Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

13. toukokuuta 2018

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän tutkielman tavoitteena on esitellä ja konstruoida Stone–Čech kompaktisointi täysin säännöllisille avaruuksille. Tutkielmassa esitellään myös uniforminen avaruus ja käsitellään tämän yhteyttä pseudometriikoihin.

Venäläinen matemaatikko Andrey Tihonov (1906-1993) viittasi Stone–Čech kompaktisointina myöhemmin tunnettuun tulokseen jo vuonna 1930. Tulos pohjautuukin juuri Tihonovin työhön ja osa tutkielmassa käytetyistä aputuloksista on alun perin Tihonovin todistamia. Amerikkalainen Marshall Stone (1903-1989) ja tšekkiläinen Eduard Čech (1893-1960) todistivat vuonna 1937 Stone–Čech kompaktisoinnin olemassaolon ja sen ominaisuuksia. Čech tunnetaan saavutuksistaan algebrallisen topologian parissa, muun muassa hänen mukaansa nimetty Čech-kohomologia. Stone on puolestaan tunnettu muun muassa työstään funktionaali analyysin ja boolean algebran parissa.

Tutkielman alussa käydään läpi käytettäviä topologiaan ja joukkomerkintöihin liittyviä käsitteitä ja merkintätapoja. Lukijan oletetaan tuntevan yleisen topologisen avaruuden määritelmä ja tähän liittyviä perustuloksia.

Peruskäsitteiden jälkeen esitellään uniforminen avaruus, eli topologinen avaruus, johon on lisätty uniforminen rakenne. Tämä rakenne mahdollistaa muun muassa täydellisyyden ja tasaisen jatkuvuuden määrittelyn ilman metriikkaa. Hausdorff uniformisoituvalle avaruudelle, eli täysin säännölliselle avaruudelle voidaan konstruoida Stone–Čech kompaktisointi.

Tässä tutkielmassa Stone–Čech kompaktisointi konstruoidaan käyttäen upotusta yksikkövälien tuloon. Tulos voitaisiin konstruoida yhtäpitävästi myös muilla tavoilla, muun muassa ultrafilttereillä tai C^*-algebroilla. Näitä muita tapoja emme kuitenkaan tässä työssä käsittele.

Luku 2

Esitietoja

Tässä luvussa käydään läpi tutkielmassa käytettäviä topologiaan ja joukkomerkintöihin liittyviä käsitteitä ja merkintätapoja. Perusteellisemmin näistä aiheesta löytyy muun muassa kirjoista [1] ja [3].

Sopimus 2.1. Käytämme koko tutkielman ajan merkintää $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Määritelmä 2.2. Olkoon X joukko ja V ja W karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X, \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\},$$

$W^2 = W \circ W$ ja $W^n = W \circ W^{n-1}$.

Määritelmä 2.3. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on avoin, jos se on kokoelman $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ alkio.

Määritelmä 2.4. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on alkion x *ympäristö*, jos on olemassa sellainen avoin osajoukko $B \subset X$, jolla $x \in B \subset A$.

Huomautus 2.5. Topologisen avaruuden avoin osajoukko on jokaisen alkionsa ympäristö.

Määritelmä 2.6. *Ympäristökanta.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x *ympäristökanta* (topologiassa $\mathcal{T}$), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Huomautus 2.7. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ alkion $x \in X$ kaikkien ympäristöjen kokoelma $B(x)$ on alkion x ympäristökanta.

Esimerkki 2.8. Jos joukkoperhe $B \subset \mathcal{P}(X)$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta ja $x \in X$ alkio, niin joukko $B(x) = \{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella alkiolla $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, niin kokoelma $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta.

Lause 2.9. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian $\mathcal{T}$ esikanta. Lisäksi $\mathcal{T}$ on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia $\mathcal{T}$ on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. Topologia II [3] Lause 2.19. □

Määritelmä 2.10. *Topologioiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukolle X. Topologia $\mathcal{T}_2$ on karkeampi kuin topologia $\mathcal{T}_1$, jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin $\mathcal{T}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_2$.

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Topologian kannalta kahden eri pisteen etäisyyttä toisiinsa voidaan tutkia lähinnä siltä kannalta, että kuuluvatko ne toistensa jokaiseen ympäristöön, eli ovatko ne hyvin lähellä toisiaan. Metriikka puolestaan antaa jokaiselle kahdelle pisteelle tarkan etäisyyden. Topologian ja metriikan väliltä löytyy uniforminen rakenne [1, luku II], jossa vertaillaan pisteparien etäisyyksiä toisiinsa. Tässä luvussa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin. Lisäksi käsitellään uniformisen rakenteen yhteyttä topologiaan.

Määritelmä 3.1. *Uniforminen rakenne* (tai *uniformiteetti*) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöiksi. Uniformiteetilla $\mathcal{U}$ varustettua joukkoa X sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla:

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Kokoelma $\{\emptyset\}$ on ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti tyhjälle joukolle.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja kokoelma $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ uniformiteetti joukolle X. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ *kanta*, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 3.6. *Olkoon X joukko. Kokoelma $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X erään uniformiteetin kanta, jos kokoelmalle B pätee*

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Todistus. Olkoon X joukko ja $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ sellainen kokoelma, jolle pätevät ehdot (B1)-(B4). Tällöin olkoon

$$\mathcal{U}_B = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{U}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että $\mathcal{U}_B$ on uniformiteetti. Käydään läpi uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{U}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X \times X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{U}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W \subset W' \subset X \times X$ niin $W' \in \mathcal{U}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W' \in \mathcal{U}_B$ joukkoja. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon (B1) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{U}_B$. Lisäksi joukoiksi W ja W' voidaan valita mielivaltaisia kokoelman $\mathcal{U}_B$ alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}_B$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}_B$.

(U3) Jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Ehdon (B2) nojalla $\{(x,x) \mid x \in X\} \subset V$, joten $\{(x,x) \mid x \in X\} \subset W$.

(U4) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V \subset W$. Tällöin ehdon (B3) nojalla joukolle V on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$. Näin ollen joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla $V^{-1} \in \mathcal{U}_B$ ja edelleen $W^{-1} \in \mathcal{U}_B$.

(U5) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset W$. Ehdon (B4) nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V^2 \subset V'$. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla tällöin $V \in \mathcal{U}_B$ ja siis $V^2 \subset W$.

□

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon tällöin*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \textit{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkiolle x ja joukko $B(x)$ on alkion x ympäristökanta kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$, $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X. Lisäksi olkoot joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Joukko $V(x)$ on epätyhjä, sillä $x \in V(x)$. Olkoon $W \in \mathcal{U}$ lähistö, jolloin $W(x)$ on alkion x ympäristö. Alkion x ympäristöille $V(x)$ ja $W(x)$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x), \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehdon (U2) nojalla pätee $V \cap W \in \mathcal{U}$. Ehdosta (U1) seuraa, että joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko ja siten huomautuksen 2.7 nojalla ympäristökanta. □

Huomautus 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.9. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f \colon X \to X'$ kuvaus. Kuvaus f on *tasaisesti jatkuva* (uniformly continuous), jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.10. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f \colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g \colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Todistus. Korollaari on suora seuraus määritelmästä 3.9 ja uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdosta (U1). □

Lause 3.11. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f on jatkuva, kun varustetaan joukot X ja Y uniformiteettiensa indusoimilla topologioilla.*

Todistus. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x,y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden X' uniformiteetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion x' ympäristön avaruudessa X. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $(g^{\leftarrow}V')(x)$ on alkion x ympäristö. Erityisesti ympäristö $(g^{\leftarrow}V')(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x,y) \in g^{\leftarrow}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

Lause 3.12. *Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia, $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia ja V'' avaruuden X'' lähistö. Tällöin tasaisesti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden X' lähistö V', jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V, jolla jokaisella $(x,y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle V'' on olemassa lähistö V, jolla jokaisella $(x,y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva. □

Määritelmä 3.13. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on *isomorfismi*, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat tasaisesti jatkuvia.

Määritelmä 3.14. *Uniformiteettien vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_1$, jos identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_1) \to (X, \mathcal{U}_2)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$.

Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin $\mathcal{U}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{U}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{U}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{U}_1$. Sanotaan, että kahta uniformiteettia $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{U}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$. Uniformiteeteille $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos $\mathcal{U}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$.

Korollaari 3.15. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X ja $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Tällöin uniformiteetin $\mathcal{U}_1$ indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin $\mathcal{U}_2$ indusoima topologia.*

Lause 3.17. *Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$, $i \in I$. Tällöin joukko*

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille $\mathcal{U}$.

Todistus. Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$. Olkoon lisäksi kuvaukset f_i ja g_i ja joukko B kuten yllä. Selvitetään, onko joukko B uniformiteetin kanta käymällä läpi kantalauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot $U_1, U_2 \in B$. Tällöin on olemassa äärelliset osajoukot $J_1, J_2 \subset I$ ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$ kaikilla $i \in J_1$ ja $V_j \in \mathcal{U}_j$ kaikilla $j \in J_2$, joilla

$$U_1 = \bigcap_{i \in J_1} g_i^{\leftarrow}(V_i) \quad \text{ja} \quad U_2 = \bigcap_{j \in J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j).$$

Yhdiste $J_1 \cup J_2$ on äärellinen indeksijoukon I osajoukko, joten

$$U_3 = \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j) \in B$$

ja erityisesti $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(B2) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Jokaisella $V_i \in \mathcal{U}_i$ pätee $\{(y_i, y_i) \mid y_i \in Y_i\} \subset V_i$ ja näin ollen myös jokaisella $g_i^{\leftarrow}(V_i)$ pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset g_i^{\leftarrow}(V_i)$. Siis pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset U$, koska U on leikkaus joukoista $g_i^{\leftarrow}(V_i)$.

(B3) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla
$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$
Uniformiteetin määritelmän ehdon (U4) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin $V_i^{-1} \in \mathcal{U}_i$. Näin ollen
$$U^{-1} = \bigcap_{i \in J} (g_i^{\leftarrow}(V_i))^{-1} = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i^{-1}) \in B,$$
jolloin vaadittu ehto pätee muodossa $U^{-1} \subset U^{-1}$.

(B4) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla
$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$
Uniformiteetin määritelmän ehdon (U5) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin on olemassa sellainen $W_i \in \mathcal{U}_i$, jolla $W_i^2 \subset V_i$. Olkoon
$$A = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i),$$
jolloin $A \in B$ ja näin ollen riittää osoittaa, että $A^2 \subset U$. Määritelmän mukaan $A^2 = \{(x,z) \mid (x,y) \in A \text{ ja } (y,z) \in A\}$. Siis alkioilla $x, z \in X$ pätee $(x,z) \in A^2$ täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $y \in X$, jolla $(x,y) \in A$ ja $(y,z) \in A$. Toisaalta jos $(x,y) \in A$ ja $(y,z) \in A$ niin $(x,y) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ ja $(y,z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ jokaisella $i \in J$. Tällöin $g_i(x,y) \in W_i$ ja $g_i(y,z) \in W_i$, joten $g_i(x,z) \in W_i^2$. Näin ollen $(x,z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i^2)$ jokaisella $i \in J$, joten
$$(x,z) \in \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i^2) \subset \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) = U.$$
Näin ollen $A^2 \subset U$.

Siis joukko B on joukon X erään uniformiteetin kanta. □

Määritelmä 3.18. *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformity). Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x,y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$ ja $i \in I$. Tällöin joukko
$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$
on kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoiman uniformiteetin kanta. (Vrt. edellinen lause.)

Korollaari 3.19. *Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$. Tällöin kuvausperheen $(f_i)_{i\in I}$ indusoima uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat tasaisesti jatkuvia.* $\square$

Määritelmä 3.20. *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X. Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti $\mathcal{U}$, joka on kuvausten $id \colon X \to (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin[2, luku IX], jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys.

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(P1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$,

(P2) $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(P3) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Huomautus 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

(M1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kaikilla $x, y \in X$.

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g\colon X \to \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kaavalla $f(x,y) = |g(x) - g(y)|$ määritelty kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kaavalla $f(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$ määritelty kuvaus $f\colon X\times X \to [0,+\infty]$ määrittelee pseudometriikan joukolle X.

Huomautus 4.7. Määritelmän 4.1 ehdon (P3) nojalla epäyhtälöstä $f(x,z) + f(z,y) < \infty$ seuraa $f(x,y) < \infty$. Näin ollen epäyhtälöistä

$$f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z) \text{ ja } f(y,z) \leq f(y,x) + f(x,z)$$

seuraa epäyhtälö $|f(x,z) - f(z,y)| \leq f(x,y)$.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka joukolle X ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus λf, jolla $(\lambda f)(x,y) = \lambda(f(x,y))$ kaikilla $(x,y) \in X \times X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i\in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], \quad f(x,y) = \sum_{i\in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i\in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ epäyhtälöstä $f_i(x,y) \leq f_i(x,z) + f_i(z,y)$ seuraa epäyhtälö

$$\sup_{i\in I} f_i(x,y) \leq \sup_{i\in I} \left(f_i(x,z) + f_i(z,y)\right).$$

Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ missä

$$f(x,y) = \sup_{i\in I} f_i(x,y) \quad \text{kaikilla } x, y \in X$$

on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittelemä uniformiteetti

Tässä luvussa käsitellään pseudometriikan ja uniformiteetin yhteyttä. Näytetään, miten pseudometriikan ja pseudometriikkaperheen avulla voidaan muodostaa uniformiteetti ja toisaalta miten uniformiteetille löydetään pseudometriikka, jonka avulla kyseinen uniformiteetti voidaan muodostaa. Lisäksi esitellään pseudometriikkaperheen saturointi. Lisätietoja tämän luvun aiheista löytyy kirjasta [2, luku IX].

Lause 5.1. *Olkoon $a \in]0,\infty]$ luku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko, joka on määritelty kaavalla*

$$U_a = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in]0,\infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ erään uniformiteetin kannan.

Todistus. Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in]0,\infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin kaavasta $|x-y| \leq a_1$ seuraa $|x-y| \leq a_2$ kaikilla $x,y \in \mathbb{R}$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in]0,\infty]$ pätee $|x-x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,

(B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in]0,\infty]$. Tällöin jos $|x'-y'| \leq a$ niin myös $|y'-x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a =& \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq a\} \\ =& \{(y,x) \mid x,y \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq a\} \\ =& U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in]0, \infty]$ luku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $(x, z), (z, y) \in U_a$, eli $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x - y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0, \infty]$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in]0, \infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan. □

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 5.2. *Olkoon X joukko ja f pseudometriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikka f määrittelee sellaisen uniformiteetin joukolle X, jonka kannan muodostaa kokoelma*

$$B = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in]0, \infty]\}.$$

Todistus. Olkoon $a \in]0, \infty]$ luku. Näin ollen $f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X$ on joukko. Merkitään $U_a = f^{\leftarrow}[0, a]$ ja käydään läpi lauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot $a_1, a_2 \in]0, \infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin pätee

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a] \subset f^{\leftarrow}[0, b] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan määritelmän 4.1 ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x, x) = 0$. Toisin sanoen pistepareista (x, x) muodostuvan joukon $\{(x, x) \mid x \in X\}$ jokainen alkio kuvautuu pseudometriikassa nollaksi. Näin ollen joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ sisältyy jokaisen suljetun välin $[0, a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0, a]$ jokaisella $a \in]0, \infty]$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(x, y) \in U_a \Leftrightarrow (y, x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in]0, \infty]$ luku ja $x, y, z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $(x, z), (z, y) \in U_a$, eli $f(x, z) \leq a$ ja $f(z, y) \leq a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x, y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in]0, \infty]$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in]0,\infty]\} = \{f^{\leftarrow}[0,a] \mid a \in]0,\infty]\}$ muodostaa joukon X uniformiteetin kannan. □

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittelevät jotkut uniformiteetit joukolle X. Pseudometriikat f ja g ovat *ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

Korollaari 5.4. *Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in]0,\infty]$ on olemassa sellainen $b \in]0,\infty]$, jolla $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$ kaikilla $x,y \in X$.*

Jos lisäksi jokaiselle $a \in]0,\infty]$ on olemassa $b \in]0,\infty]$, jolla $f(x,y) \leq b \Rightarrow g(x,y) \leq a$ kaikilla $x,y \in X$, niin f ja g ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

Todistus. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan f määrittelemän uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_f = \{f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in]0,\infty]\}.$$

Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0,a] \subset V, \text{ jollain } a \in]0,\infty]\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in]0,\infty]\}$$

ja uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0,a] \subset V, \text{ jollain } a \in]0,\infty]\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

- $\Rightarrow$ Olkoon uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$ ja näin ollen määritelmän 3.14 mukaan identtinen kuvaus $id\colon (X,\mathcal{U}_g) \to (X,\mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan jokaiselle maalijoukon lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähtöjoukon lähistö $V \in \mathcal{U}_g$ niin, että jokaiselle $(x,y) \in V$ pätee $(x,y) \in V'$ kaikilla $x,y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä voidaan edeltävä ehto muotoilla seuraavasti: Jokaisella $a \in]0,\infty]$ on olemassa $b \in]0,\infty]$ niin, että kaikilla $x,y \in X$ pätee $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a]$, eli $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle luvulle $a \in]0,\infty]$ on olemassa sellainen $b \in]0,\infty]$, jolla $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$, eli $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a]$, kaikilla $x,y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0,a']$ missä $a' \in]0,\infty]$ on olemassa uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0,b']$ missä $b' \in]0,\infty]$ niin, että kaikilla $x,y \in X$ pätee $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b'] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a']$. Näin ollen identtinen kuvaus $id\colon (X,\mathcal{U}_g) \to (X,\mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva ja siten uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on uniformiteettia $\mathcal{U}_f$ hienompi. Siis pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$.

Lisäksi määritelmistä 3.14 ja 5.3 seuraa, että jos $\mathcal{U}_f$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$, niin pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja. $\square$

Määritelmä 5.5. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Pseudometriikkojen f_i määrittelemien uniformiteettien $\mathcal{U}_{f_i}$ perheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemäksi uniformiteetiksi.

Määritelmä 5.6. Olkoon X joukko ja olkoot $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ joukon X pseudometriikkaperheitä. Perheet (f_i) ja (g_j) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit ovat samoja.

Määritelmä 5.7. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon $H \subset I$ äärellinen joukko ja $g_H\colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla $g_H(x,y) = \sup_{i\in H} f_i(x,y)$ kaikilla $x,y \in X$. Kuvaus g_H on pseudometriikka (esimerkki 4.10) ja siten voidaan muodostaa pseudometriikkaperhe $(g_H) := (g_H)_{H\subset I \text{ äärellinen}}$. Näin muodostettu pseudometriikkaperhe (g_H) on *saturoitu* (saturated) ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$.

Lause 5.8. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon (g_H) pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla $(f_i)_{i\in I}$. Saturoidusta pseudometriikkaperheestä (g_H) otetun äärellisen osaperheen $(g_A) := \{g_{A_1}, g_{A_2}, \dots, g_{A_n}\} \subset (g_H)$ pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen (g_H).*

Todistus. Saturoidun pseudometriikkaperheen (g_H) äärellisen osaperheen (g_A) jäsenet ovat kuvauksia, joilla $g_{A_j}(x,y) = \sup_{i\in A_j} f_i(x,y)$ kaikilla $x,y \in X$. Näin ollen osaperheen (g_A) pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}$ on kuvaus, jolla

$$\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}(x,y) = \sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} \left(\sup_{i\in A_j} f_i(x,y) \right) = \sup_{\substack{j\in\{1,2,\dots,n\} \\ i\in A_j}} f_i(x,y) = \sup_{i\in\bigcup_{j=1}^n A_j} f_i(x,y).$$

Joukko $\bigcup_{j=1}^n A_j \subset I$ on äärellisten joukkojen yhdisteenä äärellinen ja siten osaperheen (g_A) pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen (g_H). $\square$

Lause 5.9. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon lisäksi $g\colon X\times X\to[0,\infty]$, $g(x,y)=\sup_{i\in I}f_i(x,y)$ kaikilla $x,y\in X$ joukon X pseudometriikka. Mikäli indeksijoukko I on äärellinen on perheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti sama kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti.*

Todistus. Olkoon X joukko, I äärellinen indeksijoukko, $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe ja $g\colon X\times X\to[0,\infty]$, $g(x,y)=\sup_{i\in I}f_i(x,y)$ kaikilla $x,y\in X$ joukon X pseudometriikka. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienin yläraja $\mathcal{U}_f$, jonka kanta on joukko

$$B_f=\left\{\bigcap_{i\in J}V_i\mid J\subset I, V_i\in\mathcal{U}_{f_i}\text{ kaikilla } i\in J\right\}$$

ja siis $\mathcal{U}_f=\{W\subset X\times X\mid V\subset W \text{ jollain } V\in B_f\}$. Indeksijoukko I on äärellinen, joten jokaiselle alkioparille $(x,y)\in X\times X$ löytyy indeksi $i_{(x,y)}\in I$ niin, että $f_i(x,y)\le f_{i_{(x,y)}}(x,y)$ kaikilla $i\in I$. Näin ollen jokaisella $a\in]0,\infty]$ pätee

$$g^{\leftarrow}[0,a]=\{(x,y)\subset X\times X\mid f_i(x,y)\le a\text{ kaikilla } i\in I\}=\bigcap_{i\in I}f_i^{\leftarrow}[0,a].$$

Pseudometriikan g määräämän uniformiteetin kanta on siis

$$B_g=\{g^{\leftarrow}[0,a]\subset X\times X\mid a\in]0,\infty]\}=\left\{\bigcap_{i\in I}f_i^{\leftarrow}[0,a]\subset X\times X\mid a\in]0,\infty]\right\}.$$

Lauseen 5.2 nojalla jokaisella $i\in I$ alkukuvat $f_i^{\leftarrow}[0,a]$, $a\in]0,\infty]$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}_{f_i}$. Erityisesti jokaiselle $V_i\in\mathcal{U}_{f_i}$ löytyy $a\in]0,\infty]$, jolla $f_i^{\leftarrow}[0,a]\subset V_i$. Näin ollen kannan B_g määrittelemälle uniformiteetille $\mathcal{U}_g$ pätee

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_g=&\{W\subset X\times X\mid V\subset W\text{ jollain } V\in B_g\}\\
=&\left\{W\subset X\times X\mid\bigcap_{i\in I}f_i^{\leftarrow}[0,a]\subset W\text{ jollain } a\in]0,\infty]\right\}\\
=&\left\{W\subset X\times X\mid\bigcap_{i\in I}V_i\subset W\text{ jollain } V_i\in\mathcal{U}_i, i\in I\right\}\\
=&\{W\subset X\times X\mid V\subset W\text{ jollain } V\in B_f\}\\
=&\mathcal{U}_f.\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{U}_f=\mathcal{U}_g$. □

Korollaari 5.10. *Olkoon uniformiteetit* $\mathcal{U}$ *ja* $\mathcal{U}'$ *saturoitujen perheiden* $(f_i)_{i\in I}$ *ja* $(g_j)_{j\in J}$ *määräämiä. Uniformiteetti* $\mathcal{U}$ *on karkeampi kuin uniformiteetti* $\mathcal{U}'$*, jos jokaisella* $i \in I$ *ja* $a \in]0,\infty]$ *löytyy* $j \in J$ *ja* $b \in]0,\infty]$*, joilla ehdosta* $g_j(x,y) \leq b$ *seuraa* $f_i(x,y) \leq a$*. Vastaavasti tällöin uniformiteetti* $\mathcal{U}'$ *on hienompi kuin uniformiteetti* $\mathcal{U}$*.* $\square$

Lause 5.11. *Olkoon* X *joukko ja* $(f_i)_{i\in I}$ *joukon* X *pseudometriikkaperhe. Olkoon* (g_H) *pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla perhe* $(f_i)_{i\in I}$*. Tällöin perhe* (g_H) *on ekvivalentti perheen* $(f_i)_{i\in I}$ *kanssa.*

Todistus. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienin yläraja $\sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i}$, eli pienin uniformiteetti, joka sisältää $\mathcal{U}_{f_i}$ kaikilla $i \in I$. Vastaavasti pseudometriikkaperheen (g_H) määrittelemä uniformiteetti on $\sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H}$.

Pseudometriikkaperheet $(f_i)_{i\in I}$ ja (g_H) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit $\mathcal{U}_f := \sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i}$ ja $\mathcal{U}_g := \sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H}$ ovat samoja.

Määritelmän 5.7 nojalla jokaiselle pseudometriikalle $f_j \in (f_i)_{i\in I}$ löytyy pseudometriikka $g_{\{j\}} \in (g_H)$ niin, että $g_{\{j\}}(x,y) = \sup_{i\in\{j\}} f_i(x,y) = f_j(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen $(f_i)_{i\in I} \subset (g_H)$ ja siis $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}_g$.

Olkoon $H' \subset I$ äärellinen osajoukko. Lauseen 5.9 nojalla uniformiteetti $\mathcal{U}_{g_{H'}}$ on sama kuin äärellisen perheen $(f_i)_{i\in H'}$ määräämä uniformiteetti $\sup_{i\in H'}\mathcal{U}_{f_i}$. Toisaalta uniformiteetti $\sup_{i\in H'}\mathcal{U}_{f_i}$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i} = \mathcal{U}_f$, joten $\mathcal{U}_{g_{H'}} \subset \mathcal{U}_f$. Näin ollen $\mathcal{U}_g = \sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H} \subset \mathcal{U}_f$.

Siis $\mathcal{U}_g = \mathcal{U}_f$ ja perhe (g_H) on ekvivalentti perheen $(f_i)_{i\in I}$ kanssa. $\square$

Korollaari 5.12. *Jokaiselle pseudometriikkaperheelle löytyy aina ekvivalentti saturoitu pseudometriikkaperhe ja näin ollen pseudometriikkaperheen voidaan olettaa olevan saturoitu.* $\square$

Lemma 5.13. *Olkoon* X *joukko ja* $\mathcal{U}$ *uniformiteetti joukolle* X*. Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe* $(f_i)_{i\in I}$*, joka määrittelee uniformiteetin* $\mathcal{U}$*.*

Todistus. Jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ määritellään karteesisen tulon $X \times X$ osajoukoista muodostuva perhe $B_V = (U_n)$, jolla $U_1 \subset V$ ja $U_{n+1}^2 \subset U_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nyt B_V on kanta eräälle joukon X uniformiteetille $\mathcal{U}_V$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{U}$. Erityisesti $\mathcal{U}$ on uniformiteettien $\mathcal{U}_V, V \in \mathcal{U}$ pienin yläraja. Näin ollen kantojen leikkaus

$$\left\{ \bigcap_{V\in H} U_V \mid H \subset \mathcal{U} \text{ äärellinen }, U_V \in B_V \right\}$$

on numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin lemma seuraa suoraan lauseesta 5.14. $\square$

Lause 5.14. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Jos uniformiteetilla $\mathcal{U}$ on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka $f\colon X \times X \to [0, \infty]$, jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanssa.*

Todistus. Olkoon (V_n) numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin olkoon (U_n) perhe symmetrisiä uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöjä, joilla $U_1 \subset V_1$ ja $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$. Nyt (U_n) on myös uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta ja erityisesti $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$.

Olkoon $g\colon X \times X \to [0, \infty]$ kuvaus, jolla

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \geq 1, \\ 1 & \text{, jos } (x,y) \notin U_1, \\ 2^{-k} & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \leq k \text{ ja } (x,y) \notin U_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt g on symmetrinen, positiivinen ja $g(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $f\colon X \times X \to [0, \infty]$ kuvaus, jolla

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ ja $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$ joukon X alkioista muodostuva jono, jossa $z_0 = x$ ja $z_p = y$. Kuvauksen f määrittelystä seuraa, että f on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat $f(x,y) \geq 0$ ja $f(x,x) = 0$ pätevät kaikilla $x, y \in X$. Siis f on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y) \tag{5.15}$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli $f(x,y) \leq g(x,y)$ seuraa siitä, että

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{1} g(z_i, z_{i+1}) = g(z_0, z_1) = g(x,y).$$

Kaavan 5.15 vasen puoli, eli $\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y)$ osoitetaan induktion avulla. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Nyt jokaisella $p+1$ alkion jonolla joukon X alkioita $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$, jolla $z_0 = x$ ja $z_p = y$, saadaan induktio-oletukseksi

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x,y). \tag{5.16}$$

Jos $p = 1$, niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x, y) \geq \frac{1}{2}\, g(x, y).$$

Merkitään

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}), \tag{5.17}$$

jolloin induktio-oletus voidaan kirjoittaa muodossa $a \geq \frac{1}{2} g(x, y)$. Määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 1$, joten jos $a \geq 1/2$, niin yhtälö 5.16 pätee muodossa $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} g(x, y)$. Oletetaan, että $a < 1/2$ ja että h on suurin niistä indekseistä q, joilla $\sum_{i<q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Tällöin

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja lisäksi} \quad \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2,$$

sillä $\sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$. Edeltävien kaavojen ja induktio-oletuksen nojalla (sijoituksella $p = h$) pätee

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x, z_h),$$

eli $g(x, z_h) \leq a$. Toisaalta yllä olevien kaavojen nojalla pätee myös

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(z_{h+1}, y),$$

eli $g(z_{h+1}, y) \leq a$. Toisaalta luvun a määrittelyn nojalla $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $2^{-k} \leq a$. Tällöin oletuksesta $a < 1/2$ seuraa $k \geq 2$ ja kuvauksen g määrittelystä seuraa, että $(x, z_h) \in U_k$, $(z_h, z_{h+1}) \in U_k$ ja $(z_{h+1}, y) \in U_k$. Nyt $(x, y) \in U_k^3$ ja lähistöperheen (U_n) määrittelyn nojalla $(x, y) \in U_{k-1}$. Kuvauksen g määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$, eli $\frac{1}{2} g(x, y) \leq a$.

Näin ollen kaavan 5.15 epäyhtälöt pätevät ja niistä seuraa, että jokaisella $a > 0$ pätee $U_k \subset f^{\leftarrow}([0, a])$, kun $2^{-k} < a$. Toisaalta myös $f^{\leftarrow}([0, a]) \subset U_k$, joten joukot $f^{\leftarrow}([0, a])$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}$. Siis löydettiin pseudometriikka f, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$. $\square$

Luku 6

Täydellinen uniforminen avaruus

Tässä luvussa esitellään Cauchy-filtterit, joiden avulla rakennetaan täydellinen uniforminen avaruus. Lisätietoja tämän luvun aiheista löytyy kirjoista [1, luku II] ja [2, luku IX].

Uniformiselle avaruudelle voidaan määritellä uniformiteetin lähistöjen suhteen *tarpeeksi pienet* osajoukot. Osajoukko on lähistön suhteen tarpeeksi pieni silloin, kun kaikki osajoukon alkiot ovat tarpeeksi lähellä toisiaan kyseisen lähistön suhteen (huomautus 3.2). Näin saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 6.1. Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Osajoukko $A \subset X$ on $V-$*pieni*, jos jokaisella pisteparilla $x, y \in A$ pätee $(x, y) \in V$, eli jos $A \times A \subset V$.

Lause 6.2. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon lisäksi $A \subset X$ ja $B \subset X$ $V-$pieniä osajoukkoja, joiden leikkaus on epätyhjä. Tällöin yhdiste $A \cup B$ on V^2-pieni.*

Todistus. Olkoot $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in A \cap B$ alkioita. Tällöin alkioparit (x, z) ja (z, y) kuuluvat lähistöön V ja näin ollen alkiopari (x, y) kuuluu joukkoon V^2. $\square$

Määritelmä 6.3. *Filtteri.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ potenssijoukon epätyhjä osajoukko. Joukko $\mathcal{F}$ on *filtteri* joukolle X, jos sille pätee uniformiteetin ehtojen (U1) ja (U2) lisäksi seuraava ehto:

(F) Joukko $\mathcal{F}$ on epätyhjä eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon $\mathcal{F}$.

Määritelmä 6.4. *Filtterin kanta.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filtteri joukossa X. Tällöin joukko $B \subset \mathcal{F}$ on filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos jokaiselle filtterin alkiolle $V \in \mathcal{F}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 6.5. *Olkoon X uniforminen avaruus. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X)$ on erään filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos ehdon (F) lisäksi pätee ehto:*

(B_F) Jos $A_1, A_2 \in B$, niin on olemassa sellainen $A_3 \in B$, jolla $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Todistus. Olkoon X uniforminen avaruus ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ sellainen joukko, jolle pätevät ehdot (F) ja (B_F).

Tällöin olkoon

$$\mathcal{F}_B = \{W \subset X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{F}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{F}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että $\mathcal{F}_B$ on filtteri. Käydään läpi filtterin määritelmän 6.3 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{F}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{F}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W \subset W' \subset X$ niin $W' \in \mathcal{F}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W' \in \mathcal{F}_B$ joukkoja. Joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon ($B_F$) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}_B$. Lisäksi joukoiksi W ja W' voidaan valita mielivaltaisia kokoelman $\mathcal{F}_B$ alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{F}_B$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{F}_B$.

(F) Ehto (F) pätee joukolle B, joten joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelyn nojalla $\mathcal{F}_B$ ei ole tyhjä joukko eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon $\mathcal{F}_B$.

□

Määritelmä 6.6. *Filttereiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Filtteri $\mathcal{F}_2$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}_1$, jos $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Tällöin $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{F}_2$. Jos lisäksi pätee $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, niin $\mathcal{F}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{F}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{F}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{F}_1$.

Sanotaan, että kahta filtteriä $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{F}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

Filtterit $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ ovat samoja, eli $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, jos $\mathcal{F}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

Lause 6.7. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Olkoon lisäksi B_1 kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja B_2 kanta filtterille $\mathcal{F}_2$. Tällöin filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$ jos ja vain jos jokaiselle $A_2 \in B_2$ löytyy sellainen $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$.*

Todistus. Olkoon X joukko, $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X, B_1 kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja B_2 kanta filtterille $\mathcal{F}_2$.

$\Rightarrow$ Olkoon filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$, eli $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Olkoon $A_2 \in B_2$ alkio. Tällöin pätee $A_2 \in \mathcal{F}_1$, sillä $B_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Näin ollen filtterin kannan määritelmän nojalla alkiolle $A_2 \in \mathcal{F}_1$ löytyy kannan B_1 alkio A_1, jolla $A_1 \subset A_2$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle $A_2' \in B_2$ löytyy sellainen $A_1' \in B_1$, jolla $A_1' \subset A_2'$. Olkoon $V \in \mathcal{F}_2$ alkio. Tällöin filtterin määritelmän nojalla löytyy $A_2 \in B_2$, jolla $A_2 \subset V$. Toisaalta oletuksen nojalla löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$. Siis alkiolle V löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset V$. Toisaalta $B_1 \subset \mathcal{F}_1$, joten $A_1 \in \mathcal{F}_1$.

Siis alkiolle $V \in \mathcal{F}_2$ löytyy alkio $A_1 \in \mathcal{F}_1$, jolla $A_1 \subset V$. Näin ollen ehdon (U1) nojalla $V \in \mathcal{F}_1$ ja edelleen $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Siis filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$.

□

Määritelmä 6.8. Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Olkoon lisäksi B_1 kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja B_2 kanta filtterille $\mathcal{F}_2$. Kannat B_1 ja B_2 ovat *ekvivalentteja*, jos filtterit $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ ovat samoja.

Määritelmä 6.9. Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $\mathcal{F}$ filtteri joukossa X. Filtteriä $\mathcal{F}$ sanotaan *Cauchy*-filtteriksi, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy osajoukko $A \subset X$, joka on $V-$pieni ja kuuluu filtteriin $\mathcal{F}$.

Cauchy-filtterit sisältävät siis mielivaltaisen pieniä joukkoja.

Lause 6.10. *Topologisessa avaruudessa osajoukon (vastaavasti alkion) kaikkien ympäristöjen joukko on filtteri, jota sanotaan ympäristöfiltteriksi.* □

Määritelmä 6.11. *Filtterin raja-arvo.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{F}$ filtteri joukossa X. Alkio $x \in X$ on filtterin $\mathcal{F}$ *raja-arvo*, jos filtteri $\mathcal{F}$ on hienompi kuin alkion x ympäristöfiltteri. Sanomme, että filtteri $\mathcal{F}$ *suppenee* (converge) kohti alkiota x.

Lisäksi, jos B on filtterin $\mathcal{F}$ kanta ja alkio x on filtterin $\mathcal{F}$ raja-arvo, niin alkio x on myös kannan B raja-arvo ja kanta B suppenee kohti alkiota x.

Lause 6.12. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, $x \in X$ alkio ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ erään filtterin kanta. Kanta B suppenee kohti alkiota x, jos ja vain jos jokainen alkion x ympäristö sisältää jonkin kannan B jäsenen.* □

Uniformeissa avaruuksissa Cauchy-filttereillä ei välttämättä ole raja-arvoa.

Määritelmä 6.13. Uniforminen avaruus on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-filtteri suppenee.

Lause 6.14. *Uniformisessa avaruudessa jokainen suppeneva filtteri on Cauchy-filtteri.*

Todistus. Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus, $\mathcal{F}$ suppeneva filtteri joukossa X ja $x \in X$ sellainen alkio, jota kohti $\mathcal{F}$ suppenee. Tällöin alkion x ympäristöfiltteri $B(x)$ sisältyy filtteriin $\mathcal{F}$. Näin ollen jokaisella lähistöllä $V' \in \mathcal{U}$ pätee $V'(x) \in \mathcal{F}$.

Olkoon nyt $V \in \mathcal{U}$ lähistö ja $x \in X$ alkio. Huomautuksen 3.3 ehdon (Ua) nojalla on olemassa sellainen lähistö $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^{-1} \circ W \subset V$. Huomataan, että joukko

$$W(x) \times W(x) = \{(y_1, y_2) \mid (x, y_1) \in W, (x, y_2) \in W\}$$

sisältyy joukkoon

$$W^{-1} \circ W = \{(y_1, y_2) \mid \text{on olemassa } x', \text{ jolla } (y_1, x') \in W^{-1}, (x', y_2) \in W\}.$$

Siis lähistölle V löydettiin osajoukko $W(x) \subset X$, jolla $W(x) \times W(x) \subset W^{-1} \circ W \subset V$ ja $W(x) \in \mathcal{F}$. Määritelmän 6.9 nojalla $\mathcal{F}$ on Cauchy-filtteri. □

Lause 6.15. Minimaalinen Cauchy-filtteri. *Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus. Jokaiselle joukon X Cauchy-filtterille $\mathcal{F}$ on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchy-filtteri $\mathcal{F}_0$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{F}$, eli $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Jos B on kanta filtterille $\mathcal{F}$ ja G on uniformiteetin $\mathcal{U}$ symmetristen lähistöjen kanta, niin kokoelma $B_0 = \{V(M) \mid M \in B, V \in G\}$ missä $V(M) = \{y \mid (x, y) \in V, x \in M\}$ on filtterin $\mathcal{F}$ minimaalisen Cauchy-filtterin $\mathcal{F}_0$ kanta.*

Todistus. Tarkistetaan kannan ehdot joukolle B_0:

1. Olkoot $V_1(M_1), V_2(M_2) \in B_0$ joukkoja. Nyt $M_1, M_2 \in B$, joten on olemassa joukko $M_3 \in B$, jolla pätee $M_3 \subset M_1 \cap M_2$. Toisaalta $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, joten on olemassa joukko $V_3 \in \mathcal{U}$, jolla pätee $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Näin ollen joukko $V_3(M_3) = \{y \mid (x, y) \in V_3, x \in M_3\}$ on joukon $(V_1 \cap V_2)(M_1 \cap M_2) = V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$ osajoukko, eli $V_3(M_3) \subset V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$.

2. Olkoon $M \in B$ joukko ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Tällöin joukko M on epätyhjä, joten myös joukko $V(M)$ on epätyhjä. Näin ollen tyhjä joukko ei ole joukon B_0 alkio.

Jokaisella $M \in B$ ja $V \in \mathcal{U}$ pätee $M \subset V(M)$, joten erityisesti jokaiselle $V(M) \in B_0$ löytyy sellainen $M \in B$, jolla $M \subset V(M)$. Näin ollen lauseen 6.7 nojalla minimaalinen Cauchy-filtteri $\mathcal{F}_0$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}$. □

Luku 7

Täysin säännölliset avaruudet

Tässä luvussa esitellään uniformisoituva topologinen avaruus, jonka avulla määritellään täysin säännöllinen avaruus. Lisäksi esitellään tutkielman kannalta merkittävä tulos, jossa täysin säännöllinen avaruus upotetaan yksikkövälien tuloon. Lisätietoja tämän luvun aiheista löytyy kirjoista [2, luku IX] ja [4].

Määritelmä 7.1. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Olkoon lisäksi $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoima topologia joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *yhteensopiva* topologian $\mathcal{T}$ kanssa, jos topologiat $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ja $\mathcal{T}$ ovat samoja.

Määritelmä 7.2. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *uniformisoituva* (uniformizable), jos joukolle X voidaan muodostaa topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti.

Lause 7.3. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Avaruuden $(X, \mathcal{T})$ uniformisoituvuus on yhtäpitävää seuraavan ehdon kanssa:*

(Z) Kaikkien alkioiden $x \in X$ kaikilla ympäristöillä $V \subset X$ on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus $f\colon X \to [0,1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V$.

Todistus. Näytetään ensin, että ehto on välttämätön. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ uniformisoituva topologinen avaruus, x_0 alkio ja V_0 alkion x_0 ympäristö. Olkoon $\mathcal{U}$ topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Lauseen 5.13 nojalla uniformiteetille $\mathcal{U}$ voidaan määritellä pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i \in I}$, joka indusoi uniformiteetin $\mathcal{U}$. Lisäksi korollaarin 5.12 nojalla voidaan olettaa pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ olevan saturoitu. Tällöin määritelmän 5.2 nojalla on olemassa $a \in]0, \infty]$, $\alpha \in I$ ja pseudometriikka $f_\alpha \in (f_i)_{i\in I}$, jolla $f_\alpha(x_0, x_0) = 0$ ja $f_\alpha(x_0, x) \geq a$ kaikilla $x \in X \setminus V_0$. Tämän seurauksena kaavalla $g(x) = \inf\big(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x)\big)$ määritelty kuvaus $g\colon X \to [0,1]$ toteuttaa ehdon (Z) pisteelle x_0 ja ympäristölle V_0.

Toisaalta ehto on myös riittävä: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, jolla ehto (Z) pätee. Olkoon $x_0 \in X$ alkio, $V_0 \subset X$ alkion x_0 ympäristö ja $f\colon X \to [0,1]$ ehdon (Z) antama kuvaus alkiolle x_0 ja sen ympäristölle V_0. Tällöin kaavalla $g(x_0, x) = f(x)$ määritelty kuvaus $g\colon X \times X \to [0, \infty]$ on pseudometriikka. Olkoon $\mathcal{U}$ pseudometriikan g määräämä uniformiteetti ja $a \in]0, \infty]$ luku. Tällöin $g^{\leftarrow}[0, a] = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq a\}$ on lähistö pseudometriikan g määräämässä uniformiteetissa $\mathcal{U}$. Merkitään $g^{\leftarrow}[0, a] = U_a$, jolloin joukko $U_a(x_0) = \{y \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristö uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoimassa topologiassa $\mathcal{T}'$. Joukkojen määrittelyistä seuraa, että jos $a < 1$, niin $U_a(x) \subset V_0$ ja tällöin kokoelma $B = \{U_a(x_0) \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristökanta topologiassa $\mathcal{T}$.

Siis avaruus $(X, \mathcal{T})$, joka toteuttaa ehdon (Z) on uniformisoituva. $\square$

Määritelmä 7.4. Topologinen avaruus on *Hausdorff*, jos jokaisella pisteellä on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 7.5. Topologinen avaruus X on *säännöllinen* (regular), jos jokaisella suljetulla joukolla $A \subset X$ ja jokaisella pisteellä $x \in X, x \notin A$ on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 7.6. Topologinen avaruus on *täysin säännöllinen* (completely regular), jos se on uniformisoituva ja Hausdorff.

Lause 7.7. *Täysin säännöllisen avaruuden aliavaruus on täysin säännöllinen.*

Todistus. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen avaruus ja $A \subset X$ aliavaruus. Olkoon lisäksi $V \subset A$ avoin osajoukko ja $x \in V$ alkio. Nyt $V = A \cap U$ jollain avoimella osajoukolla $U \subset X$. Lauseen 7.3 ominaisuuden (Z) nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $f\colon X \to [0, 1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus U$. Näin ollen kuvauksen f rajoittuma $f|_A\colon A \to [0, 1]$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$ on ominaisuuden (Z) mukainen jatkuva kuvaus pisteelle $x \in A$ ja pisteen x ympäristölle $V \subset A$. Siis A on täysin säännöllinen. $\square$

Sopimus 7.8. Merkitään $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Oletetaan, että X on topologinen avaruus. Merkitään tällöin kaikkien jatkuvien kuvausten $f\colon X \to I$ joukkoa symbolilla I^X. Tällöin $(I_f)_{f \in I^X}$ on yksikkövälien perhe, joka on indeksoitu joukolla I^X. Merkitään yksikkövälien perheen $(I_f)_{f \in I^X}$ tuloa

$$P^X = \prod_{f \in I^X} I_f = \left\{ \prod_{f \in I^X} \{t_f\} \mid t_f \in I \text{ kaikilla } f \in I^X \right\}.$$

Käytämme koko luvun ajan joukon P^X alkioista merkintää $\{t_f\}$ tarkoittamaan alkiota $\prod_{f \in I^X} \{t_f\}$, jossa $t_f \in I$ kaikilla $f \in I^X$.

Lause 7.9. Tihonovin lause. *Kompaktien avaruuksien mielivaltainen tulo on kompakti.*

Todistus. Topologia II [3] Lause 18.4. $\square$

Korollaari 7.10. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Tällöin yksikkövälien tulo P^X on kompakti.* $\square$

Lause 7.11. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Tällöin X voidaan upottaa yksikkövälien tuloon P^X. Erityisesti kaavalla $\rho(x) = \{f(x)_f\}$, $x \in X$ määritelty kuvaus $\rho\colon X \to \rho X \subset P^X$ on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho\colon X \to \rho X \subset P^X$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $\rho(x) = \{f(x)_f\}$ kaikilla $x \in X$. Kuvaus ρ on homeomorfismi, jos se on injektiivinen, jatkuva ja avoin kuvaus.

Ensinnäkin kuvaus ρ on injektio: Olkoon $x, y \in X, x \neq y$. Avaruus X on Hausdorff, joten pisteellä x on sellainen ympäristö $A \subset X$, johon alkio y ei kuulu. Avaruus X on täysin säännöllinen, joten on olemassa sellainen kuvaus $f \in I^X$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(z) = 1$ kaikilla $z \in X \setminus A$. Erityisesti $f(y) = 1 \neq 0 = f(x)$ ja näin ollen $\rho(x) \neq \rho(y)$.

Toiseksi kuvauksen ρ komponenttikuvaukset $(P_f \circ \rho)(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$ ja $f \in I^X$ ovat jatkuvia, joten myös kuvaus ρ on jatkuva [3, lause 7.10].

Viimeiseksi kuvaus ρ on avoin: Avointen joukkojen perhe $(U_f)_{f \in I^X}$, $U_f = f^{\leftarrow}[0, 1[\subset X$ kaikilla $f \in I^X$ muodostaa ympäristökannan: Avoimelle osajoukolle $U \subset X$ ja sen alkiolle $x \in U$ on olemassa kuvaus $f_1 \in I^X$, jolla $f_1(x) = 0$ ja $f_1(y) = 1, y \in X \setminus U$. Näin ollen $V = f_1^{\leftarrow}[0, 1[\subset X$ on avoin, $V \in (U_f)_{f \in I^X}$ ja $V \subset U$, eli avoimelle osajoukolle $U \subset X$ löydettiin joukon $(U_f)_{f \in I^X}$ alkio V, jolla $x \in V \subset U$. Tällöin perhe $(U_f)_{f \in I^X}$ on ympäristökanta [3, lause 2.4 ja 2.15]. Ympäristökannan jäsenen $V_{f_0} \in (U_f)_{f \in I^X}$ kuva

$$\rho V_{f_0} = \{\{t_f\} \mid t_{f_0} < 1\} \cap \rho X$$

on avoin joukossa ρX ja näin ollen kuvaus ρ on avoin. $\square$

Lemma 7.12. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho\colon X \to P^X$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $\rho(x) = \{f(x)\}$ kaikilla $x \in X$. Olkoon lisäksi Y topologinen avaruus ja $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $g\colon \rho X \to Y$, jolla $h(x) = (g \circ \rho)(x)$ kaikilla $x \in X$.* $\square$

Lause 7.13. *Olkoot X ja Y täysin säännöllisiä avaruuksia ja $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $H\colon P^X \to P^Y$ niin, että oheinen kaavio kommutoi.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[d, "\rho_1"] \\ P^X \arrow[r, "H"'] & P^Y \end{tikzcd}$$

Erityisesti $H|_{\overline{\rho X}}\colon \overline{\rho X} \to \overline{\rho_1 Y}$.

Todistus. Olkoot X ja Y täysin säännöllisiä avaruuksia ja $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Olkoon $g \in I^Y$ kuvaus. Tällöin $(g \circ h) \in I^X$ ja kaavalla $h_g(\{t_f\}) = t_{g\circ h}$ voidaan määritellä kuvaus $h_g\colon P^X \to I_g$. Nyt h_g on projektiokuvaus, joka samaistaa yksikkövälit I_g ja $I_{g\circ h}$. Kuvaus h_g on jatkuva, joten kaavalla

$$H(\{t_f\}) = \{h_g(\{t_f\})\}, \quad \{t_f\} \in P^X$$

voidaan muodostaa jatkuva kuvaus $H\colon P^X \to P^Y$. Nyt kuvauksen H määrittelyn nojalla pätee

$$(H \circ \rho)(x) = (H(\rho(x))) = H(\{f(x)\}) = \{h_g(\{f(x)\})\} = \{((g \circ h)(x))_g\}$$

ja lauseen 7.11 nojalla

$$(\rho_1 \circ h)(x) = \rho_1(h(x)) = \{g(h(x))_g\} = \{((g \circ h)(x))_g\}.$$

Näin ollen annettu kaavio kommutoi.

Kaavion kommutoinnin nojalla $H(\rho X) \subset \rho_1 Y$ ja näin ollen $\overline{H(\rho X)} \subset \overline{\rho_1 Y}$. Kuvauksen H jatkuvuuden nojalla $H(\overline{\rho X}) \subset \overline{H(\rho X)}$. Nyt $H(\overline{\rho X}) \subset \overline{\rho_1 Y}$ ja siis $H|_{\overline{\rho X}}\colon \overline{\rho X} \to \overline{\rho_1 Y}$. $\square$

Luku 8

Kompaktisointi

Tässä luvussa esitellään topologisen avaruuden kompaktisointi sekä rakennetaan täysin säännöllisen avaruuden Stone-Čech kompaktisointi käyttäen hyväksi edellisen luvun upotusta yksikkövälien tuloon. Lisätietoja tämän luvun aiheista löytyy kirjasta [4].

Määritelmä 8.1. Topologisen avaruuden X kompaktisointi on pari $(\hat{X}, h)$, jossa $\hat{X}$ on kompakti Hausdorff avaruus ja h on sellainen homeomorfismi $X \to h(X) \subset \hat{X}$, jolla $h(X)$ on tiheä avaruudessa $\hat{X}$, eli $\overline{h(X)} = \hat{X}$.

Huomautus 8.2. Usein samastetaan avaruus X ja osajoukko $h(X) \subset \hat{X}$ ja sanotaan, että $\hat{X}$ on avaruuden X kompaktisointi.

Lemma 8.3. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho\colon X \to P^X$ lauseen 7.11 mukainen upotus missä P^X on yksikkövälien tulona kompakti. Erityisesti $\overline{\rho X}$ on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti. Merkitään $\beta X = \overline{\rho X}$ ja sanotaan, että pari $(\beta X, \rho)$ on avaruuden X* Stone-Čech kompaktisointi.

Lause 8.4. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Avaruuden X Stone-Čech kompaktisoinnille $(\beta X, \rho)$ pätee seuraava ominaisuus:*

- *Jokaiselle kompaktille Y ja jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle $f\colon X \to Y$ on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $F\colon \beta X \to Y$ niin, että $f = F \circ \rho$.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus, Y kompakti avaruus ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin lauseen 7.13 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $\phi\colon \beta X \to \beta Y$

niin, että oheinen kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[d, "\rho_1"] \\ \beta X \arrow[r, "\phi"'] & \beta Y \end{tikzcd}$$

Avaruus Y on kompakti, joten kuvaus $\rho_1\colon Y \to \beta Y$ on homeomorfismi. Näin ollen on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $\rho_1^{-1}\colon \beta Y \to Y$. Voidaan nyt valita $F\colon \beta X \to Y$ asettamalla $F(a) = (\rho_1^{-1} \circ \phi)(a) = \rho_1^{-1}(\phi(a))$ kaikilla $a \in \beta X$. Nyt $f(x) = (F \circ \rho)(x)$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi kompaktisoinnin määritelmän nojalla X on tiheä joukossa βX ja näin ollen kuvaus F on yksikäsitteinen. $\square$

Lause 8.5. *Stone-Čech kompaktisoinnin yksikäsitteisyys. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $(\hat{X}, h)$ sellainen avaruuden X kompaktisointi, jolla on lauseen 8.4 kuvaileva ominaisuus. Tällöin $\hat{X}$ ja Stone-Čech kompaktisointi βX ovat homeomorfisia.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus, $(\beta X, \rho)$ avaruuden X Stone-Čech kompaktisointi ja $(\hat{X}, h)$ sellainen avaruuden X kompaktisointi, jolla on lauseen 8.4 kuvaileva ominaisuus. Samastetaan X, hX ja ρX, jolloin voidaan mieltää X joukkojen βX ja $\hat{X}$ osajoukoksi. Olkoon $i\colon X \to X$ identtinen kuvaus. Nyt lauseen 8.4 ominaisuuden nojalla kompaktisoinnille βX, kompaktille joukolle $\hat{X}$ ja kuvaukselle i on olemassa jatkuva kuvaus $F\colon \beta X \to \hat{X}$, jolla $F(x) = (F \circ \rho)(x) = i(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Vastaavasti on olemassa jatkuva kuvaus $G\colon \hat{X} \to \beta X$, jolla $G(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Nyt kuvaukset $(F \circ G)|_X$ ja $(G \circ F)|_X$ ovat identtisiä kuvauksia. Lisäksi X on tiheä joukoissa βX ja $\hat{X}$, joten kuvaukset $F \circ G = 1_{\hat{X}}$ ja $G \circ F = 1_{\beta X}$ ovat identtisiä kuvauksia. Siis kuvaus F on homeomorfismi avaruuksien βX ja $\hat{X}$ välille. $\square$

Lause 8.6. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Stone-Čech kompaktisointi βX on laajin kompaktisointi avaruudelle X: Jos $\hat{X}$ on avaruuden X kompaktisointi, niin $\hat{X}$ on homeomorfinen avaruuden βX tekijäavaruuden kanssa.*

Todistus. Lauseen 8.4 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $F\colon \beta X \to \hat{X}$, jolla $F(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Avaruus βX on kompakti, $\hat{X}$ on Hausdorff ja kuvaus F on jatkuva, joten F on suljettu kuvaus [3, lause 15.15]. Kuvajoukko $F(\beta X)$ on suljettu ja sisältää joukossa $\hat{X}$ tiheän osajoukon X, joten $\overline{X} \subset F(\beta X) = \hat{X}$. Näin ollen kuvaus F on surjektio. Kuvaus F on siis suljettu jatkuva surjektio, joten F on samastuskuvaus [3, lause 8.9].

Olkoon $\sim$ sellainen ekvivalenssirelaatio, jolla $a \sim a'$ jos ja vain jos $F(a) = F(a')$, kun $a, a' \in \beta X$. Nyt voidaan määritellä kuvaus $F_\sim\colon \beta X/\sim \to \hat{X}$, jolla $F_\sim([a]) = F(a)$.

Kuvaus F on samastuskuvaus, joten kuvaus $F_{\sim}$ on homeomorfismi [3, lause 9.10]. Siis kompaktisointi $\hat{X}$ on homeomorfinen tekijäavaruuden $\beta X/\sim$ kanssa. $\square$

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.

[4] James Dugundji: Topology, 11. korjattu painos, Allyn and Bacon, 1976.