mathcal{T}) kanta.

Lause 2.4. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian \mathcal{T} esikanta. Lisäksi \mathcal{T} on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia \mathcal{T} on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. Topologia II [3] lause 2.19. □

Määritelmä 2.5. *Topologioiden vertailu.* Olkoon X joukko ja \mathcal{T}_1 ja \mathcal{T}_2 topologioita joukolle X . Topologia \mathcal{T}_2 on karkeampi kuin topologia \mathcal{T}_1 , jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin \mathcal{T}_1 on hienompi kuin \mathcal{T}_2 .

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle X annetaan karteettisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona \mathcal{U} , jolle pätee

- (U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,
- (U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon \mathcal{U} alkioista kuuluu joukkoon \mathcal{U} ,
- (U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,
- (U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,
- (U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformisuuden \mathcal{U} lähistöiksi. Joukkoa X joka on varustettu uniformisuudella \mathcal{U} sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformisuuden \mathcal{U} lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan V -lähellä, "tarpeeksi lähellä" tai "mielivaltaisen lähellä" toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla

- (Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Jos joukko X on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon X uniformiteetti \mathcal{U} on tyhjä. Erityisesti $\{\emptyset\}$ on joukon X ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko X on tyhjä.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja joukko $\mathcal{U} \subset X \times X$ sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin \mathcal{U} kanta, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Määritelmä 3.6. Olkoon X joukko. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X erään uniformisuuden kanta, jos joukolle B pätee

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Määritelmä 3.7. Seuraavan lauseen olemassaolon peruste.

Lause 3.8. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella \mathcal{U} . Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X . Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \text{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti \mathcal{U} määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkion x ja joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella \mathcal{U} . Olkoon $x \in X$ alkio, $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X ja joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Alkion x pätee $x \in V(x)$, joten joukko $V(x)$ on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle $V, W \in \mathcal{U}$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ tai } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla $V \cup W \in B$ ja $V \cap W \in B$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko.[1] \square

Huomautus 3.9. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoiduksi topologiaksi.

Määritelmä 3.10. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ kuvaus. Kuvaus f on *uniformisti jatkuva* (tasaisesti jatkuva), jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollari 3.11. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö.

Todistus. Suora seuraus edellisestä määritelmästä ja uniformisuuden ehdosta (U1). \square

Lause 3.12. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f on jatkuva, kun varustetaan joukot X ja Y uniformiteettiensa indusoimilla topologioilla.

Todistus. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden X' uniformiteetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion x' ympäristön avaruudessa X . Korollarin 3.11 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $g^{-1}V'(x)$ on alkion x ympäristö. Erityisesti ympäristö $g^{-1}V'(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x, y) \in g^{-1}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva. \square

Lause 3.13. Olkoot X , X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ ja $g: X' \rightarrow X''$ uniformisti jatkuvia kuvaksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow X''$ on uniformisti jatkuva.

Todistus. Olkoot X , X' ja X'' uniformeja avaruuksia, $f: X \rightarrow X'$ ja $g: X' \rightarrow X''$ uniformisti jatkuvia kuvaksia ja V'' avaruuden X'' lähistö. Tällöin uniformisti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden X' lähistö V' , jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V , jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle V'' on olemassa lähistö V , jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow X''$ on uniformisti jatkuva. \square

Määritelmä 3.14. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on isomorfismi, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.15. *Uniformiteettien vertailtavuus.* Olkoon X joukko ja \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U}_1 on hienompi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_2 , jos identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$ on uniformisti jatkuva. Tällöin uniformiteetti \mathcal{U}_2 on karkeampi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_1 . Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin \mathcal{U}_1 on aidosti hienompi kuin \mathcal{U}_2 ja vastaavasti \mathcal{U}_2 on aidosti karkeampi kuin \mathcal{U}_1 . Sanotaan, että kahta uniformiteettia \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 voidaan vertailla, jos \mathcal{U}_1 on hienompi kuin \mathcal{U}_2 . Uniformiteeteille \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos \mathcal{U}_1 on sekä hienompi että karkeampi kuin \mathcal{U}_2 .

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko ja \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U}_1 on hienompi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_2 jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

Korollaari 3.17. *Olkoon X joukko, \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X ja \mathcal{U}_1 on hienompi kuin \mathcal{U}_2 . Tällöin uniformiteetin \mathcal{U}_1 indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin \mathcal{U}_2 indusoima topologia.*

Määritelmä 3.18. *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformities). Olkoon X joukko ja Y_i uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla $i \in I$, jollain indeksijoukolla I . Olkoon $f_i: X \rightarrow Y_i$ uniformisti jatkuvia kuvauksia kaikilla $i \in I$. Olkoon $g = f_i \times f_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$ kuvaus kaikilla $i \in I$. Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in I} g^{\leftarrow}(V_i) \mid V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

missä \mathcal{U}_i on avaruuden Y_i uniformiteetti. Tällöin B on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille \mathcal{U} . Kyseinen uniformiteetti \mathcal{U} on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.19. *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X . Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti \mathcal{U} , joka on kuvausten $id: X \rightarrow (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

$$(P1) \quad f(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X,$$

$$(P2) \quad f(x, y) = f(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

$$(P3) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \text{ kaikilla } x, y, z \in X.$$

Huomautus 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitetaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

$$(M1) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ määrittää pseudometriikan joukolle X .

Huomautus 4.7. Ehdosta (P3) seuraa, että jos $f(x, z) + f(z, y) < \infty$ niin $f(x, y) < \infty$. Tällöin koska kaavat $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$ ja $f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z)$ pätevät, niin myös kaava $|f(x, z) - f(z, y)| \leq f(x, y)$ pätee.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka joukolle X ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus λf , jolla $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ kaikilla $x \in X \times X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], \quad f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ kaavasta

$$f_i(x, y) \leq f_i(x, z) + f_i(z, y)$$

seuraa kaava

$$\sup_{i \in I} f_i(x, y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x, z) + f_i(z, y)).$$

Tällöin kuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], \quad f(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittämä uniformisuus

Oletamme koko luvun 5 ajan, että $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Lause 5.1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko kaavalla*

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n uniformisuuden kannan.

Todistus. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

- (B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja jos $|x - y| \leq a_1$, niin $|x - y| \leq a_2$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,
- (B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,
- (B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}_+$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

- (B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$, eli $(x, z) \in U_a$ ja $(z, y) \in U_a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x - y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 = U_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n uniformisuuden kannan. \square

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 5.2. *Olkoon X joukko ja f pseudometriikka joukolle X . Tällöin pseudometriikka f määrittää sellaisen uniformiteetin joukolle X , jonka kannan muodostaa kokoelma $B = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$.*

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja merkitään joukkoa $f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X$ kaavalla $f^{\leftarrow}[0, a] = U_a$. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

- (B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a_1] \subset f^{\leftarrow}[0, a_2] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

- (B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x, x) = 0$. Toisin sanoen jokainen alkio pistepareista (x, x) muodostuvasta joukosta $\{(x, x) \mid x \in X\}$ kuvautuu pseudometriikassa nollassi. Näin ollen joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ kuuluu sisältyy jokaisen suljetun välin $[0, a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0, a]$ kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$.

- (B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(x, y) \in U_a \Leftrightarrow (y, x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

- (B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $f(x, z) \leq a$ ja $f(z, y) \leq a$, eli $(x, z) \in U_a$ ja $(z, y) \in U_a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x, y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 = U_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\} = \{f^{\leftarrow}[0, a] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n uniformisuuden kannan ja voimme nyt muodostaa seuraavan määritelmän. \square

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X . Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittävät jotkut uniformiteetit joukolle X . Pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja, jos ne määrittävät saman uniformiteetin.

Korollari 5.4. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X . Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan f määrittämä uniformiteetti \mathcal{U}_f on karkeampi kuin pseudometriikan g määrittämä uniformiteetti \mathcal{U}_g , jos ja vain jos jokaiselle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$.

Lisäksi, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee $f(x, y) \leq b \Rightarrow g(x, y) \leq a$ niin f ja g ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

Todistus. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X . Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan f määrittämän uniformiteetin \mathcal{U}_f kannan muodostaa kokoelma $B_f = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$. Tällöin uniformiteetti \mathcal{U}_f on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin \mathcal{U}_g kannan muodostaa kokoelma $B_g = \{g^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ ja uniformiteetti \mathcal{U}_g on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

\Rightarrow Olkoon uniformiteetti \mathcal{U}_f karkeampi kuin \mathcal{U}_g ja näin ollen määritelmän 3.15 mukaan identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$ on uniformisti jatkuva. Määritelmän 3.10 mukaan tällöin jokaiselle lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähistö $V \in \mathcal{U}_g$, jolla pätee jos $(x, y) \in V$, niin $(x, y) \in V'$ kaikilla $x, y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä saamme edeltävän seuraavaan muotoon: Jokaisella $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, eli $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$.

\Leftarrow Olkoon jokaiselle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$, eli $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, kaikilla $x, y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin \mathcal{U}_f kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0, a']$, $a' \in \mathbb{R}_+$ on olemassa uniformiteetin \mathcal{U}_g kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0, b']$, $b' \in \mathbb{R}_+$ niin, että $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b'] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a']$, kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$ on uniformisti jatkuva ja siten uniformiteetti \mathcal{U}_g on uniformiteettia \mathcal{U}_f hienompi. Siis pseudometriikan f määrittämä uniformiteetti \mathcal{U}_f on karkeampi kuin pseudometriikan g määrittämä uniformiteetti \mathcal{U}_g .

Lisäksi määritelmistä 3.15 ja 5.3 seuraa, että jos \mathcal{U}_f on sekä hienompi että karkeampi kuin \mathcal{U}_g , niin pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja. \square

Määritelmä 5.5. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ perhe pseudometriikkoja joukolle X . Tällöin pseudometriikkojen f_i määrittämien uniformiteettien \mathcal{U}_{f_i} pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i \in I}$ määrittämäksi uniformiteetiksi.

Määritelmä 5.6. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ ja $(g_j)_{j \in J}$ perheitä pseudometriikoista joukolle X . Perheet (f_i) ja (g_j) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittämät uniformiteetit ovat samoja.

Määritelmä 5.7. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i \in I}$ perhe pseudometriikoita joukolle X . Olkoon $g_H: X \rightarrow [0, \infty]$ kuvaus, jolla $g_H(x) = \sup_{i \in H} f_i(x)$ ja $H \subset I$ äärellinen joukko. Nyt

$$\{g_H^{\leftarrow}([0, a]) \subset X \times X \mid H \subset I \text{ äärellinen}, a \in \mathbb{R}, a > 0\}$$

on joukon X erään uniformiteetin kanta. Olkoon $g_{H'}$ pseudometriikoita ja $H' \subset \mathcal{P}(I)$ äärellinen potenssijoukon osajoukko. Nyt

$$\sup_{H \in H'} (g_H) \in (g_H)_{H \subset I}$$

ja $H \subset I$ äärellinen joukko. Tällöin sanotaan, että perhe (g_H) on *saturoitu* (saturated), ekvivalentti perheen $(f_i)_{i \in I}$ kanssa ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i \in I}$.

Mikäli indeksijoukko I on äärellinen, niin perheen $(f_i)_{i \in I}$ määräämä uniformiteetti on sama kuin pseudometriikan $g = \sup_{i \in I} f_i$ määräämä.

Määritelmä 5.8. Olkoon uniformiteetit \mathcal{U} ja \mathcal{U}' saturoitujen perheiden $(f_i)_{i \in I}$ ja $(g_j)_{j \in J}$ määräämiä. Uniformiteetti \mathcal{U} on karkeampi kuin uniformiteetti \mathcal{U}' , jos jokaisella $i \in I$ ja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ löytyy $j \in J$ ja $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, joilla ehdosta $g_j(x, y) \leq b$ seuraa $f_i(x, y) \leq a$.

Luku 6

Uniformisoituvat avaruudet

Tässä luvussa perehdytään uniformisoituihin avaruuksiin (uniformizable space).

Määritelmä 6.1. Topologinen avaruus (X, \mathcal{T}) on *uniformisoituva*, jos seuraava ominaisuus pätee:

- (Z1) Kaikille alkioilla $x_0 \in X$ ja kaikille alkion x_0 ympäristöillä V_0 on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus $f: X \rightarrow [0, 1]$, jolla $f(x_0) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V_0$.

Luku 7

Hausdorff uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään Hausdorff uniformiset avaruudet ja esitetään niiden ominaisuuksia, oleellisinpana täydelliseen Hausdorff uniformiseen avaruuteen laajentaminen.

Määritelmä 7.1. Olkoon X joukko ja \mathcal{U} uniformiteetti joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U} on Hausdorff, jos kaikille $x, y \in X, x \neq y$ on olemassa pseudometriikka $f_i \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_i(x, y) \neq 0$. Erityisesti, jos uniformiteetti \mathcal{U} on Hausdorff ja yhden pseudometriikan f määrittämä, niin $f(x, y) \neq 0$ kaikilla $x, y \in X$.

Uniformiteetti \mathcal{U} ei ole Hausdorff, jos on olemassa sellaiset alkiot $x, y \in X$, joilla $x \neq y$ ja $f_i(x, y) = 0$ kaikilla $i \in I$.

Lemma 7.2. Olkoon X uniforminen avaruus, $A \subset X$ epätyhjä osajoukko ja f pseudometriikka joukolle X . Tällöin pseudometriikan rajoittuma $f|_A: A \times A \rightarrow [0, \infty]$ kaavalla $f|_A(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A \times A$ on pseudometriikka joukolle A .

Lemma 7.3. Olkoon X uniforminen avaruus, $A \subset X$ epätyhjä osajoukko ja $(f_i)_{i \in I}$ pseudometriikkaperhe, joka määrää joukon X uniformiteetin. Tällöin joukon X uniformiteetti määrää joukolle A saman uniformiteetin kuin pseudometriikkaperhe $(f_i|_A)_{i \in I}$.

Määritelmä 7.4. Olkoon X uniforminen avaruus. Tällöin on olemassa täydellinen (complete) Hausdorff uniforminen avaruus \hat{X} ja uniformisti jatkuva kuvaus $i: X \rightarrow \hat{X}$, jolle pätee seuraava ominaisuus:

- (P) Olkoon Y täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $f: X \rightarrow Y$ uniformisti jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen uniformisti jatkuva $g: \hat{X} \rightarrow Y$, jolla pätee $f = g \circ i$

Olkoon lisäksi X_1 täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $i_1: X \rightarrow X_1$ uniformisti jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus (P). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $\varphi: \hat{X} \rightarrow X_1$, jolla pätee $i_1 = \varphi \circ i$.

Korollari 7.5. *Jos X on Hausdorff uniforminen avaruus, niin "kanoninen kuvaus" $i: X \rightarrow \hat{X}$ määrää isomorfismin $X \rightarrow X'$, jossa X' on tiheä joukossa \hat{X} .*

Huomautus 7.6.

Lause 7.7.

Määritelmä 7.8.

Korollari 7.9.

Esimerkki 7.10.

Lemma 7.11.

Kirjallisuutta

- [1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.
- [2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.