

HELSINGIN YLIOPISTO  
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA  
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

---

Pro gradu -tutkielma

# Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

---

Ohjaaja: Erik Elfving

24. maaliskuuta 2017

# Sisältö

1	Johdanto	2
2	Esitietoja	3
3	Uniformiset rakenteet	4
4	Pseudometriikat	8
5	Pseudometriikan määrittämä uniformisuus	10

Luku 1

Johdanto

# Luku 2

## Esitietoja

Olkoon  $X$  joukko ja  $V$  ja  $W$  potenssijoukon  $\mathcal{P}(X \times X)$  osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\}$$

ja  $W^2 = W \circ W$ .

**Määritelmä 2.1.** *Topologian ympäristökanta.* Olkoon  $(X, \mathcal{T})$  topologinen avaruus ja  $x \in X$ . Kokoelma  $B(x)$  alkion  $x$  ympäristöjä on alkion  $x$  *ympäristökanta* (topologiassa  $\mathcal{T}$ ), jos jokainen alkion  $x$  ympäristö sisältää kokoelman  $B(x)$  jonkin jäsenen.

**Esimerkki 2.2.** Jos  $B$  on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  kanta ja  $x \in X$ , niin  $\{A \mid x \in A \in B\}$  on alkion  $x$  eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella  $x \in X$  on annettu ympäristökanta  $B(x)$  avaruudessa  $(X, \mathcal{T})$ , niin  $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$  on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  kanta.

**Lause 2.3.** *Olkoon  $A$  joukon  $X$  peite. Tällöin  $A$  on joukon  $X$  erään topologian  $\mathcal{T}$  esikanta. Lisäksi  $\mathcal{T}$  on karkein niistä joukon  $X$  topologioista, joilla  $A \subset \mathcal{T}$ . Tämä topologia  $\mathcal{T}$  on peitteen  $A$  yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen  $A$  virittämäksi joukon  $X$  topologiaksi.*

*Todistus.* Topologia II lause 2.19.[3]

□

# Luku 3

## Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

**Määritelmä 3.1.** Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle  $X$  annetaan karteettisen tulon  $X \times X$  potenssijoukon  $\mathcal{P}(X \times X)$  osajoukkona  $\mathcal{U}$ , jolle pätee

- (U1) Jos  $V \in \mathcal{U}$  ja  $V \subset W \subset X \times X$  niin  $W \in \mathcal{U}$ ,
- (U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon  $\mathcal{U}$  alkioista kuuluu joukkoon  $\mathcal{U}$ ,
- (U3) Joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $V \in \mathcal{U}$  osajoukko,
- (U4) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin  $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$ ,
- (U5) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin on olemassa sellainen  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W^2 \subset V$ .

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja  $V \in \mathcal{U}$  sanotaan uniformisuuden  $\mathcal{U}$  lähistöiksi. Joukkoa  $X$  joka on varustettu uniformisuudella  $\mathcal{U}$  sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

*Huomautus 3.2.* Uniformisuuden  $\mathcal{U}$  lähistöön (entourage)  $V \in \mathcal{U}$  kuuluvan pisteparin  $(x, y) \in V$  pisteiden  $x, y \in X$  sanotaan olevan  $V$ -lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

*Huomautus 3.3.* Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla

- (Ua) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin on olemassa sellainen  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W \circ W^{-1} \subset V$ .

*Huomautus 3.4.* Jos joukko  $X$  on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon  $X$  uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on tyhjä. Erityisesti  $\{\emptyset\}$  on joukon  $X$  ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko  $X$  on tyhjä.

**Määritelmä 3.5.** Olkoon  $X$  joukko ja joukko  $\mathcal{U} \subset X \times X$  sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko  $B \subset \mathcal{U}$  on uniformiteetin  $\mathcal{U}$  kanta, jos jokaiselle lähistölle  $V \in \mathcal{U}$  löytyy kannan alkio  $W \in B$ , jolla pätee  $W \subset V$ .

**Määritelmä 3.6.** Olkoon  $X$  joukko. Joukko  $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$  on joukon  $X$  erään uniformisuuden kanta, jos joukolle  $B$  pätee

(B1) Jos  $V_1, V_2 \in B$  niin on olemassa sellainen  $V_3 \in B$ , jolla  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ ,

(B2) Joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $V \in B$  osajoukko,

(B3) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $V' \in B$ , jolla  $V' \subset V^{-1}$ ,

(B4) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $W \in B$ , jolla  $W^2 \subset V$ .

**Määritelmä 3.7.** Seuraavan lauseen olemassaolon peruste.

**Lause 3.8.** *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko  $X$  varustettu uniformisuudella  $\mathcal{U}$ . Olkoon  $x \in X$  alkio ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö avaruudessa  $X$ . Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \text{ ja } B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

*joukkoja. Uniformiteetti  $\mathcal{U}$  määrää topologian joukolle  $X$  niin, että joukko  $V(x)$  on (lähistön  $V$  määräämä) ympäristö alkion  $x$  ja joukko  $B(x)$  on alkion  $x$  kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.*

*Todistus.* Olkoon joukko  $X$  varustettu uniformisuudella  $\mathcal{U}$ . Olkoon  $x \in X$  alkio,  $V \in \mathcal{U}$  lähistö avaruudessa  $X$  ja joukot  $V(x)$  ja  $B(x)$  kuten edellä. Alkion  $x$  pätee  $x \in V(x)$ , joten joukko  $V(x)$  on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle  $V, W \in \mathcal{U}$  pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ tai } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla  $V \cup W \in B$  ja  $V \cap W \in B$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa  $B(x)$  on alkion  $x$  kaikkien ympäristöjen joukko.[1]  $\square$

**Huomautus 3.9.** Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoiduksi topologiaksi.

**Määritelmä 3.10.** Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  kuvaus. Kuvaus  $f$  on *uniformisti jatkuva*, jos jokaiselle avaruuden  $X'$  lähistölle  $V'$  on olemassa avaruuden  $X$  lähistö  $V$  niin, että jokaiselle  $(x, y) \in V$  pätee  $(f(x), f(y)) \in V'$ .

**Korollaari 3.11.** Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon  $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$  kuvaus, jolla pätee  $g(x, y) = (f(x), f(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tällöin jos  $V'$  on avaruuden  $X'$  lähistö, niin alkukuva  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö.

**Lause 3.12.** Jokainen uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva uniformien määrittämien topologioiden suhteen.

*Todistus.* Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon  $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$  kuvaus, jolla pätee  $g(x, y) = (f(x), f(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ . Olkoon  $V'$  avaruuden  $X'$  lähistö ja  $x' \in X'$  alkio. Korollaarin 3.11 mukaan lähistön  $V'$  alkukuva  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö. Avaruuden  $X'$  uniformiteetin määrittämässä topologiassa kaava  $V'(x')$  määrää alkion  $x'$  ympäristön. Tällöin koska  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö, niin  $g^{-1}V'(g^{-1}(x'))$  on alkion  $x'$  alkukuvan  $g^{-1}(x') \in X$  ympäristö.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva.  $\square$

**Lause 3.13.** Olkoon  $X$ ,  $X'$  ja  $X''$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  ja  $g: X' \rightarrow X''$  uniformisti jatkuvia kuvaksia. Tällöin yhdistetty kuvaus  $g \circ f: X \rightarrow X''$  on uniformisti jatkuva.

*Todistus.* Lisätään myöhemmin.  $\square$

**Määritelmä 3.14.** Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  bijektiivinen kuvaus. Kuvaus  $f$  on isomorfismi, jos sekä kuvaus  $f$  että sen käänteiskuvaus  $f^{-1}$  ovat uniformisti jatkuvia.

**Määritelmä 3.15.** *Uniformiteettien vertailtavuus.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$ , jos identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$  on uniformisti jatkuva. Tällöin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$  on karkeampi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$ . Jos lisäksi pätee  $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ , niin  $\mathcal{U}_1$  on aidosti hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$  ja vastaavasti  $\mathcal{U}_2$  on aidosti karkeampi kuin  $\mathcal{U}_1$ . Kahta uniformiteettia  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  voidaan vertailla, jos  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$ . Uniformiteetit  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  ovat keskenään identtisiä, jos  $\mathcal{U}_1$  on sekä hienompi että karkeampi kuin  $\mathcal{U}_2$ .

**Korollaari 3.16.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$  jos ja vain jos jokaisella lähistöllä  $V \in \mathcal{U}_2$  pätee  $V \in \mathcal{U}_1$ .

**Korollaari 3.17.** *Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$  ja  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$ . Tällöin uniformiteetin  $\mathcal{U}_1$  indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin  $\mathcal{U}_2$  indusoima topologia.*

*Todistus.* Ympäristökannat. □

**Määritelmä 3.18.** *Initial uniformities. Kuvauserheen indusoima uniformiteetti.* Olkoon  $X$  joukko ja  $Y_i$  uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla  $i \in I$ , jollain indeksijoukolla  $I$ . Olkoon  $f_i: X \rightarrow Y_i$  uniformisti jatkuvia kuvauksia kaikilla  $i \in I$ . Olkoon  $g = f_i \times f_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$  kuvaus kaikilla  $i \in I$ . Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in I} g^{\leftarrow}(V_i) \mid V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

missä  $\mathcal{U}_i$  on avaruuden  $Y_i$  uniformiteetti. Tällöin  $B$  on kanta eräälle avaruuden  $X$  uniformiteetille  $\mathcal{U}$ . Kyseinen uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset  $f_i$  ovat uniformisti jatkuvia.

**Määritelmä 3.19.** *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon  $X$  joukko ja  $I$  jokin indeksijoukko. Olkoon  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  perhe uniformiteetteja joukolle  $X$ . Tällöin perheen  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  *pienin yläraja* on uniformiteetti  $\mathcal{U}$ , joka on kuvausten  $id: X \rightarrow (X, \mathcal{U}_i)$  määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.



## Luku 4

# Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kuvaus. Kuvaus  $f$  on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

$$(P1) \quad f(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X,$$

$$(P2) \quad f(x, y) = f(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

$$(P3) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \text{ kaikilla } x, y, z \in X.$$

*Huomautus 4.2.* Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitetaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

$$(M1) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Siis pseudometriikka on metriikan yleistys ja siten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

**Esimerkki 4.3.** Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.4.** Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin  $f$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.5.** Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kaavalla  $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.6.** Olkoon  $X$  kaikkien muotoa  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kaavalla  $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$  määrittää pseudometriikan joukolle  $X$ .

*Huomautus 4.7.* Ehdosta (P3) seuraa, että jos  $f(x, z) + f(z, y) < \infty$  niin  $f(x, y) < \infty$ . Tällöin koska kaavat  $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$  ja  $f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z)$  pätevät, niin myös kaava  $|f(x, z) - f(z, y)| \leq f(x, y)$  pätee.

**Esimerkki 4.8.** Olkoon  $f$  pseudometriikka ja  $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$  reaaliluku. Tällöin kuvaus  $\lambda f$ , jolla  $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.9.** Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  perhe joukon  $X$  pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla  $x, y \in X$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.10.** Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  perhe joukon  $X$  pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla  $x, y \in X$  kaavasta

$$f_i(x, y) \leq f_i(x, z) + f_i(z, y)$$

seuraa kaava

$$\sup_{i \in I} f_i(x, y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x, z) + f_i(z, y)).$$

Tällöin kuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], f(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla  $x, y \in X$  on pseudometriikka.

## Luku 5

# Pseudometriikan määrittämä uniformisuus

Oletamme koko luvun 5 ajan, että  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ .

**Lause 5.1.** *Olkoon  $a \in \mathbb{R}_+$  reaaliluku ja  $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  joukko kaavalla*

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

*Kokoelma  $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$  muodostaa joukon  $\mathbb{R}^n$  uniformisuuden kannan.*

*Todistus.* Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

- (B1) Olkoon  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$  reaalilukuja, joilla  $a_1 \leq a_2$ . Olkoon  $x, y \in \mathbb{R}$  ja jos  $|x - y| \leq a_1$ , niin  $|x - y| \leq a_2$ . Näin ollen  $U_{a_1} \subset U_{a_2}$  ja siis  $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$ ,
- (B2) Olkoon  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin kaikilla  $a \in \mathbb{R}_+$  pätee  $|x - x| = 0 < a$ , joten joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $U_a \in B$  osajoukko,
- (B3) Olkoon  $x', y' \in \mathbb{R}^n$  ja  $a \in \mathbb{R}_+$ . Tällöin jos  $|x' - y'| \leq a$  niin myös  $|y' - x'| \leq a$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle  $U_a$  pätee  $U_a \subset U_a^{-1}$ .

(B4) Olkoon  $a \in \mathbb{R}_+$  reaaliluku ja  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$  sellaisia pisteitä, joilla  $|x - z| \leq a$  ja  $|z - y| \leq a$ , eli  $(x, z) \in U_a$  ja  $(z, y) \in U_a$ . Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli  $|x - y| \leq 2a$ . Tästä seuraa, että  $U_a^2 = U_{2a}$ , joten jokaiselle reaaliluvun  $b \in \mathbb{R}_+$  määräämälle joukolle  $U_b$  löytyy joukko  $U_{b/2}$ , jolla  $U_{b/2}^2 \subset U_b$ .

Siis kokoelma  $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$  muodostaa joukon  $\mathbb{R}^n$  uniformisuuden kannan.  $\square$

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

**Lause 5.2.** *Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  pseudometriikka joukolle  $X$ . Tällöin pseudometriikka  $f$  määrittää sellaisen uniformiteetin joukolle  $X$ , jonka kannan muodostaa kokoelma  $B = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ .*

*Todistus.* Olkoon  $a \in \mathbb{R}_+$  reaaliluku ja merkitään joukkoa  $f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X$  kaavalla  $f^{\leftarrow}[0, a] = U_a$ . Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$  reaalilukuja, joilla  $a_1 \leq a_2$ . Tällöin

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a_1] \subset f^{\leftarrow}[0, a_2] = U_{a_2}$$

ja siis  $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$ ,

(B2) Kuvaus  $f$  on pseudometriikka, joten pseudometriikan ehdon (P1) nojalla kaikilla  $x \in X$  pätee  $f(x, x) = 0$ . Toisin sanoen jokainen alkio pistepareista  $(x, x)$  muodostuvasta joukosta  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  kuvautuu pseudometriikassa nollassi. Näin ollen joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  kuuluu sisältyy jokaisen suljetun välin  $[0, a]$  alkukuvaan  $f^{\leftarrow}[0, a]$  kaikilla  $a \in \mathbb{R}_+$ .

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että  $f(x, y) = f(y, x)$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tällöin  $(x, y) \in U_a \Leftrightarrow (y, x) \in U_a$  ja siis  $U_a^{-1} = U_a$ , eli jokaiselle  $U_a$  pätee  $U_a \subset U_a^{-1}$ .

(B4) Olkoon  $a \in \mathbb{R}_+$  reaaliluku ja  $x, y, z \in X$  sellaisia alkioita, joilla  $f(x, z) \leq a$  ja  $f(z, y) \leq a$ , eli  $(x, z) \in U_a$  ja  $(z, y) \in U_a$ . Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli  $f(x, y) \leq 2a$ . Tästä seuraa, että  $U_a^2 = U_{2a}$ , joten jokaiselle reaaliluvun  $b \in \mathbb{R}_+$  määräämälle joukolle  $U_b$  löytyy joukko  $U_{b/2}$ , jolla  $U_{b/2}^2 \subset U_b$ .

Siis kokoelma  $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\} = \{f^{\leftarrow}[0, a] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$  muodostaa joukon  $\mathbb{R}^n$  uniformisuuden kannan ja voimme nyt muodostaa seuraavan määritelmän.  $\square$

**Määritelmä 5.3.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  ja  $g$  pseudometriikoita joukolle  $X$ . Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat  $f$  ja  $g$  määrittävät jotkut uniformiteetit joukolle  $X$ . Pseudometriikat  $f$  ja  $g$  ovat ekvivalentteja, jos ne määrittävät saman uniformiteetin.

**Korollari 5.4.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  ja  $g$  pseudometriikoita joukolle  $X$ . Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan  $f$  määrittämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  on karkeampi kuin pseudometriikan  $g$  määrittämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$ , jos ja vain jos jokaiselle  $a \in \mathbb{R}_+$  on olemassa  $b \in \mathbb{R}_+$ , jolla  $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$  kaikilla  $x, y \in X$ .

Lisäksi, jos kaikilla  $x, y \in X$  pätee  $f(x, y) \leq b \Rightarrow g(x, y) \leq a$  niin  $f$  ja  $g$  ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

*Todistus.* Olkoon  $X$  joukko ja  $f$  ja  $g$  pseudometriikoita joukolle  $X$ . Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan  $f$  määrittämän uniformiteetin  $\mathcal{U}_f$  kannan muodostaa kokoelma  $B_f = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ . Tällöin uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin  $\mathcal{U}_g$  kannan muodostaa kokoelma  $B_g = \{g^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$  ja uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$  on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

$\Rightarrow$  Olkoon uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  karkeampi kuin  $\mathcal{U}_g$  ja näin ollen määritelmän 3.15 mukaan identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$  on uniformisti jatkuva. Määritelmän 3.10 mukaan tällöin jokaiselle lähistölle  $V' \in \mathcal{U}_f$  on olemassa lähistö  $V \in \mathcal{U}_g$ , jolla pätee jos  $(x, y) \in V$ , niin  $(x, y) \in V'$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä saamme edeltävän seuraavaan muotoon: Jokaisella  $a \in \mathbb{R}_+$  on olemassa  $b \in \mathbb{R}_+$  niin, että kaikilla  $x, y \in X$  pätee  $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$ , eli  $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ .

$\Leftarrow$  Olkoon jokaiselle  $a \in \mathbb{R}_+$  on olemassa  $b \in \mathbb{R}_+$ , jolla  $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ , eli  $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$ , kaikilla  $x, y \in X$ . Siis jokaiselle uniformiteetin  $\mathcal{U}_f$  kannan jäsenelle  $f^{\leftarrow}[0, a']$ ,  $a' \in \mathbb{R}_+$  on olemassa uniformiteetin  $\mathcal{U}_g$  kannan jäsen  $g^{\leftarrow}[0, b']$ ,  $b' \in \mathbb{R}_+$  niin, että  $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b'] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a']$ , kaikilla  $x, y \in X$ . Näin ollen identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_g) \rightarrow (X, \mathcal{U}_f)$  on uniformisti jatkuva ja siten uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$  on uniformiteettia  $\mathcal{U}_f$  hienompi. Siis pseudometriikan  $f$  määrittämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_f$  on karkeampi kuin pseudometriikan  $g$  määrittämä uniformiteetti  $\mathcal{U}_g$ .

Lisäksi määritelmistä 3.15 ja 5.3 seuraa, että jos  $\mathcal{U}_f$  on sekä hienompi että karkeampi kuin  $\mathcal{U}_g$ , niin pseudometriikat  $f$  ja  $g$  ovat ekvivalentteja.  $\square$

**Määritelmä 5.5.** Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  perhe pseudometriikkoja joukolle  $X$ . Tällöin pseudometriikkojen  $f_i$  määrittämien uniformiteettien  $\mathcal{U}_{f_i}$  pienintä ylärajaa sanotaan perheen  $(f_i)_{i \in I}$  määrittämäksi uniformiteetiksi.

**Määritelmä 5.6.** Olkoon  $X$  joukko ja  $(f_i)_{i \in I}$  ja  $(g_j)_{j \in J}$  perheitä pseudometriikoista joukolle  $X$ . Perheet  $(f_i)$  ja  $(g_j)$  ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittämät uniformiteetit ovat samoja.

*Huomautus 5.7.*

**Lause 5.8.**

**Määritelmä 5.9.**

**Korollari 5.10.**

**Esimerkki 5.11.**

**Lemma 5.12.**

# Kirjallisuutta

- [1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.
- [2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.