Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving 8. maaliskuuta 2017

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Olkoon X joukko ja V, W sen osajoukkoja. Merkitään tällöin joukkoilla V ja W seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{ on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\}$$

ja $W^2 = W \circ W$.

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformisuuden $\mathcal{U}$ lähistöksi. Joukkoa X joka on varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$ sanotaan univormiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformisuuden $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5)) korvata yhtäpitävällä ehdolla

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Jos joukko X on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon X uniformiteetti $\mathcal{U}$ on tyhjä. Erityisesti $\{\emptyset\}$ on joukon X ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko X on tyhjä.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja joukko $\mathcal{U} \subset X \times X$ sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Määritelmä 3.6. Olkoon X joukko. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X uniformisuuden kanta, jos joukolle B pätee

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X. Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in V\} \text{ ja } B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkiolle x ja joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio, $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X ja joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Alkiolle x pätee $x \in V(x)$, joten joukko $V(x)$ on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle $V, W \in \mathcal{U}$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \text{ tai } (x,y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \text{ ja } (x,y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla $V \cup W \in B$ ja $V \cap W \in B$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko.[1] □

Lause 3.8.

Huomautus 3.9.

Lause 3.10.

Määritelmä 3.11.

Korollaari 3.12.

Määritelmä 3.13. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ kuvaus. Kuvaus f on *uniformisti jatkuva*, jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.14. *Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Lause 3.15. *Jokainen uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva uniformien määräämien topologioiden suhteen.*

Todistus. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Korollaarin 3.14 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö. Avaruuden X' uniformiteetin määrittämässä topologiassa kaava $V'(x')$ määrää alkion x' ympäristön. Tällöin koska $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö, niin $g^{\leftarrow}V'(g^{\leftarrow}(x'))$ on alkion x' alkukuvan $g^{\leftarrow}(x') \in X$ ympäristö.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

Huomautus 3.16.

Lause 3.17.

Määritelmä 3.18.

Korollaari 3.19.

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.