Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

3. huhtikuuta 2017

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Luku 2

Esitietoja

Olkoon X joukko ja V ja W karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x,z) \mid \text{ on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x,y) \in V \text{ ja } (y,z) \in W\}$$

ja $W^2 = W \circ W$.

Määritelmä 2.1. *Ympäristö.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Osajoukko $A \in X$, johon alkio x kuuluu, on alkion x *ympäristö*, jos on olemassa avoin osajoukko $B \subset X$, joka sisältää osajoukon A.

Määritelmä 2.2. *Ympäristökanta.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Kokoelma $B(x)$ alkion x ympäristöjä on alkion x *ympäristökanta* (topologiassa $\mathcal{T}$), jos jokainen alkion x ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

Esimerkki 2.3. Jos B on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta ja $x \in X$, niin $\{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion x eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, niin $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta.

Lause 2.4. *Olkoon A joukon X peite. Tällöin A on joukon X erään topologian $\mathcal{T}$ esikanta. Lisäksi $\mathcal{T}$ on karkein niistä joukon X topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia $\mathcal{T}$ on peitteen A yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen A virittämäksi joukon X topologiaksi.*

Todistus. Topologia II [3] lause 2.19. $\square$

Määritelmä 2.5. *Topologioiden vertailu.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukolle X. Topologia $\mathcal{T}_2$ on karkeampi kuin topologia $\mathcal{T}_1$, jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin $\mathcal{T}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_2$.

Luku 3

Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

Määritelmä 3.1. Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle X annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformisuuden $\mathcal{U}$ lähistöiksi. Joukkoa X joka on varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$ sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

Huomautus 3.2. Uniformisuuden $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, "tarpeeksi lähellä" tai "mielivaltaisen lähellä" toisiaan.

Huomautus 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

Huomautus 3.4. Jos joukko X on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon X uniformiteetti $\mathcal{U}$ on tyhjä. Erityisesti $\{\emptyset\}$ on joukon X ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko X on tyhjä.

Määritelmä 3.5. Olkoon X joukko ja joukko $\mathcal{U} \subset X \times X$ sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

Määritelmä 3.6. Olkoon X joukko. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon X erään uniformisuuden kanta, jos joukolle B pätee

(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,

(B2) Joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,

(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,

(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.

Määritelmä 3.7. Seuraavan lauseen olemassaolon peruste.

Lause 3.8. *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X. Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in V\} \quad \textit{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle X niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön V määräämä) ympäristö alkiolle x ja joukko $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.

Todistus. Olkoon joukko X varustettu uniformisuudella $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio, $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa X ja joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Alkiolle x pätee $x \in V(x)$, joten joukko $V(x)$ on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle $V, W \in \mathcal{U}$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \text{ tai } (x,y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \text{ ja } (x,y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x,y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla $V \cup W \in B$ ja $V \cap W \in B$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa $B(x)$ on alkion x kaikkien ympäristöjen joukko.[1] $\square$

Huomautus 3.9. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

Määritelmä 3.10. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ kuvaus. Kuvaus f on *uniformisti jatkuva* (tasaisesti jatkuva), jos jokaiselle avaruuden X' lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

Korollaari 3.11. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos V' on avaruuden X' lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö.*

Todistus. Suora seuraus edellisestä määritelmästä ja uniformisuuden ehdosta (U1). □

Lause 3.12. *Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus f on jatkuva, kun varustetaan joukot X ja Y uniformiteettiensa indusoimilla topologioilla.*

Todistus. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon V' avaruuden X' lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden X' uniformiteetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion x' ympäristön avaruudessa X. Korollaarin 3.11 mukaan lähistön V' alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden X lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $g^{\leftarrow}V'(x)$ on alkion x ympäristö. Erityisesti ympäristö $g^{\leftarrow}V'(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x, y) \in g^{\leftarrow}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

Lause 3.13. *Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ uniformisti jatkuvia kuvaksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on uniformisti jatkuva.*

Todistus. Olkoot X, X' ja X'' uniformeja avaruuksia, $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ uniformisti jatkuvia kuvaksia ja V'' avaruuden X'' lähistö. Tällöin uniformisti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden X' lähistö V', jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle V' on olemassa avaruuden X lähistö V, jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle V'' on olemassa lähistö V, jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on uniformisti jatkuva. □

Määritelmä 3.14. Olkoot X ja X' uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus f on isomorfismi, jos sekä kuvaus f että sen käänteiskuvaus f^{-1} ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.15. *Uniformiteettien vertailtavuus.* Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$, jos identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_1) \to (X, \mathcal{U}_2)$ on uniformisti jatkuva. Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_1$. Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin $\mathcal{U}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{U}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{U}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{U}_1$. Sanotaan, että kahta uniformiteettia $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Uniformiteeteille $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos $\mathcal{U}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$.

Korollaari 3.16. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

Korollaari 3.17. *Olkoon X joukko, $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle X ja $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Tällöin uniformiteetin $\mathcal{U}_1$ indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin $\mathcal{U}_2$ indusoima topologia.*

Määritelmä 3.18. *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformities). Olkoon X joukko ja Y_i uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla $i \in I$, jollain indeksijoukolla I. Olkoon $f_i\colon X \to Y_i$ uniformisti jatkuvia kuvauksia kaikilla $i \in I$. Olkoon $g = f_i \times f_i\colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus kaikilla $i \in I$. Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in I} g^{\leftarrow}(V_i) \mid V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

missä $\mathcal{U}_i$ on avaruuden Y_i uniformiteetti. Tällöin B on kanta eräälle avaruuden X uniformiteetille $\mathcal{U}$. Kyseinen uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset f_i ovat uniformisti jatkuvia.

Määritelmä 3.19. *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon X joukko ja I jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle X. Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti $\mathcal{U}$, joka on kuvausten $id\colon X \to (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

Luku 4

Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

Määritelmä 4.1. Olkoon X joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus f on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(P1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$,

(P2) $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(P3) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

Huomautus 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

(M1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kaikilla $x, y \in X$.

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

Esimerkki 4.3. Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

Esimerkki 4.4. Olkoon X epätyhjä joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin f on pseudometriikka.

Esimerkki 4.5. Olkoon X epätyhjä joukko ja $g\colon X \to \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.6. Olkoon X kaikkien muotoa $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ kaavalla $f(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ määrittää pseudometriikan joukolle X.

Huomautus 4.7. Ehdosta (P3) seuraa, että jos $f(x,z) + f(z,y) < \infty$ niin $f(x,y) < \infty$. Tällöin koska kaavat $f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z)$ ja $f(y,z) \leq f(y,x) + f(x,z)$ pätevät, niin myös kaava $|f(x,z) - f(z,y)| \leq f(x,y)$ pätee.

Esimerkki 4.8. Olkoon f pseudometriikka joukolle X ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus λf, jolla $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ kaikilla $x \in X \times X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.9. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], \quad f(x,y) = \sum_{i \in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Esimerkki 4.10. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon X pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ kaavasta

$$f_i(x,y) \leq f_i(x,z) + f_i(z,y)$$

seuraa kaava

$$\sup_{i \in I} f_i(x,y) \leq \sup_{i \in I} \left(f_i(x,z) + f_i(z,y)\right).$$

Tällöin kuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], \quad f(x,y) = \sup_{i \in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

Luku 5

Pseudometriikan määrittämä uniformisuus

Oletamme koko luvun 5 ajan, että $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

Lause 5.1. *Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko kaavalla*

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformisuuden kannan.

Todistus. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$ ja jos $|x - y| \leq a_1$, niin $|x - y| \leq a_2$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,

(B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in \mathbb{R}_+$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a =& \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$, eli $(x, z) \in U_a$ ja $(z, y) \in U_a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \overset{\triangle-\text{ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x - y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 = U_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformisuuden kannan. □

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

Lause 5.2. *Olkoon X joukko ja f pseudomeriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikka f määrittää sellaisen uniformiteetin joukolle X, jonka kannan muodostaa kokoelma $B = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$.*

Todistus. Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja merkitään joukkoa $f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X$ kaavalla $f^{\leftarrow}[0, a] = U_a$. Määritelmän 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ reaalilukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0, a] \subset f^{\leftarrow}[0, b] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Kuvaus f on pseudometriikka, joten pseudometriikan ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x, x) = 0$. Toisin sanoen jokainen alkio pistepareista (x, x) muodostuvasta joukosta $\{(x, x) \mid x \in X\}$ kuvautuu pseudomeriikassa nollaksi. Näin ollen joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ kuuluu sisältyy jokaisen suljetun välin $[0, a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0, a]$ kaikilla $a \in \mathbb{R}_+$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin $(x, y) \in U_a \Leftrightarrow (y, x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle U_a pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in \mathbb{R}_+$ reaaliluku ja $x, y, z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $f(x, z) \leq a$ ja $f(z, y) \leq a$, eli $(x, z) \in U_a$ ja $(z, y) \in U_a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x, y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 = U_{2a}$, joten jokaiselle reaaliluvun $b \in \mathbb{R}_+$ määräämälle joukolle U_b löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in \mathbb{R}_+\} = \{f^{\leftarrow}[0, a] \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformisuuden kannan ja voimme nyt muodostaa seuraavan määritelmän. □

Määritelmä 5.3. Olkoon X joukko ja f ja g pseudomeriikoita joukolle X. Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat f ja g määrittävät jotkut uniformiteetit joukolle X. Pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

Korollaari 5.4. *Olkoon X joukko ja f ja g pseudomeriikoita joukolle X. Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$.*

Lisäksi, jos kaikilla $x, y \in X$ pätee $f(x,y) \leq b \Rightarrow g(x,y) \leq a$ niin f ja g ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.

Todistus. Olkoon X joukko ja f ja g pseudomeriikoita joukolle X. Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan f määrittämän uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan muodostaa kokoelma $B_f = \{f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$. Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0,a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan muodostaa kokoelma $B_g = \{g^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in \mathbb{R}_+\}$ ja uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0,a] \subset V, \text{ jollain } a \in \mathbb{R}_+\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

- $\Rightarrow$ Olkoon uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$ ja näin ollen määritelmän 3.15 mukaan identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on uniformisti jatkuva. Määritelmän 3.10 mukaan tällöin jokaiselle lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähistö $V \in \mathcal{U}_g$, jolla pätee jos $(x,y) \in V$, niin $(x,y) \in V'$ kaikila $x, y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä saamme edeltävän seuraavaan muotoon: Jokaisella $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a]$, eli $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$.

- $\Leftarrow$ Olkoon jokaiselle $a \in \mathbb{R}_+$ on olemassa $b \in \mathbb{R}_+$, jolla $g(x,y) \leq b \Rightarrow f(x,y) \leq a$, eli $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a]$, kaikilla $x, y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0,a'], a' \in \mathbb{R}_+$ on olemassa uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0,b'], b' \in \mathbb{R}_+$ niin, että $(x,y) \in g^{\leftarrow}[0,b'] \Rightarrow (x,y) \in f^{\leftarrow}[0,a']$, kaikilla $x, y \in X$. Näin ollen identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on uniformisti jatkuva ja siten uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on uniformiteettia $\mathcal{U}_f$ hienompi. Siis pseudometriikan f määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan g määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$.

Lisäksi määritelmistä 3.15 ja 5.3 seuraa, että jos $\mathcal{U}_f$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$, niin pseudometriikat f ja g ovat ekvivalentteja. □

Määritelmä 5.5. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ perhe pseudometriikkoja joukolle X. Tällöin pseudometriikkojen f_i määrittämien uniformiteettien $\mathcal{U}_{f_i}$ pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittämäksi uniformiteetiksi.

Määritelmä 5.6. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ perheitä pseudometriikoista joukolle X. Perheet (f_i) ja (g_j) ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittämät uniformiteetit ovat samoja.

Määritelmä 5.7. Olkoon X joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ perhe pseudometriikoita joukolle X. Olkoon $g_H\colon X\to[0,\infty]$ kuvaus, jolla $g_H(x)=\sup_{i\in H} f_i(x)$ ja $H\subset I$ äärellinen joukko. Nyt

$$\{g_H^{\leftarrow}([0,a])\subset X\times X \mid H\subset I \text{ äärellinen}, a\in\mathbb{R}, a>0\}$$

on joukon X erään uniformiteetin kanta. Olkoon $g_{H'}$ pseudometriikoita ja $H'\subset\mathcal{P}(I)$ äärellinen potenssijoukon osajoukko. Nyt

$$\sup_{H\in H'}(g_H)\in(g_H)_{H\subset I}$$

ja $H\subset I$ äärellinen joukko. Tällöin sanotaan, että perhe (g_H) on *saturoitu* (saturated), ekvivalentti perheen $(f_i)_{i\in I}$ kanssa ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$.

Mikäli indeksijoukko I on äärellinen, niin perheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti on sama kuin pseudometriikan $g=\sup_{i\in I} f_i$ määräämä.

Määritelmä 5.8. Olkoon uniformiteetit $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}'$ saturoitujen perheiden $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ määräämiä. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}'$, jos jokaisella $i\in I$ ja $a\in\mathbb{R}$, $a>0$ löytyy $j\in J$ ja $b\in\mathbb{R}$, $b>0$, joilla ehdosta $g_j(x,y)\le b$ seuraa $f_i(x,y)\le a$.

Lemma 5.9. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i\in I}$, joka määrittää uniformiteetin $\mathcal{U}$.*

Todistus. Jokaiselle $U\in\mathcal{U}$ määritellään perhe (U_n), jolla $V_1\subset U$ ja $V_{n+1}^2\subset V_n$ kaikilla $n\in\mathbb{N}, n\ge 1$. Nyt perhe (V_n) on kanta eräälle joukon X uniformiteetille $\mathcal{U}_V$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{U}$. Erityisesti $\mathcal{U}$ on uniformiteettien $\mathcal{U}_V, V\in\mathcal{U}$ pienin yläraja. Tällöin lemma on seuraus seuraavasta lauseesta, sillä (U_n) on uniformiteetin $\mathcal{U}$ numeroituva kanta. □

Lause 5.10. *Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Jos uniformiteetilla $\mathcal{U}$ on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka $f\colon X\times X\to R_+$, jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanssa.*

Todistus. Olkoon (V_n) numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin olkoon (U_n) perhe symmetrisiä uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöjä, joilla $U_1\subset V_1$ ja $U_{n+1}^3\subset U_n\cap V_n$, kun $n\ge 1$. Nyt (U_n) on myös uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta ja erityisesti $U_{n+1}^3\subset U_n\cap V_n$, kun $n\ge 1$.

Olkoon $g\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ kuvaus, jolla

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \geq 1 \\ 1 & \text{, jos } (x,y) \notin U_1. \\ 2^{-k} & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \leq k \text{ ja } (x,y) \notin U_{k+1} \end{cases}$$

Nyt g on symmetrinen, positiivinen ja $g(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $f\colon X \times X \to R_+$ kuvaus, jolla

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ ja $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$ joukon X alkioista muodostuva jono, jossa $z_0 = x$ ja $z_p = y$. Kuvauksen f määrittelystä seuraa, että f on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat $f(x,y) \geq 0$ ja $f(x,x) = 0$ pätevät kaikilla $x, y \in X$. Siis f on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$\frac{1}{2}\, g(x,y) \leq f(x,y) \leq g(x,y) \tag{5.11}$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli $f(x,y) \leq g(x,y)$ seuraa siitä, että

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{1} g(z_i, z_i + 1) = g(z_0, z_1) = g(x,y).$$

Yhtälön vasen puoli osoitetaan induktion avulla. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ luku. Nyt jokaisella $p+1$ alkion jonolla joukon X alkioita $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$, jolla $z_0 = x$ ja $z_p = y$, saadaan

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x,y). \tag{5.12}$$

Jos $p = 1$, niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x,y) \geq \frac{1}{2}\, g(x,y).$$

Merkitään

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}).$$

Määrittelyn nojalla $g(x,y) \leq 1$, joten jos $a \geq 1/2$, niin yhtälö 5.12 pätee muodossa $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}g(x,y)$. Oletetaan, että $a < 1/2$ ja että h on suurin niistä indekseistä q, joilla $\sum_{i<q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Tällöin

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja} \quad \sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2,$$

joten $\sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Induktio-oletuksen nojalla $g(x, z_h) \leq a$, $g(z_{h+1}, y) \leq a$ ja toisaalta myös $g(x, z_h) \leq a$ pätevät. Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $2^{-k} \leq a$. Tällöin $k \geq 2$ ja kuvauksen g määrittelystä seuraa, että $(x, z_h) \in U_k, (z_h, z_{h+1}) \in U_k$ ja $(z_{h+1}, y) \in U_k$. Nyt $(x,y) \in U_k^3 \subset U_{k-1}$ ja edelleen $g(x,y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$, eli $1/2g(x,y) \leq a$. Nyt epäyhtälöt 5.11 on osoitettu päteviksi ja niistä seuraa, että jokaisella $a > 0$ pätee $U_k \subset f^{\leftarrow}([0,a])$, kun $2^{-k} < a$. Toisaalta myös $f^{\leftarrow}([0,a]) \subset U_k$, joten joukot $f^{\leftarrow}([0,a])$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}$. Siis löydettiin pseudometriikka f, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$. $\square$

Korollaari 5.13.

Luku 6

Uniformisoituvat avaruudet

Tässä luvussa perehdytään uniformisoituviin avaruuksiin (uniformizable space).

Määritelmä 6.1. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *uniformisoituva*, jos seuraava ominaisuus pätee:

(Z1) Kaikille alkioilla $x_0 \in X$ ja kaikille alkion x_0 ympäristöillä V_0 on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus $f\colon X \to [0, 1]$, jolla $f(x_0) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V_0$.

Luku 7

Hausdorff uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään Hausdorff uniformiset avaruudet ja esitetään niiden ominaisuuksia, oleellisimpana täydelliseen Hausdorff uniformiseen avaruuteen laajentaminen.

Määritelmä 7.1. Olkoon X joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle X. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *Hausdorff*, jos kaikille $x, y \in X, x \neq y$ on olemassa pseudometriikka $f_i \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_i(x, y) \neq 0$. Erityisesti, jos uniformiteetti $\mathcal{U}$ on Hausdorff ja yhden pseudometriikan f määrittämä, niin $f(x, y) \neq 0$ kaikilla $x, y \in X$.

Uniformiteetti $\mathcal{U}$ ei ole Hausdorff, jos on olemassa sellaiset alkiot $x, y \in X$, joilla $x \neq y$ ja $f_i(x, y) = 0$ kaikilla $i \in I$.

Lemma 7.2. *Olkoon X uniforminen avaruus, $A \subset X$ epätyhjä osajoukko ja f pseudometriikka joukolle X. Tällöin pseudometriikan rajoittuma $f|_A \colon A \times A \to [0, \infty]$ kaavalla $f|_A(x) = f(x)$ kaikilla $x \in A \times A$ on pseudometriikka joukolle A.*

Lemma 7.3. *Olkoon X uniforminen avaruus, $A \subset X$ epätyhjä osajoukko ja $(f_i)_{i \in I}$ pseudometriikkaperhe, joka määrää joukon X uniformiteetin. Tällöin joukon X uniformiteetti määrää joukolle A saman uniformiteetin kuin pseudometriikkaperhe $(f_i|_A)_{i \in I}$.*

Määritelmä 7.4. Olkoon X uniforminen avaruus. Tällöin on olemassa täydellinen (complete) Hausdorff uniforminen avaruus $\hat{X}$ ja uniformisti jatkuva kuvaus $i \colon X \to \hat{X}$, jolle pätee seuraava ominaisuus:

(P) Olkoon Y täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $f \colon X \to Y$ uniformisti jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen uniformisti jatkuva $g \colon \hat{X} \to Y$, jolla pätee $f = g \circ i$

Olkoon lisäksi X_1 täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $i_1 \colon X \to X_1$ uniformisti jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus (P). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $\varphi \colon \hat{X} \to X_1$, jolla pätee $i_1 = \varphi \circ i$.

Korollaari 7.5. *Jos X on Hausdorff uniforminen avaruus, niin "kanoninen kuvaus"$i\colon X \to \hat{X}$ määrää isomorfismin $X \to X'$, jossa X' on tiheä joukossa $\hat{X}$.*

Huomautus 7.6.

Lause 7.7.

Määritelmä 7.8.

Korollaari 7.9.

Esimerkki 7.10.

Lemma 7.11.

Kirjallisuutta

[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.