Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

5. heinäkuuta 2017

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Käytämme koko tutkielman ajan merkintää $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Määritelmä 2.1. Olkoon X joukko ja V ja W karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X, \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\},$$

$W^2 = W \circ W$ ja $W^n = W \circ W^{n-1}$.

Määritelmä 2.2. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on avoin, jos se on kokoelman $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ alkio.

Määritelmä 2.3. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on alkion x *ympäristö*, jos on olemassa sellainen avoin osajoukko $B \subset X$, jolla $x \in B \subset A$.

Huomautus 2.4. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ avoin osajoukko $A \subset X$ on jokaisen alkionsa $x \in A$ ympäristö.

Määritelmä 2.5. *Ympäristökanta.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x *ympäristökanta* (topologiassa $\mathcal{T}$), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Korollaari 2.6. *Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ alkion $x \in X$ kaikkien ympäristöjen kokoelma $B(x)$ on alkion x ympäristökanta.*

Esimerkki 2.7. Jos joukkoperhe $B \subset \mathcal{P}(X)$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta ja $x \in X$ alkio, niin joukko $B(x) = \{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella alkiolla $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, niin kokoelma $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta.

Lause 2.8. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian $\mathcal{T}$ esikanta. Lisäksi $\mathcal{T}$ on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia $\mathcal{T}$ on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. Topologia II [3] lause 2.19. □

Määritelmä 2.9. *Topologioiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukolle X. Topologia $\mathcal{T}_2$ on karkeampi kuin topologia $\mathcal{T}_1$, jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin $\mathcal{T}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_2$.

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. Uniforminen rakenne (tai uniformiteetti) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöiksi. Uniformiteetilla $\mathcal{U}$ varustettua joukkoa X sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla:

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Kokoelma $\{\emptyset\}$ on ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti tyhjälle joukolle.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja kokoelma $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ uniformiteetti joukolle X. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ *kanta*, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Lause 3.6. *Olkoon X joukko. Kokoelma $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X erään uniformiteetin kanta, jos kokoelmalle B pätee*

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Todistus. Olkoon X joukko ja $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ kokoelma joukon $X \times X$ osajoukkoja. □

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon tällöin*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \textit{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkiolle x ja joukko $B(x)$ on alkion x ympäristökanta kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$, $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X. Lisäksi olkoot joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Joukko $V(x)$ on epätyhjä, sillä $x \in V(x)$. Olkoon $W \in \mathcal{U}$ lähistö, jolloin $W(x)$ on alkion x ympäristö. Alkion x ympäristöille $V(x)$ ja $W(x)$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x), \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehdon (U2) nojalla pätee $V \cap W \in B$. Ehdosta (U1) seuraa, että joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko ja siten korollaarin 2.6 nojalla ympäristökanta. □

Huomautus 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.9. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f \colon X \to X'$ kuvaus. Kuvaus f on *tasaisesti jatkuva* (uniformly continuous), jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.10. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x,y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Todistus. Korollaari on suora seuraus määritelmästä 3.9 ja uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdosta (U1). □

Lause 3.11. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f on jatkuva, kun varustetaan joukot X ja Y uniformiteettiensa indusoimilla topologioilla.*

Todistus. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x,y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden X' uniformiteetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion x' ympäristön avaruudessa X. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $(g^{\leftarrow}V')(x)$ on alkion x ympäristö. Erityisesti ympäristö $(g^{\leftarrow}V')(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x,y) \in g^{\leftarrow}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

Lause 3.12. *Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva.*

Todistus. Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia, $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia ja V'' avaruuden X'' lähistö. Tällöin tasaisesti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden X' lähistö V', jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V, jolla jokaisella $(x,y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle V'' on olemassa lähistö V, jolla jokaisella $(x,y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva. □

Määritelmä 3.13. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on *isomorfismi*, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat tasaisesti jatkuvia.

Määritelmä 3.14. *Uniformiteettien vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_1$, jos identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_1) \to (X, \mathcal{U}_2)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$.

Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin $\mathcal{U}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{U}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{U}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{U}_1$. Sanotaan, että kahta uniformiteettia $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{U}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$. Uniformiteeteille $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos $\mathcal{U}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$.

Korollaari 3.15. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X ja $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Tällöin uniformiteetin $\mathcal{U}_1$ indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin $\mathcal{U}_2$ indusoima topologia.*

Määritelmä 3.17. *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformity). Olkoon X joukko ja Y_i uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i\colon X \to Y_i$ kuvauksia kaikilla $i \in I$. Olkoon nyt $g_i = f_i \times f_i$ kuvaus joukolta $X \times X$ joukolle $Y_i \times Y_i$ kaikilla $i \in I$. Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{k=0}^{n} g_{i_k}^{\leftarrow}(V_{i_k}) \mid V_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}, i_k \in I, n \in \mathbb{N} \right\}$$

joukko missä $\mathcal{U}_{i_k}$ on avaruuden Y_{i_k} uniformiteetti. Tällöin B on kanta kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ avaruudelle X indusoimalle uniformiteetille $\mathcal{U}$. Kyseinen uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat tasaisesti jatkuvia.

Määritelmä 3.18. *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X. Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti $\mathcal{U}$, joka on kuvausten $id\colon X \to (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.17 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(P1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$,

(P2) $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(P3) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Huomautus 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

(M1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kaikilla $x, y \in X$.

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g\colon X \to \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ kaavalla $f(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)|dt$ määrittelee pseudometriikan joukolle X.

Huomautus 4.7. Määritelmän 4.1 ehdon (P3) nojalla epäyhtälöstä $f(x,z) + f(z,y) < \infty$ seuraa $f(x,y) < \infty$. Näin ollen epäyhtälöistä

$$f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z) \text{ ja } f(y,z) \leq f(y,x) + f(x,z)$$

seuraa epäyhtälö $|f(x,z) - f(z,y)| \leq f(x,y)$.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka joukolle X ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus λf, jolla $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ kaikilla $x \in X \times X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i\in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], \quad f(x,y) = \sum_{i\in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i\in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ epäyhtälöstä $f_i(x,y) \leq f_i(x,z) + f_i(z,y)$ seuraa epäyhtälö

$$\sup_{i\in I} f_i(x,y) \leq \sup_{i\in I} \left(f_i(x,z) + f_i(z,y)\right).$$

Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ missä

$$f(x,y) = \sup_{i\in I} f_i(x,y) \quad \text{kaikilla } x, y \in X$$

on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittelemä uniformiteetti

Lause 5.1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko kaavalla*

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan.

Todistus. Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin kaavasta $|x - y| \leq a_1$ seuraa $|x - y| \leq a_2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,

(B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}_+$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a =& \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $(x, z) \in U_a$ ja $(z, y) \in U_a$, eli $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \overset{\triangle\text{−ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x-y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan. □

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 5.2. *Olkoon X joukko ja f pseudometriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikka f määrittelee sellaisen uniformiteetin joukolle X, jonka kannan muodostaa kokoelma*

$$B = \{f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja merkitään joukkoa $f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X$ kaavalla $f^{\leftarrow}[0,a] = U_a$. Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoot $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin pätee

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0,a] \subset f^{\leftarrow}[0,b] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan määritelmän 4.1 ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x,x) = 0$. Toisin sanoen pistepareista (x,x) muodostuvan joukon $\{(x,x) \mid x \in X\}$ jokainen alkio kuvautuu pseudometriikassa nollaksi. Näin ollen joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ sisältyy jokaisen suljetun välin $[0,a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0,a]$ kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x,y) = f(y,x)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(x,y) \in U_a \Leftrightarrow (y,x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $(x,z) \in U_a$ ja $(z,y) \in U_a$, eli $f(x,z) \leq a$ ja $f(z,y) \leq a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x,y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\} = \{f^{\leftarrow}[0,a] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan ja voimme nyt muodostaa seuraavan määritelmän. □

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittelevät jotkut uniformiteetit joukolle X. Pseudometriikat f ja g ovat *ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

Korollaari 5.4. *Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa sellainen $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$.*

Lisäksi, jos jokaiselle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $f(x,y) \leq b \Rightarrow g(x,y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$, niin f ja g ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

Todistus. Olkoon X joukko ja f ja g pseudometriikoita joukolle X. Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan f määrittelemän uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_f = \{f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0,a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$$

ja uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0,a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

- $\Rightarrow$ Olkoon uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$ ja näin ollen määritelmän 3.14 mukaan identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan jokaiselle maalijoukon lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähtöjoukon lähistö $V \in \mathcal{U}_g$ niin, että jokaiselle $(x,y) \in V$ pätee $(x,y) \in V'$ kaikilla $x, y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä voidaan edeltävä ehto muotoilla seuraavasti: Jokaisella $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a]$, eli $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$.

- $\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle reaaliluvulle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa sellainen $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$, eli $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a]$, kaikilla $x, y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0,a']$ missä $a' \in \mathbb{R}_+$ on olemassa uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0,b']$ missä $b' \in \mathbb{R}_+$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b'] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a']$. Näin ollen identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva ja siten uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on uniformiteettia $\mathcal{U}_f$ hienompi. Siis pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$.

Lisäksi määritelmistä 3.14 ja 5.3 seuraa, että jos $\mathcal{U}_f$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$, niin pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja. $\square$

Määritelmä 5.5. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Tällöin pseudometriikkojen f_i määrittelemien uniformiteettien $\mathcal{U}_{f_i}$ pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemäksi uniformiteetiksi.

Määritelmä 5.6. Olkoon X joukko ja olkoot $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ joukon X pseudometriikkaperheitä. Perheet (f_i) ja (g_j) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit ovat samoja.

Määritelmä 5.7. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon X pseudometriikkaperhe. Olkoon $H' \subset I$ äärellinen joukko ja $g_{H'}\colon X\times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla $g_{H'}(x) = \sup_{i\in H'} f_i(x)$. Nyt

$$\{g_H^{\leftarrow}([0,a]) \subset X\times X \mid H \subset I \text{ äärellinen}, a\in\mathbb{R}_+\}$$

on joukon X erään uniformiteetin kanta. Olkoon nyt $J = \{H \mid H \subset I, H \text{ äärellinen }\}$ potenssijoukon $\mathcal{P}(I)$ äärellinen osajoukko ja g_J kuvaus, jolla $\sup_{H\in J}(g_H) \in (g_H)_{H\subset I}$.

Nyt siis $\sup_{H\in J}(g_H) \in (g_H)_{H\subset I}$ ja $H \subset I$ on äärellinen joukko. Tällöin sanotaan, että perhe (g_H) on *saturoitu* (saturated), *ekvivalentti* perheen $(f_i)_{i\in I}$ kanssa ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$.

Mikäli indeksijoukko I on äärellinen, niin perheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti on sama kuin pseudometriikan $g = \sup_{i\in I} f_i$ määräämä.

Määritelmä 5.8. Olkoon uniformiteetit $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}'$ saturoitujen perheiden $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ määräämiä. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}'$, jos jokaisella $i\in I$ ja $a\in\mathbb{R}_+$ löytyy $j\in J$ ja $b\in\mathbb{R}_+$, joilla ehdosta $g_j(x,y)\le b$ seuraa $f_i(x,y)\le a$. Vastaavasti tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}'$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}$.

Lemma 5.9. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i\in I}$, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$.*

Todistus. Jokaiselle lähistölle $U\in\mathcal{U}$ määritellään karteesisen tulon $X\times X$ osajoukoista muodostuva perhe (V_n), jolla $V_1\subset U$ ja $V_{n+1}^2 \subset V_n$ kaikilla $n\in\mathbb{N}, n\ge 1$. Nyt perhe (V_n) on kanta eräälle joukon X uniformiteetille $\mathcal{U}_V$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{U}$. Erityisesti $\mathcal{U}$ on uniformiteettien $\mathcal{U}_V, V\in\mathcal{U}$ pienin yläraja. Tällöin lemma on seuraus seuraavasta lauseesta, sillä (U_n) on uniformiteetin $\mathcal{U}$ numeroituva kanta. $\square$

Lause 5.10. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Jos uniformiteetilla $\mathcal{U}$ on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka $f\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$, jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanssa.*

Todistus. Olkoon (V_n) numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin olkoon (U_n) perhe symmetrisiä uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöjä, joilla $U_1 \subset V_1$ ja $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$. Nyt (U_n) on myös uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta ja erityisesti $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \geq 1$.

Olkoon $g \colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ kuvaus, jolla

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \geq 1, \\ 1 & \text{, jos } (x,y) \notin U_1, \\ 2^{-k} & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \leq k \text{ ja } (x,y) \notin U_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt g on symmetrinen, positiivinen ja $g(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $f \colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ kuvaus, jolla

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ ja $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$ joukon X alkioista muodostuva jono, jossa $z_0 = x$ ja $z_p = y$. Kuvauksen f määrittelystä seuraa, että f on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat $f(x,y) \geq 0$ ja $f(x,x) = 0$ pätevät kaikilla $x, y \in X$. Siis f on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y) \tag{5.11}$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli $f(x,y) \leq g(x,y)$ seuraa siitä, että

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{1} g(z_i, z_i + 1) = g(z_0, z_1) = g(x,y).$$

Kaavan 5.11 vasen puoli, eli $\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y)$ osoitetaan induktion avulla. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Nyt jokaisella $p+1$ alkion jonolla joukon X alkioita $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$, jolla $z_0 = x$ ja $z_p = y$, saadaan induktio-oletukseksi

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x,y). \tag{5.12}$$

Jos $p = 1$, niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x,y) \geq \frac{1}{2}\, g(x,y).$$

Merkitään

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}), \tag{5.13}$$

jolloin induktio-oletus voidaan kirjoittaa muodossa $a \geq \frac{1}{2} g(x,y)$. Määrittelyn nojalla $g(x,y) \leq 1$, joten jos $a \geq 1/2$, niin yhtälö 5.12 pätee muodossa $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} g(x,y)$. Oletetaan, että $a < 1/2$ ja että h on suurin niistä indekseistä q, joilla $\sum_{i<q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Tällöin

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja lisäksi} \quad \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2,$$

sillä $\sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$. Edeltävien kaavojen ja induktio-oletuksen nojalla (sijoituksella $p = h$) pätee

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x, z_h),$$

eli $g(x, z_h) \leq a$. Toisaalta yllä olevien kaavojen nojalla pätee myös

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(z_{h+1}, y),$$

eli $g(z_{h+1}, y) \leq a$. Toisaalta luvun a määrittelyn nojalla $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $2^{-k} \leq a$. Tällöin oletuksesta $a < 1/2$ seuraa $k \geq 2$ ja kuvauksen g määrittelystä seuraa, että $(x, z_h) \in U_k, (z_h, z_{h+1}) \in U_k$ ja $(z_{h+1}, y) \in U_k$. Nyt $(x,y) \in U_k^3$ ja lähistöperheen (U_n) määrittelyn nojalla $(x,y) \in U_{k-1}$. Kuvauksen g määrittelyn nojalla $g(x,y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$, eli $\frac{1}{2} g(x,y) \leq a$.

Näin ollen kaavan 5.11 epäyhtälöt pätevät ja niistä seuraa, että jokaisella $a > 0$ pätee $U_k \subset f^{\leftarrow}([0,a])$, kun $2^{-k} < a$. Toisaalta myös $f^{\leftarrow}([0,a]) \subset U_k$, joten joukot $f^{\leftarrow}([0,a])$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}$. Siis löydettiin pseudometriikka f, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$. $\square$

Luku 6

Uniformisoituvat avaruudet

Tässä luvussa perehdytään uniformisoituviin (uniformizable) avaruuksiin.

Määritelmä 6.1. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *yhteensopiva* topologian $\mathcal{T}$ kanssa, jos uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoima topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ on sama kuin topologia $\mathcal{T}$.

Määritelmä 6.2. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *uniformisoituva*, jos joukolle X voidaan muodostaa topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti.

Lause 6.3. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Avaruuden $(X, \mathcal{T})$ uniformisoituvuus on yhtäpitävää seuraavan ehdon kanssa:*

(Z) Kaikkien alkioiden $x \in X$ kaikilla ympäristöillä $V \subset X$ on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus $f\colon X \to [0,1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V$.

Todistus. Näytetään ensin, että ehto on välttämätön. Lauseen 5.9 nojalla uniformiteetille voidaan määritellä pseudometriikkaperhe, joka indusoi kyseisen uniformiteetin. Lisäksi uniformiteetin indusoiman pseudometriikkaperheen voidaan olettaa määritelmän 5.8 nojalla olevan saturoitu. Tällöin määritelmän 5.2 nojalla on olemassa $a \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in I$ ja pseudometriikka $f_\alpha \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_\alpha(x_0, x) \geq a$ kaikilla $x \in X \setminus V_0$ ja $f_\alpha(x_0, x) = 0$. Tämän seurauksena kuvaus $g\colon X \to [0,1]$ kaavalla $g(x) = \inf\big(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x)\big)$ pisteelle x_0 ja ympäristölle V_0 toteuttaa ehdon (Z).

Toisaalta ehto on myös riittävä: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, jolla ehto (Z) pätee. Olkoon $x_0 \in X$ alkio, $V_0 \subset X$ alkion x_0 ympäristö ja $f\colon X \to [0,1]$ ehdon (Z) antama kuvaus alkiolle x_0 ja sen ympäristölle V_0. Tällöin kuvaus $g\colon X \times X \to [0, \infty]$ kaavalla $g(x_0, x) = f(x)$ on pseudometriikka. Olkoon $\mathcal{U}$ pseudometriikan g määräämä uniformiteetti ja $a \in R_+$ reaaliluku. Tällöin $g^{\leftarrow}[0, a] = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq a\}$ on lähistö pseudometriikan g määräämässä uniformiteetissa $\mathcal{U}$. Merkitään $g^{\leftarrow}[0, a] = U_a$, jolloin joukko $U_a(x_0) = \{y \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristö uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoimassa topologiassa $\mathcal{T}'$. Joukkojen määrittelyistä seuraa, että jos $a < 1$, niin $U_a(x) \subset V_0$ ja tällöin kokoelma $B = \{U_a(x_0) \mid g(x_0, y) \leq a\}$ on alkion x_0 ympäristökanta topologiassa $\mathcal{T}$.

Siis avaruus $(X, \mathcal{T})$, joka toteuttaa ehdon (Z) on uniformisoituva. $\square$

Luku 7

Täydellinen uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään täydellinen uniforminen avaruus minimaalisten Cauchy filttterien avulla.

Sellaiselle joukolle, jolle on määritelty uniformiteetti voidaan määritellä myös *mielivaltaisen pieni* osajoukko kyseisen uniformiteetin suhteen. Osajoukko on mielivaltaisen pieni silloin, kun kaikki osajoukon alkiot ovat mielivaltaisen lähellä toisiaan. Näin saadaan seuraava määritelmä.

Määritelmä 7.1. Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Osajoukko $A \subset X$ on $V-$*pieni*, jos $(x, y) \in V$ jokaisella $x, y \in X$, eli jos $A \times A \subset V$.

Lause 7.2. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon lisäksi $A, B \subset X$ $V-$pieniä osajoukkoja, joiden leikkaus on epätyhjä. Tällöin yhdiste $A \cup B$ on V^2-pieni.*

Todistus. Olkoot $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in A \cap B$ alkioita. Tällöin alkioparit (x, z) ja (z, y) kuuluvat lähistöön V ja näin ollen alkiopari (x, y) kuuluu joukkoon V^2. $\square$

Määritelmä 7.3. *Filtteri.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ potenssijoukon osajoukko. Joukko F on *filtteri* joukolle X, jos sille pätee uniformiteetin ehtojen (U1) ja (U2) lisäksi seuraava ehto:

(F) Tyhjä joukko ei kuulu joukkoon $\mathcal{F}$.

Määritelmä 7.4. Olkoon X uniforminen avaruus. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X)$ on erään filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos seuraavat ehdot pätevät:

1. Jos $A_1, A_2 \in B$, niin on olemassa sellainen $A_3 \in B$, jolla $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

2. joukko B on epätyhjä eikä tyhjä joukko ole joukon B alkio.

Tällöin kanta B virittää filtterin $\mathcal{F}$. Lisäksi kaksi kantaa ovat *ekvivalentteja*, jos ne virittävät saman filtterin.

Lause 7.5. *Joukon X filtteri $\mathcal{F}$ kannalla B on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}'$ kannalla B' jos ja vain jos jokaiselle $M \in B$ löytyy sellainen $M' \in B'$, jolla $M' \subset M$.*

Määritelmä 7.6. Olkoon X joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X ja $\mathcal{F}$ filtteri joukolle X. Filtteriä $\mathcal{F}$ sanotaan *Cauchy* filtteriksi, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy osajoukko $A \subset X$, joka on $V-$pieni ja kuuluu filtteriin $\mathcal{F}$.

Cauchy filtterit ovat siis mielivaltaisen pieniä joukkoja.

Määritelmä 7.7. *Filttereiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle X. Filtteri $\mathcal{F}_2$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}_1$, jos $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Tällöin $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{F}_2$.

Jos lisäksi pätee $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, niin $\mathcal{F}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{F}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{F}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{F}_1$. Sanotaan, että kahta filtteriä $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{F}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$. Filttereille $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ pätee $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, jos $\mathcal{F}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

Lause 7.8. *Topologisessa avaruudessa osajoukon (vastaavasti alkion) kaikkien ympäristöjen joukko on filtteri, jota sanotaan ympäristöfiltteriksi.*

Määritelmä 7.9. *Filtterin raja-arvo.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{F}$ filtteri joukolle X. Alkio $x \in X$ on filtterin $\mathcal{F}$ *raja-arvo*, jos filtteri $\mathcal{F}$ on hienompi kuin alkion x ympäristöfiltteri. Näin ollen filtteri $\mathcal{F}$ *suppenee* (converge) kohti alkiota x.

Lisäksi, jos B on filtterin $\mathcal{F}$ kanta ja alkio x on filtterin $\mathcal{F}$ raja-arvo, niin alkio x on myös kannan B raja-arvo ja kanta B suppenee kohti alkiota x.

Lause 7.10. *Filtterikanta B suppenee kohti alkiota $x \in X$, jos ja vain jos jokainen alkion x ympäristö sisältää filtterikannan jäsenen.*

Todistus. □

Lause 7.11. *Filtteri $\mathcal{F}$ suppenee kohti alkiota $x \in X$, jos ja vain jos jokainen filtteriä $\mathcal{F}$ hienompi ultrafiltteri suppenee kohti alkiota x.*

Todistus. □

Lause 7.12. *Olkoon X uniforminen avaruus. Tällöin jokainen suppeneva filtteri on Cauchy filtteri.*

Todistus. Olkoon X joukko, $\mathcal{F}$ suppeneva filtteri joukolle X ja $x \in X$ sellainen alkio, jota kohti $\mathcal{F}$ suppenee. Tällöin alkion x ympäristöfiltteri $B(x)$ sisältyy filtteriin $\mathcal{F}$. Näin ollen jokaisella lähistöllä $V' \in \mathcal{U}$ pätee $V' \in \mathcal{F}$.

Olkoon nyt $V \in \mathcal{U}$ lähistö ja $x \in X$ alkio. Ehdon (Ua) nojalla on olemassa sellainen lähistö $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^{-1} \circ W \subset V$. Huomataan, että joukko

$$W(x) \times W(x) = \{(y_1, y_2) \mid (x, y_1) \in W, (x, y_2) \in W\}$$

sisältyy joukkoon

$$W^{-1} \circ W = \{(y_1, y_2) \mid \text{on olemassa } x',\ \text{jolla } (y_1, x') \in W^{-1}, (x', y_2) \in W\}.$$

Näin ollen lähistölle V löydettiin osajoukko $W(x) \in X$, jolla $W(x) \times W(x) \subset W^{-1} \circ W \subset V$ ja $W(x) \in \mathcal{F}$. Määritelmän 7.6 nojalla $\mathcal{F}$ on Cauchy filtteri. □

Lause 7.13. Minimaalinen Cauchy filtteri. *Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus. Jokaiselle joukon X Cauchy filtterille on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchy filtteri $\mathcal{F}_0$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{F}$, eli $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Jos B on kanta filtterille $\mathcal{F}$ ja G on uniformiteetin $\mathcal{U}$ symmetristen lähistöjen kanta, niin joukot $V(M) = \{y \mid (x, y) \in V, x \in M\}$ missä $M \in B$ ja $V \in G$ muodostavat filtterin $\mathcal{F}$ minimaalisen Cauchy filtterin kannan B_0.*

Todistus. Tarkistetaan kannan ehdot joukolle B_0:

1. Olkoot $V_1(M_1), V_2(M_2) \in B_0$ joukkoja. Nyt $M_1, M_2 \in B$, joten on olemassa joukko $M_3 \in B$, jolla pätee $M_3 \subset M_1 \cap M_2$. Toisaalta $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, joten on olemassa joukko $V_3 \in \mathcal{U}$, jolla pätee $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Nyt joukko $V_3(M_3) = \{y \mid (x, y) \in V_3, x \in M_3\}$ on joukon $(V_1 \cap V_2)(M_1 \cap M_2) = V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$ osajoukko, eli $V_3(M_3) \subset V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$.

2. Olkoon $M \in B$ joukko ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Tällöin joukko M on epätyhjä, joten myös joukko $V(M)$ on epätyhjä. Näin ollen tyhjä joukko ei ole joukon B_0 alkio.

Kannan B_0 virittämä filtteri $\mathcal{F}_0$ on karkeampi kuin kannan B virittämä $\mathcal{F}$, sillä jokaisella $M \in B$ ja jokaisella $V \in \mathcal{U}$ pätee $M \subset V(M)$. □

Määritelmä 7.14.

Luku 8

Hausdorff uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään Hausdorff uniformiset avaruudet ja esitetään niiden ominaisuuksia, oleellisimpana täydelliseen Hausdorff uniformiseen avaruuteen laajentaminen.

Määritelmä 8.1. Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *Hausdorff*, jos kaikille $x, y \in X, x \neq y$ on olemassa pseudometriikka $f_i \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_i(x, y) \neq 0$. Erityisesti, jos uniformiteetti $\mathcal{U}$ on Hausdorff ja yhden pseudometriikan f määrittelemä, niin $f(x, y) \neq 0$ kaikilla $x, y \in X$.

Uniformiteetti $\mathcal{U}$ ei ole Hausdorff, jos on olemassa sellaiset alkiot $x, y \in X$, joilla $x \neq y$ ja $f_i(x, y) = 0$ kaikilla $i \in I$.

Lemma 8.2. *Olkoon X uniforminen avaruus, $A \subset X$ epätyhjä osajoukko ja f pseudometriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikan rajoittuma $f|_A \colon A \times A \to [0, \infty]$ kaavalla $f|_A(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A \times A$ on pseudometriikka joukolle A.*

Lemma 8.3. *Olkoon X uniforminen avaruus, $A \subset X$ epätyhjä osajoukko ja $(f_i)_{i \in I}$ pseudometriikkaperhe, joka määrää joukon X uniformiteetin. Tällöin joukon X uniformiteetti määrää joukolle A saman uniformiteetin kuin pseudometriikkaperhe $(f_i|_A)_{i \in I}$.*

Määritelmä 8.4. Olkoon X uniforminen avaruus. Tällöin on olemassa täydellinen (complete) Hausdorff uniforminen avaruus $\hat{X}$ ja tasaisesti jatkuva kuvaus $i \colon X \to \hat{X}$, jolle pätee seuraava ominaisuus:

(P) Olkoon Y täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $f \colon X \to Y$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva $g \colon \hat{X} \to Y$, jolla pätee $f = g \circ i$

Olkoon lisäksi X_1 täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $i_1 \colon X \to X_1$ tasaisesti jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus (P). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $\varphi \colon \hat{X} \to X_1$, jolla pätee $i_1 = \varphi \circ i$.

Korollaari 8.5. *Olkoon* X *on Hausdorff uniforminen avaruus ja* $\hat{X}$ *määritelmän 8.4 mukainen täydellinen Hausdorf uniforminen avaruus. Niin sanottu kanoninen kuvaus* $i\colon X \to \hat{X}$ *määrää isomorfismin* $X \to X'$*, jossa* $X' \subset \hat{X}$ *on tiheä joukossa* $\hat{X}$*.*

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.