

HELSINGIN YLIOPISTO  
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA  
MATEMATIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

---

Pro gradu -tutkielma

# Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

---

Ohjaaja: Erik Elfving

19. maaliskuuta 2018

# Sisältö

1	Johdanto	2
2	Esitietoja	3
3	Uniformiset rakenteet	5
4	Pseudometriikat	12
5	Pseudometriikan määrittelemä uniformiteetti	14
6	Täydellinen uniforminen avaruus	22
7	Uniformisoituvat avaruudet	26
8	Hausdorff uniforminen avaruus	28
9	Kompakti uniforminen avaruus	30

Luku 1

Johdanto

# Luku 2

## Esitietoja

Käytämme koko tutkielman ajan merkintää  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ .

**Määritelmä 2.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $V$  ja  $W$  karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X, \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\},$$

$$W^2 = W \circ W \text{ ja } W^n = W \circ W^{n-1}.$$

**Määritelmä 2.2.** Topologisen avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  osajoukko  $A \subset X$  on avoin, jos se on kokoelman  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  alkio.

**Määritelmä 2.3.** Topologisen avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  osajoukko  $A \subset X$  on alkion  $x$  *ympäristö*, jos on olemassa sellainen avoin osajoukko  $B \subset X$ , jolla  $x \in B \subset A$ .

*Huomautus 2.4.* Topologisen avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  avoin osajoukko  $A \subset X$  on jokaisen alkionsa  $x \in A$  ympäristö.

**Määritelmä 2.5.** *Ympäristökanta.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus ja  $x \in X$  alkio. Kokoelma  $B(x)$  alkion  $x$  ympäristöjä on alkion  $x$  *ympäristökanta* (topologiassa  $\mathcal{T}$ ), jos jokainen alkion  $x$  ympäristö sisältää kokoelman  $B(x)$  jonkin jäsenen.

*Huomautus 2.6.* Topologisen avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  alkion  $x \in X$  kaikkien ympäristöjen kokoelma  $B(x)$  on alkion  $x$  ympäristökanta.

**Esimerkki 2.7.** Jos joukkoperhe  $B \subset \mathcal{P}(X)$  on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  kanta ja  $x \in X$  alkio, niin joukko  $B(x) = \{A \mid x \in A \in B\}$  on alkion  $x$  eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella alkiolla  $x \in X$  on annettu ympäristökanta  $B(x)$  avaruudessa  $(X, \mathcal{T})$ , niin kokoelma  $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$  on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  kanta.

**Lause 2.8.** *Olkoon  $A$  joukon  $X$  peite. Tällöin  $A$  on joukon  $X$  erään topologian  $\mathcal{T}$  esikanta. Lisäksi  $\mathcal{T}$  on karkein niistä joukon  $X$  topologioista, joilla  $A \subset \mathcal{T}$ . Tämä topologia  $\mathcal{T}$  on peitteen  $A$  yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen  $A$  virittämäksi joukon  $X$  topologiaksi.*

*Todistus.* Topologia II [3] Lause 2.19. □

**Määritelmä 2.9.** *Topologioiden vertailu.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{T}_1$  ja  $\mathcal{T}_2$  topologioita joukolle  $X$ . Topologia  $\mathcal{T}_2$  on karkeampi kuin topologia  $\mathcal{T}_1$ , jos jokaisella  $U \in \mathcal{T}_2$  pätee  $U \in \mathcal{T}_1$ , eli  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ . Tällöin  $\mathcal{T}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{T}_2$ .

# Luku 3

## Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

**Määritelmä 3.1.** *Uniforminen rakenne* (tai *uniformiteetti*) joukolle  $X$  annetaan karteesisen tulon  $X \times X$  potenssijoukon  $\mathcal{P}(X \times X)$  osajoukkona  $\mathcal{U}$ , jolle pätee

- (U1) Jos  $V \in \mathcal{U}$  ja  $V \subset W \subset X \times X$  niin  $W \in \mathcal{U}$ ,
- (U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon  $\mathcal{U}$  alkioista kuuluu joukkoon  $\mathcal{U}$ ,
- (U3) Joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $V \in \mathcal{U}$  osajoukko,
- (U4) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin  $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$ ,
- (U5) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin on olemassa sellainen  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W^2 \subset V$ .

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja  $V \in \mathcal{U}$  sanotaan uniformiteetin  $\mathcal{U}$  lähistöiksi. Uniformiteetilla  $\mathcal{U}$  varustettua joukkoa  $X$  sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

*Huomautus 3.2.* Uniformiteetin  $\mathcal{U}$  lähistöön (entourage)  $V \in \mathcal{U}$  kuuluvan pisteparin  $(x, y) \in V$  pisteiden  $x, y \in X$  sanotaan olevan  $V$ -lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

*Huomautus 3.3.* Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla:

- (Ua) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin on olemassa sellainen  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W \circ W^{-1} \subset V$ .

*Huomautus 3.4.* Kokoelma  $\{\emptyset\}$  on ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti tyhjälle joukolle.

**Määritelmä 3.5.** Olkoon  $X$  joukko ja kokoelma  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$  uniformiteetti joukolle  $X$ . Tällöin lähistöjen joukko  $B \subset \mathcal{U}$  on uniformiteetin  $\mathcal{U}$  kanta, jos jokaiselle lähistölle  $V \in \mathcal{U}$  löytyy kannan alkio  $W \in B$ , jolla pätee  $W \subset V$ .

**Lause 3.6.** Olkoon  $X$  joukko. Kokoelma  $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$  on joukon  $X$  erään uniformiteetin kanta, jos kokoelmalle  $B$  pätee

(B1) Jos  $V_1, V_2 \in B$  niin on olemassa sellainen  $V_3 \in B$ , jolla  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ ,

(B2) Joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $V \in B$  osajoukko,

(B3) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $V' \in B$ , jolla  $V' \subset V^{-1}$ ,

(B4) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $W \in B$ , jolla  $W^2 \subset V$ .

*Todistus.* Olkoon  $X$  joukko ja  $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$  sellainen kokoelma, jolle pätevät ehdot (B1)-(B4). Tällöin olkoon

$$\mathcal{U}_B = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon  $\mathcal{U}_B$  määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle  $W \in \mathcal{U}_B$  löytyy kannan alkio  $V \in B$ , jolla pätee  $V \subset W$ . Lisäksi  $B \subset \mathcal{U}_B$ . Näin ollen riittää tarkistaa, että  $\mathcal{U}_B$  on uniformiteetti. Käydään läpi uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdot:

(U1) Jos  $W \in \mathcal{U}_B$ , niin on olemassa sellainen  $V \in B$ , jolla pätee  $V \subset W$ . Toisaalta jos osajoukolle  $W' \subset X \times X$  pätee  $V \subset W \subset W'$ , niin  $W' \in \mathcal{U}_B$ .  
Siis jos  $W \in \mathcal{U}_B$  ja  $W \subset W' \subset X \times X$  niin  $W' \in \mathcal{U}_B$ .

(U2) Olkoon  $W \in \mathcal{U}_B$  ja  $W' \in \mathcal{U}_B$  joukkoja. Joukon  $\mathcal{U}_B$  määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset  $V \in B$  ja  $V' \in B$ , joille pätee  $V \subset W$  ja  $V' \subset W'$  ja erityisesti  $V \cap V' \subset W \cap W'$ . Edelleen ehdon (B1) nojalla on olemassa sellainen  $V'' \in B$ , jolle pätee  $V'' \subset V \cap V'$  ja siis  $V'' \subset W \cap W'$ . Näin ollen leikkaus  $W \cap W'$  kuuluu kokoelmaan  $\mathcal{U}_B$ . Lisäksi joukoiksi  $W$  ja  $W'$  voidaan valita mielivaltaisia kokoelman  $\mathcal{U}_B$  alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon  $\mathcal{U}_B$  alkioista kuuluu joukkoon  $\mathcal{U}_B$ .

(U3) Jokaiselle alkiolle  $W \in \mathcal{U}_B$  löytyy kannan alkio  $V \in B$ , jolla pätee  $V \subset W$ . Ehdon (B2) nojalla  $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset V$ , joten  $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset W$ .

(U4) Olkoon  $W \in \mathcal{U}_B$ . Tällöin joukon  $\mathcal{U}_B$  määrittelyn nojalla on olemassa sellainen  $V \in B$ , jolla  $V \subset W$ . Tällöin ehdon (B3) nojalla joukolle  $V$  on olemassa sellainen  $V' \in B$ , jolla  $V' \subset V^{-1}$ . Näin ollen joukon  $\mathcal{U}_B$  määrittelyn nojalla  $V^{-1} \in \mathcal{U}_B$  ja edelleen  $W^{-1} \in \mathcal{U}_B$ .

(U5) Olkoon  $W \in \mathcal{U}_B$ . Tällöin joukon  $\mathcal{U}_B$  määrittelyn nojalla on olemassa sellainen  $V' \in B$ , jolla  $V' \subset W$ . Ehdon (B4) nojalla on olemassa sellainen  $V \in B$ , jolla  $V^2 \subset V'$ . Joukon  $\mathcal{U}_B$  määrittelyn nojalla tällöin  $V \in \mathcal{U}_B$  ja siis  $V^2 \subset W$ .

□

**Lause 3.7.** *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko  $X$  varustettu uniformiteetilla  $\mathcal{U}$ . Olkoon  $x \in X$  alkio ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö. Olkoon tällöin*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \text{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

*joukkoja. Uniformiteetti  $\mathcal{U}$  määrää topologian joukolle  $X$  niin, että joukko  $V(x)$  on (lähistön  $V$  määräämä) ympäristö alkion  $x$  ja joukko  $B(x)$  on alkion  $x$  ympäristökanta kyseisessä topologiassa.*

*Todistus.* Olkoon joukko  $X$  varustettu uniformiteetilla  $\mathcal{U}$ ,  $x \in X$  alkio ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö avaruudessa  $X$ . Lisäksi olkoot joukot  $V(x)$  ja  $B(x)$  kuten edellä. Joukko  $V(x)$  on epätyhjä, sillä  $x \in V(x)$ . Olkoon  $W \in \mathcal{U}$  lähistö, jolloin  $W(x)$  on alkion  $x$  ympäristö. Alkion  $x$  ympäristöille  $V(x)$  ja  $W(x)$  pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x), \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehdon (U2) nojalla pätee  $V \cap W \in \mathcal{U}$ . Ehdosta (U1) seuraa, että joukko  $B(x)$  on alkion  $x$  kaikkien ympäristöjen joukko ja siten huomautuksen 2.6 nojalla ympäristökanta. □

*Huomautus 3.8.* Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

**Määritelmä 3.9.** Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  kuvaus. Kuvaus  $f$  on *tasaisesti jatkuva* (uniformly continuous), jos jokaiselle avaruuden  $X'$  lähistölle  $V'$  on olemassa avaruuden  $X$  lähistö  $V$  niin, että jokaiselle  $(x, y) \in V$  pätee  $(f(x), f(y)) \in V'$ .

**Korollaari 3.10.** *Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon  $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$  kuvaus, jolla pätee  $g(x, y) = (f(x), f(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tällöin jos  $V'$  on avaruuden  $X'$  lähistö, niin alkukuva  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö.*

*Todistus.* Korollaari on suora seuraus määritelmästä 3.9 ja uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdosta (U1). □



**Lause 3.11.** *Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus  $f$  on jatkuva, kun varustetaan joukot  $X$  ja  $X'$  uniformeettiensa indusoimilla topologioilla.*

*Todistus.* Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon  $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$  kuvaus, jolla pätee  $g(x, y) = (f(x), f(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ . Olkoon  $V'$  avaruuden  $X'$  lähistö ja  $x' \in X'$  alkio. Avaruuden  $X'$  uniformeetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion  $x'$  ympäristön avaruudessa  $X$ . Korollarin 3.10 mukaan lähistön  $V'$  alkukuva  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö. Olkoon nyt  $x \in X$  sellainen alkio, jolla  $f(x) = x'$ . Tällöin joukko  $(g^{-1}V')(x)$  on alkion  $x$  ympäristö. Erityisesti ympäristö  $(g^{-1}V')(x)$  kuvautuu ympäristöön  $V'(x')$ , sillä ehdosta  $(x, y) \in g^{-1}V'$  seuraa  $(x', f(y)) \in V'$  kaikilla  $y \in X$ .

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva.  $\square$

**Lause 3.12.** *Olkoot  $X$ ,  $X'$  ja  $X''$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  ja  $g: X' \rightarrow X''$  tasaisesti jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus  $g \circ f: X \rightarrow X''$  on tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Olkoot  $X$ ,  $X'$  ja  $X''$  uniformeja avaruuksia,  $f: X \rightarrow X'$  ja  $g: X' \rightarrow X''$  tasaisesti jatkuvia kuvauksia ja  $V''$  avaruuden  $X''$  lähistö. Tällöin tasaisesti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden  $X'$  lähistö  $V'$ , jolla jokaisella  $(x', y') \in V'$  pätee  $(g(x'), g(y')) \in V''$ . Edelleen lähistölle  $V'$  on olemassa avaruuden  $X$  lähistö  $V$ , jolla jokaisella  $(x, y) \in V$  pätee  $(f(x), f(y)) \in V'$ . Näin ollen lähistölle  $V''$  on olemassa lähistö  $V$ , jolla jokaisella  $(x, y) \in V$  pätee  $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$ , eli  $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$ .

Siis yhdistetty kuvaus  $g \circ f: X \rightarrow X''$  on tasaisesti jatkuva.  $\square$

**Määritelmä 3.13.** Olkoot  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  bijektiivinen kuvaus. Kuvaus  $f$  on *isomorfismi*, jos sekä kuvaus  $f$  että sen käänteiskuvaus  $f^{-1}$  ovat tasaisesti jatkuvia.

**Määritelmä 3.14.** *Uniformeettien vertailu.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformeetteja joukolle  $X$ . Uniformeetti  $\mathcal{U}_2$  on karkeampi kuin uniformeetti  $\mathcal{U}_1$ , jos identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$  on tasaisesti jatkuva. Tällöin  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$ .

Jos lisäksi pätee  $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ , niin  $\mathcal{U}_1$  on aidosti hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$  ja vastaavasti  $\mathcal{U}_2$  on aidosti karkeampi kuin  $\mathcal{U}_1$ . Sanotaan, että kahta uniformeettia  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  voidaan vertailla, jos  $\mathcal{U}_1$  on hienompi tai karkeampi kuin  $\mathcal{U}_2$ . Uniformeeteille  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  pätee  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ , jos  $\mathcal{U}_1$  on sekä hienompi että karkeampi kuin  $\mathcal{U}_2$ .

**Korollaari 3.15.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$  jos ja vain jos jokaisella lähistöllä  $V \in \mathcal{U}_2$  pätee  $V \in \mathcal{U}_1$ .

**Korollaari 3.16.** Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$  ja  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$ . Tällöin uniformiteetin  $\mathcal{U}_1$  indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin  $\mathcal{U}_2$  indusoima topologia.

**Lause 3.17.** Olkoon  $X$  joukko ja  $(Y_i, \mathcal{U}_i)$  uniforminen avaruus jokaisella  $i \in I$ , jollain indeksijoukolla  $I$ . Olkoon  $f_i: X \rightarrow Y_i$  kuvaus jokaisella  $i \in I$  ja  $g_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$  kuvaus, jolla  $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ ,  $i \in I$ . Tällöin joukko

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kanta eräälle avaruuden  $X$  uniformiteetille  $\mathcal{U}$ .

*Todistus.* Olkoon  $X$  joukko ja  $(Y_i, \mathcal{U}_i)$  uniforminen avaruus jokaisella  $i \in I$ . Olkoon lisäksi kuvaukset  $f_i$  ja  $g_i$  ja joukko  $B$  kuten yllä. Selvitetään, onko joukko  $B$  uniformiteetin kanta käymällä läpi kantalauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot  $U_1, U_2 \in B$ . Tällöin on olemassa äärelliset osajoukot  $J_1, J_2 \subset I$  ja lähistöt  $V_i \in \mathcal{U}_i$  kaikilla  $i \in J_1$  ja  $V_j \in \mathcal{U}_j$  kaikilla  $j \in J_2$ , joilla

$$U_1 = \bigcap_{i \in J_1} g_i^{\leftarrow}(V_i) \quad \text{ja} \quad U_2 = \bigcap_{j \in J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j).$$

Yhdiste  $J_1 \cup J_2$  on äärellinen indeksijoukon  $I$  osajoukko, joten

$$U_3 = \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j) \in B$$

ja erityisesti  $U_3 \subset U_1 \cap U_2$ .

(B2) Olkoon  $U \in B$ . Tällöin on olemassa äärellinen  $J \subset I$ , ja lähistöt  $V_i \in \mathcal{U}_i$ , kaikilla  $i \in J$ , joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Jokaisella  $V_i \in \mathcal{U}_i$  pätee  $\{(y_i, y_i) \mid y_i \in Y_i\} \subset V_i$  ja näin ollen myös jokaisella  $g_i^{\leftarrow}(V_i)$  pätee  $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset g_i^{\leftarrow}(V_i)$ . Siis pätee  $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset U$ , koska  $U$  on leikkaus joukoista  $g_i^{\leftarrow}(V_i)$ .

(B3) Olkoon  $U \in B$ . Tällöin on olemassa äärellinen  $J \subset I$ , ja lähistöt  $V_i \in \mathcal{U}_i$ , kaikilla  $i \in J$ , joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Uniformiteetin määritelmän ehdon (U4) nojalla jos  $V_i \in \mathcal{U}_i$  niin  $V_i^{-1} \in \mathcal{U}_i$ . Näin ollen

$$U^{-1} = \bigcap_{i \in J} (g_i^{\leftarrow}(V_i))^{-1} = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i^{-1}) \in B,$$

jolloin vaadittu ehto pätee muodossa  $U^{-1} \subset U^{-1}$ .

(B4) Olkoon  $U \in B$ . Tällöin on olemassa äärellinen  $J \subset I$ , ja lähistöt  $V_i \in \mathcal{U}_i$ , kaikilla  $i \in J$ , joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Uniformiteetin määritelmän ehdon (U5) nojalla jos  $V_i \in \mathcal{U}_i$  niin on olemassa sellainen  $W_i \in \mathcal{U}_i$ , jolla  $W_i^2 \subset V_i$ . Olkoon

$$A = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i),$$

jolloin  $A \in B$  ja näin ollen riittää osoittaa, että  $A^2 \subset U$ . Määritelmän mukaan  $A^2 = \{(x, z) \mid (x, y) \in A \text{ ja } (y, z) \in A\}$ . Siis alkioilla  $x, z \in X$  pätee  $(x, z) \in A^2$  täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen  $y \in X$ , jolla  $(x, y) \in A$  ja  $(y, z) \in A$ . Toisaalta jos  $(x, y) \in A$  ja  $(y, z) \in A$  niin  $(x, y) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$  ja  $(y, z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$  jokaisella  $i \in J$ . Tällöin  $g_i(x, y) \in W_i$  ja  $g_i(y, z) \in W_i$ , joten  $g_i(x, z) \in W_i^2$ . Näin ollen  $(x, z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i^2)$  jokaisella  $i \in J$ , joten

$$(x, z) \in \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i^2) \subset \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) = U.$$

Näin ollen  $A^2 \subset U$ .

Siis joukko  $B$  on joukon  $X$  erään uniformiteetin kanta. □

**Määritelmä 3.18.** *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformity).

Olkoon  $X$  joukko ja  $(Y_i, \mathcal{U}_i)$  uniforminen avaruus jokaisella  $i \in I$ , jollain indeksijoukolla  $I$ . Olkoon  $f_i: X \rightarrow Y_i$  kuvaus jokaisella  $i \in I$  ja  $g_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$  kuvaus, jolla  $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$  kaikilla  $x, y \in X$  ja  $i \in I$ . Tällöin joukko

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen, } V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

on kuvausperheen  $(f_i)_{i \in I}$  indusoiman uniformiteetin kanta. (Vrt. edellinen lause.)

**Korollaari 3.19.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $(Y_i, \mathcal{U}_i)$  uniforminen avaruus jokaisella  $i \in I$ , jollain indeksijoukolla  $I$ . Olkoon  $f_i: X \rightarrow Y_i$  kuvaus jokaisella  $i \in I$ . Tällöin kuvausperheen  $(f_i)_{i \in I}$  indusoima uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset  $f_i$  ovat tasaisesti jatkuvia.*  $\square$

**Määritelmä 3.20.** *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon  $X$  joukko ja  $I$  jokin indeksijoukko. Olkoon  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  perhe uniformiteetteja joukolle  $X$ . Tällöin perheen  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  *pienin yläraja* on uniformiteetti  $\mathcal{U}$ , joka on kuvausten  $\text{id}: X \rightarrow (X, \mathcal{U}_i)$  määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

## Luku 4

# Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta teoksesta General Topology part 2 [2] luvusta IX.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kuvaus. Kuvaus  $f$  on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

$$(P1) \quad f(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X,$$

$$(P2) \quad f(x, y) = f(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

$$(P3) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \text{ kaikilla } x, y, z \in X.$$

*Huomautus 4.2.* Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitetaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

$$(M1) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

**Esimerkki 4.3.** Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.4.** Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin  $f$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.5.** Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kaavalla  $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$  määritelty kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.6.** Olkoon  $X$  kaikkien muotoa  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kaavalla  $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$  määritelty kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  määrittelee pseudometriikan joukolle  $X$ .

*Huomautus 4.7.* Määritelmän 4.1 ehdon (P3) nojalla epäyhtälöstä  $f(x, z) + f(z, y) < \infty$  seuraa  $f(x, y) < \infty$ . Näin ollen epäyhtälöistä

$$f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z) \text{ ja } f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z)$$

seuraa epäyhtälö  $|f(x, z) - f(z, y)| \leq f(x, y)$ .

**Esimerkki 4.8.** Olkoon  $f$  pseudometriikka joukolle  $X$  ja  $\lambda \in \mathbb{R}$  reaaliluku, jolla  $\lambda > 0$ . Tällöin kuvaus  $\lambda f$ , jolla  $(\lambda f)(x, y) = \lambda(f(x, y))$  kaikilla  $(x, y) \in X \times X$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.9.** Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  perhe joukon  $X$  pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], \quad f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla  $x, y \in X$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.10.** Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  perhe joukon  $X$  pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla  $x, y \in X$  epäyhtälöstä  $f_i(x, y) \leq f_i(x, z) + f_i(z, y)$  seuraa epäyhtälö

$$\sup_{i \in I} f_i(x, y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x, z) + f_i(z, y)).$$

Tällöin kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  missä

$$f(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y) \quad \text{kaikilla } x, y \in X$$

on pseudometriikka.

## Luku 5

# Pseudometriikan määrittely uniformiteetti

**Lause 5.1.** Olkoon  $a \in [0, \infty]$  luku ja  $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  joukko, joka on määritelty kaavalla

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma  $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\}$  muodostaa joukon  $\mathbb{R}^n$  erään uniformiteetin kannan.

*Todistus.* Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

- (B1) Olkoon  $a_1, a_2 \in [0, \infty]$  lukuja, joilla  $a_1 \leq a_2$ . Tällöin kaavasta  $|x - y| \leq a_1$  seuraa  $|x - y| \leq a_2$  kaikilla  $x, y \in \mathbb{R}$ . Näin ollen  $U_{a_1} \subset U_{a_2}$  ja siis  $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$ ,
- (B2) Olkoon  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin kaikilla  $a \in [0, \infty]$  pätee  $|x - x| = 0 < a$ , joten joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $U_a \in B$  osajoukko,
- (B3) Olkoon  $x', y' \in \mathbb{R}^n$  ja  $a \in [0, \infty]$ . Tällöin jos  $|x' - y'| \leq a$  niin myös  $|y' - x'| \leq a$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle  $U_a$  pätee  $U_a \subset U_a^{-1}$ .

- (B4) Olkoon  $a \in [0, \infty]$  luku ja  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  sellaisia pisteitä, joilla  $(x, z), (z, y) \in U_a$ , eli  $|x - z| \leq a$  ja  $|z - y| \leq a$ . Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli  $|x - y| \leq 2a$ . Tästä seuraa, että  $U_a^2 \subset U_{2a}$ , joten jokaiselle luvun  $b \in [0, \infty]$  määräämälle joukolle  $U_b$  löytyy joukko  $U_{b/2}$ , jolla  $U_{b/2}^2 \subset U_b$ .

Siis kokoelma  $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\}$  muodostaa joukon  $\mathbb{R}^n$  uniformiteetin kannan.  $\square$

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

**Lause 5.2.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  pseudometriikka joukolle  $X$ . Tällöin pseudometriikka  $f$  määrittelee sellaisen uniformiteetin joukolle  $X$ , jonka kannan muodostaa kokoelma*

$$B = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}.$$

*Todistus.* Olkoon  $a \in [0, \infty]$  luku. Näin ollen  $f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X$  on joukko. Merkitään  $U_a = f^{\leftarrow}[0, a]$  ja käydään läpi lauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoot  $a_1, a_2 \in [0, \infty]$  lukuja, joilla  $a_1 \leq a_2$ . Tällöin pätee

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a] \subset f^{\leftarrow}[0, b] = U_{a_2}$$

ja siis  $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$ ,

(B2) Kuvaus  $f$  on pseudometriikka, joten pseudometriikan määritelmän 4.1 ehdon (P1) nojalla kaikilla  $x \in X$  pätee  $f(x, x) = 0$ . Toisin sanoen pistepareista  $(x, x)$  muodostuvan joukon  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  jokainen alkio kuvautuu pseudometriikassa nollassi. Näin ollen joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  sisältyy jokaisen suljetun välin  $[0, a]$  alkukuvaan  $f^{\leftarrow}[0, a]$  kaikilla  $a \in [0, \infty]$ .

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että  $f(x, y) = f(y, x)$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tällöin  $(x, y) \in U_a \Leftrightarrow (y, x) \in U_a$  ja siis  $U_a^{-1} = U_a$ , eli jokaiselle  $U_a$  pätee  $U_a \subset U_a^{-1}$ .

(B4) Olkoon  $a \in [0, \infty]$  luku ja  $x, y, z \in X$  sellaisia alkioita, joilla  $(x, z), (z, y) \in U_a$ , eli  $f(x, z) \leq a$  ja  $f(z, y) \leq a$ . Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli  $f(x, y) \leq 2a$ . Tästä seuraa, että  $U_a^2 \subset U_{2a}$ , joten jokaiselle luvun  $b \in [0, \infty]$  määräämälle joukolle  $U_b$  löytyy joukko  $U_{b/2}$ , jolla  $U_{b/2}^2 \subset U_b$ .

Siis kokoelma  $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\} = \{f^{\leftarrow}[0, a] \mid a \in [0, \infty]\}$  muodostaa joukon  $X$  uniformiteetin kannan.  $\square$

**Määritelmä 5.3.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  ja  $g$  pseudometriikoita joukolle  $X$ . Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat  $f$  ja  $g$  määrittelevät jotkut uniformiteetit joukolle  $X$ . Pseudometriikat  $f$  ja  $g$  ovat *ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman uniformiteetin.



**Korollaari 5.4.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  ja  $g$  pseudometriikoita joukolle  $X$ . Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan  $f$  määräämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  on karkeampi kuin pseudometriikan  $g$  määräämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$ , jos ja vain jos jokaiselle  $a \in [0, \infty]$  on olemassa sellainen  $b \in [0, \infty]$ , jolla  $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$  kaikilla  $x, y \in X$ .

Jos lisäksi jokaiselle  $a \in [0, \infty]$  on olemassa  $b \in [0, \infty]$ , jolla  $f(x, y) \leq b \Rightarrow g(x, y) \leq a$  kaikilla  $x, y \in X$ , niin  $f$  ja  $g$  ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

*Todistus.* Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  ja  $g$  pseudometriikoita joukolle  $X$ . Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan  $f$  määrittelemän uniformiteetin  $\mathcal{U}_f$  kannan muodostaa kokoelma

$$B_f = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}.$$

Tällöin uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin  $\mathcal{U}_g$  kannan muodostaa kokoelma

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}$$

ja uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$  on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

$\Rightarrow$  Olkoon uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  karkeampi kuin  $\mathcal{U}_g$  ja näin ollen määritelmän 3.14 mukaan identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$  on tasaisesti jatkuva. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan jokaiselle maalijoukon lähistölle  $V' \in \mathcal{U}_f$  on olemassa lähtöjoukon lähistö  $V \in \mathcal{U}_g$  niin, että jokaiselle  $(x, y) \in V$  pätee  $(x, y) \in V'$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä voidaan edeltävä ehto muotoilla seuraavasti: Jokaisella  $a \in [0, \infty]$  on olemassa  $b \in [0, \infty]$  niin, että kaikilla  $x, y \in X$  pätee  $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$ , eli  $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ .

$\Leftarrow$  Oletetaan, että jokaiselle luvulle  $a \in [0, \infty]$  on olemassa sellainen  $b \in [0, \infty]$ , jolla  $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ , eli  $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$ , kaikilla  $x, y \in X$ . Siis jokaiselle uniformiteetin  $\mathcal{U}_f$  kannan jäsenelle  $f^{\leftarrow}[0, a']$  missä  $a' \in [0, \infty]$  on olemassa uniformiteetin  $\mathcal{U}_g$  kannan jäsen  $g^{\leftarrow}[0, b']$  missä  $b' \in [0, \infty]$  niin, että kaikilla  $x, y \in X$  pätee  $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b'] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a']$ . Näin ollen identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$  on tasaisesti jatkuva ja siten uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$  on uniformiteettia  $\mathcal{U}_f$  hienompi. Siis pseudometriikan  $f$  määräämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  on karkeampi kuin pseudometriikan  $g$  määräämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$ .

Lisäksi määritelmistä 3.14 ja 5.3 seuraa, että jos  $\mathcal{U}_f$  on sekä hienompi että karkeampi kuin  $\mathcal{U}_g$ , niin pseudometriikat  $f$  ja  $g$  ovat ekvivalentteja.  $\square$

**Määritelmä 5.5.** Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperhe. Pseudometriikkojen  $f_i$  määrittelemien uniformiteettien  $\mathcal{U}_{f_i}$  perheen  $(\mathcal{U}_{f_i})_{i \in I}$  pienintä ylärajaa sanotaan perheen  $(f_i)_{i \in I}$  määrittelemäksi uniformiteetiksi.

**Määritelmä 5.6.** Olkoon  $X$  joukko ja olkoot  $(f_i)_{i \in I}$  ja  $(g_j)_{j \in J}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperheitä. Perheet  $(f_i)$  ja  $(g_j)$  ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit ovat samoja.

**Määritelmä 5.7.** Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperhe. Olkoon  $H \subset I$  äärellinen joukko ja  $g_H: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  kuvaus, jolla  $g_H(x, y) = \sup_{i \in H} f_i(x, y)$  kaikilla  $x, y \in X$ . Kuvaus  $g_H$  on pseudometriikka (esimerkki 4.10) ja siten voidaan muodostaa pseudometriikkaperhe  $(g_H) := (g_H)_{H \subset I \text{ äärellinen}}$ . Näin muodostettu pseudometriikkaperhe  $(g_H)$  on *saturoitu* (saturated) ja saatu saturoimalla perhe  $(f_i)_{i \in I}$ .

**Lause 5.8.** Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperhe. Olkoon  $(g_H)$  pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla  $(f_i)_{i \in I}$ . Saturoidusta pseudometriikkaperheestä  $(g_H)$  otetun äärellisen osaperheen  $(g_A) := \{g_{A_1}, g_{A_2}, \dots, g_{A_n}\} \subset (g_H)$  pienin yläraja  $\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}$  kuuluu perheeseen  $(g_H)$ .

*Todistus.* Saturoidun pseudometriikkaperheen  $(g_H)$  äärellisen osaperheen  $(g_A)$  jäsenet ovat kuvauksia, joilla  $g_{A_j}(x, y) = \sup_{i \in A_j} f_i(x, y)$  kaikilla  $x, y \in X$ . Näin ollen osaperheen  $(g_A)$  pienin yläraja  $\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}$  on kuvaus, jolla

$$\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}(x, y) = \sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} \left( \sup_{i \in A_j} f_i(x, y) \right) = \sup_{\substack{j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ i \in A_j}} f_i(x, y) = \sup_{i \in \bigcup_{j=1}^n A_j} f_i(x, y).$$

Joukko  $\bigcup_{j=1}^n A_j \subset I$  on äärellisten joukkojen yhdisteenä äärellinen ja siten osaperheen  $(g_A)$  pienin yläraja  $\sup_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} g_{A_j}$  kuuluu perheeseen  $(g_H)$ .  $\square$

**Lause 5.9.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperhe. Olkoon  $(g_H)$  pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla perhe  $(f_i)_{i \in I}$ . Tällöin perhe  $(g_H)$  on ekvivalentti perheen  $(f_i)_{i \in I}$  kanssa.*

*Todistus.* Pseudometriikkaperheen  $(f_i)_{i \in I}$  määrittelemä uniformiteetti on uniformiteettiperheen  $(\mathcal{U}_{f_i})_{i \in I}$  pienin yläraja  $\sup_{i \in I} \mathcal{U}_{f_i}$ , eli pienin uniformiteetti, joka sisältää  $\mathcal{U}_{f_i}$  kaikilla  $i \in I$ . Vastaavasti pseudometriikkaperheen  $(g_H)$  määrittelemä uniformiteetti on  $\sup_{H \subset I}$  äärellinen  $\mathcal{U}_{g_H}$ .

Pseudometriikkaperheet  $(f_i)_{i \in I}$  ja  $(g_H)$  ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit  $\mathcal{U}_f := \sup_{i \in I} \mathcal{U}_{f_i}$  ja  $\mathcal{U}_g := \sup_{H \subset I} \mathcal{U}_{g_H}$  ovat samoja.

Määritelmän 5.7 nojalla jokaiselle pseudometriikalle  $f_j \in (f_i)_{i \in I}$  löytyy pseudometriikka  $g_{\{j\}} \in (g_H)$  niin, että  $g_{\{j\}}(x, y) = \sup_{i \in \{j\}} f_i(x, y) = f_j(x, y)$  kaikilla  $x, y \in X$ . Siis  $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}_g$ . Osoitetaan seuraavaksi, että  $\mathcal{U}_{g_{H'}} \subset \mathcal{U}_f$  jokaisella äärellisellä osajoukolla  $H' \subset I$ .

Kesken. □

**Korollari 5.10.** *Jokaiselle pseudometriikkaperheelle löytyy aina ekvivalentti saturoitu pseudometriikkaperhe ja näin ollen pseudometriikkaperheen voidaan olettaa olevan saturoitu.* □

**Lause 5.11.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperhe. Olkoon lisäksi  $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $g(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$  kaikilla  $x, y \in X$  joukon  $X$  pseudometriikka. Mikäli indeksijoukko  $I$  on äärellinen on perheen  $(f_i)_{i \in I}$  määräämä uniformiteetti sama kuin pseudometriikan  $g$  määräämä uniformiteetti.*

*Todistus.* Olkoon  $X$  joukko,  $I$  äärellinen indeksijoukko,  $(f_i)_{i \in I}$  joukon  $X$  pseudometriikkaperhe ja  $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ ,  $g(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$  kaikilla  $x, y \in X$  joukon  $X$  pseudometriikka. Pseudometriikkaperheen  $(f_i)_{i \in I}$  määräämä uniformiteetti on uniformiteettiperheen  $(\mathcal{U}_{f_i})_{i \in I}$  pienin yläraja  $\mathcal{U}_f$ , jonka kanta on joukko

$$B_f = \left\{ \bigcap_{i \in J} V_i \mid J \subset I, V_i \in \mathcal{U}_{f_i} \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

ja siis  $\mathcal{U}_f = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_f\}$ . Indeksijoukko  $I$  on äärellinen, joten jokaiselle alkioparille  $(x, y) \in X \times X$  löytyy indeksi  $i_{(x, y)} \in I$  niin, että  $f_i(x, y) \leq f_{i_{(x, y)}}(x, y)$  kaikilla  $i \in I$ . Näin ollen jokaisella  $a \in [0, \infty]$  pätee

$$g^{\leftarrow}[0, a] = \{(x, y) \in X \times X \mid f_i(x, y) \leq a \text{ kaikilla } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} f_i^{\leftarrow}[0, a].$$

Pseudometriikan  $g$  määrittävän uniformiteetin kanta on siis

$$B_g = \{g^\leftarrow[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\} = \left\{ \bigcap_{i \in I} f_i^\leftarrow[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty] \right\}.$$

Lauseen 5.2 nojalla jokaisella  $i \in I$  alkukuvat  $f_i^\leftarrow[0, a]$ ,  $a \in [0, \infty]$  muodostavat kannan uniformiteetille  $\mathcal{U}_{f_i}$ . Erityisesti jokaiselle  $V_i \in \mathcal{U}_{f_i}$  löytyy  $a \in [0, \infty]$ , jolla  $f_i^\leftarrow[0, a] \subset V_i$ . Näin ollen kannan  $B_g$  määrittelemälle uniformiteetille  $\mathcal{U}_g$  pätee

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_g &= \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_g\} \\ &= \left\{ W \subset X \times X \mid \bigcap_{i \in I} f_i^\leftarrow[0, a] \subset W \text{ jollain } a \in [0, \infty] \right\} \\ &= \left\{ W \subset X \times X \mid \bigcap_{i \in I} V_i \subset W \text{ jollain } V_i \in \mathcal{U}_i, i \in I \right\} \\ &= \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B_f\} \\ &= \mathcal{U}_f. \end{aligned}$$

Siis  $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g$ . □

**Korollari 5.12.** *Olkoon uniformiteetit  $\mathcal{U}$  ja  $\mathcal{U}'$  saturoitujen perheiden  $(f_i)_{i \in I}$  ja  $(g_j)_{j \in J}$  määrittämiä. Uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on karkeampi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}'$ , jos jokaisella  $i \in I$  ja  $a \in [0, \infty]$  löytyy  $j \in J$  ja  $b \in [0, \infty]$ , joilla ehdosta  $g_j(x, y) \leq b$  seuraa  $f_i(x, y) \leq a$ . Vastaavasti tällöin uniformiteetti  $\mathcal{U}'$  on hienompi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}$ . □*

**Lemma 5.13.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}$  uniformiteetti joukolle  $X$ . Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe  $(f_i)_{i \in I}$ , joka määrittelee uniformiteetin  $\mathcal{U}$ .*

*Todistus.* Jokaiselle lähistölle  $V \in \mathcal{U}$  määritellään karteesisen tulon  $X \times X$  osajoukoista muodostuva perhe  $B_V = (U_n)$ , jolla  $U_1 \subset V$  ja  $U_{n+1}^2 \subset U_n$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Nyt  $B_V$  on kanta eräälle joukon  $X$  uniformiteetille  $\mathcal{U}_V$ , joka on karkeampi kuin  $\mathcal{U}$ . Erityisesti  $\mathcal{U}$  on uniformiteettien  $\mathcal{U}_V, V \in \mathcal{U}$  pienin yläraja. Näin ollen kantojen leikkaus

$$\left\{ \bigcap_{V \in H} U_V \mid H \subset \mathcal{U} \text{ äärellinen}, U_V \in B_V \right\}$$

on numeroituva kanta uniformiteetille  $\mathcal{U}$ . Tällöin lemma on seuraus lauseesta 5.14.

Kesken: Onko  $\mathcal{U}$ :n mahtavuudella vaikutusta? □

**Lause 5.14.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}$  uniformiteetti joukolle  $X$ . Jos uniformiteetilla  $\mathcal{U}$  on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka  $f: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ , jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin  $\mathcal{U}$  kanssa.

*Todistus.* Olkoon  $(V_n)$  numeroituva kanta uniformiteetille  $\mathcal{U}$ . Tällöin olkoon  $(U_n)$  perhe symmetrisiä uniformiteetin  $\mathcal{U}$  lähistöjä, joilla  $U_1 \subset V_1$  ja  $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$ , kun  $n \geq 1$ . Nyt  $(U_n)$  on myös uniformiteetin  $\mathcal{U}$  kanta ja erityisesti  $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$ , kun  $n \geq 1$ .

Olkoon  $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  kuvaus, jolla

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & , \text{ jos } (x, y) \in U_n \text{ kaikilla } n \geq 1, \\ 1 & , \text{ jos } (x, y) \notin U_1, \\ 2^{-k} & , \text{ jos } (x, y) \in U_n \text{ kaikilla } n \leq k \text{ ja } (x, y) \notin U_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt  $g$  on symmetrinen, positiivinen ja  $g(x, x) = 0$  kaikilla  $x \in X$ .

Olkoon nyt  $f: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä  $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$  ja  $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$  joukon  $X$  alkioista muodostuva jono, jossa  $z_0 = x$  ja  $z_p = y$ . Kuvauksen  $f$  määrittelystä seuraa, että  $f$  on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat  $f(x, y) \geq 0$  ja  $f(x, x) = 0$  pätevät kaikilla  $x, y \in X$ . Siis  $f$  on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$(5.15) \quad \frac{1}{2} g(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli  $f(x, y) \leq g(x, y)$  seuraa siitä, että

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^1 g(z_i, z_{i+1}) = g(z_0, z_1) = g(x, y).$$

Kaavan 5.15 vasen puoli, eli  $\frac{1}{2} g(x, y) \leq f(x, y)$  osoitetaan induktion avulla. Olkoon  $p \in \mathbb{N}$  luonnollinen luku. Nyt jokaisella  $p + 1$  alkion jonolla joukon  $X$  alkioita  $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$ , jolla  $z_0 = x$  ja  $z_p = y$ , saadaan induktio-oletukseksi

$$(5.16) \quad \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(x, y).$$

Jos  $p = 1$ , niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x, y) \geq \frac{1}{2} g(x, y).$$

Merkitään

$$(5.17) \quad a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

jolloin induktio-oletus voidaan kirjoittaa muodossa  $a \geq \frac{1}{2}g(x, y)$ . Määrittelyn nojalla  $g(x, y) \leq 1$ , joten jos  $a \geq 1/2$ , niin yhtälö 5.16 pätee muodossa  $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}g(x, y)$ . Oletetaan, että  $a < 1/2$  ja että  $h$  on suurin niistä indekseistä  $q$ , joilla  $\sum_{i < q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$ . Tällöin

$$\sum_{i < h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja lisäksi} \quad \sum_{i > h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2,$$

sillä  $\sum_{i < h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$ . Edeltävien kaavojen ja induktio-oletuksen nojalla (sijoituksella  $p = h$ ) pätee

$$\frac{1}{2}a \geq \sum_{i < h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(x, z_h),$$

eli  $g(x, z_h) \leq a$ . Toisaalta yllä olevien kaavojen nojalla pätee myös

$$\frac{1}{2}a \geq \sum_{i > h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2} g(z_{h+1}, y),$$

eli  $g(z_{h+1}, y) \leq a$ . Toisaalta luvun  $a$  määrittelyn nojalla  $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$ .

Olkoon  $k \in \mathbb{N}$  pienin luku, jolla  $2^{-k} \leq a$ . Tällöin oletuksesta  $a < 1/2$  seuraa  $k \geq 2$  ja kuvauksen  $g$  määrittelystä seuraa, että  $(x, z_h) \in U_k$ ,  $(z_h, z_{h+1}) \in U_k$  ja  $(z_{h+1}, y) \in U_k$ . Nyt  $(x, y) \in U_k^3$  ja lähistöperheen  $(U_n)$  määrittelyn nojalla  $(x, y) \in U_{k-1}$ . Kuvauksen  $g$  määrittelyn nojalla  $g(x, y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$ , eli  $\frac{1}{2}g(x, y) \leq a$ .

Näin ollen kaavan 5.15 epäyhtälöt pätevät ja niistä seuraa, että jokaisella  $a > 0$  pätee  $U_k \subset f^{\leftarrow}([0, a])$ , kun  $2^{-k} < a$ . Toisaalta myös  $f^{\leftarrow}([0, a]) \subset U_k$ , joten joukot  $f^{\leftarrow}([0, a])$  muodostavat kannan uniformiteetille  $\mathcal{U}$ . Siis löydettiin pseudometriikka  $f$ , joka määrittelee uniformiteetin  $\mathcal{U}$ .  $\square$

## Luku 6

# Täydellinen uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään täydellinen uniforminen avaruus minimaalisten Cauchy-filtterien avulla.

Sellaiselle joukolle, jolle on määritelty uniformiteetti voidaan määritellä uniformiteetin lähistöjen suhteen *tarpeeksi pienet* osajoukot. Osajoukko on lähistön suhteen tarpeeksi pieni silloin, kun kaikki osajoukon alkiot ovat tarpeeksi lähellä toisiaan kyseisen lähistön suhteen (huomautus 3.2). Näin saadaan seuraava määritelmä.

**Määritelmä 6.1.** Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{U}$  uniformiteetti joukolle  $X$  ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö. Osajoukko  $A \subset X$  on  $V$ -*pieni*, jos jokaisella pisteparilla  $x, y \in A$  pätee  $(x, y) \in V$ , eli jos  $A \times A \subset V$ .

**Lause 6.2.** Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{U}$  uniformiteetti joukolle  $X$  ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö. Olkoon lisäksi  $A \subset X$  ja  $B \subset X$   $V$ -*pieniä* osajoukkoja, joiden leikkaus on epätyhjä. Tällöin yhdiste  $A \cup B$  on  $V^2$ -*pieni*.

*Todistus.* Olkoot  $x \in A$ ,  $y \in B$  ja  $z \in A \cap B$  alkioita. Tällöin alkioarit  $(x, z)$  ja  $(z, y)$  kuuluvat lähistöön  $V$  ja näin ollen alkioari  $(x, y)$  kuuluu joukkoon  $V^2$ .  $\square$

**Määritelmä 6.3.** *Filtteri.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  potenssijoukon epätyhjä osajoukko. Joukko  $\mathcal{F}$  on *filtteri* joukolle  $X$ , jos sille pätee uniformiteetin ehtojen (U1) ja (U2) lisäksi seuraava ehto:

(F) Joukko  $\mathcal{F}$  on epätyhjä eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon  $\mathcal{F}$ .

**Määritelmä 6.4.** *Filtterin kanta.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$  filtteri joukossa  $X$ . Tällöin joukko  $B \subset \mathcal{F}$  on filtterin  $\mathcal{F}$  kanta, jos jokaiselle filtterin alkioille  $V \in \mathcal{F}$  löytyy kannan alkio  $W \in B$ , jolla pätee  $W \subset V$ .

**Lause 6.5.** Olkoon  $X$  uniforminen avaruus. Joukko  $B \subset \mathcal{P}(X)$  on erään filtterin  $\mathcal{F}$  kanta, jos ehdon (F) lisäksi pätee ehto:

$(B_F)$  Jos  $A_1, A_2 \in B$ , niin on olemassa sellainen  $A_3 \in B$ , jolla  $A_3 \subset A_1 \cap A_2$ .

*Todistus.* Olkoon  $X$  uniforminen avaruus ja  $B \subset \mathcal{P}(X)$  sellainen joukko, jolle pätevät ehdot (F) ja  $(B_F)$ .

Tällöin olkoon

$$\mathcal{F}_B = \{W \subset X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon  $\mathcal{F}_B$  määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle  $W \in \mathcal{F}_B$  löytyy kannan alkio  $V \in B$ , jolla pätee  $V \subset W$ . Lisäksi  $B \subset \mathcal{F}_B$ . Näin ollen riittää tarkistaa, että  $\mathcal{F}_B$  on filtti. Käydään läpi filtlerin määritelmän 6.3 ehdot:

- (U1) Jos  $W \in \mathcal{F}_B$ , niin on olemassa sellainen  $V \in B$ , jolla pätee  $V \subset W$ . Toisaalta jos osajoukolle  $W' \subset X$  pätee  $V \subset W \subset W'$ , niin  $W' \in \mathcal{F}_B$ .  
Siis jos  $W \in \mathcal{F}_B$  ja  $W \subset W' \subset X$  niin  $W' \in \mathcal{F}_B$ .
- (U2) Olkoon  $W \in \mathcal{F}_B$  ja  $W' \in \mathcal{F}_B$  joukkoja. Joukon  $\mathcal{F}_B$  määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset  $V \in B$  ja  $V' \in B$ , joille pätee  $V \subset W$  ja  $V' \subset W'$  ja erityisesti  $V \cap V' \subset W \cap W'$ . Edelleen ehdon  $(B_F)$  nojalla on olemassa sellainen  $V'' \in B$ , jolle pätee  $V'' \subset V \cap V'$  ja siis  $V'' \subset W \cap W'$ . Näin ollen leikkaus  $W \cap W'$  kuuluu kokoelmaan  $\mathcal{F}_B$ . Lisäksi joukoiksi  $W$  ja  $W'$  voidaan valita mielivaltaisia kokoelman  $\mathcal{F}_B$  alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon  $\mathcal{F}_B$  alkioista kuuluu joukkoon  $\mathcal{F}_B$ .
- (F) Ehto (F) pätee joukolle  $B$ , joten joukon  $\mathcal{F}_B$  määrittelyn nojalla  $\mathcal{F}_B$  ei ole tyhjä joukko eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon  $\mathcal{F}_B$ .

□

**Määritelmä 6.6.** *Filttereiden vertailu.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  filttäreitä joukolle  $X$ . Filtti  $\mathcal{F}_2$  on karkeampi kuin filtti  $\mathcal{F}_1$ , jos  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ . Tällöin  $\mathcal{F}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{F}_2$ . Jos lisäksi pätee  $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$ , niin  $\mathcal{F}_1$  on aidosti hienompi kuin  $\mathcal{F}_2$  ja vastaavasti  $\mathcal{F}_2$  on aidosti karkeampi kuin  $\mathcal{F}_1$ .

Sanotaan, että kahta filttiä  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  voidaan vertailla, jos  $\mathcal{F}_1$  on hienompi tai karkeampi kuin  $\mathcal{F}_2$ .

Filtterit  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  ovat samoja, eli  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$ , jos  $\mathcal{F}_1$  on sekä hienompi että karkeampi kuin  $\mathcal{F}_2$ .

**Lause 6.7.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  filttäreitä joukolle  $X$ . Olkoon lisäksi  $B_1$  kanta filtterille  $\mathcal{F}_1$  ja  $B_2$  kanta filtterille  $\mathcal{F}_2$ . Tällöin filtti  $\mathcal{F}_1$  on hienompi kuin filtti  $\mathcal{F}_2$  jos ja vain jos jokaiselle  $A_2 \in B_2$  löytyy sellainen  $A_1 \in B_1$ , jolla  $A_1 \subset A_2$ .*

*Todistus.* Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  filttäreitä joukolle  $X$ ,  $B_1$  kanta filtterille  $\mathcal{F}_1$  ja  $B_2$  kanta filtterille  $\mathcal{F}_2$ .



$\Rightarrow$  Olkoon filtteri  $\mathcal{F}_1$  on hienompi kuin filtteri  $\mathcal{F}_2$ , eli  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ . Olkoon  $A_2 \in B_2$  alkio. Tällöin pätee  $A_2 \in \mathcal{F}_1$ , sillä  $B_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ . Näin ollen filtterin kannan määritelmän nojalla alkiole  $A_2 \in \mathcal{F}_1$  löytyy kannan  $B_1$  alkio  $A_1$ , jolla  $A_1 \subset A_2$ .

$\Leftarrow$  Oletetaan, että jokaiselle  $A'_2 \in B_2$  löytyy sellainen  $A'_1 \in B_1$ , jolla  $A'_1 \subset A'_2$ . Olkoon  $V \in \mathcal{F}_2$  alkio. Tällöin filtterin määritelmän nojalla löytyy  $A_2 \in B_2$ , jolla  $A_2 \subset V$ . Toisaalta oletuksen nojalla löytyy  $A_1 \in B_1$ , jolla  $A_1 \subset A_2$ . Siis alkiole  $V$  löytyy  $A_1 \in B_1$ , jolla  $A_1 \subset V$ . Toisaalta  $B_1 \subset \mathcal{F}_1$ , joten  $A_1 \in \mathcal{F}_1$ .

Siis alkiole  $V \in \mathcal{F}_2$  löytyy alkio  $A_1 \in \mathcal{F}_1$ , jolla  $A_1 \subset V$ . Näin ollen ehdon (U1) nojalla  $V \in \mathcal{F}_1$  ja edelleen  $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ . Siis filtteri  $\mathcal{F}_1$  on hienompi kuin filtteri  $\mathcal{F}_2$ .

□

**Määritelmä 6.8.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  filttäreitä joukolle  $X$ . Olkoon lisäksi  $B_1$  kanta filtterille  $\mathcal{F}_1$  ja  $B_2$  kanta filtterille  $\mathcal{F}_2$ . Kannat  $B_1$  ja  $B_2$  ovat *ekvivalentteja*, jos filtteri  $\mathcal{F}_1$  ja  $\mathcal{F}_2$  ovat samoja.

**Määritelmä 6.9.** Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{U}$  uniformiteetti joukolle  $X$  ja  $\mathcal{F}$  filtteri joukossa  $X$ . Filttä  $\mathcal{F}$  sanotaan *Cauchy-filtteriksi*, jos jokaiselle lähistölle  $V \in \mathcal{U}$  löytyy osajoukko  $A \subset X$ , joka on  $V$ -pieni ja kuuluu filtteriin  $\mathcal{F}$ .

Cauchy-filtterit sisältävät siis mielivaltaisen pieniä joukkoja.

**Lause 6.10.** *Topologisessa avaruudessa osajoukon (vastaavasti alkion) kaikkien ympäristöjen joukko on filtteri, jota sanotaan ympäristöfiltteriksi.* □

**Määritelmä 6.11.** *Filtterin raja-arvo.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus ja  $\mathcal{F}$  filtteri joukossa  $X$ . Alkio  $x \in X$  on filtterin  $\mathcal{F}$  *raja-arvo*, jos filtteri  $\mathcal{F}$  on hienompi kuin alkion  $x$  ympäristöfiltteri. Sanomme, että filtteri  $\mathcal{F}$  *suppenee* (converge) kohti alkioa  $x$ .

Lisäksi, jos  $B$  on filtterin  $\mathcal{F}$  kanta ja alkio  $x$  on filtterin  $\mathcal{F}$  raja-arvo, niin alkio  $x$  on myös kannan  $B$  raja-arvo ja kanta  $B$  suppenee kohti alkioa  $x$ .

**Lause 6.12.** *Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus,  $x \in X$  alkio ja  $B \subset \mathcal{P}(X)$  erään filtterin kanta. Kanta  $B$  suppenee kohti alkioa  $x$ , jos ja vain jos jokainen alkion  $x$  ympäristö sisältää jonkin kannan  $B$  jäsenen.* □

Uniformeissa avaruuksissa Cauchy-filttereillä ei välttämättä ole raja-arvoa.

**Määritelmä 6.13.** Uniforminen avaruus on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-filtteri suppenee.

**Lause 6.14.** *Uniformisessa avaruudessa jokainen suppeneva filtteri on Cauchy-filtteri.*

*Todistus.* Olkoon  $(X, \mathcal{U})$  uniforminen avaruus,  $\mathcal{F}$  suppeneva filtti joukossa  $X$  ja  $x \in X$  sellainen alkio, jota kohti  $\mathcal{F}$  suppenee. Tällöin alkion  $x$  ympäristöfiltti  $B(x)$  sisältyy filttiin  $\mathcal{F}$ . Näin ollen jokaisella lähistöllä  $V' \in \mathcal{U}$  pätee  $V'(x) \in \mathcal{F}$ .

Olkoon nyt  $V \in \mathcal{U}$  lähistö ja  $x \in X$  alkio. Huomautuksen 3.3 ehdon (Ua) nojalla on olemassa sellainen lähistö  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W^{-1} \circ W \subset V$ . Huomataan, että joukko

$$W(x) \times W(x) = \{(y_1, y_2) \mid (x, y_1) \in W, (x, y_2) \in W\}$$

sisältyy joukkoon

$$W^{-1} \circ W = \{(y_1, y_2) \mid \text{on olemassa } x', \text{ jolla } (y_1, x') \in W^{-1}, (x', y_2) \in W\}.$$

Siis lähistölle  $V$  löydettiin osajoukko  $W(x) \subset X$ , jolla  $W(x) \times W(x) \subset W^{-1} \circ W \subset V$  ja  $W(x) \in \mathcal{F}$ . Määritelmän 6.9 nojalla  $\mathcal{F}$  on Cauchy-filtteri.  $\square$

**Lause 6.15.** Minimaalinen Cauchy-filtteri. *Olkoon  $(X, \mathcal{U})$  uniforminen avaruus. Jokaiselle joukon  $X$  Cauchy-filtterille  $\mathcal{F}$  on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchy-filtteri  $\mathcal{F}_0$ , joka on karkeampi kuin  $\mathcal{F}$ , eli  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ . Jos  $B$  on kanta filttiin  $\mathcal{F}$  ja  $G$  on uniformiteetin  $\mathcal{U}$  symmetristen lähistöjen kanta, niin kokoelma  $B_0 = \{V(M) \mid M \in B, V \in G\}$  missä  $V(M) = \{y \mid (x, y) \in V, x \in M\}$  on filttin  $\mathcal{F}$  minimaalisen Cauchy-filtterin  $\mathcal{F}_0$  kanta.*

*Todistus.* Tarkistetaan kannan ehdot joukolle  $B_0$ :

1. Olkoot  $V_1(M_1), V_2(M_2) \in B_0$  joukkoja. Nyt  $M_1, M_2 \in B$ , joten on olemassa joukko  $M_3 \in B$ , jolla pätee  $M_3 \subset M_1 \cap M_2$ . Toisaalta  $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$ , joten on olemassa joukko  $V_3 \in \mathcal{U}$ , jolla pätee  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ . Näin ollen joukko  $V_3(M_3) = \{y \mid (x, y) \in V_3, x \in M_3\}$  on joukon  $(V_1 \cap V_2)(M_1 \cap M_2) = V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$  osajoukko, eli  $V_3(M_3) \subset V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$ .
2. Olkoon  $M \in B$  joukko ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö. Tällöin joukko  $M$  on epätyhjä, joten myös joukko  $V(M)$  on epätyhjä. Näin ollen tyhjä joukko ei ole joukon  $B_0$  alkio.

Jokaisella  $M \in B$  ja  $V \in \mathcal{U}$  pätee  $M \subset V(M)$ , joten erityisesti jokaiselle  $V(M) \in B_0$  löytyy sellainen  $M \in B$ , jolla  $M \subset V(M)$ . Näin ollen lauseen 6.7 nojalla minimaalinen Cauchy-filtteri  $\mathcal{F}_0$  on karkeampi kuin filtti  $\mathcal{F}$ .  $\square$

# Luku 7

## Uniformisoituvat avaruudet

Tässä luvussa esitellään uniformisoituva (uniformizable) topologinen avaruus ja annetaan tätä karakterisoiva ehto.

**Määritelmä 7.1.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}$  uniformiteetti joukolle  $X$ . Olkoon lisäksi  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  uniformiteetin  $\mathcal{U}$  indusoima topologia joukolle  $X$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on *yhteensopiva* topologian  $\mathcal{T}$  kanssa, jos topologiat  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  ja  $\mathcal{T}$  ovat samoja.

**Määritelmä 7.2.** Topologinen avaruus  $(X, \mathcal{T})$  on *uniformisoituva*, jos joukolle  $X$  voidaan muodostaa topologian  $\mathcal{T}$  kanssa yhteensopiva uniformiteetti.

**Lause 7.3.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus. Avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituvuus on yhtäpitävää seuraavan ehdon kanssa:

(Z) Kaikkien alkioiden  $x \in X$  kaikilla ympäristöillä  $V \subset X$  on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus  $f: X \rightarrow [0, 1]$ , jolla  $f(x) = 0$  ja  $f(y) = 1$  kaikilla  $y \in X \setminus V$ .

*Todistus.* Näytetään ensin, että ehto on välttämätön. Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituva topologinen avaruus,  $x_0$  alkio ja  $V_0$  alkion  $x_0$  ympäristö. Olkoon  $\mathcal{U}$  topologian  $\mathcal{T}$  kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Lauseen 5.13 nojalla uniformiteetille  $\mathcal{U}$  voidaan määritellä pseudometriikkaperhe  $(f_i)_{i \in I}$ , joka indusoi uniformiteetin  $\mathcal{U}$ . Lisäksi korollaan 5.10 nojalla voidaan olettaa pseudometriikkaperheen  $(f_i)_{i \in I}$  olevan saturoitu. Tällöin määritelmän 5.2 nojalla on olemassa  $a \in [0, \infty]$ ,  $\alpha \in I$  ja pseudometriikka  $f_\alpha \in (f_i)_{i \in I}$ , jolla  $f_\alpha(x_0, x_0) = 0$  ja  $f_\alpha(x_0, x) \geq a$  kaikilla  $x \in X \setminus V_0$ . Tämän seurauksena kuvaus  $g: X \rightarrow [0, 1]$  kaavalla  $g(x) = \inf(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x))$  pisteelle  $x_0$  ja ympäristölle  $V_0$  toteuttaa ehdon (Z).

Toisaalta ehto on myös riittävä: Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus, jolla ehto (Z) pätee. Olkoon  $x_0 \in X$  alkio,  $V_0 \subset X$  alkion  $x_0$  ympäristö ja  $f: X \rightarrow [0, 1]$  ehdon (Z) antama kuvaus alkiolle  $x_0$  ja sen ympäristölle  $V_0$ . Tällöin kuvaus  $g: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  kaavalla  $g(x_0, x) = f(x)$  on pseudometriikka. Olkoon  $\mathcal{U}$  pseudometriikan  $g$  määräämä

uniformiteetti ja  $a \in [0, \infty]$  luku. Tällöin  $g^\leftarrow[0, a] = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq a\}$  on lähistö pseudometriikan  $g$  määräämässä uniformiteetissa  $\mathcal{U}$ . Merkitään  $g^\leftarrow[0, a] = U_a$ , jolloin joukko  $U_a(x_0) = \{y \mid g(x_0, y) \leq a\}$  on alkion  $x_0$  ympäristö uniformiteetin  $\mathcal{U}$  indusoimassa topologiassa  $\mathcal{T}'$ . Joukkojen määrittelyistä seuraa, että jos  $a < 1$ , niin  $U_a(x) \subset V_0$  ja tällöin kokoelma  $B = \{U_a(x_0) \mid g(x_0, y) \leq a\}$  on alkion  $x_0$  ympäristökanta topologiassa  $\mathcal{T}$ .

Siis avaruus  $(X, \mathcal{T})$ , joka toteuttaa ehdon (Z) on uniformisoituva.  $\square$

**Määritelmä 7.4.** *Universaali uniformiteetti.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituva topologinen avaruus ja  $(f_i)_{i \in I}$  kaikkien jatkuvien pseudometriikkojen perhe, jossa  $f_i: X \times X \rightarrow [0, \infty]$  kaikilla  $i \in I$ . Perheen  $(f_i)_{i \in I}$  määrittelemä uniformiteetti on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  *universaali uniformiteetti* (universal uniformity), jota merkitsemme symbolilla  $\mathcal{U}_0$ .

**Lause 7.5.** *Uniformisoituvan topologisen avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  universaali uniformiteetti  $\mathcal{U}_0$  on hienoin niistä uniformiteeteista, jotka ovat yhteensopivia topologian  $\mathcal{T}$  kanssa.*

*Todistus.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituva topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}_0$  avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  universaali uniformiteetti. Olkoon lisäksi  $\mathcal{U}$  joukon  $X$  uniformiteetti, joka on yhteensopiva topologian  $\mathcal{T}$  kanssa.

Kesken.  $\square$

**Lause 7.6.** *Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituva topologinen avaruus,  $\mathcal{U}_0$  avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  universaali uniformiteetti,  $(Y, \mathcal{U})$  uniforminen avaruus ja  $f: X \rightarrow Y$  kuvaus. Jos kuvaus  $f$  on jatkuva uniformiteetin  $\mathcal{U}$  määräämän topologian suhteen, niin  $f$  on myös tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituva topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}_0$  avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  universaali uniformiteetti. Olkoon lisäksi  $(Y, \mathcal{U})$  uniforminen avaruus,  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  uniformiteetin  $\mathcal{U}$  määräämä topologia avaruudelle  $Y$  ja  $f: X \rightarrow Y$  jatkuva kuvaus (topologian  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$  suhteen).

Olkoon  $V \in \mathcal{U}$  lähistö ja  $y \in Y$  alkio. Tällöin  $V(y)$  on alkion  $y$  ympäristö topologiassa  $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ . Kuvaus  $f$  on jatkuva, joten alkukuva  $f^\leftarrow V(y) \subset X$  on topologian  $\mathcal{T}$  ympäristö. Olkoon  $x \in f^\leftarrow V(y)$ , eli  $f(x) \in V(y)$ . Oletetaan, että  $x' \in X$  on sellainen alkio, jolla  $f(x') = y$ . Tällöin  $(x, x') \in f^\leftarrow V$  ja  $(f(x), y) \in V$ .

Kesken. Puuttuu osoitus, että on olemassa lähistö  $W \in \mathcal{U}_0$  niin, että  $(x, x') \in W$  ja  $W \subset f^\leftarrow V$ .  $\square$

**Lause 7.7.** *Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  uniformisoituva topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}_0$  avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  universaali uniformiteetti. Olkoon tällöin  $\mathcal{U}$  sellainen joukon  $X$  uniformiteetti, joka on yhteensopiva topologian  $\mathcal{T}$  kanssa ja jolla avaruus  $(X, \mathcal{U})$  on täydellinen. Tällöin myös  $(X, \mathcal{U}')$  on täydellinen jokaisella uniformiteetilla  $\mathcal{U}'$ , jolla  $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_0$ .*

*Todistus.* Puuttuu.  $\square$

# Luku 8

## Hausdorff uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään Hausdorff uniformiset avaruudet ja esitetään niiden ominaisuuksia, oleellisimpana täydelliseen Hausdorff uniformiseen avaruuteen laajentaminen.

**Määritelmä 8.1.** Olkoon  $(X, \mathcal{U})$  uniforminen avaruus ja  $(f_i)_{i \in I}$  sellainen pseudometriikkaperhe, joka määrittelee uniformiteetin  $\mathcal{U}$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on Hausdorff, jos jokaisilla alkiolla  $x, y \in X$  ehdosta  $x \neq y$  seuraa  $f_k(x, y) \neq 0$  jollain pseudometriikalla  $f_k \in (f_i)_{i \in I}$ . Erityisesti, jos uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on Hausdorff ja yhden pseudometriikan  $f$  määrittelemä, niin  $f(x, y) \neq 0$  kaikilla  $x, y \in X, x \neq y$ .

*Huomautus 8.2.* Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  pseudometriikkaperhe joukolle  $X$ . Pseudometriikkaperheen  $(f_i)_{i \in I}$  määrittelemä uniformiteetti ei ole Hausdorff, jos on olemassa sellaiset alkiot  $x, y \in X$ , joilla  $x \neq y$  ja  $f_k(x, y) = 0$  kaikilla  $f_k \in (f_i)_{i \in I}$ .

**Lause 8.3.** Olkoon  $X$  uniforminen avaruus. Tällöin on olemassa täydellinen (complete) Hausdorff uniforminen avaruus  $\hat{X}$  ja tasaisesti jatkuva kuvaus  $i: X \rightarrow \hat{X}$ , jolle pätee seuraava ominaisuus:

(P) Olkoon  $Y$  täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja  $f: X \rightarrow Y$  tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva  $g: \hat{X} \rightarrow Y$ , jolla pätee  $f = g \circ i$ .

Tällöin sanotaan, että avaruus  $\hat{X}$  on avaruuden  $X$  Hausdorff täydennys.

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 8.4.** Olkoon  $X$  uniforminen avaruus ja  $\hat{X}$  Hausdorff täydennys avaruudelle  $X$ . Olkoon lisäksi  $X_1$  täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja  $i_1: X \rightarrow X_1$  tasaisesti jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus (P). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi  $\varphi: \hat{X} \rightarrow X_1$ , jolla pätee  $i_1 = \varphi \circ i$ .

*Todistus.* Puuttuu. □

**Korollari 8.5.** *Olkoon  $X$  on Hausdorff uniforminen avaruus ja  $\hat{X}$  määritelmän 8.3 mukainen täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus. Niin sanottu kanoninen kuvaus  $i: X \rightarrow \hat{X}$  määrää isomorfismin  $X \rightarrow X'$ , jossa  $X' \subset \hat{X}$  on tiheä joukossa  $\hat{X}$ .*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 8.6.** *Olkoon  $X$  ja  $Y$  uniformeja avaruuksia ja  $i_X: X \rightarrow \hat{X}$  ja  $i_Y: Y \rightarrow \hat{Y}$  kanonisia kuvauksia. Jokaiselle tasaisesti jatkuvalle kuvaukselle  $f: X \rightarrow Y$  löytyy yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva kuvaus  $\hat{f}: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ , jolla oheinen diagrammi kommutoi.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_X \downarrow & & \downarrow i_Y \\ \hat{X} & \xrightarrow{\hat{f}} & \hat{Y} \end{array}$$

*Todistus.* Puuttuu. □

# Luku 9

## Kompakti uniforminen avaruus

**Määritelmä 9.1.** Topologinen avaruus on *täysin säännöllinen* (completely regular), jos se on uniformisoituva ja Hausdorff.

**Määritelmä 9.2.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  täysin säännöllinen topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}$  topologian  $\mathcal{T}$  kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  kaikkien uniformiteetin  $\mathcal{U}$  suhteen tasaisesti jatkuvien kuvausten  $f_i: X \rightarrow [0, 1]$  perhe. Tällöin merkitään symbolilla  $\mathcal{U}^*$  sitä uniformiteettia, joka on karkein niistä uniformiteeteista, joilla kaikki kuvausperheen  $(f_i)_{i \in I}$  kuvaukset ovat tasaisesti jatkuvia.

**Lause 9.3.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  täysin säännöllinen topologinen avaruus. Tällöin uniformiteetti  $\mathcal{U}^*$  on Hausdorff ja yhteensopiva topologian  $\mathcal{T}$  kanssa.

*Todistus.* Puuttuu. □

**Määritelmä 9.4.** Uniforminen avaruus  $X, \mathcal{U}$  on *esikompakti*, jos sen Hausdorff täydennys  $\hat{X}$  on kompakti. Epätyhjä osajoukko  $A \subset X$  on esikompakti, jos  $(A, \mathcal{U}|_A)$  on esikompakti. (Rajoitettu uniformiteetti  $\mathcal{U}|_A = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \mathcal{U}\}$ .)

**Lause 9.5.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  täysin säännöllinen topologinen avaruus. Tällöin avaruus  $(X, \mathcal{U}^*)$  on esikompakti.

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 9.6.** Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  täysin säännöllinen topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}$  topologian  $\mathcal{T}$  kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Olkoon  $(K, \mathcal{T}')$  kompakti (topologinen) avaruus ja  $\mathcal{U}_{\mathcal{T}'}$  topologian  $\mathcal{T}'$  kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Olkoon  $f: X \rightarrow K$  kuvaus, joka on tasaisesti jatkuva uniformiteetin  $\mathcal{U}$  suhteen. Tällöin kuvaus  $f$  on tasaisesti jatkuva myös uniformiteetin  $\mathcal{U}^*$  suhteen.

*Todistus.* Puuttuu. □

**Korollari 9.7.** *Uniformiteetti  $\mathcal{U}^*$  on hienoin niistä topologian  $\mathcal{T}$  kanssa yhteensopivista uniformiteeteista  $\mathcal{U}$ , joilla  $(X, \mathcal{U})$  on esikompakti.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Määritelmä 9.8.** *Stone–Čech kompaktisointi.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  täysin säännöllinen topologinen avaruus ja  $\mathcal{U}_0$  avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  universaali uniformiteetti. Olkoon  $\mathcal{U}_0^*$  karkein uniformiteetti, jolla kaikki jatkuvat kuvaukset  $f_i: X \rightarrow [0, 1]$  ovat tasaisesti jatkuvia. Olkoon  $\beta X$  avaruuden  $(X, \mathcal{U}_0^*)$  Hausdorff täydennys. Avaruutta  $\beta X$  sanotaan avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  Stone–Čech kompaktisoinniksi.



# Kirjallisuutta

- [1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.
- [2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.