Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving 16. huhtikuuta 2018

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Käytämme koko tutkielman ajan merkintää $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Määritelmä 2.1. Olkoon X joukko ja V ja W karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X, \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\},$$

$W^2 = W \circ W$ ja $W^n = W \circ W^{n-1}$.

Määritelmä 2.2. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on avoin, jos se on kokoelman $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ alkio.

Määritelmä 2.3. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on alkion x *ympäristö*, jos on olemassa sellainen avoin osajoukko $B \subset X$, jolla $x \in B \subset A$.

Huomautus 2.4. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ avoin osajoukko $A \subset X$ on jokaisen alkionsa $x \in A$ ympäristö.

Määritelmä 2.5. *Ympäristökanta.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x *ympäristökanta* (topologiassa $\mathcal{T}$), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Huomautus 2.6. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ alkion $x \in X$ kaikkien ympäristöjen kokoelma $B(x)$ on alkion x ympäristökanta.

Esimerkki 2.7. Jos joukkoperhe $B \subset \mathcal{P}(X)$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta ja $x \in X$ alkio, niin joukko $B(x) = \{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella alkiolla $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, niin kokoelma $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta.

Lause 2.8. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian $\mathcal{T}$ esikanta. Lisäksi $\mathcal{T}$ on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia $\mathcal{T}$ on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. Topologia II [3] Lause 2.19. □

Määritelmä 2.9. *Topologioiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukolle X. Topologia $\mathcal{T}_2$ on karkeampi kuin topologia $\mathcal{T}_1$, jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin $\mathcal{T}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_2$.

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. *Uniforminen rakenne* (tai *uniformiteetti*) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöiksi. Uniformiteetilla $\mathcal{U}$ varustettua joukkoa X sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla:

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Kokoelma $\{\emptyset\}$ on ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti tyhjälle joukolle.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja kokoelma $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ uniformiteetti joukolle X. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ *kanta*, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 3.6. *Olkoon X joukko. Kokoelma $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X erään uniformiteetin kanta, jos kokoelmalle B pätee*

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Todistus. Olkoon X joukko ja $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ sellainen kokoelma, jolle pätevät ehdot (B1)-(B4). Tällöin olkoon

$$\mathcal{U}_B = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{U}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että $\mathcal{U}_B$ on uniformiteetti. Käydään läpi uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{U}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X \times X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{U}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W \subset W' \subset X \times X$ niin $W' \in \mathcal{U}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W' \in \mathcal{U}_B$ joukkoja. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon (B1) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{U}_B$. Lisäksi joukoiksi W ja W' voidaan valita mielivaltaisia kokoelman $\mathcal{U}_B$ alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}_B$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}_B$.

(U3) Jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Ehdon (B2) nojalla $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset V$, joten $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset W$.

(U4) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V \subset W$. Tällöin ehdon (B3) nojalla joukolle V on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$. Näin ollen joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla $V^{-1} \in \mathcal{U}_B$ ja edelleen $W^{-1} \in \mathcal{U}_B$.

(U5) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset W$. Ehdon (B4) nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V^2 \subset V'$. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla tällöin $V \in \mathcal{U}_B$ ja siis $V^2 \subset W$.

□

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon tällöin*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \text{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkiolle x ja joukko $B(x)$ on alkion x ympäristökanta kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$, $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X. Lisäksi olkoot joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Joukko $V(x)$ on epätyhjä, sillä $x \in V(x)$. Olkoon $W \in \mathcal{U}$ lähistö, jolloin $W(x)$ on alkion x ympäristö. Alkion x ympäristöille $V(x)$ ja $W(x)$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x), \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehdon (U2) nojalla pätee $V \cap W \in \mathcal{U}$. Ehdosta (U1) seuraa, että joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko ja siten huomautuksen 2.6 nojalla ympäristökanta. □

Huomautus 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.9. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f : X \to X'$ kuvaus. Kuvaus f on *tasaisesti jatkuva* (uniformly continuous), jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.10. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f : X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g : X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Todistus. Korollaari on suora seuraus määritelmästä 3.9 ja uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdosta (U1). □

Lause 3.11. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f on jatkuva, kun varustetaan joukot X ja Y uniformiteettiensa indusoimilla topologioilla.*

Todistus. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden X' uniformiteetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion x' ympäristön avaruudessa X. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $(g^{\leftarrow}V')(x)$ on alkion x ympäristö. Erityisesti ympäristö $(g^{\leftarrow}V')(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x, y) \in g^{\leftarrow}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

Lause 3.12. *Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia, $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia ja V'' avaruuden X'' lähistö. Tällöin tasaisesti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden X' lähistö V', jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V, jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle V'' on olemassa lähistö V, jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva. □

Määritelmä 3.13. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on *isomorfismi*, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat tasaisesti jatkuvia.

Määritelmä 3.14. *Uniformiteettien vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_1$, jos identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_1) \to (X, \mathcal{U}_2)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$.

Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin $\mathcal{U}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{U}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{U}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{U}_1$. Sanotaan, että kahta uniformiteettia $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{U}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$. Uniformiteeteille $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos $\mathcal{U}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$.

Korollaari 3.15. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X ja $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Tällöin uniformiteetin $\mathcal{U}_1$ indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin $\mathcal{U}_2$ indusoima topologia.*

Lause 3.17. *Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$, $i \in I$. Tällöin joukko*

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille $\mathcal{U}$.

Todistus. Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$. Olkoon lisäksi kuvaukset f_i ja g_i ja joukko B kuten yllä. Selvitetään, onko joukko B uniformiteetin kanta käymällä läpi kantalauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot $U_1, U_2 \in B$. Tällöin on olemassa äärelliset osajoukot $J_1, J_2 \subset I$ ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$ kaikilla $i \in J_1$ ja $V_j \in \mathcal{U}_j$ kaikilla $j \in J_2$, joilla

$$U_1 = \bigcap_{i \in J_1} g_i^{\leftarrow}(V_i) \quad \text{ja} \quad U_2 = \bigcap_{j \in J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j).$$

Yhdiste $J_1 \cup J_2$ on äärellinen indeksijoukon I osajoukko, joten

$$U_3 = \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j) \in B$$

ja erityisesti $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(B2) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Jokaisella $V_i \in \mathcal{U}_i$ pätee $\{(y_i, y_i) \mid y_i \in Y_i\} \subset V_i$ ja näin ollen myös jokaisella $g_i^{\leftarrow}(V_i)$ pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset g_i^{\leftarrow}(V_i)$. Siis pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset U$, koska U on leikkaus joukoista $g_i^{\leftarrow}(V_i)$.

(B3) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Uniformiteetin määritelmän ehdon (U4) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin $V_i^{-1} \in \mathcal{U}_i$. Näin ollen

$$U^{-1} = \bigcap_{i \in J} (g_i^{\leftarrow}(V_i))^{-1} = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i^{-1}) \in B,$$

jolloin vaadittu ehto pätee muodossa $U^{-1} \subset U^{-1}$.

(B4) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Uniformiteetin määritelmän ehdon (U5) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin on olemassa sellainen $W_i \in \mathcal{U}_i$, jolla $W_i^2 \subset V_i$. Olkoon

$$A = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i),$$

jolloin $A \in B$ ja näin ollen riittää osoittaa, että $A^2 \subset U$. Määritelmän mukaan $A^2 = \{(x, z) \mid (x, y) \in A \text{ ja } (y, z) \in A\}$. Siis alkioilla $x, z \in X$ pätee $(x, z) \in A^2$ täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $y \in X$, jolla $(x, y) \in A$ ja $(y, z) \in A$. Toisaalta jos $(x, y) \in A$ ja $(y, z) \in A$ niin $(x, y) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ ja $(y, z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ jokaisella $i \in J$. Tällöin $g_i(x, y) \in W_i$ ja $g_i(y, z) \in W_i$, joten $g_i(x, z) \in W_i^2$. Näin ollen $(x, z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i^2)$ jokaisella $i \in J$, joten

$$(x, z) \in \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i^2) \subset \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) = U.$$

Näin ollen $A^2 \subset U$.

Siis joukko B on joukon X erään uniformiteetin kanta. □

Määritelmä 3.18. *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformity). Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$ ja $i \in I$. Tällöin joukko

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoiman uniformiteetin kanta. (Vrt. edellinen lause.)

Korollaari 3.19. *Olkoon X joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$. Tällöin kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoima uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat tasaisesti jatkuvia.* $\square$

Määritelmä 3.20. *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X. Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti $\mathcal{U}$, joka on kuvausten $id \colon X \to (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta teoksesta General Topology part 2 [2] luvusta IX.

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(P1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$,

(P2) $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(P3) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Huomautus 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

(M1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kaikilla $x, y \in X$.

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g\colon X \to \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kaavalla $f(x,y) = |g(x) - g(y)|$ määritelty kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kaavalla $f(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ määritelty kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ määrittelee pseudometriikan joukolle X.

Huomautus 4.7. Määritelmän 4.1 ehdon (P3) nojalla epäyhtälöstä $f(x,z) + f(z,y) < \infty$ seuraa $f(x,y) < \infty$. Näin ollen epäyhtälöistä

$$f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z) \text{ ja } f(y,z) \leq f(y,x) + f(x,z)$$

seuraa epäyhtälö $|f(x,z) - f(z,y)| \leq f(x,y)$.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka joukolle X ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus λf, jolla $(\lambda f)(x,y) = \lambda(f(x,y))$ kaikilla $(x,y) \in X \times X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], \quad f(x,y) = \sum_{i \in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ epäyhtälöstä $f_i(x,y) \leq f_i(x,z) + f_i(z,y)$ seuraa epäyhtälö

$$\sup_{i \in I} f_i(x,y) \leq \sup_{i \in I} \left(f_i(x,z) + f_i(z,y) \right).$$

Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ missä

$$f(x,y) = \sup_{i \in I} f_i(x,y) \quad \text{kaikilla } x, y \in X$$

on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittelemä uniformiteetti

Lause 5.1. *Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko, joka on määritelty kaavalla*

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ erään uniformiteetin kannan.

Todistus. Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in [0, \infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin kaavasta $|x - y| \leq a_1$ seuraa $|x - y| \leq a_2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in [0, \infty]$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,

(B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in [0, \infty]$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a =& \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $(x, z), (z, y) \in U_a$, eli $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \overset{\triangle\text{−ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x-y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0,\infty]$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0,\infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan. $\square$

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 5.2. *Olkoon X joukko ja f pseudometriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikka f määrittelee sellaisen uniformiteetin joukolle X, jonka kannan muodostaa kokoelma*

$$B = \{f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in [0,\infty]\}.$$

Todistus. Olkoon $a \in [0,\infty]$ luku. Näin ollen $f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X$ on joukko. Merkitään $U_a = f^{\leftarrow}[0,a]$ ja käydään läpi lauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot $a_1, a_2 \in [0,\infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin pätee

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0,a] \subset f^{\leftarrow}[0,b] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan määritelmän 4.1 ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x,x) = 0$. Toisin sanoen pistepareista (x,x) muodostuvan joukon $\{(x,x) \mid x \in X\}$ jokainen alkio kuvautuu pseudometriikassa nollaksi. Näin ollen joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ sisältyy jokaisen suljetun välin $[0,a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0,a]$ kaikilla $a \in [0,\infty]$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x,y) = f(y,x)$ kaikilla $x,y \in X$. Tällöin $(x,y) \in U_a \Leftrightarrow (y,x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in [0,\infty]$ luku ja $x,y,z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $(x,z),(z,y) \in U_a$, eli $f(x,z) \leq a$ ja $f(z,y) \leq a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x,y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0,\infty]$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0,\infty]\} = \{f^{\leftarrow}[0,a] \mid a \in [0,\infty]\}$ muodostaa joukon X uniformiteetin kannan. $\square$

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittelevät jotkut uniformiteetit joukolle X. Pseudometriikat f ja g ovat *ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

Korollaari 5.4. *Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in [0, \infty]$ on olemassa sellainen $b \in [0, \infty]$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$.*

Jos lisäksi jokaiselle $a \in [0, \infty]$ on olemassa $b \in [0, \infty]$, jolla $f(x, y) \leq b \Rightarrow g(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$, niin f ja g ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

Todistus. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan f määrittelemän uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_f = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}.$$

Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}$$

ja uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

$\Rightarrow$ Olkoon uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$ ja näin ollen määritelmän 3.14 mukaan identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan jokaiselle maalijoukon lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähtöjoukon lähistö $V \in \mathcal{U}_g$ niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(x, y) \in V'$ kaikilla $x, y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä voidaan edeltävä ehto muotoilla seuraavasti: Jokaisella $a \in [0, \infty]$ on olemassa $b \in [0, \infty]$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, eli $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle luvulle $a \in [0, \infty]$ on olemassa sellainen $b \in [0, \infty]$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$, eli $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, kaikilla $x, y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0, a']$ missä $a' \in [0, \infty]$ on olemassa uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0, b']$ missä $b' \in [0, \infty]$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b'] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a']$. Näin ollen identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva ja siten uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on uniformiteettia $\mathcal{U}_f$ hienompi. Siis pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$.

Lisäksi määritelmistä 3.14 ja 5.3 seuraa, että jos $\mathcal{U}_f$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$, niin pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja. □

Määritelmä 5.5. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Pseudometriikkojen f_i määrittelemien uniformiteettien $\mathcal{U}_{f_i}$ perheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemäksi uniformiteetiksi.

Määritelmä 5.6. Olkoon X joukko ja olkoot $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ joukon X pseudometriikkaperheitä. Perheet (f_i) ja (g_j) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit ovat samoja.

Määritelmä 5.7. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon $H \subset I$ äärellinen joukko ja $g_H \colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla $g_H(x,y) = \sup_{i\in H} f_i(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$. Kuvaus g_H on pseudometriikka (esimerkki 4.10) ja siten voidaan muodostaa pseudometriikkaperhe $(g_H) := (g_H)_{H\subset I \text{ äärellinen}}$. Näin muodostettu pseudometriikkaperhe (g_H) on *saturoitu* (saturated) ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$.

Lause 5.8. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon (g_H) pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla $(f_i)_{i\in I}$. Saturoidusta pseudometriikkaperheestä (g_H) otetun äärellisen osaperheen $(g_A) := \{g_{A_1}, g_{A_2}, \ldots, g_{A_n}\} \subset (g_H)$ pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen (g_H).*

Todistus. Saturoidun pseudometriikkaperheen (g_H) äärellisen osaperheen (g_A) jäsenet ovat kuvauksia, joilla $g_{A_j}(x,y) = \sup_{i\in A_j} f_i(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen osaperheen (g_A) pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} g_{A_j}$ on kuvaus, jolla

$$\sup_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} g_{A_j}(x,y) = \sup_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} \left(\sup_{i\in A_j} f_i(x,y) \right) = \sup_{\substack{j\in\{1,2,\ldots,n\} \\ i\in A_j}} f_i(x,y) = \sup_{i\in\bigcup_{j=1}^n A_j} f_i(x,y).$$

Joukko $\bigcup_{j=1}^n A_j \subset I$ on äärellisten joukkojen yhdisteenä äärellinen ja siten osaperheen (g_A) pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\ldots,n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen (g_H). □

Lause 5.9. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon (g_H) pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$. Tällöin perhe (g_H) on ekvivalentti perheen $(f_i)_{i\in I}$ kanssa.*

Todistus. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienin yläraja $\sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i}$, eli pienin uniformiteetti, joka sisältää $\mathcal{U}_{f_i}$ kaikilla $i \in I$. Vastaavasti pseudometriikkaperheen (g_H) määrittelemä uniformiteetti on $\sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H}$.

Pseudometriikkaperheet $(f_i)_{i\in I}$ ja (g_H) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit $\mathcal{U}_f := \sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i}$ ja $\mathcal{U}_g := \sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H}$ ovat samoja.

Määritelmän 5.7 nojalla jokaiselle pseudometriikalle $f_j \in (f_i)_{i\in I}$ löytyy pseudometriikka $g_{\{j\}} \in (g_H)$ niin, että $g_{\{j\}}(x,y) = \sup_{i\in\{j\}} f_i(x,y) = f_j(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$. Siis $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}_g$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{U}_{g_{H'}} \subset \mathcal{U}_f$ jokaisella äärellisellä osajoukolla $H' \subset I$.

Kesken. $\square$

Korollaari 5.10. *Jokaiselle pseudometriikkaperheelle löytyy aina ekvivalentti saturoitu pseudometriikkaperhe ja näin ollen pseudometriikkaperheen voidaan olettaa olevan saturoitu.* $\square$

Lause 5.11. *Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon lisäksi $g\colon X\times X \to [0,\infty]$, $g(x,y) = \sup_{i\in I} f_i(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$ joukon X pseudometriikka. Mikäli indeksijoukko I on äärellinen on perheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti sama kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti.*

Todistus. Olkoon X joukko, I äärellinen indeksijoukko, $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe ja $g\colon X\times X \to [0,\infty]$, $g(x,y) = \sup_{i\in I} f_i(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$ joukon X pseudometriikka. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienin yläraja $\mathcal{U}_f$, jonka kanta on joukko

$$B_f = \left\{ \bigcap_{i\in J} V_i \mid J \subset I, V_i \in \mathcal{U}_{f_i} \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

ja siis $\mathcal{U}_f = \{W \subset X\times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_f\}$. Indeksijoukko I on äärellinen, joten jokaiselle alkioparille $(x,y) \in X\times X$ löytyy indeksi $i_{(x,y)} \in I$ niin, että $f_i(x,y) \le f_{i_{(x,y)}}(x,y)$ kaikilla $i \in I$. Näin ollen jokaisella $a \in [0,\infty]$ pätee

$$g^{\leftarrow}[0,a] = \{(x,y) \subset X\times X \mid f_i(x,y) \le a \text{ kaikilla } i \in I\} = \bigcap_{i\in I} f_i^{\leftarrow}[0,a].$$

Pseudometriikan g määräämän uniformiteetin kanta on siis

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in [0,\infty]\} = \left\{ \bigcap_{i \in I} f_i^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in [0,\infty] \right\}.$$

Lauseen 5.2 nojalla jokaisella $i \in I$ alkukuvat $f_i^{\leftarrow}[0,a]$, $a \in [0,\infty]$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}_{f_i}$. Erityisesti jokaiselle $V_i \in \mathcal{U}_{f_i}$ löytyy $a \in [0,\infty]$, jolla $f_i^{\leftarrow}[0,a] \subset V_i$. Näin ollen kannan B_g määrittelemälle uniformiteetille $\mathcal{U}_g$ pätee

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_g =& \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_g\} \\
=& \left\{ W \subset X \times X \mid \bigcap_{i \in I} f_i^{\leftarrow}[0,a] \subset W \text{ jollain } a \in [0,\infty] \right\} \\
=& \left\{ W \subset X \times X \mid \bigcap_{i \in I} V_i \subset W \text{ jollain } V_i \in \mathcal{U}_i, i \in I \right\} \\
=& \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_f\} \\
=& \mathcal{U}_f.
\end{aligned}$$

Siis $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g$. □

Korollaari 5.12. *Olkoon uniformiteetit $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}'$ saturoitujen perheiden $(f_i)_{i \in I}$ ja $(g_j)_{j \in J}$ määräämiä. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}'$, jos jokaisella $i \in I$ ja $a \in [0,\infty]$ löytyy $j \in J$ ja $b \in [0,\infty]$, joilla ehdosta $g_j(x,y) \leq b$ seuraa $f_i(x,y) \leq a$. Vastaavasti tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}'$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}$.* □

Lemma 5.13. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i \in I}$, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$.*

Todistus. Jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ määritellään karteesisen tulon $X \times X$ osajoukoista muodostuva perhe $B_V = (U_n)$, jolla $U_1 \subset V$ ja $U_{n+1}^2 \subset U_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Nyt B_V on kanta eräälle joukon X uniformiteetille $\mathcal{U}_V$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{U}$. Erityisesti $\mathcal{U}$ on uniformiteettien $\mathcal{U}_V, V \in \mathcal{U}$ pienin yläraja. Näin ollen kantojen leikkaus

$$\left\{ \bigcap_{V \in H} U_V \mid H \subset \mathcal{U} \text{ äärellinen }, U_V \in B_V \right\}$$

on numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin lemma on seuraus lauseesta 5.14.
Kesken: Onko $\mathcal{U}$:n mahtavuudella vaikutusta? □

Lause 5.14. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Jos uniformiteetilla $\mathcal{U}$ on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka $f\colon X \times X \to [0,\infty]$, jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanssa.*

Todistus. Olkoon (V_n) numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin olkoon (U_n) perhe symmetrisiä uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöjä, joilla $U_1 \subset V_1$ ja $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$. Nyt (U_n) on myös uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta ja erityisesti $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$.

Olkoon $g\colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \geq 1, \\ 1 & \text{, jos } (x,y) \notin U_1, \\ 2^{-k} & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \leq k \text{ ja } (x,y) \notin U_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt g on symmetrinen, positiivinen ja $g(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $f\colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ ja $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$ joukon X alkioista muodostuva jono, jossa $z_0 = x$ ja $z_p = y$. Kuvauksen f määrittelystä seuraa, että f on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat $f(x,y) \geq 0$ ja $f(x,x) = 0$ pätevät kaikilla $x, y \in X$. Siis f on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y) \tag{5.15}$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli $f(x,y) \leq g(x,y)$ seuraa siitä, että

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{1} g(z_i, z_{i+1}) = g(z_0, z_1) = g(x,y).$$

Kaavan 5.15 vasen puoli, eli $\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y)$ osoitetaan induktion avulla. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Nyt jokaisella $p+1$ alkion jonolla joukon X alkioita $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$, jolla $z_0 = x$ ja $z_p = y$, saadaan induktio-oletukseksi

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x,y). \tag{5.16}$$

Jos $p = 1$, niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x, y) \geq \frac{1}{2}\, g(x, y).$$

Merkitään

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}), \tag{5.17}$$

jolloin induktio-oletus voidaan kirjoittaa muodossa $a \geq \frac{1}{2} g(x, y)$. Määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 1$, joten jos $a \geq 1/2$, niin yhtälö 5.16 pätee muodossa $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} g(x, y)$. Oletetaan, että $a < 1/2$ ja että h on suurin niistä indekseistä q, joilla $\sum_{i<q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Tällöin

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja lisäksi} \quad \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2,$$

sillä $\sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$. Edeltävien kaavojen ja induktio-oletuksen nojalla (sijoituksella $p = h$) pätee

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x, z_h),$$

eli $g(x, z_h) \leq a$. Toisaalta yllä olevien kaavojen nojalla pätee myös

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(z_{h+1}, y),$$

eli $g(z_{h+1}, y) \leq a$. Toisaalta luvun a määrittelyn nojalla $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $2^{-k} \leq a$. Tällöin oletuksesta $a < 1/2$ seuraa $k \geq 2$ ja kuvauksen g määrittelystä seuraa, että $(x, z_h) \in U_k$, $(z_h, z_{h+1}) \in U_k$ ja $(z_{h+1}, y) \in U_k$. Nyt $(x, y) \in U_k^3$ ja lähistöperheen (U_n) määrittelyn nojalla $(x, y) \in U_{k-1}$. Kuvauksen g määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$, eli $\frac{1}{2} g(x, y) \leq a$.

Näin ollen kaavan 5.15 epäyhtälöt pätevät ja niistä seuraa, että jokaisella $a > 0$ pätee $U_k \subset f^{\leftarrow}([0, a])$, kun $2^{-k} < a$. Toisaalta myös $f^{\leftarrow}([0, a]) \subset U_k$, joten joukot $f^{\leftarrow}([0, a])$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}$. Siis löydettiin pseudometriikka f, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$. $\square$

Luku 6

Täydellinen uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään täydellinen uniforminen avaruus minimaalisten Cauchy-filtterien avulla.

Sellaiselle joukolle, jolle on määritelty uniformiteetti voidaan määritellä uniformiteetin lähistöjen suhteen *tarpeeksi pienet* osajoukot. Osajoukko on lähistön suhteen tarpeeksi pieni silloin, kun kaikki osajoukon alkiot ovat tarpeeksi lähellä toisiaan kyseisen lähistön suhteen (huomautus 3.2). Näin saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 6.1. Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Osajoukko $A \subset X$ on $V-$*pieni*, jos jokaisella pisteparilla $x, y \in A$ pätee $(x, y) \in V$, eli jos $A \times A \subset V$.

Lause 6.2. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon lisäksi $A \subset X$ ja $B \subset X$ $V-$pieniä osajoukkoja, joiden leikkaus on epätyhjä. Tällöin yhdiste $A \cup B$ on V^2-pieni.*

Todistus. Olkoot $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in A \cap B$ alkioita. Tällöin alkioparit (x, z) ja (z, y) kuuluvat lähistöön V ja näin ollen alkiopari (x, y) kuuluu joukkoon V^2. $\square$

Määritelmä 6.3. *Filtteri.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ potenssijoukon epätyhjä osajoukko. Joukko $\mathcal{F}$ on *filtteri* joukolle X, jos sille pätee uniformiteetin ehtojen (U1) ja (U2) lisäksi seuraava ehto:

(F) Joukko $\mathcal{F}$ on epätyhjä eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon $\mathcal{F}$.

Määritelmä 6.4. *Filtterin kanta.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filtteri joukossa X. Tällöin joukko $B \subset \mathcal{F}$ on filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos jokaiselle filtterin alkiolle $V \in \mathcal{F}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 6.5. *Olkoon X uniforminen avaruus. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X)$ on erään filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos ehdon (F) lisäksi pätee ehto:*

(B_F) Jos $A_1, A_2 \in B$, niin on olemassa sellainen $A_3 \in B$, jolla $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

Todistus. Olkoon X uniforminen avaruus ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ sellainen joukko, jolle pätevät ehdot (F) ja (B_F).

Tällöin olkoon

$$\mathcal{F}_B = \{W \subset X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{F}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{F}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että $\mathcal{F}_B$ on filtteri. Käydään läpi filtterin määritelmän 6.3 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{F}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{F}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W \subset W' \subset X$ niin $W' \in \mathcal{F}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W' \in \mathcal{F}_B$ joukkoja. Joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon ($B_F$) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}_B$. Lisäksi joukoiksi W ja W' voidaan valita mielivaltaisia kokoelman $\mathcal{F}_B$ alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{F}_B$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{F}_B$.

(F) Ehto (F) pätee joukolle B, joten joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelyn nojalla $\mathcal{F}_B$ ei ole tyhjä joukko eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon $\mathcal{F}_B$.

□

Määritelmä 6.6. *Filttereiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Filtteri $\mathcal{F}_2$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}_1$, jos $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Tällöin $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{F}_2$. Jos lisäksi pätee $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, niin $\mathcal{F}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{F}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{F}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{F}_1$.

Sanotaan, että kahta filtteriä $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{F}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

Filtterit $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ ovat samoja, eli $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, jos $\mathcal{F}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

Lause 6.7. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Olkoon lisäksi B_1 kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja B_2 kanta filtterille $\mathcal{F}_2$. Tällöin filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$ jos ja vain jos jokaiselle $A_2 \in B_2$ löytyy sellainen $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$.*

Todistus. Olkoon X joukko, $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X, B_1 kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja B_2 kanta filtterille $\mathcal{F}_2$.

- $\Rightarrow$ Olkoon filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$, eli $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Olkoon $A_2 \in B_2$ alkio. Tällöin pätee $A_2 \in \mathcal{F}_1$, sillä $B_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Näin ollen filtterin kannan määritelmän nojalla alkiolle $A_2 \in \mathcal{F}_1$ löytyy kannan B_1 alkio A_1, jolla $A_1 \subset A_2$.

- $\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle $A_2' \in B_2$ löytyy sellainen $A_1' \in B_1$, jolla $A_1' \subset A_2'$. Olkoon $V \in \mathcal{F}_2$ alkio. Tällöin filtterin määritelmän nojalla löytyy $A_2 \in B_2$, jolla $A_2 \subset V$. Toisaalta oletuksen nojalla löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$. Siis alkiolle V löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset V$. Toisaalta $B_1 \subset \mathcal{F}_1$, joten $A_1 \in \mathcal{F}_1$.

  Siis alkiolle $V \in \mathcal{F}_2$ löytyy alkio $A_1 \in \mathcal{F}_1$, jolla $A_1 \subset V$. Näin ollen ehdon (U1) nojalla $V \in \mathcal{F}_1$ ja edelleen $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Siis filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$.

$\square$

Määritelmä 6.8. Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Olkoon lisäksi B_1 kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja B_2 kanta filtterille $\mathcal{F}_2$. Kannat B_1 ja B_2 ovat *ekvivalentteja*, jos filtterit $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ ovat samoja.

Määritelmä 6.9. Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $\mathcal{F}$ filtteri joukossa X. Filtteriä $\mathcal{F}$ sanotaan *Cauchy*-filtteriksi, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy osajoukko $A \subset X$, joka on $V-$pieni ja kuuluu filtteriin $\mathcal{F}$.

Cauchy-filtterit sisältävät siis mielivaltaisen pieniä joukkoja.

Lause 6.10. *Topologisessa avaruudessa osajoukon (vastaavasti alkion) kaikkien ympäristöjen joukko on filtteri, jota sanotaan ympäristöfiltteriksi.* $\square$

Määritelmä 6.11. *Filtterin raja-arvo.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{F}$ filtteri joukossa X. Alkio $x \in X$ on filtterin $\mathcal{F}$ *raja-arvo*, jos filtteri $\mathcal{F}$ on hienompi kuin alkion x ympäristöfiltteri. Sanomme, että filtteri $\mathcal{F}$ *suppenee* (converge) kohti alkiota x.

Lisäksi, jos B on filtterin $\mathcal{F}$ kanta ja alkio x on filtterin $\mathcal{F}$ raja-arvo, niin alkio x on myös kannan B raja-arvo ja kanta B suppenee kohti alkiota x.

Lause 6.12. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, $x \in X$ alkio ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ erään filtterin kanta. Kanta B suppenee kohti alkiota x, jos ja vain jos jokainen alkion x ympäristö sisältää jonkin kannan B jäsenen.* $\square$

Uniformeissa avaruuksissa Cauchy-filttereillä ei välttämättä ole raja-arvoa.

Määritelmä 6.13. Uniforminen avaruus on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-filtteri suppenee.

Lause 6.14. *Uniformisessa avaruudessa jokainen suppeneva filtteri on Cauchy-filtteri.*

Todistus. Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus, $\mathcal{F}$ suppeneva filtteri joukossa X ja $x \in X$ sellainen alkio, jota kohti $\mathcal{F}$ suppenee. Tällöin alkion x ympäristöfiltteri $B(x)$ sisältyy filtteriin $\mathcal{F}$. Näin ollen jokaisella lähistöllä $V' \in \mathcal{U}$ pätee $V'(x) \in \mathcal{F}$.

Olkoon nyt $V \in \mathcal{U}$ lähistö ja $x \in X$ alkio. Huomautuksen 3.3 ehdon (Ua) nojalla on olemassa sellainen lähistö $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^{-1} \circ W \subset V$. Huomataan, että joukko

$$W(x) \times W(x) = \{(y_1, y_2) \mid (x, y_1) \in W, (x, y_2) \in W\}$$

sisältyy joukkoon

$$W^{-1} \circ W = \{(y_1, y_2) \mid \text{on olemassa } x', \text{ jolla } (y_1, x') \in W^{-1}, (x', y_2) \in W\}.$$

Siis lähistölle V löydettiin osajoukko $W(x) \subset X$, jolla $W(x) \times W(x) \subset W^{-1} \circ W \subset V$ ja $W(x) \in \mathcal{F}$. Määritelmän 6.9 nojalla $\mathcal{F}$ on Cauchy-filtteri. $\square$

Lause 6.15. Minimaalinen Cauchy-filtteri. *Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus. Jokaiselle joukon X Cauchy-filtterille $\mathcal{F}$ on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchy-filtteri $\mathcal{F}_0$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{F}$, eli $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Jos B on kanta filtterille $\mathcal{F}$ ja G on uniformiteetin $\mathcal{U}$ symmetristen lähistöjen kanta, niin kokoelma $B_0 = \{V(M) \mid M \in B, V \in G\}$ missä $V(M) = \{y \mid (x, y) \in V, x \in M\}$ on filtterin $\mathcal{F}$ minimaalisen Cauchy-filtterin $\mathcal{F}_0$ kanta.*

Todistus. Tarkistetaan kannan ehdot joukolle B_0:

1. Olkoot $V_1(M_1), V_2(M_2) \in B_0$ joukkoja. Nyt $M_1, M_2 \in B$, joten on olemassa joukko $M_3 \in B$, jolla pätee $M_3 \subset M_1 \cap M_2$. Toisaalta $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, joten on olemassa joukko $V_3 \in \mathcal{U}$, jolla pätee $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Näin ollen joukko $V_3(M_3) = \{y \mid (x, y) \in V_3, x \in M_3\}$ on joukon $(V_1 \cap V_2)(M_1 \cap M_2) = V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$ osajoukko, eli $V_3(M_3) \subset V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$.

2. Olkoon $M \in B$ joukko ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Tällöin joukko M on epätyhjä, joten myös joukko $V(M)$ on epätyhjä. Näin ollen tyhjä joukko ei ole joukon B_0 alkio.

Jokaisella $M \in B$ ja $V \in \mathcal{U}$ pätee $M \subset V(M)$, joten erityisesti jokaiselle $V(M) \in B_0$ löytyy sellainen $M \in B$, jolla $M \subset V(M)$. Näin ollen lauseen 6.7 nojalla minimaalinen Cauchy-filtteri $\mathcal{F}_0$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}$. $\square$

Luku 7

Täysin säännölliset avaruudet

Tässä luvussa esitellään uniformisoituva (uniformizable) topologinen avaruus ja annetaan tätä karakterisoiva ehto.

Määritelmä 7.1. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Olkoon lisäksi $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoima topologia joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *yhteensopiva* topologian $\mathcal{T}$ kanssa, jos topologiat $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ja $\mathcal{T}$ ovat samoja.

Määritelmä 7.2. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *uniformisoituva*, jos joukolle X voidaan muodostaa topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti.

Lause 7.3. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Avaruuden $(X, \mathcal{T})$ uniformisoituvuus on yhtäpitävää seuraavan ehdon kanssa:*

(Z) Kaikkien alkioiden $x \in X$ kaikilla ympäristöillä $V \subset X$ on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus $f \colon X \to [0,1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V$.

Todistus. Näytetään ensin, että ehto on välttämätön. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ uniformisoituva topologinen avaruus, x_0 alkio ja V_0 alkion x_0 ympäristö. Olkoon $\mathcal{U}$ topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Lauseen 5.13 nojalla uniformiteetille $\mathcal{U}$ voidaan määritellä pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i \in I}$, joka indusoi uniformiteetin $\mathcal{U}$. Lisäksi korollaarin 5.10 nojalla voidaan olettaa pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i \in I}$ olevan saturoitu. Tällöin määritelmän 5.2 nojalla on olemassa $a \in [0, \infty]$, $\alpha \in I$ ja pseudometriikka $f_\alpha \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_\alpha(x_0, x_0) = 0$ ja $f_\alpha(x_0, x) \geq a$ kaikilla $x \in X \setminus V_0$. Tämän seurauksena kuvaus $g \colon X \to [0,1]$ kaavalla $g(x) = \inf\left(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x)\right)$ pisteelle x_0 ja ympäristölle V_0 toteuttaa ehdon (Z).

Toisaalta ehto on myös riittävä: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, jolla ehto (Z) pätee. Olkoon $x_0 \in X$ alkio, $V_0 \subset X$ alkion x_0 ympäristö ja $f \colon X \to [0,1]$ ehdon (Z) antama kuvaus alkiolle x_0 ja sen ympäristölle V_0. Tällöin kuvaus $g \colon X \times X \to [0, \infty]$ kaavalla $g(x_0, x) = f(x)$ on pseudometriikka. Olkoon $\mathcal{U}$ pseudometriikan g määräämä uniformiteetti ja $a \in [0, \infty]$ luku. Tällöin $g^{\leftarrow}[0, a] = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq a\}$ on lähistö pseudometriikan g määräämässä uniformiteetissa $\mathcal{U}$. Merkitään $g^{\leftarrow}[0, a] = U_a$, jolloin joukko $U_a(x_0) = \{y \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristö uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoimassa topologiassa $\mathcal{T}'$. Joukkojen määrittelyistä seuraa, että jos $a < 1$, niin $U_a(x) \subset V_0$ ja tällöin kokoelma $B = \{U_a(x_0) \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristökanta topologiassa $\mathcal{T}$.

Siis avaruus $(X, \mathcal{T})$, joka toteuttaa ehdon (Z) on uniformisoituva. □

Määritelmä 7.4. Topologinen avaruus on *Hausdorff*, jos jokaisella pisteellä on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 7.5. Topologinen avaruus X on *säännöllinen* (regular), jos jokaisella suljetulla joukolla $A \subset X$ ja jokaisella pisteellä $x \in X, x \notin A$ on erilliset ympäristöt.

Määritelmä 7.6. Topologinen avaruus on *täysin säännöllinen* (completely regular), jos se on uniformisoituva ja Hausdorff.

Lause 7.7. *Täysin säännöllisen avaruuden aliavaruus on täysin säännöllinen.*

Todistus. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen avaruus ja $A \subset X$ aliavaruus. Olkoon lisäksi $V \subset A$ avoin osajoukko ja $x \in V$ alkio. Nyt $V = B \cap U$ jollain avoimella osajoukolla $U \subset X$. Lauseen 7.3 ominaisuuden (Z) nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $f \colon X \to [0, 1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus U$. Näin ollen kuvauksen f rajoittuma $f|_A \colon A \to [0, 1]$, $f|_A(a) = f(a)$ kaikilla $a \in A$ on ominaisuuden (Z) mukainen jatkuva kuvaus pisteelle $x \in A$ ja pisteen x ympäristölle $V \subset A$. Siis A on täysin säännöllinen. □

Merkitään $I = [0, 1]$.

Sopimus 7.8. Oletetaan, että X on topologinen avaruus. Merkitään kaikkien jatkuvien kuvausten $f \colon X \to I$ joukkoa symbolilla I^X. Tällöin $(I_f)_{f \in I^X}$ on yksikkövälien perhe, joka on indeksoitu joukolla I^X. Merkitään yksikkövälien perheen $(I_f)_{f \in I^X}$ tuloa

$$P^X = \prod_{f \in I^X} I_f = \left\{ \prod_{f \in I^X} \{t_f\} \mid t_f \in I \text{ kaikilla } f \in I^X \right\}.$$

Käytämme koko luvun ajan joukon P^X alkioista merkintää $\{t_f\}$ tarkoittamaan alkiota $\prod_{f \in I^X} \{t_f\}$, jossa $t_f \in I$ kaikilla $f \in I^X$.

Lause 7.9. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Tällöin X voidaan upottaa yksikkövälien tuloon P^X. Erityisesti kaavalla $\rho(x) = \{f(x)_f\}$, $x \in X$ määritelty kuvaus $\rho \colon X \to \rho X \subset P^X$ on homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho\colon X \to \rho X \subset P^X$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $\rho(x) = \{f(x)_f\}$ kaikilla $x \in X$. Kuvaus ρ on homeomorfismi, jos se on injektiivinen, jatkuva ja avoin kuvaus.

Ensinnäkin kuvaus ρ on injektio: Olkoon $x, y \in X, x \neq y$. Avaruus X on Hausdorff, joten pisteellä x on sellainen ympäristö $A \subset X$, johon alkio y ei kuulu. Avaruus X on täysin säännöllinen, joten on olemassa sellainen kuvaus $f \in I^X$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(z) = 1$ kaikilla $z \in X \setminus A$. Erityisesti $f(y) = 1 \neq 0 = f(x)$ ja näin ollen $\rho(x) \neq \rho(y)$.

Toiseksi kuvaus ρ on projektiokuvausten $(P_f \circ \rho)(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$ ja $f \in I^X$ yhdisteenä jatkuva.

Viimeiseksi kuvaus ρ on avoin: Avointen joukkojen perhe

$$(U_f)_{f \in I^X} = \{f^{\leftarrow}[0,1[\subset X \mid f \in I^X\}$$

muodostaa ympäristökannan: Avoimelle osajoukolle $U \subset X$ ja sen alkiolle $x \in U$ on olemassa kuvaus $f_1 \in I^X$, jolla $f_1(x) = 0$ ja $f_1(y) = 1, y \in X \setminus U$. Nyt $V = f_1^{\leftarrow}[0,1[\subset X$ on avoin, $V \in (U_f)_{f \in I^X}$ ja $V \subset U$. Näin ollen avoimelle osajoukolle $U \subset X$ löydettiin joukko $V \in (U_f)_{f \in I^X}$, jolla $V \subset U$. Perhe $(U_f)_{f \in I^X}$ on siis ympäristökanta. Ympäristökannan jäsenen $V_{f_0} \in (U_f)_{f \in I^X}$ kuva

$$\rho V_{f_0} = \{\{t_f\} \mid t_{f_0} < 1\} \cap \rho X$$

on avoin joukossa ρX ja näin ollen kuvaus ρ on avoin. $\square$

Lemma 7.10. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $\rho\colon X \to P^X$ kuvaus, joka on määritelty kaavalla $\rho(x) = \{f(x)\}$ kaikilla $x \in X$. Olkoon lisäksi Y topologialla varustettu joukko ja $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $g\colon \rho X \to Y$, jolla $h(x) = (g \circ \rho)(x)$ kaikilla $x \in X$.* $\square$

Lause 7.11. *Olkoot X ja Y täysin säännöllisiä avaruuksia ja $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa jatkuva kuvaus $H\colon P^X \to P^Y$ niin, että oheinen kaavio kommutoi.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[d, "\rho_1"] \\ P^X \arrow[r, "H"'] & P^Y \end{tikzcd}$$

Erityisesti $H|_{\overline{\rho X}}\colon \overline{\rho X} \to \overline{\rho_1 Y}$.

Todistus. Olkoot X ja Y täysin säännöllisiä avaruuksia ja $h\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Olkoon $g \in I^Y$ kuvaus. Tällöin $(g \circ h) \in I^X$ ja kaavalla $h_g(\{t_f\}) = t_{g \circ h}$voidaan määritellä kuvaus $h_g\colon P^X \to I_g$. Nyt h_g on projektiokuvaus, joka samaistaa yksikkövälit I_g ja $I_{g\circ h}$. Kuvaus h_g on jatkuva, joten kaavalla

$$H(\{t_f\}) = \{h_g(\{t_f\})\}, \quad \{t_f\} \in P^X$$

voidaan muodostaa jatkuva kuvaus $H\colon P^X \to P^Y$. Nyt kuvauksen H määrittelyn nojalla pätee

$$(H \circ \rho)(x) = (H(\rho(x)) = H(\{f(x)\}) = \{h_g(\{f(x)\})\} = \{((g \circ h)(x))_g\}$$

ja lauseen 7.9 nojalla

$$(\rho_1 \circ h)(x) = \rho_1(h(x)) = \{g(h(x))_g\} = \{((g \circ h)(x))_g\}.$$

Näin ollen annettu kaavio kommutoi.

Kaavion kommutoinnin nojalla $H(\rho X) \subset \rho_1 Y$ ja näin ollen $\overline{H(\rho X)} \subset \overline{\rho_1 Y}$. Kuvauksen H jatkuvuuden nojalla $H(\overline{\rho X}) \subset \overline{H(\rho X)}$. Nyt $H(\overline{\rho X}) \subset \overline{\rho_1 Y}$ ja siis $H|_{\overline{\rho X}}\colon \overline{\rho X} \to \overline{\rho_1 Y}$. $\square$

Luku 8

Kompaktisointi

Määritelmä 8.1. Topologisen avaruuden X kompaktisointi on pari $(\hat{X}, h)$, jossa $\hat{X}$ on kompakti Hausdorff avaruus ja h on sellainen homeomorfismi $X \to h(X) \subset \hat{X}$, jolla $h(X)$ on tiheä avaruudessa $\hat{X}$, eli $\overline{h(X)} = \hat{X}$.

Huomautus 8.2. Usein samaistetaan avaruus X ja osajoukko $h(X) \subset \hat{X}$ ja sanotaan, että $\hat{X}$ on avaruuden X kompaktisointi.

Lemma 8.3. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Tällöin olkoon $\rho\colon X \to P^X$ lauseen 7.9 mukainen upotus missä P^X on yksikkövälien tulona kompakti. Erityisesti $\overline{\rho X}$ on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti. Merkitään $\beta X = \overline{\rho X}$ ja sanotaan, että pari $(\beta X, \rho)$ on avaruuden X* Stone-Čech kompaktisointi.

Lause 8.4. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Avaruuden X Stone-Čech kompaktisoinnille $(\beta X, \rho)$ pätee seuraava ominaisuus:*

- *Jokaiselle kompaktille Y ja jokaiselle jatkuvalle kuvaukselle $f\colon X \to Y$ on olemassa yksikäsitteinen jatkuva kuvaus $F\colon \beta X \to Y$ niin, että $f = F \circ \rho$.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus, Y kompakti avaruus ja $f\colon X \to Y$ jatkuva kuvaus. Tällöin lauseen 7.11 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $\phi\colon \beta X \to \beta Y$ niin, että oheinen kaavio kommutoi.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho"'] & Y \arrow[d, "\rho_1"] \\ \beta X \arrow[r, "\phi"'] & \beta Y \end{tikzcd}$$

Avaruus Y on kompakti, joten kuvaus $\rho_1\colon Y \to \beta Y$ on homeomorfismi. Näin ollen on olemassa jatkuva käänteiskuvaus $\rho_1^{-1}\colon \beta Y \to Y$. Voidaan nyt valita $F\colon \beta X \to Y$ asettamalla $F(a) = (\rho_1^{-1} \circ \phi)(a) = \rho_1^{-1}(\phi(a))$ kaikilla $a \in \beta X$. Nyt $f(x) = (F \circ \rho)(x)$ kaikilla $x \in X$. Lisäksi kompaktisoinnin määritelmän nojalla X on tiheä joukossa βX ja näin ollen kuvaus F on yksikäsitteinen. □

Lause 8.5. *Stone-Čech kompaktisoinnin yksikäsitteisyys. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus ja $(\hat{X}, h)$ sellainen avaruuden X kompaktisointi, jolla on lauseen 8.4 kuvaileva ominaisuus. Tällöin $\hat{X}$ ja Stone-Čech kompaktisointi βX ovat homeomorfisia.*

Todistus. Olkoon X täysin säännöllinen avaruus, $(\beta X, \rho)$ avaruuden X Stone-Čech kompaktisointi ja $(\hat{X}, h)$ sellainen avaruuden X kompaktisointi, jolla on lauseen 8.4 kuvaileva ominaisuus. Samaistetaan X, hX ja ρX, jolloin voidaan mieltää X joukkojen βX ja $\hat{X}$ osajoukoksi. Olkoon $i\colon X \to X$ identtinen kuvaus. Nyt lauseen 8.4 ominaisuuden nojalla kompaktisoinnille βX, kompaktille joukolle $\hat{X}$ ja kuvaukselle i on olemassa jatkuva kuvaus $F\colon \beta X \to \hat{X}$, jolla $F(x) = (F \circ \rho)(x) = i(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Vastaavasti on olemassa jatkuva kuvaus $G\colon \hat{X} \to \beta X$, jolla $G(x) = x$ kaikilla $x \in X$. Nyt kuvaukset $(F \circ G)|_X$ ja $(G \circ F)|_X$ ovat identtisiä kuvauksia. Lisäksi X on tiheä joukoissa βX ja $\hat{X}$, joten kuvaukset $F \circ G = 1_{\hat{X}}$ ja $G \circ F = 1_{\beta X}$ ovat identtisiä kuvauksia. Siis kuvaus F on homeomorfismi avaruuksien βX ja $\hat{X}$ välille. □

Lause 8.6. *Olkoon X täysin säännöllinen avaruus. Stone-Čech kompaktisointi βX on laajin kompaktisointi avaruudelle X: Jos $\hat{X}$ on avaruuden X kompaktisointi, niin $\hat{X}$ on avaruuden βX tekijäavaruus.*

Todistus. Lauseen 8.4 nojalla on olemassa jatkuva kuvaus $F\colon \beta X \to \hat{X}$, jolla $F(x) = x$ kaikilla $x \in X$. βX on kompakti, joten $F(\beta X)$ on suljettu joukko, joka sisältää tiheän osajoukon $X \subset \hat{X}$. Näin ollen $\overline{X} \subset F(\beta X) = \hat{X}$ ja siten kuvaus F on surjektio. Olkoon $\sim$ sellainen ekvivalenssirelaatio, jolla $a \sim a'$ jos ja vain jos $F(a) = F(a')$, kun $a, a' \in \beta X$. Nyt voidaan määritellä kuvaus $F_\sim\colon \beta X/\sim \to \hat{X}$, jolla $F_\sim([a]) = F(a)$. Kuvaus $F_\sim$ on injektio, sillä jos $x, y \in \beta X$ ja $[x] \neq [y]$ niin $F_\sim([x]) = F(x) \neq F(y) = F_\sim([y])$. Olkoon $\rho\colon \beta X \to \beta X/\sim$ projektiokuvaus, jolla $\rho(a) = [a]$ kaikilla $a \in \beta X$. Kuvaus F on jatkuva, ρ on projektiokuvauksena jatkuva ja $F = F_\sim \circ \rho$, joten $F_\sim$ on jatkuva.

(Puuttuu perustelu miksi $F_\sim$ on avoin.)

Tällöin kompaktisointi $\hat{X}$ on homeomorfinen tekijäavaruuden $\beta X/\sim$ kanssa. □

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.

[4] James Dugundji: Topology, 11. korjattu painos, Allyn and Bacon, 1976.