Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

13. maaliskuuta 2017

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Olkoon X joukko ja V, W sen osajoukkoja. Merkitään tällöin joukkoilla V ja W seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x,z) \mid \text{ on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x,y) \in V \text{ ja } (y,z) \in W\}$$

ja $W^2 = W \circ W$.

Määritelmä 2.1. Topologian ympäristökanta. Olkoon (X, d) topologinen avaruus ja $x \in X$. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x ympäristökanta (topologiassa $\mathcal{T}$), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Esimerkki 2.2. Jos B on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta ja $x \in X$, niin $\{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, niin $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta.

Lause 2.3. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian $\mathcal{T}$ esikanta. Lisäksi $\mathcal{T}$ on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \in \mathcal{T}$. Tämä topologia $\mathcal{T}$ on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. □

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformisuuden $\mathcal{U}$ lähistöksi. Joukkoa X joka on varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$ sanotaan univormiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformisuuden $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x,y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Jos joukko X on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon X uniformiteetti $\mathcal{U}$ on tyhjä. Erityisesti $\{\emptyset\}$ on joukon X ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko X on tyhjä.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja joukko $\mathcal{U} \subset X \times X$ sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Määritelmä 3.6. Olkoon X joukko. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X uniformisuuden kanta, jos joukolle B pätee

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Lause 3.7. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X. Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \text{ ja } B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkiolle x ja joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio, $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X ja joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Alkiolle x pätee $x \in V(x)$, joten joukko $V(x)$ on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle $V, W \in \mathcal{U}$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ tai } (x, y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla $V \cup W \in B$ ja $V \cap W \in B$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko.[1] $\square$

Huomautus 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.9. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ kuvaus. Kuvaus f on *uniformisti jatkuva*, jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x,y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.10. *Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x,y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Lause 3.11. *Jokainen uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva uniformien määräämien topologioiden suhteen.*

Todistus. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x,y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö. Avaruuden X' uniformiteetin määrittämässä topologiassa kaava $V'(x')$ määrää alkion x' ympäristön. Tällöin koska $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö, niin $g^{\leftarrow}V'(g^{\leftarrow}(x'))$ on alkion x' alkukuvan $g^{\leftarrow}(x') \in X$ ympäristö.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

Lause 3.12. *Olkoon X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ uniformisti jatkuvia kuvaksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on uniformisti jatkuva.*

Todistus. Lisätään myöhemmin. □

Määritelmä 3.13. Olkoon X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on isomorfia, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.14. *Uniformiteettien vertailtavuus.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$, jos identtinen kuvaus $id\colon (X,\mathcal{U}_1) \to (X,\mathcal{U}_2)$ on uniformisti jatkuva. Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_1$. Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin $\mathcal{U}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{U}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{U}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{U}_1$. Kahta uniformiteettia $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ on mahdollista vertailla, jos $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$.

Korollaari 3.15. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X ja $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Tällöin uniformiteetin $\mathcal{U}_1$ indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin $\mathcal{U}_2$ indusoima topologia.*

Todistus. Ympäristökannat. □

Määritelmä 3.17. *Initial uniformities. Kuvausperheen indusoima uniformiteetti.* Olkoon X joukko ja Y_i uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ uniformisti jatkuvia kuvauksia kaikilla $i \in I$. Olkoon $g = f_i \times f_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus kaikilla $i \in I$. Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in I} g^{\leftarrow}(V_i) \mid V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

missä $\mathcal{U}_i$ on avaruuden Y_i uniformiteetti. Tällöin B on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille $\mathcal{U}$. Kyseinen uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.18. *Uniformiteettien pienin yläraja* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X. Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti $\mathcal{U}$, joka on kuvausten $id \colon X \to (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.17 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on pseudometriikka, jos seuraavat ehdot pätevät:

(P1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$,

(P2) $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(P3) $f(x, y) \le f(x, z) + f(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Huomautus 4.2. Pseudometriikasta saadaan metriikka, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

(M1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kaikilla $x, y \in X$.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g\colon X \to \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ kaavalla $f(x,y) = \int_0^1 |x(t)-y(t)|dt$ määrittää pseudometriikan joukolle X.

Huomautus 4.7. Ehdosta (P3) seuraa, että jos $f(x,z) + f(z,y) < \infty$ niin $f(x,y) < \infty$. Tällöin koska kaavat $f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z)$ ja $f(y,z) \leq f(y,x) + f(x,z)$ pätevät, niin myös kaava $|f(x,z) - f(z,y)| \leq f(x,y)$ pätee.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka. Tällöin myös λf on pseudometriikka, jos kaavat $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ ja $0 < \lambda < +\infty$ pätevät.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], f(x,y) = \sum_{i \in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ kaavasta

$$f_i(x,y) \leq f_i(x,z) + f_i(z,y)$$

seuraa kaava

$$\sup_{i \in I} f_i(x,y) \leq \sup_{i \in I} \left(f_i(x,z) + f_i(z,y)\right).$$

Tällöin kuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], f(x,y) = \sup_{i \in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittämä uniformisuus

Oletamme koko luvun 5 ajan, että $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Lause 5.1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $\mathcal{U}_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko kaavalla*

$$\mathcal{U}_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformisuuden kannan.

Todistus. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja jos $|x - y| \leq a_1$, niin $|x - y| \leq a_2$. Näin ollen $\mathcal{U}_{a_1} \subset \mathcal{U}_{a_2}$ ja siis $\mathcal{U}_{a_1} \subset \mathcal{U}_{a_1} \cap \mathcal{U}_{a_2}$,

(B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $\mathcal{U}_a \in B$ osajoukko,

(B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}_+$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_a =& \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\
=& \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\
=& \mathcal{U}_a^{-1}.
\end{aligned}$$

Siis jokaiselle $\mathcal{U}_a$ pätee $\mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$, eli $(x, z) \in \mathcal{U}_a$ ja $(z, y) \in \mathcal{U}_a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \overset{\triangle\text{-ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x - y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $\mathcal{U}_a^2 = \mathcal{U}_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle $\mathcal{U}_b$ löytyy joukko $\mathcal{U}_{b/2}$, jolla $\mathcal{U}_{b/2}^2 \subset \mathcal{U}_b$.

Siis kokoelma $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformisuuden kannan. □

Lause 5.2. *Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti: Olkoon X joukko ja f pseudomeriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikka f määrittää sellaisen uniformiteetin joukolle X, jonka kannan muodostaa kokoelma $B = \{f^{\rightarrow}[0, a] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$.*

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja merkitään joukkoa $f^{\rightarrow}[0, a] \subset X \times X$ kaavalla $f^{\rightarrow}[0, a] = \mathcal{U}_a$. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin

$$\mathcal{U}_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a] \subset f^{\leftarrow}[0, b] = \mathcal{U}_{a_2}$$

ja siis $\mathcal{U}_{a_1} \subset \mathcal{U}_{a_1} \cap \mathcal{U}_{a_2}$,

(B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x, x) = 0$. Toisin sanoen jokainen alkio pistepareista (x, x) muodostuvasta joukosta $\{(x, x) \mid x \in X\}$ kuvautuu pseudomeriikassa nollaksi. Näin ollen joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ kuuluu sisältyy jokaisen suljetun välin $[0, a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0, a]$ kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(x, y) \in \mathcal{U}_a \Leftrightarrow (y, x) \in \mathcal{U}_a$ ja siis $\mathcal{U}_a^{-1} = \mathcal{U}_a$, eli jokaiselle $\mathcal{U}_a$ pätee $\mathcal{U}_a \subset \mathcal{U}_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $f(x, z) \leq a$ ja $f(z, y) \leq a$, eli $(x, z) \in \mathcal{U}_a$ ja $(z, y) \in \mathcal{U}_a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x, y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $\mathcal{U}_a^2 = \mathcal{U}_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle $\mathcal{U}_b$ löytyy joukko $\mathcal{U}_{b/2}$, jolla $\mathcal{U}_{b/2}^2 \subset \mathcal{U}_b$.

Siis kokoelma $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\} = \{f^{\leftarrow}[0, a] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformisuuden kannan ja voimme nyt muodostaa seuraavan määritelmän. □

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudomeriikoita joukolle X. Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittävät jotkut uniformiteetit joukolle X. Pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

Huomautus 5.4.

Lause 5.5.

Määritelmä 5.6.

Korollaari 5.7.

Esimerkki 5.8.

Lemma 5.9.

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.