

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

11. maaliskuuta 2017

Sisältö

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Johdanto | 2 |
| 2 | Esitietoja | 3 |
| 3 | Uniformiset rakenteet | 4 |
| 4 | Pseudometriikat | 8 |
| 5 | Pseudometriikan määrittämä uniformisuus | 10 |

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Olkoon X joukko ja V, W sen osajoukkoja. Merkitään tällöin joukkoilla V ja W seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\}$$

ja $W^2 = W \circ W$.

Määritelmä 2.1. Topologian ympäristökanta. Olkoon (X, d) topologinen avaruus ja $x \in X$. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x ympäristökanta (topologiassa \mathcal{T}), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Esimerkki 2.2. Jos B on avaruuden (X, \mathcal{T}) kanta ja $x \in X$, niin $\{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa (X, \mathcal{T}) , niin $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden (X, \mathcal{T}) kanta.

Lause 2.3. Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian \mathcal{T} esikanta. Lisäksi \mathcal{T} on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \in \mathcal{T}$. Tämä topologia \mathcal{T} on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.

Todistus.

□

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle X annetaan karteettisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona \mathcal{U} , jolle pätee

- (U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,
- (U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon \mathcal{U} alkioista kuuluu joukkoon \mathcal{U} ,
- (U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,
- (U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,
- (U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformisuuden \mathcal{U} lähistöksi. Joukkoa X joka on varustettu uniformisuudella \mathcal{U} sanotaan univormiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformisuuden \mathcal{U} lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan V -lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla

- (Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Jos joukko X on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon X uniformiteetti \mathcal{U} on tyhjä. Erityisesti $\{\emptyset\}$ on joukon X ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko X on tyhjä.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja joukko $\mathcal{U} \subset X \times X$ sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin \mathcal{U} kanta, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Määritelmä 3.6. Olkoon X joukko. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X uniformisuuden kanta, jos joukolle B pätee

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella \mathcal{U} . Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X . Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \text{ ja } B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti \mathcal{U} määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkion x ja joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella \mathcal{U} . Olkoon $x \in X$ alkio, $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X ja joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Alkion x pätee $x \in V(x)$, joten joukko $V(x)$ on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle $V, W \in \mathcal{U}$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ tai } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla $V \cup W \in B$ ja $V \cap W \in B$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko.[1] \square

Huomautus 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.9. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ kuvaus. Kuvaus f on *uniformisti jatkuva*, jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.10. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö.

Lause 3.11. Jokainen uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva uniformien määrittämien topologioiden suhteen.

Todistus. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö. Avaruuden X' uniformiteetin määrittämässä topologiassa kaava $V'(x')$ määrää alkion x' ympäristön. Tällöin koska $g^{-1}V'$ on avaruuden X lähistö, niin $g^{-1}V'(g^{-1}(x'))$ on alkion x' alkukuvan $g^{-1}(x') \in X$ ympäristö.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva. \square

Lause 3.12. Olkoon X , X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ ja $g: X' \rightarrow X''$ uniformisti jatkuvia kuvaksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f: X \rightarrow X''$ on uniformisti jatkuva.

Todistus. Lisätään myöhemmin. \square

Määritelmä 3.13. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f: X \rightarrow X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on isomorfia, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.14. *Uniformiteettien vertailtavuus.* Olkoon X joukko ja \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U}_1 on hienompi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_2 , jos identtinen kuvaus $id: (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$ on uniformisti jatkuva. Tällöin uniformiteetti \mathcal{U}_2 on karkeampi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_1 . Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin \mathcal{U}_1 on aidosti hienompi kuin \mathcal{U}_2 ja vastaavasti \mathcal{U}_2 on aidosti karkeampi kuin \mathcal{U}_1 . Kahta uniformiteettia \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 on mahdollista vertailla, jos \mathcal{U}_1 on hienompi kuin \mathcal{U}_2 .

Korollaari 3.15. Olkoon X joukko ja \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X . Uniformiteetti \mathcal{U}_1 on hienompi kuin uniformiteetti \mathcal{U}_2 jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko, \mathcal{U}_1 ja \mathcal{U}_2 uniformiteetteja joukolle X ja \mathcal{U}_1 on hienompi kuin \mathcal{U}_2 . Tällöin uniformiteetin \mathcal{U}_1 indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin \mathcal{U}_2 indusoima topologia.*

Todistus. Ympäristökannat. □

Määritelmä 3.17. *Initial uniformities. Kuvausperheen indusoima uniformiteetti.* Olkoon X joukko ja Y_i uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla $i \in I$, jollain indeksijoukolla I . Olkoon $f_i: X \rightarrow Y_i$ uniformisti jatkuvia kuvauksia kaikilla $i \in I$. Olkoon $g = f_i \times f_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$ kuvaus kaikilla $i \in I$. Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in I} g^{\leftarrow}(V_i) \mid V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

missä \mathcal{U}_i on avaruuden Y_i uniformiteetti. Tällöin B on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille \mathcal{U} . Kyseinen uniformiteetti \mathcal{U} on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.18. *Uniformiteettien pienin yläraja* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X . Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti \mathcal{U} , joka on kuvausten $id: X \rightarrow (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.17 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on pseudometriikka, jos seuraavat ehdot pätevät:

$$(P1) \quad f(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X,$$

$$(P2) \quad f(x, y) = f(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

$$(P3) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \text{ kaikilla } x, y, z \in X.$$

Huomautus 4.2. Pseudometriikasta saadaan metriikka, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

$$(M1) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ määrittää pseudometriikan joukolle X .

Huomautus 4.7. Ehdosta (P3) seuraa, että jos $f(x, z) + f(z, y) < \infty$ niin $f(x, y) < \infty$. Tällöin koska kaavat $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$ ja $f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z)$ pätevät, niin myös kaava $|f(x, z) - f(z, y)| \leq f(x, y)$ pätee.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka. Tällöin myös λf on pseudometriikka, jos kaavat $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ ja $0 < \lambda < +\infty$ pätevät.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ kaavasta

$$f_i(x, y) \leq f_i(x, z) + f_i(z, y)$$

seuraa kaava

$$\sup_{i \in I} f_i(x, y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x, z) + f_i(z, y)).$$

Tällöin kuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], f(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittämä uniformisuus

Oletamme koko luvun 5 ajan, että $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Lause 5.1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $\mathcal{U}_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko kaavalla*

$$\mathcal{U}_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n uniformisuuden kannan.

Todistus. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

- (B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja jos $|x - y| \leq a_1$, niin $|x - y| \leq a_2$. Näin ollen $\mathcal{U}_{a_1} \subset \mathcal{U}_{a_2}$ ja siis $\mathcal{U}_{a_1} \subset \mathcal{U}_{a_1} \cap \mathcal{U}_{a_2}$,
- (B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $\mathcal{U}_a \in B$ osajoukko,
- (B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}_+$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_a &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ &= \mathcal{U}_a^{-1}.\end{aligned}$$

Siis jokaiselle \mathcal{U}_a pätee $\mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaalityluku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$, eli $(x, z) \in \mathcal{U}_a$ ja $(z, y) \in \mathcal{U}_a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \stackrel{\Delta\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x - y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $\mathcal{U}_a^2 = \mathcal{U}_{2a}$, joten jokaiselle reaalityluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle \mathcal{U}_b löytyy joukko $\mathcal{U}_{b/2}$, jolla $\mathcal{U}_{b/2}^2 \subset \mathcal{U}_b$.

Siis kokoelma $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon \mathbb{R}^n uniformisuuden kannan. □

Lause 5.2. *Yleistetään nyt edellistä lausetta. Olkoon X joukko, f pseudometriikka joukolle X , $a \in \mathbb{R}_+$ reaalityluku ja $\mathcal{U}_a \subset X \times X$ joukko kaavalla $\mathcal{U}_a = f^{\rightarrow}[0, a]$. Tällöin kokoelma $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ on uniformisuuden kanta joukolle X .*

Todistus. □

Huomautus 5.3.

Lause 5.4.

Määritelmä 5.5.

Korollari 5.6.

Esimerkki 5.7.

Lemma 5.8.

Kirjallisuutta

- [1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.
- [2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.