

HELSINGIN YLIOPISTO  
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA  
MATEMATIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

---

Pro gradu -tutkielma

# Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

---

Ohjaaja: Erik Elfving

11. maaliskuuta 2017

# Sisältö

|   |                                         |    |
|---|-----------------------------------------|----|
| 1 | Johdanto                                | 2  |
| 2 | Esitietoja                              | 3  |
| 3 | Uniformiset rakenteet                   | 4  |
| 4 | Pseudometriikat                         | 8  |
| 5 | Pseudometriikan määrittämä uniformisuus | 10 |

Luku 1

Johdanto

# Luku 2

## Esitietoja

Olkoon  $X$  joukko ja  $V, W$  sen osajoukkoja. Merkitään tällöin joukkoilla  $V$  ja  $W$  seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\}$$

ja  $W^2 = W \circ W$ .

**Määritelmä 2.1.** Topologian ympäristökanta. Olkoon  $(X, d)$  topologinen avaruus ja  $x \in X$ . Kokoelma  $B(x)$  alkion  $x$  ympäristöjä on alkion  $x$  ympäristökanta (topologiassa  $\mathcal{T}$ ), jos jokainen alkion  $x$  ympäristö sisältää kokoelman  $B(x)$  jonkin jäsenen.

**Esimerkki 2.2.** Jos  $B$  on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  kanta ja  $x \in X$ , niin  $\{A \mid x \in A \in B\}$  on alkion  $x$  eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella  $x \in X$  on annettu ympäristökanta  $B(x)$  avaruudessa  $(X, \mathcal{T})$ , niin  $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$  on avaruuden  $(X, \mathcal{T})$  kanta.

**Lause 2.3.** Olkoon  $A$  joukon  $X$  peite. Tällöin  $A$  on joukon  $X$  erään topologian  $\mathcal{T}$  esikanta. Lisäksi  $\mathcal{T}$  on karkein niistä joukon  $X$  topologioista, joilla  $A \in \mathcal{T}$ . Tämä topologia  $\mathcal{T}$  on peitteen  $A$  yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen  $A$  virittämäksi joukon  $X$  topologiaksi.

*Todistus.*

□

# Luku 3

## Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

**Määritelmä 3.1.** Uniforminen rakenne (tai uniformisuus) joukolle  $X$  annetaan karteesisen tulon  $X \times X$  potenssijoukon  $\mathcal{P}(X \times X)$  osajoukkona  $\mathcal{U}$ , jolle pätee

- (U1) Jos  $V \in \mathcal{U}$  ja  $V \subset W \subset X \times X$  niin  $W \in \mathcal{U}$ ,
- (U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon  $\mathcal{U}$  alkioista kuuluu joukkoon  $\mathcal{U}$ ,
- (U3) Joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $V \in \mathcal{U}$  osajoukko,
- (U4) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin  $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$ ,
- (U5) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin on olemassa sellainen  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W^2 \subset V$ .

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja  $V \in \mathcal{U}$  sanotaan uniformisuuden  $\mathcal{U}$  lähistöksi. Joukkoa  $X$  joka on varustettu uniformisuudella  $\mathcal{U}$  sanotaan univormiseksi avaruudeksi.

*Huomautus 3.2.* Uniformisuuden  $\mathcal{U}$  lähistöön (entourage)  $V \in \mathcal{U}$  kuuluvan pisteparin  $(x, y) \in V$  pisteiden  $x, y \in X$  sanotaan olevan  $V$ -lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

*Huomautus 3.3.* Mikäli muut ehdot pätevät, voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla

- (Ua) Jos  $V \in \mathcal{U}$ , niin on olemassa sellainen  $W \in \mathcal{U}$ , jolla  $W \circ W^{-1} \subset V$ .

*Huomautus 3.4.* Jos joukko  $X$  on tyhjä, niin ehdon (U3) nojalla joukon  $X$  uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on tyhjä. Erityisesti  $\{\emptyset\}$  on joukon  $X$  ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti, jos joukko  $X$  on tyhjä.

**Määritelmä 3.5.** Olkoon  $X$  joukko ja joukko  $\mathcal{U} \subset X \times X$  sen uniformiteetti. Tällöin lähistöjen joukko  $B \subset \mathcal{U}$  on uniformiteetin  $\mathcal{U}$  kanta, jos jokaiselle lähistölle  $V \in \mathcal{U}$  löytyy kannan alkio  $W \in B$ , jolla pätee  $W \subset V$ .

**Määritelmä 3.6.** Olkoon  $X$  joukko. Joukko  $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$  on joukon  $X$  uniformisuuden kanta, jos joukolle  $B$  pätee

(B1) Jos  $V_1, V_2 \in B$  niin on olemassa sellainen  $V_3 \in B$ , jolla  $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ ,

(B2) Joukko  $\{(x, x) \mid x \in X\}$  on jokaisen joukon  $V \in B$  osajoukko,

(B3) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $V' \in B$ , jolla  $V' \subset V^{-1}$ ,

(B4) Jos  $V \in B$ , niin on olemassa sellainen  $W \in B$ , jolla  $W^2 \subset V$ .

**Lause 3.7.** *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko  $X$  varustettu uniformisuudella  $\mathcal{U}$ . Olkoon  $x \in X$  alkio ja  $V \in \mathcal{U}$  lähistö avaruudessa  $X$ . Olkoon*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \text{ ja } B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

*joukkoja. Uniformiteetti  $\mathcal{U}$  määrää topologian joukolle  $X$  niin, että joukko  $V(x)$  on (lähistön  $V$  määräämä) ympäristö alkion  $x$  ja joukko  $B(x)$  on alkion  $x$  kaikkien ympäristöjen joukko kyseisessä topologiassa.*

*Todistus.* Olkoon joukko  $X$  varustettu uniformisuudella  $\mathcal{U}$ . Olkoon  $x \in X$  alkio,  $V \in \mathcal{U}$  lähistö avaruudessa  $X$  ja joukot  $V(x)$  ja  $B(x)$  kuten edellä. Alkion  $x$  pätee  $x \in V(x)$ , joten joukko  $V(x)$  on epätyhjä. Jokaiselle lähistölle  $V, W \in \mathcal{U}$  pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cup W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ tai } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cup W\} \in B(x), \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ &= \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x) \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehtojen (U1) ja (U2) nojalla  $V \cup W \in B$  ja  $V \cap W \in B$ . Tällöin on olemassa yksikäsitteinen topologia, jossa  $B(x)$  on alkion  $x$  kaikkien ympäristöjen joukko.[1]  $\square$

*Huomautus 3.8.* Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

**Määritelmä 3.9.** Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  kuvaus. Kuvaus  $f$  on *uniformisti jatkuva*, jos jokaiselle avaruuden  $X'$  lähistölle  $V'$  on olemassa avaruuden  $X$  lähistö  $V$  niin, että jokaiselle  $(x, y) \in V$  pätee  $(f(x), f(y)) \in V'$ .

**Korollaari 3.10.** Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon  $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$  kuvaus, jolla pätee  $g(x, y) = (f(x), f(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ . Tällöin jos  $V'$  on avaruuden  $X'$  lähistö, niin alkukuva  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö.

**Lause 3.11.** Jokainen uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva uniformien määrittämien topologioiden suhteen.

*Todistus.* Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  uniformisti jatkuva kuvaus. Olkoon  $g: X \times X \rightarrow X' \times X'$  kuvaus, jolla pätee  $g(x, y) = (f(x), f(y))$  kaikilla  $x, y \in X$ . Olkoon  $V'$  avaruuden  $X'$  lähistö ja  $x' \in X'$  alkio. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön  $V'$  alkukuva  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö. Avaruuden  $X'$  uniformiteetin määrittämässä topologiassa kaava  $V'(x')$  määrää alkion  $x'$  ympäristön. Tällöin koska  $g^{-1}V'$  on avaruuden  $X$  lähistö, niin  $g^{-1}V'(g^{-1}(x'))$  on alkion  $x'$  alkukuvan  $g^{-1}(x') \in X$  ympäristö.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten uniformisti jatkuva kuvaus on jatkuva.  $\square$

**Lause 3.12.** Olkoon  $X$ ,  $X'$  ja  $X''$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  ja  $g: X' \rightarrow X''$  uniformisti jatkuvia kuvaksia. Tällöin yhdistetty kuvaus  $g \circ f: X \rightarrow X''$  on uniformisti jatkuva.

*Todistus.* Lisätään myöhemmin.  $\square$

**Määritelmä 3.13.** Olkoon  $X$  ja  $X'$  uniformeja avaruuksia ja  $f: X \rightarrow X'$  bijektiivinen kuvaus. Kuvaus  $f$  on isomorfia, jos sekä kuvaus  $f$  että sen käänteiskuvaus  $f^{-1}$  ovat uniformisti jatkuvia.

**Määritelmä 3.14.** *Uniformiteettien vertailtavuus.* Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$ , jos identtinen kuvaus  $id: (X, \mathcal{U}_1) \rightarrow (X, \mathcal{U}_2)$  on uniformisti jatkuva. Tällöin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$  on karkeampi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$ . Jos lisäksi pätee  $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ , niin  $\mathcal{U}_1$  on aidosti hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$  ja vastaavasti  $\mathcal{U}_2$  on aidosti karkeampi kuin  $\mathcal{U}_1$ . Kahta uniformiteettia  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  on mahdollista vertailla, jos  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$ .

**Korollaari 3.15.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$ . Uniformiteetti  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin uniformiteetti  $\mathcal{U}_2$  jos ja vain jos jokaisella lähistöllä  $V \in \mathcal{U}_2$  pätee  $V \in \mathcal{U}_1$ .

**Korollaari 3.16.** *Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{U}_1$  ja  $\mathcal{U}_2$  uniformiteetteja joukolle  $X$  ja  $\mathcal{U}_1$  on hienompi kuin  $\mathcal{U}_2$ . Tällöin uniformiteetin  $\mathcal{U}_1$  indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin  $\mathcal{U}_2$  indusoima topologia.*

*Todistus.* Ympäristökannat. □

**Määritelmä 3.17.** *Initial uniformities. Kuvausperheen indusoima uniformiteetti.* Olkoon  $X$  joukko ja  $Y_i$  uniformiteetilla varustettuja joukkoja kaikilla  $i \in I$ , jollain indeksijoukolla  $I$ . Olkoon  $f_i: X \rightarrow Y_i$  uniformisti jatkuvia kuvauksia kaikilla  $i \in I$ . Olkoon  $g = f_i \times f_i: X \times X \rightarrow Y_i \times Y_i$  kuvaus kaikilla  $i \in I$ . Olkoon

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in I} g^{\leftarrow}(V_i) \mid V_i \in \mathcal{U}_i \right\}$$

missä  $\mathcal{U}_i$  on avaruuden  $Y_i$  uniformiteetti. Tällöin  $B$  on kanta eräälle avaruuden  $X$  uniformiteetille  $\mathcal{U}$ . Kyseinen uniformiteetti  $\mathcal{U}$  on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset  $f_i$  ovat uniformisti jatkuvia.

**Määritelmä 3.18.** *Uniformiteettien pienin yläraja* Olkoon  $X$  joukko ja  $I$  jokin indeksijoukko. Olkoon  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  perhe uniformiteetteja joukolle  $X$ . Tällöin perheen  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  *pienin yläraja* on uniformiteetti  $\mathcal{U}$ , joka on kuvausten  $id: X \rightarrow (X, \mathcal{U}_i)$  määritelmän 3.17 mukaisesti indusoima.



# Luku 4

## Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kuvaus. Kuvaus  $f$  on pseudometriikka, jos seuraavat ehdot pätevät:

$$(P1) \quad f(x, x) = 0 \text{ kaikilla } x \in X,$$

$$(P2) \quad f(x, y) = f(y, x) \text{ kaikilla } x, y \in X,$$

$$(P3) \quad f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y) \text{ kaikilla } x, y, z \in X.$$

*Huomautus 4.2.* Pseudometriikasta saadaan metriikka, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

$$(M1) \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

**Esimerkki 4.3.** Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.4.** Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin  $f$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.5.** Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kaavalla  $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.6.** Olkoon  $X$  kaikkien muotoa  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus  $f: X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  kaavalla  $f(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$  määrittää pseudometriikan joukolle  $X$ .

*Huomautus 4.7.* Ehdosta (P3) seuraa, että jos  $f(x, z) + f(z, y) < \infty$  niin  $f(x, y) < \infty$ . Tällöin koska kaavat  $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$  ja  $f(y, z) \leq f(y, x) + f(x, z)$  pätevät, niin myös kaava  $|f(x, z) - f(z, y)| \leq f(x, y)$  pätee.

**Esimerkki 4.8.** Olkoon  $f$  pseudometriikka. Tällöin myös  $\lambda f$  on pseudometriikka, jos kaavat  $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$  ja  $0 < \lambda < +\infty$  pätevät.

**Esimerkki 4.9.** Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  perhe joukon  $X$  pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla  $x, y \in X$  on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.10.** Olkoon  $(f_i)_{i \in I}$  perhe joukon  $X$  pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla  $x, y \in X$  kaavasta

$$f_i(x, y) \leq f_i(x, z) + f_i(z, y)$$

seuraa kaava

$$\sup_{i \in I} f_i(x, y) \leq \sup_{i \in I} (f_i(x, z) + f_i(z, y)).$$

Tällöin kuvaus

$$f: X \times X \rightarrow [0, +\infty], f(x, y) = \sup_{i \in I} f_i(x, y)$$

kaikilla  $x, y \in X$  on pseudometriikka.

## Luku 5

# Pseudometriikan määrittämä uniformisuus

Oletamme koko luvun 5 ajan, että  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ .

**Määritelmä 5.1.** Olkoon  $a \in \mathbb{R}_+$  reaalityyppi ja  $\mathcal{U}_a \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  joukko kaavalla

$$\mathcal{U}_a = \{(x, y) \mid |x - y| \leq a, x, y \in \mathbb{R}^n\}$$

Nyt  $B = \{\mathcal{U}_a \mid a \in \mathbb{R}_+\}$  muodostaa uniformisuuden kannan avaruudelle  $\mathbb{R}^n$ :

(B1)

(B2)

(B3)

(B4)

*Huomautus 5.2.*

**Lause 5.3.**

**Määritelmä 5.4.**

**Korollari 5.5.**

**Esimerkki 5.6.**

**Lemma 5.7.**

# Kirjallisuutta

- [1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.
- [2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.