Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Pro gradu -tutkielma

# Stone–Čech kompaktisointi

Pekka Keipi

Ohjaaja: Erik Elfving

3. maaliskuuta 2018

# Sisältö

# Luku 1

# Johdanto

# Luku 2

# Esitietoja

Käytämme koko tutkielman ajan merkintää $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$.

**Määritelmä 2.1.** Olkoon $X$ joukko ja $V$ ja $W$ karteesisen tulon $X \times X$ osajoukkoja. Merkitään tällöin seuraavasti:

$$V \circ W = \{(x, z) \mid \text{on olemassa sellainen } y \in X, \text{ jolla } (x, y) \in V \text{ ja } (y, z) \in W\},$$

$W^2 = W \circ W$ ja $W^n = W \circ W^{n-1}$.

**Määritelmä 2.2.** Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on avoin, jos se on kokoelman $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ alkio.

**Määritelmä 2.3.** Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $A \subset X$ on alkion $x$ *ympäristö*, jos on olemassa sellainen avoin osajoukko $B \subset X$, jolla $x \in B \subset A$.

*Huomautus* 2.4. Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ avoin osajoukko $A \subset X$ on jokaisen alkionsa $x \in A$ ympäristö.

**Määritelmä 2.5.** *Ympäristökanta.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $x \in X$ alkio. Kokoelma $B(x)$ alkion $x$ ympäristöjä on alkion $x$ *ympäristökanta* (topologiassa $\mathcal{T}$), jos jokainen alkion $x$ ympäristö sisältää kokoelman $B(x)$ jonkin jäsenen.

**Korollaari 2.6.** *Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ alkion $x \in X$ kaikkien ympäristöjen kokoelma $B(x)$ on alkion $x$ ympäristökanta.*

**Esimerkki 2.7.** Jos joukkoperhe $B \subset \mathcal{P}(X)$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta ja $x \in X$ alkio, niin joukko $B(x) = \{A \mid x \in A \in B\}$ on alkion $x$ eräs ympäristökanta. Käänteisesti, jos jokaisella alkiolla $x \in X$ on annettu ympäristökanta $B(x)$ avaruudessa $(X, \mathcal{T})$, niin kokoelma $\bigcup\{B(x) \mid x \in X\}$ on avaruuden $(X, \mathcal{T})$ kanta.

**Lause 2.8.** *Olkoon $A$ joukon $X$ peite. Tällöin $A$ on joukon $X$ erään topologian $\mathcal{T}$ esikanta. Lisäksi $\mathcal{T}$ on karkein niistä joukon $X$ topologioista, joilla $A \subset \mathcal{T}$. Tämä topologia $\mathcal{T}$ on peitteen $A$ yksikäsitteisesti määräämä, ja sitä sanotaan peitteen $A$ virittämäksi joukon $X$ topologiaksi.*

*Todistus.* Topologia II [3] lause 2.19. □

**Määritelmä 2.9.** *Topologioiden vertailu.* Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukolle $X$. Topologia $\mathcal{T}_2$ on karkeampi kuin topologia $\mathcal{T}_1$, jos jokaisella $U \in \mathcal{T}_2$ pätee $U \in \mathcal{T}_1$, eli $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. Tällöin $\mathcal{T}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_2$.

# Luku 3

# Uniformiset rakenteet

Tässä kappaleessa tutustutaan uniformisiin rakenteisiin ja näiden keskeisiin ominaisuuksiin [1].

**Määritelmä 3.1.** Uniforminen rakenne (tai uniformiteetti) joukolle $X$ annetaan karteesisen tulon $X \times X$ potenssijoukon $\mathcal{P}(X \times X)$ osajoukkona $\mathcal{U}$, jolle pätee

(U1) Jos $V \in \mathcal{U}$ ja $V \subset W \subset X \times X$ niin $W \in \mathcal{U}$,

(U2) Jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}$,

(U3) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in \mathcal{U}$ osajoukko,

(U4) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin $V^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in V\} \in \mathcal{U}$,

(U5) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^2 \subset V$.

Uniformisen rakenteen muodostavia joukkoja $V \in \mathcal{U}$ sanotaan uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöiksi. Uniformiteetilla $\mathcal{U}$ varustettua joukkoa $X$ sanotaan uniformiseksi avaruudeksi.

*Huomautus* 3.2. Uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöön (entourage) $V \in \mathcal{U}$ kuuluvan pisteparin $(x, y) \in V$ pisteiden $x, y \in X$ sanotaan olevan $V-$lähellä, tarpeeksi lähellä tai mielivaltaisen lähellä toisiaan.

*Huomautus* 3.3. Mikäli muut ehdot pätevät voidaan ehdot (U4) ja (U5) korvata yhtäpitävällä ehdolla:

(Ua) Jos $V \in \mathcal{U}$, niin on olemassa sellainen $W \in \mathcal{U}$, jolla $W \circ W^{-1} \subset V$.

*Huomautus* 3.4. Kokoelma $\{\emptyset\}$ on ainoa ehdot täyttävä uniformiteetti tyhjälle joukolle.

**Määritelmä 3.5.** Olkoon $X$ joukko ja kokoelma $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X \times X)$ uniformiteetti joukolle $X$. Tällöin lähistöjen joukko $B \subset \mathcal{U}$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ *kanta*, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

**Lause 3.6.** *Olkoon $X$ joukko. Kokoelma $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ on joukon $X$ erään uniformiteetin kanta, jos kokoelmalle $B$ pätee*

*(B1) Jos $V_1, V_2 \in B$ niin on olemassa sellainen $V_3 \in B$, jolla $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,*

*(B2) Joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $V \in B$ osajoukko,*

*(B3) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$,*

*(B4) Jos $V \in B$, niin on olemassa sellainen $W \in B$, jolla $W^2 \subset V$.*

*Todistus.* Olkoon $X$ joukko ja $B \subset \mathcal{P}(X \times X)$ sellainen kokoelma, jolle pätevät ehdot (B1)-(B4). Tällöin olkoon

$$\mathcal{U}_B = \{W \subset X \times X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{U}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että $\mathcal{U}_B$ on uniformiteetti. Käydään läpi uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{U}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X \times X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{U}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W \subset W' \subset X \times X$ niin $W' \in \mathcal{U}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$ ja $W' \in \mathcal{U}_B$ joukkoja. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon (B1) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{U}_B$. Lisäksi joukoiksi $W$ ja $W'$ voidaan valita mielivaltaisia kokoelman $\mathcal{U}_B$ alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{U}_B$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{U}_B$.

(U3) Jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{U}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Ehdon (B2) nojalla $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset V$, joten $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset W$.

(U4) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V \subset W$. Tällöin ehdon (B3) nojalla joukolle $V$ on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset V^{-1}$. Näin ollen joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla $V^{-1} \in \mathcal{U}_B$ ja edelleen $W^{-1} \in \mathcal{U}_B$.

(U5) Olkoon $W \in \mathcal{U}_B$. Tällöin joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla on olemassa sellainen $V' \in B$, jolla $V' \subset W$. Ehdon (B4) nojalla on olemassa sellainen $V \in B$, jolla $V^2 \subset V'$. Joukon $\mathcal{U}_B$ määrittelyn nojalla tällöin $V \in \mathcal{U}_B$ ja siis $V^2 \subset W$.

□

**Lause 3.7.** *Uniformisen avaruuden topologia. Olkoon joukko $X$ varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$. Olkoon $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon tällöin*

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\} \quad \text{ja} \quad B(x) = \{V(x) \mid V \in \mathcal{U}\}$$

*joukkoja. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ määrää topologian joukolle $X$ niin, että joukko $V(x)$ on (lähistön $V$ määräämä) ympäristö alkiolle $x$ ja joukko $B(x)$ on alkion $x$ ympäristökanta kyseisessä topologiassa.*

*Todistus.* Olkoon joukko $X$ varustettu uniformiteetilla $\mathcal{U}$, $x \in X$ alkio ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö avaruudessa $X$. Lisäksi olkoot joukot $V(x)$ ja $B(x)$ kuten edellä. Joukko $V(x)$ on epätyhjä, sillä $x \in V(x)$. Olkoon $W \in \mathcal{U}$ lähistö, jolloin $W(x)$ on alkion $x$ ympäristö. Alkion $x$ ympäristöille $V(x)$ ja $W(x)$ pätee

$$\begin{aligned} V(x) \cap W(x) =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \text{ ja } (x, y) \in W\} \\ =& \{y \in X \mid (x, y) \in V \cap W\} \in B(x), \end{aligned}$$

sillä määritelmän 3.1 ehdon (U2) nojalla pätee $V \cap W \in B$. Ehdosta (U1) seuraa, että joukko $B(x)$ on alkion $x$ kaikkien ympäristöjen joukko ja siten korollaarin 2.6 nojalla ympäristökanta. □

*Huomautus* 3.8. Uniformiteetin määräämää topologiaa sanotaan uniformiteetin indusoimaksi topologiaksi.

**Määritelmä 3.9.** Olkoot $X$ ja $X'$ uniformeja avaruuksia ja $f \colon X \to X'$ kuvaus. Kuvaus $f$ on *tasaisesti jatkuva* (uniformly continuous), jos jokaiselle avaruuden $X'$ lähistölle $V'$ on olemassa avaruuden $X$ lähistö $V$ niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$.

**Korollaari 3.10.** *Olkoot $X$ ja $X'$ uniformeja avaruuksia ja $f \colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g \colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Tällöin jos $V'$ on avaruuden $X'$ lähistö, niin alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden $X$ lähistö.*

*Todistus.* Korollaari on suora seuraus määritelmästä 3.9 ja uniformiteetin määritelmän 3.1 ehdosta (U1). □

**Lause 3.11.** *Olkoot $X$ ja $X'$ uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin kuvaus $f$ on jatkuva, kun varustetaan joukot $X$ ja $Y$ uniformiteettiensa indusoimilla topologioilla.*

*Todistus.* Olkoot $X$ ja $X'$ uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Olkoon $g\colon X \times X \to X' \times X'$ kuvaus, jolla pätee $g(x, y) = (f(x), f(y))$ kaikilla $x, y \in X$. Olkoon $V'$ avaruuden $X'$ lähistö ja $x' \in X'$ alkio. Avaruuden $X'$ uniformiteetin indusoimassa topologiassa kaava

$$V'(x') = \{y' \in X' \mid (x', y') \in V'\}$$

määrää alkion $x'$ ympäristön avaruudessa $X$. Korollaarin 3.10 mukaan lähistön $V'$ alkukuva $g^{\leftarrow}V'$ on avaruuden $X$ lähistö. Olkoon nyt $x \in X$ sellainen alkio, jolla $f(x) = x'$. Tällöin joukko $(g^{\leftarrow}V')(x)$ on alkion $x$ ympäristö. Erityisesti ympäristö $(g^{\leftarrow}V')(x)$ kuvautuu ympäristöön $V'(x')$, sillä ehdosta $(x, y) \in g^{\leftarrow}V'$ seuraa $(x', f(y)) \in V'$ kaikilla $y \in X$.

Siis ympäristön alkukuva on ympäristö ja siten tasaisesti jatkuva kuvaus on jatkuva. □

**Lause 3.12.** *Olkoot $X$, $X'$ ja $X''$ uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia. Tällöin yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Olkoot $X, X'$ ja $X''$ uniformeja avaruuksia, $f\colon X \to X'$ ja $g\colon X' \to X''$ tasaisesti jatkuvia kuvauksia ja $V''$ avaruuden $X''$ lähistö. Tällöin tasaisesti jatkuvan kuvauksen määritelmän nojalla on olemassa avaruuden $X'$ lähistö $V'$, jolla jokaisella $(x', y') \in V'$ pätee $(g(x'), g(y')) \in V''$. Edelleen lähistölle $V'$ on olemassa avaruuden $X$ lähistö $V$, jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(f(x), f(y)) \in V'$. Näin ollen lähistölle $V''$ on olemassa lähistö $V$, jolla jokaisella $(x, y) \in V$ pätee $(g(f(x)), g(f(y))) \in V''$, eli $((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) \in V''$.

Siis yhdistetty kuvaus $g \circ f\colon X \to X''$ on tasaisesti jatkuva. □

**Määritelmä 3.13.** Olkoot $X$ ja $X'$ uniformeja avaruuksia ja $f\colon X \to X'$ bijektiivinen kuvaus. Kuvaus $f$ on *isomorfismi*, jos sekä kuvaus $f$ että sen käänteiskuvaus $f^{-1}$ ovat tasaisesti jatkuvia.

**Määritelmä 3.14.** *Uniformiteettien vertailu.* Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle $X$. Uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_1$, jos identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_1) \to (X, \mathcal{U}_2)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$.

Jos lisäksi pätee $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$, niin $\mathcal{U}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{U}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{U}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{U}_1$. Sanotaan, että kahta uniformiteettia $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{U}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$. Uniformiteeteille $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ pätee $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$, jos $\mathcal{U}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_2$.

**Korollaari 3.15.** *Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle $X$. Uniformiteetti $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}_2$ jos ja vain jos jokaisella lähistöllä $V \in \mathcal{U}_2$ pätee $V \in \mathcal{U}_1$.*

**Korollaari 3.16.** *Olkoon $X$ joukko, $\mathcal{U}_1$ ja $\mathcal{U}_2$ uniformiteetteja joukolle $X$ ja $\mathcal{U}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{U}_2$. Tällöin uniformiteetin $\mathcal{U}_1$ indusoima topologia on hienompi kuin uniformiteetin $\mathcal{U}_2$ indusoima topologia.*

**Lause 3.17.** *Olkoon $X$ joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla $I$. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x, y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$, $i \in I$. Tällöin joukko*

$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$

*on kanta eräälle avaruuden $X$ uniformiteetille $\mathcal{U}$.*

*Todistus.* Olkoon $X$ joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$. Olkoon lisäksi kuvaukset $f_i$ ja $g_i$ ja joukko $B$ kuten yllä. Selvitetään, onko joukko $B$ uniformiteetin kanta käymällä läpi kantalauseen 3.6 ehdot:

(B1) Olkoon $U_1, U_2 \in B$. Tällöin olemassa äärelliset osajoukot $J_1, J_2 \subset I$ ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$ kaikilla $i \in J_1$ ja $V_j \in \mathcal{U}_j$ kaikilla $j \in J_2$, joilla

$$U_1 = \bigcap_{i \in J_1} g_i^{\leftarrow}(V_i) \quad \text{ja} \quad U_2 = \bigcap_{j \in J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j).$$

Yhdiste $J_1 \cup J_2$ on äärellinen indeksijoukon $I$ osajoukko, joten

$$U_3 = \bigcap_{j \in J_1 \cup J_2} g_j^{\leftarrow}(V_j) \in B$$

ja erityisesti $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(B2) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla

$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$

Jokaisella $V_i \in \mathcal{U}_i$ pätee $\{(y_i, y_i) \mid y_i \in Y_i\} \subset V_i$ ja näin ollen myös jokaisella $g_i^{\leftarrow}(V_i)$ pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset g_i^{\leftarrow}(V_i)$. Siis pätee $\{(x, x) \mid x \in X\} \subset U$, koska $U$ on leikkaus joukoista $g_i^{\leftarrow}(V_i)$.

(B3) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla
$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$
Uniformiteetin määritelmän ehdon (U4) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin $V_i^{-1} \in \mathcal{U}_i$. Näin ollen
$$U^{-1} = \bigcap_{i \in J} (g_i^{\leftarrow}(V_i))^{-1} = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i^{-1}) \in B,$$
jolloin vaadittu ehto pätee muodossa $U^{-1} \subset U^{-1}$.

(B4) Olkoon $U \in B$. Tällöin on olemassa äärellinen $J \subset I$, ja lähistöt $V_i \in \mathcal{U}_i$, kaikilla $i \in J$, joilla
$$U = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i).$$
Uniformiteetin määritelmän ehdon (U5) nojalla jos $V_i \in \mathcal{U}_i$ niin on olemassa sellainen $W_i \in \mathcal{U}_i$, jolla $W_i^2 \subset V_i$. Olkoon
$$A = \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i),$$
jolloin $A \in B$ ja näin ollen riittää osoittaa, että $A^2 \subset U$. Määritelmän mukaan $A^2 = \{(x,z) \mid (x,y) \in A \text{ ja } (y,z) \in A\}$. Siis alkioilla $x, z \in X$ pätee $(x,z) \in A^2$ täsmälleen silloin, kun on olemassa sellainen $y \in X$, jolla $(x,y) \in A$ ja $(y,z) \in A$. Toisaalta jos $(x,y) \in A$ ja $(y,z) \in A$ niin $(x,y) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ ja $(y,z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i)$ jokaisella $i \in J$. Tällöin $g_i(x,y) \in W_i$ ja $g_i(y,z) \in W_i$, joten $g_i(x,z) \in W_i^2$. Näin ollen $(x,z) \in g_i^{\leftarrow}(W_i^2)$ jokaisella $i \in J$, joten
$$(x,z) \in \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(W_i^2) \subset \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) = U.$$
Näin ollen $A^2 \subset U$.

Siis joukko $B$ on joukon $X$ erään uniformiteetin kanta. □

**Määritelmä 3.18.** *Kuvausperheen indusoima uniformiteetti* (initial uniformity). Olkoon $X$ joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla $I$. Olkoon $f_i \colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$ ja $g_i \colon X \times X \to Y_i \times Y_i$ kuvaus, jolla $g_i(x,y) = (f_i(x), f_i(y))$ kaikilla $x, y \in X$ ja $i \in I$. Tällöin joukko
$$B = \left\{ \bigcap_{i \in J} g_i^{\leftarrow}(V_i) \mid J \subset I \text{ äärellinen}, V_i \in \mathcal{U}_i \text{ kaikilla } i \in J \right\}$$
on kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoiman uniformiteetin kanta. (Vrt. edellinen lause.)

**Lause 3.19.** *Olkoon $X$ joukko ja $(Y_i, \mathcal{U}_i)$ uniforminen avaruus jokaisella $i \in I$, jollain indeksijoukolla $I$. Olkoon $f_i\colon X \to Y_i$ kuvaus jokaisella $i \in I$. Tällöin kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ indusoima uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkein niistä uniformiteeteista, joiden suhteen kaikki kuvaukset $f_i$ ovat tasaisesti jatkuvia.* □

**Määritelmä 3.20.** *Uniformiteettien pienin yläraja.* Olkoon $X$ joukko ja $I$ jokin indeksijoukko. Olkoon $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ perhe uniformiteetteja joukolle $X$. Tällöin perheen $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$ *pienin yläraja* on uniformiteetti $\mathcal{U}$, joka on kuvausten $id\colon X \to (X, \mathcal{U}_i)$ määritelmän 3.18 mukaisesti indusoima.

# Luku 4

# Pseudometriikat

Tässä kappaleessa tutustutaan pseudometriikoihin, jotka ovat tavanomaisten metriikoiden yleistys. Lisää aiheesta [2].

**Määritelmä 4.1.** Olkoon $X$ joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kuvaus. Kuvaus $f$ on *pseudometriikka*, jos seuraavat ehdot pätevät:

(P1) $f(x, x) = 0$ kaikilla $x \in X$,

(P2) $f(x, y) = f(y, x)$ kaikilla $x, y \in X$,

(P3) $f(x, y) \leq f(x, z) + f(z, y)$ kaikilla $x, y, z \in X$.

*Huomautus* 4.2. Pseudometriikan määritelmästä saadaan metriikan määritelmä, jos rajoitutaan äärellisiin arvoihin ja vahvistetaan ehtoa (P1) muotoon

(M1) $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ kaikilla $x, y \in X$.

Metriikan ehdot täyttävä kuvaus on pseudometriikka, joten jokainen metriikka on myös pseudometriikka.

**Esimerkki 4.3.** Euklidinen etäisyys on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.4.** Olkoon $X$ epätyhjä joukko ja $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ sellainen kuvaus, jolla

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x = y \\ \infty, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin $f$ on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.5.** Olkoon $X$ epätyhjä joukko ja $g\colon X \to \mathbb{R}$ (äärellisarvoinen) kuvaus. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0, +\infty]$ kaavalla $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$ on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.6.** Olkoon $X$ kaikkien muotoa $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ olevien jatkuvien kuvausten joukko. Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ kaavalla $f(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$ määrittelee pseudometriikan joukolle $X$.

*Huomautus* 4.7. Määritelmän 4.1 ehdon (P3) nojalla epäyhtälöstä $f(x,z) + f(z,y) < \infty$ seuraa $f(x,y) < \infty$. Näin ollen epäyhtälöistä

$$f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z) \text{ ja } f(y,z) \leq f(y,x) + f(x,z)$$

seuraa epäyhtälö $|f(x,z) - f(z,y)| \leq f(x,y)$.

**Esimerkki 4.8.** Olkoon $f$ pseudometriikka joukolle $X$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ reaaliluku, jolla $\lambda > 0$. Tällöin kuvaus $\lambda f$, jolla $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ kaikilla $x \in X \times X$ on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.9.** Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon $X$ pseudometriikoita. Tällöin summakuvaus

$$f\colon X \times X \to [0,+\infty], \quad f(x,y) = \sum_{i \in I} f_i(x,y)$$

kaikilla $x, y \in X$ on pseudometriikka.

**Esimerkki 4.10.** Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ perhe joukon $X$ pseudometriikoita. Tällöin kaikilla alkioilla $x, y \in X$ epäyhtälöstä $f_i(x,y) \leq f_i(x,z) + f_i(z,y)$ seuraa epäyhtälö

$$\sup_{i \in I} f_i(x,y) \leq \sup_{i \in I} \left( f_i(x,z) + f_i(z,y) \right).$$

Tällöin kuvaus $f\colon X \times X \to [0,+\infty]$ missä

$$f(x,y) = \sup_{i \in I} f_i(x,y) \quad \text{kaikilla } x, y \in X$$

on pseudometriikka.

# Luku 5

# Pseudometriikan määrittelemä uniformiteetti

**Lause 5.1.** *Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $U_a \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ joukko kaavalla*

$$U_a = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\}.$$

*Kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0, \infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan.*

*Todistus.* Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoon $a_1, a_2 \in [0, \infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin kaavasta $|x - y| \leq a_1$ seuraa $|x - y| \leq a_2$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$. Näin ollen $U_{a_1} \subset U_{a_2}$ ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Tällöin kaikilla $a \in [0, \infty]$ pätee $|x - x| = 0 < a$, joten joukko $\{(x, x) \mid x \in X\}$ on jokaisen joukon $U_a \in B$ osajoukko,

(B3) Olkoon $x', y' \in \mathbb{R}^n$ ja $a \in [0, \infty]$. Tällöin jos $|x' - y'| \leq a$ niin myös $|y' - x'| \leq a$. Näin ollen

$$\begin{aligned} U_a =& \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& \{(y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}^n, |x - y| \leq a\} \\ =& U_a^{-1}. \end{aligned}$$

Siis jokaiselle $U_a$ pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in [0, \infty]$ luku ja $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ sellaisia pisteitä, joilla $(x, z) \in U_a$ ja $(z, y) \in U_a$, eli $|x - z| \leq a$ ja $|z - y| \leq a$. Tällöin kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|x - y| \overset{\triangle\text{−ey}}{\leq} |x - z| + |z - y| \leq a + a = 2a,$$

eli $|x-y| \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0,\infty]$ määräämälle joukolle $U_b$ löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0,\infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan. $\square$

Edeltävää lausetta voidaan yleistää seuraavasti:

**Lause 5.2.** *Olkoon $X$ joukko ja $f$ pseudometriikka joukolle $X$. Tällöin pseudometriikka $f$ määrittelee sellaisen uniformiteetin joukolle $X$, jonka kannan muodostaa kokoelma*

$$B = \{f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X \mid a \in [0,\infty]\}.$$

*Todistus.* Olkoon $a \in [0,\infty]$ luku ja merkitään joukkoa $f^{\leftarrow}[0,a] \subset X \times X$ kaavalla $f^{\leftarrow}[0,a] = U_a$. Lauseen 3.6 ehdot pätevät:

(B1) Olkoot $a_1, a_2 \in [0,\infty]$ lukuja, joilla $a_1 \leq a_2$. Tällöin pätee

$$U_{a_1} = f^{\leftarrow}[0,a] \subset f^{\leftarrow}[0,b] = U_{a_2}$$

ja siis $U_{a_1} \subset U_{a_1} \cap U_{a_2}$,

(B2) Kuvaus $f$ on pseudometriikka, joten pseudometriikan määritelmän 4.1 ehdon (P1) nojalla kaikilla $x \in X$ pätee $f(x,x) = 0$. Toisin sanoen pistepareista $(x,x)$ muodostuvan joukon $\{(x,x) \mid x \in X\}$ jokainen alkio kuvautuu pseudometriikassa nollaksi. Näin ollen joukko $\{(x,x) \mid x \in X\}$ sisältyy jokaisen suljetun välin $[0,a]$ alkukuvaan $f^{\leftarrow}[0,a]$ kaikilla $a \in [0,\infty]$.

(B3) Pseudometriikan ehdosta (P2) seuraa, että $f(x,y) = f(y,x)$ kaikilla $x,y \in X$. Tällöin $(x,y) \in U_a \Leftrightarrow (y,x) \in U_a$ ja siis $U_a^{-1} = U_a$, eli jokaiselle $U_a$ pätee $U_a \subset U_a^{-1}$.

(B4) Olkoon $a \in [0,\infty]$ luku ja $x,y,z \in X$ sellaisia alkioita, joilla $(x,z) \in U_a$ ja $(z,y) \in U_a$, eli $f(x,z) \leq a$ ja $f(z,y) \leq a$. Tällöin pseudometriikan ehdosta (P3) seuraa

$$f(x,y) \leq f(x,z) + f(z,y) \leq a + a = 2a,$$

eli $f(x,y) \leq 2a$. Tästä seuraa, että $U_a^2 \subset U_{2a}$, joten jokaiselle luvun $b \in [0,\infty]$ määräämälle joukolle $U_b$ löytyy joukko $U_{b/2}$, jolla $U_{b/2}^2 \subset U_b$.

Siis kokoelma $B = \{U_a \mid a \in [0,\infty]\} = \{f^{\leftarrow}[0,a] \mid a \in [0,\infty]\}$ muodostaa joukon $\mathbb{R}^n$ uniformiteetin kannan ja voimme nyt muodostaa seuraavan määritelmän. $\square$

**Määritelmä 5.3.** Olkoon $X$ joukko ja $f$ ja $g$ pseudometriikoita joukolle $X$. Tällöin lauseen 5.2 nojalla pseudometriikat $f$ ja $g$ määrittelevät jotkut uniformiteetit joukolle $X$. Pseudometriikat $f$ ja $g$ ovat *ekvivalentteja*, jos ne määräävät saman uniformiteetin.

**Korollaari 5.4.** *Olkoon $X$ joukko ja $f$ ja $g$ pseudometriikoita joukolle $X$. Määritelmästä 5.3 seuraa, että pseudometriikan $f$ määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan $g$ määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$, jos ja vain jos jokaiselle $a \in [0, \infty]$ on olemassa sellainen $b \in [0, \infty]$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$.*

*Lisäksi, jos jokaiselle $a \in [0, \infty]$ on olemassa $b \in [0, \infty]$, jolla $f(x, y) \leq b \Rightarrow g(x, y) \leq a$ kaikilla $x, y \in X$, niin $f$ ja $g$ ovat ekvivalentteja pseudometriikoita.*

*Todistus.* Olkoon $X$ joukko ja $f$ ja $g$ pseudometriikoita joukolle $X$. Määritelmän 5.2 mukaan pseudometriikan $f$ määrittelemän uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_f = \{f^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}.$$

Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_f = \{V \subset X \times X \mid f^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Vastaavasti uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan muodostaa kokoelma

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0, a] \subset X \times X \mid a \in [0, \infty]\}$$

ja uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on kokoelma

$$\mathcal{U}_g = \{V \subset X \times X \mid g^{\leftarrow}[0, a] \subset V, \text{ jollain } a \in [0, \infty]\}.$$

Osoitetaan väitteen implikaatio molempiin suuntiin.

$\Rightarrow$ Olkoon uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$ ja näin ollen määritelmän 3.14 mukaan identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin määritelmän 3.9 mukaan jokaiselle maalijoukon lähistölle $V' \in \mathcal{U}_f$ on olemassa lähtöjoukon lähistö $V \in \mathcal{U}_g$ niin, että jokaiselle $(x, y) \in V$ pätee $(x, y) \in V'$ kaikilla $x, y \in X$. Tarkastelemalla uniformiteettien kantojen jäseniä voidaan edeltävä ehto muotoilla seuraavasti: Jokaisella $a \in [0, \infty]$ on olemassa $b \in [0, \infty]$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, eli $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle luvulle $a \in [0, \infty]$ on olemassa sellainen $b \in [0, \infty]$, jolla $g(x, y) \leq b \Rightarrow f(x, y) \leq a$, eli $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a]$, kaikilla $x, y \in X$. Siis jokaiselle uniformiteetin $\mathcal{U}_f$ kannan jäsenelle $f^{\leftarrow}[0, a']$ missä $a' \in [0, \infty]$ on olemassa uniformiteetin $\mathcal{U}_g$ kannan jäsen $g^{\leftarrow}[0, b']$ missä $b' \in [0, \infty]$ niin, että kaikilla $x, y \in X$ pätee $(x, y) \in g^{\leftarrow}[0, b'] \Rightarrow (x, y) \in f^{\leftarrow}[0, a']$. Näin ollen identtinen kuvaus $id\colon (X, \mathcal{U}_g) \to (X, \mathcal{U}_f)$ on tasaisesti jatkuva ja siten uniformiteetti $\mathcal{U}_g$ on uniformiteettia $\mathcal{U}_f$ hienompi. Siis pseudometriikan $f$ määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_f$ on karkeampi kuin pseudometriikan $g$ määräämä uniformiteetti $\mathcal{U}_g$.

Lisäksi määritelmistä 3.14 ja 5.3 seuraa, että jos $\mathcal{U}_f$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{U}_g$, niin pseudometriikat $f$ ja $g$ ovat ekvivalentteja. $\square$

**Määritelmä 5.5.** Olkoon $X$ joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon $X$ pseudometriikkaperhe. Pseudometriikkojen $f_i$ määrittelemien uniformiteettien $\mathcal{U}_{f_i}$ perheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienintä ylärajaa sanotaan perheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemäksi uniformiteetiksi.

**Määritelmä 5.6.** Olkoon $X$ joukko ja olkoot $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ joukon $X$ pseudometriikkaperheitä. Perheet $(f_i)$ ja $(g_j)$ ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit ovat samoja.

**Määritelmä 5.7.** Olkoon $X$ joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon $X$ pseudometriikkaperhe. Olkoon $H \subset I$ äärellinen joukko ja $g_H \colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla $g_H(x,y) = \sup_{i\in H} f_i(x,y)$ kaikilla $x,y \in X$. Kuvaus $g_H$ on pseudometriikka (esimerkki 4.10) ja siten voidaan muodostaa pseudometriikkaperhe $(g_H) := (g_H)_{H\subset I \text{ äärellinen}}$. Näin muodostettu pseudometriikkaperhe $(g_H)$ on *saturoitu* (saturated) ja saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$.

**Lause 5.8.** *Olkoon $X$ joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon $X$ pseudometriikkaperhe. Olkoon $(g_H)$ pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla $(f_i)_{i\in I}$. Saturoidusta pseudometriikkaperheestä $(g_H)$ otetun äärellisen osaperheen $(g_A) := \{g_{A_1}, g_{A_2}, \dots, g_{A_n}\} \subset (g_H)$ pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen $(g_H)$.*

*Todistus.* Saturoidun pseudometriikkaperheen $(g_H)$ äärellisen osaperheen $(g_A)$ jäsenet ovat kuvauksia, joilla $g_{A_j}(x,y) = \sup_{i\in A_j} f_i(x,y)$ kaikilla $x,y \in X$. Näin ollen osaperheen $(g_A)$ pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}$ on kuvaus, jolla

$$\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}(x,y) = \sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} \left( \sup_{i\in A_j} f_i(x,y) \right) = \sup_{\substack{j\in\{1,2,\dots,n\} \\ i\in A_j}} f_i(x,y) = \sup_{i\in\bigcup_{j=1}^n A_j} f_i(x,y).$$

Joukko $\bigcup_{j=1}^n A_j \subset I$ on äärellisten joukkojen yhdisteenä äärellinen ja siten osaperheen $(g_A)$ pienin yläraja $\sup_{j\in\{1,2,\dots,n\}} g_{A_j}$ kuuluu perheeseen $(g_H)$. $\square$

**Lause 5.9.** *Olkoon $X$ joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon $X$ pseudometriikkaperhe. Olkoon $(g_H)$ pseudometriikkaperhe, joka on saatu saturoimalla perhe $(f_i)_{i\in I}$. Tällöin perhe $(g_H)$ on ekvivalentti perheen $(f_i)_{i\in I}$ kanssa.*

*Todistus.* Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienin yläraja $\sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i}$, eli pienin uniformiteetti, joka sisältää $\mathcal{U}_{f_i}$ kaikilla $i\in I$. Vastaavasti Pseudometriikkaperheen $(g_H)$ määrittelemä uniformiteetti on $\sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H}$.

Pseudometriikkaperheet $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_H)$ ovat ekvivalentteja, jos niiden määrittelemät uniformiteetit $\mathcal{U}_f := \sup_{i\in I}\mathcal{U}_{f_i}$ ja $\mathcal{U}_g := \sup_{H\subset I \text{ äärellinen}}\mathcal{U}_{g_H}$ ovat samoja.

Määritelmän 5.7 nojalla jokaiselle pseudometriikalle $f_j \in (f_i)_{i\in I}$ löytyy pseudometriikka $g_{\{j\}} \in (g_H)$ niin, että $g_{\{j\}}(x,y) = \sup_{i\in\{j\}} f_i(x,y) = f_j(x,y)$ kaikilla $x,y\in X$. Siis $\mathcal{U}_f \subset \mathcal{U}_g$. Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{U}_{g_{H'}} \subset \mathcal{U}_f$ jokaisella äärellisellä osajoukolla $H'\subset I$.

Puuttuu. □

**Korollaari 5.10.** *Jokaiselle pseudometriikkaperheelle löytyy aina ekvivalentti saturoitu pseudometriikkaperhe ja näin ollen pseudometriikkaperheen voidaan olettaa olevan saturoitu.* □

**Lause 5.11.** *Olkoon $X$ joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ joukon $X$ pseudometriikkaperhe. Olkoon lisäksi $g\colon X\times X\to[0,\infty]$, $g(x,y)=\sup_{i\in I} f_i(x,y)$ kaikilla $x,y\in X$ joukon $X$ pseudometriikka. Mikäli indeksijoukko $I$ on äärellinen on perheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti sama kuin pseudometriikan $g$ määräämä uniformiteetti.*

*Todistus.* Olkoon $X$ joukko, $I$ äärellinen indeksijoukko, $(f_i)_{i\in I}$ joukon $X$ pseudometriikkaperhe ja $g\colon X\times X\to[0,\infty]$, $g(x,y)=\sup_{i\in I} f_i(x,y)$ kaikilla $x,y\in X$ joukon $X$ pseudometriikka. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määräämä uniformiteetti on uniformiteettiperheen $(\mathcal{U}_{f_i})_{i\in I}$ pienin yläraja, jonka kanta on joukko

$$B_f = \left\{\bigcap_{i\in J} V_i \mid J\subset I, V_i\in\mathcal{U}_{f_i} \text{ kaikilla } i\in J\right\}.$$

Indeksijoukko $I$ on äärellinen, joten jokaiselle alkioparille $(x,y)\in X\times X$ löytyy indeksi $i_{x,y}\in I$ niin, että $f_i(x,y)\le f_{i_x}(x,y)$ kaikilla $i\in I$. Näin ollen jokaisella $a\in[0,\infty]$ pätee

$$g^{\leftarrow}[0,a] = \{(x,y)\subset X\times X \mid f_i(x,y)\le a \text{ kaikilla } i\in I\} = \bigcap_{i\in I} f_i^{\leftarrow}[0,a].$$

Pseudometriikan $g$ määräämän uniformiteetin kanta on siis

$$B_g = \{g^{\leftarrow}[0,a]\subset X\times X \mid a\in[0,\infty]\} = \left\{\bigcap_{i\in I} f_i^{\leftarrow}[0,a]\subset X\times X \mid a\in[0,\infty]\right\}.$$

Nyt $B_f \subset B_g$, sillä $f_i^{\leftarrow}[0,a] \in \mathcal{U}_{f_i}$, kun $i \in I$ ja $a \in [0,\infty]$.

Osoitetaan seuraavaksi, että $\mathcal{U}_{B_g} \subset \mathcal{U}_{B_f}$.

Puuttuu. □

**Lause 5.12.** *Olkoon uniformiteetit $\mathcal{U}$ ja $\mathcal{U}'$ saturoitujen perheiden $(f_i)_{i\in I}$ ja $(g_j)_{j\in J}$ määräämiä. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on karkeampi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}'$, jos jokaisella $i \in I$ ja $a \in [0,\infty]$ löytyy $j \in J$ ja $b \in [0,\infty]$, joilla ehdosta $g_j(x,y) \le b$ seuraa $f_i(x,y) \le a$. Vastaavasti tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}'$ on hienompi kuin uniformiteetti $\mathcal{U}$.* □

**Lemma 5.13.** *Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle $X$. Tällöin on olemassa pseudometriikkaperhe $(f_i)_{i\in I}$, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$.*

*Todistus.* Jokaiselle lähistölle $U \in \mathcal{U}$ määritellään karteesisen tulon $X \times X$ osajoukoista muodostuva perhe $(V_n)$, jolla $V_1 \subset U$ ja $V_{n+1}^2 \subset V_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}, n \ge 1$. Nyt perhe $(V_n)$ on kanta eräälle joukon $X$ uniformiteetille $\mathcal{U}_V$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{U}$. Erityisesti $\mathcal{U}$ on uniformiteettien $\mathcal{U}_V, V \in \mathcal{U}$ pienin yläraja. Tällöin lemma on seuraus seuraavasta lauseesta, sillä $(U_n)$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ numeroituva kanta. □

**Lause 5.14.** *Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle $X$. Jos uniformiteetilla $\mathcal{U}$ on numeroituva kanta, niin on olemassa pseudometriikka $f\colon X \times X \to [0,\infty]$, jonka määräämä uniformiteetti on identtinen uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanssa.*

*Todistus.* Olkoon $(V_n)$ numeroituva kanta uniformiteetille $\mathcal{U}$. Tällöin olkoon $(U_n)$ perhe symmetrisiä uniformiteetin $\mathcal{U}$ lähistöjä, joilla $U_1 \subset V_1$ ja $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \ge 1$. Nyt $(U_n)$ on myös uniformiteetin $\mathcal{U}$ kanta ja erityisesti $U_{n+1}^3 \subset U_n \cap V_n$, kun $n \ge 1$.

Olkoon $g\colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \ge 1, \\ 1 & \text{, jos } (x,y) \notin U_1, \\ 2^{-k} & \text{, jos } (x,y) \in U_n \text{ kaikilla } n \le k \text{ ja } (x,y) \notin U_{k+1}. \end{cases}$$

Nyt $g$ on symmetrinen, positiivinen ja $g(x,x) = 0$ kaikilla $x \in X$.

Olkoon nyt $f\colon X \times X \to [0,\infty]$ kuvaus, jolla

$$f(x,y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}),$$

missä $p \in \mathbb{N}, p \ge 1$ ja $(z_i)_{0\le i\le p}$ joukon $X$ alkioista muodostuva jono, jossa $z_0 = x$ ja $z_p = y$. Kuvauksen $f$ määrittelystä seuraa, että $f$ on symmetrinen, kolmioepäyhtälö pätee ja kaavat $f(x, y) \geq 0$ ja $f(x, x) = 0$ pätevät kaikilla $x, y \in X$. Siis $f$ on pseudometriikka. Näytetään seuraavaksi, että epäyhtälöt

$$\frac{1}{2}\, g(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y) \tag{5.15}$$

pätevät. Kaavan oikea puoli, eli $f(x, y) \leq g(x, y)$ seuraa siitä, että

$$f(x, y) = \inf \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \leq \sum_{i=0}^{1} g(z_i, z_i + 1) = g(z_0, z_1) = g(x, y).$$

Kaavan 5.15 vasen puoli, eli $\frac{1}{2}\, g(x, y) \leq f(x, y)$ osoitetaan induktion avulla. Olkoon $p \in \mathbb{N}$ luonnollinen luku. Nyt jokaisella $p + 1$ alkion jonolla joukon $X$ alkioita $(z_i)_{0 \leq i \leq p}$, jolla $z_0 = x$ ja $z_p = y$, saadaan induktio-oletukseksi

$$\sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x, y). \tag{5.16}$$

Jos $p = 1$, niin summassa on vain yksi termi

$$g(z_0, z_1) = g(x, y) \geq \frac{1}{2}\, g(x, y).$$

Merkitään

$$a = \sum_{i=0}^{p-1} g(z_i, z_{i+1}), \tag{5.17}$$

jolloin induktio-oletus voidaan kirjoittaa muodossa $a \geq \frac{1}{2} g(x, y)$. Määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 1$, joten jos $a \geq 1/2$, niin yhtälö 5.16 pätee muodossa $a \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} g(x, y)$. Oletetaan, että $a < 1/2$ ja että $h$ on suurin niistä indekseistä $q$, joilla $\sum_{i<q} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2$. Tällöin

$$\sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2 \quad \text{ja lisäksi} \quad \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \leq a/2,$$

sillä $\sum_{i<h+1} g(z_i, z_{i+1}) > a/2$. Edeltävien kaavojen ja induktio-oletuksen nojalla (sijoituksella $p = h$) pätee

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i<h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(x, z_h),$$

eli $g(x, z_h) \leq a$. Toisaalta yllä olevien kaavojen nojalla pätee myös

$$\frac{1}{2} a \geq \sum_{i>h} g(z_i, z_{i+1}) \geq \frac{1}{2}\, g(z_{h+1}, y),$$

eli $g(z_{h+1}, y) \leq a$. Toisaalta luvun $a$ määrittelyn nojalla $g(z_h, z_{h+1}) \leq a$.

Olkoon $k \in \mathbb{N}$ pienin luku, jolla $2^{-k} \leq a$. Tällöin oletuksesta $a < 1/2$ seuraa $k \geq 2$ ja kuvauksen $g$ määrittelystä seuraa, että $(x, z_h) \in U_k, (z_h, z_{h+1}) \in U_k$ ja $(z_{h+1}, y) \in U_k$. Nyt $(x, y) \in U_k^3$ ja lähistöperheen $(U_n)$ määrittelyn nojalla $(x, y) \in U_{k-1}$. Kuvauksen $g$ määrittelyn nojalla $g(x, y) \leq 2^{-(k-1)} = 2^{1-k} \leq 2a$, eli $\frac{1}{2}g(x, y) \leq a$.

Näin ollen kaavan 5.15 epäyhtälöt pätevät ja niistä seuraa, että jokaisella $a > 0$ pätee $U_k \subset f^{\leftarrow}([0, a])$, kun $2^{-k} < a$. Toisaalta myös $f^{\leftarrow}([0, a]) \subset U_k$, joten joukot $f^{\leftarrow}([0, a])$ muodostavat kannan uniformiteetille $\mathcal{U}$. Siis löydettiin pseudometriikka $f$, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$. $\square$

# Luku 6

# Täydellinen uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään täydellinen uniforminen avaruus minimaalisten Cauchy filtterien avulla.

Sellaiselle joukolle, jolle on määritelty uniformiteetti voidaan määritellä myös *tarpeeksi pieni* osajoukko kyseisen uniformiteetin suhteen. Osajoukko on tarpeeksi pieni silloin, kun kaikki osajoukon alkiot ovat tarpeeksi lähellä toisiaan (huomautus 3.2). Näin saadaan seuraava määritelmä.

**Määritelmä 6.1.** Olkoon $X$ joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle $X$ ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Osajoukko $A \subset X$ on $V-$*pieni*, jos jokaisella pisteparilla $x, y \in A$ pätee $(x, y) \in V$, eli jos $A \times A \subset V$.

**Lause 6.2.** *Olkoon $X$ joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle $X$ ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Olkoon lisäksi $A \subset X$ ja $B \subset X$ $V-$pieniä osajoukkoja, joiden leikkaus on epätyhjä. Tällöin yhdiste $A \cup B$ on $V^2-$pieni.*

*Todistus.* Olkoot $x \in A$, $y \in B$ ja $z \in A \cap B$ alkioita. Tällöin alkioparit $(x, z)$ ja $(z, y)$ kuuluvat lähistöön $V$ ja näin ollen alkiopari $(x, y)$ kuuluu joukkoon $V^2$. $\square$

**Määritelmä 6.3.** *Filtteri.* Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ potenssijoukon epätyhjä osajoukko. Joukko $\mathcal{F}$ on *filtteri* joukolle $X$, jos sille pätee uniformiteetin ehtojen (U1) ja (U2) lisäksi seuraava ehto:

(F) Joukko $\mathcal{F}$ on epätyhjä eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon $\mathcal{F}$.

**Määritelmä 6.4.** *Filtterin kanta.* Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ filtteri joukolle $X$. Tällöin joukko $B \subset \mathcal{F}$ on filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos jokaiselle filtterin alkiolle $V \in \mathcal{F}$ löytyy kannan alkio $W \in B$, jolla pätee $W \subset V$.

**Lause 6.5.** *Olkoon $X$ uniforminen avaruus. Joukko $B \subset \mathcal{P}(X)$ on erään filtterin $\mathcal{F}$ kanta, jos ehdon (F) lisäksi pätee ehto:*

*($B_F$) Jos $A_1, A_2 \in B$, niin on olemassa sellainen $A_3 \in B$, jolla $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.*

*Todistus.* Olkoon $X$ uniforminen avaruus ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ sellainen joukko, jolle pätevät ehdot (F) ja ($B_F$).

Tällöin olkoon

$$\mathcal{F}_B = \{W \subset X \mid V \subset W \text{ jollain } V \in B\}$$

joukko. Joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelystä seuraa, että jokaiselle alkiolle $W \in \mathcal{F}_B$ löytyy kannan alkio $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Lisäksi $B \subset \mathcal{F}_B$. Näin ollen riittää tarkistaa, että $\mathcal{F}_B$ on filtteri. Käydään läpi filtterin määritelmän 6.3 ehdot:

(U1) Jos $W \in \mathcal{F}_B$, niin on olemassa sellainen $V \in B$, jolla pätee $V \subset W$. Toisaalta jos osajoukolle $W' \subset X$ pätee $V \subset W \subset W'$, niin $W' \in \mathcal{F}_B$.
Siis jos $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W \subset W' \subset X$ niin $W' \in \mathcal{F}_B$.

(U2) Olkoon $W \in \mathcal{F}_B$ ja $W' \in \mathcal{F}_B$ joukkoja. Joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelyn nojalla tällöin on olemassa sellaiset $V \in B$ ja $V' \in B$, joille pätee $V \subset W$ ja $V' \subset W'$ ja erityisesti $V \cap V' \subset W \cap W'$. Edelleen ehdon ($B_F$) nojalla on olemassa sellainen $V'' \in B$, jolle pätee $V'' \subset V \cap V'$ ja siis $V'' \subset W \cap W'$. Näin ollen leikkaus $W \cap W'$ kuuluu kokoelmaan $\mathcal{F}_B$. Lisäksi joukoiksi $W$ ja $W'$ voidaan valita mielivaltaisia kokoelman $\mathcal{F}_B$ alkioita, joten induktiivisesti jokainen äärellinen leikkaus joukon $\mathcal{F}_B$ alkioista kuuluu joukkoon $\mathcal{F}_B$.

(F) Ehto (F) pätee joukolle $B$, joten joukon $\mathcal{F}_B$ määrittelyn nojalla $\mathcal{F}_B$ ei ole tyhjä joukko eikä tyhjä joukko kuulu joukkoon $\mathcal{F}_B$.

□

**Määritelmä 6.6.** *Filttereiden vertailu.* Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle $X$. Filtteri $\mathcal{F}_2$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}_1$, jos $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Tällöin $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin $\mathcal{F}_2$. Jos lisäksi pätee $\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_2$, niin $\mathcal{F}_1$ on aidosti hienompi kuin $\mathcal{F}_2$ ja vastaavasti $\mathcal{F}_2$ on aidosti karkeampi kuin $\mathcal{F}_1$.

Sanotaan, että kahta filtteriä $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ voidaan vertailla, jos $\mathcal{F}_1$ on hienompi tai karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

Filtterit $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ ovat samoja, eli $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$, jos $\mathcal{F}_1$ on sekä hienompi että karkeampi kuin $\mathcal{F}_2$.

**Lause 6.7.** *Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle $X$. Olkoon lisäksi $B_1$ kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja $B_2$ kanta filtterille $\mathcal{F}_2$. Tällöin filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$ jos ja vain jos jokaiselle $A_2 \in B_2$ löytyy sellainen $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$.*

*Todistus.* Olkoon $X$ joukko, $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle $X$, $B_1$ kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja $B_2$ kanta filtterille $\mathcal{F}_2$.

$\Rightarrow$ Olkoon filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$, eli $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Olkoon $A_2 \in B_2$ alkio. Tällöin pätee $A_2 \in F_1$, sillä $B_2 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Näin ollen filtterin kannan määritelmän nojalla alkiolle $A_2 \in F_1$ löytyy kannan $B_1$ alkio $A_1$, jolla $A_1 \subset A_2$.

$\Leftarrow$ Oletetaan, että jokaiselle $A'_2 \in B_2$ löytyy sellainen $A'_1 \in B_1$, jolla $A'_1 \subset A'_2$. Olkoon $V \in \mathcal{F}_2$ alkio. Tällöin filtterin määritelmän nojalla löytyy $A_2 \in B_2$, jolla $A_2 \subset V$. Toisaalta oletuksen nojalla löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset A_2$. Siis alkiolle $V$ löytyy $A_1 \in B_1$, jolla $A_1 \subset V$. Toisaalta $B_1 \subset \mathcal{F}_1$, joten $A_1 \in \mathcal{F}_1$.

Siis alkiolle $V \in \mathcal{F}_2$ löytyy alkio $A_1 \in \mathcal{F}_1$, jolla $A_1 \subset V$. Näin ollen ehdon (U1) nojalla $V \in \mathcal{F}_1$ ja edelleen $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Siis filtteri $\mathcal{F}_1$ on hienompi kuin filtteri $\mathcal{F}_2$.

$\square$

**Määritelmä 6.8.** Olkoon $X$ joukko ja $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ filttereitä joukolle $X$. Olkoon lisäksi $B_1$ kanta filtterille $\mathcal{F}_1$ ja $B_2$ kanta filtterille $\mathcal{F}_2$. Kannat $B_1$ ja $B_2$ ovat *ekvivalentteja*, jos filtterit $\mathcal{F}_1$ ja $\mathcal{F}_2$ ovat samoja.

**Määritelmä 6.9.** Olkoon $X$ joukko, $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle $X$ ja $\mathcal{F}$ filtteri joukolle $X$. Filtteriä $\mathcal{F}$ sanotaan *Cauchy* filtteriksi, jos jokaiselle lähistölle $V \in \mathcal{U}$ löytyy osajoukko $A \subset X$, joka on $V-$pieni ja kuuluu filtteriin $\mathcal{F}$.

Cauchy filtterit sisältävät siis mielivaltaisen pieniä joukkoja.

**Lause 6.10.** *Topologisessa avaruudessa osajoukon (vastaavasti alkion) kaikkien ympäristöjen joukko on filtteri, jota sanotaan ympäristöfiltteriksi.* $\square$

**Määritelmä 6.11.** *Filtterin raja-arvo.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{F}$ filtteri joukolle $X$. Alkio $x \in X$ on filtterin $\mathcal{F}$ *raja-arvo*, jos filtteri $\mathcal{F}$ on hienompi kuin alkion $x$ ympäristöfiltteri. Näin ollen filtteri $\mathcal{F}$ *suppenee* (converge) kohti alkiota $x$.

Lisäksi, jos $B$ on filtterin $\mathcal{F}$ kanta ja alkio $x$ on filtterin $\mathcal{F}$ raja-arvo, niin alkio $x$ on myös kannan $B$ raja-arvo ja kanta $B$ suppenee kohti alkiota $x$.

**Lause 6.12.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, $x \in X$ alkio ja $B \subset \mathcal{P}(X)$ erään filtterin kanta. Kanta $B$ suppenee kohti alkiota $x$, jos ja vain jos jokainen alkion $x$ ympäristö sisältää jonkin kannan $B$ jäsenen.* $\square$

Uniformeissa avaruuksissa Cauchy filttereillä ei välttämättä ole raja-arvoa.

**Määritelmä 6.13.** Uniformiinen avaruus on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy filtteri suppenee.

**Lause 6.14.** *Uniformisessa avaruudessa jokainen suppeneva filtteri on Cauchy filtteri.*

*Todistus.* Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus, $\mathcal{F}$ suppeneva filtteri joukolle $X$ ja $x \in X$ sellainen alkio, jota kohti $\mathcal{F}$ suppenee. Tällöin alkion $x$ ympäristöfiltteri $B(x)$ sisältyy filtteriin $\mathcal{F}$. Näin ollen jokaisella lähistöllä $V' \in \mathcal{U}$ pätee $V'(x) \in \mathcal{F}$.

Olkoon nyt $V \in \mathcal{U}$ lähistö ja $x \in X$ alkio. Huomautuksen 3.3 ehdon (Ua) nojalla on olemassa sellainen lähistö $W \in \mathcal{U}$, jolla $W^{-1} \circ W \subset V$. Huomataan, että joukko

$$W(x) \times W(x) = \{(y_1, y_2) \mid (x, y_1) \in W, (x, y_2) \in W\}$$

sisältyy joukkoon

$$W^{-1} \circ W = \{(y_1, y_2) \mid \text{on olemassa } x', \text{ jolla } (y_1, x') \in W^{-1}, (x', y_2) \in W\}.$$

Siis lähistölle $V$ löydettiin osajoukko $W(x) \subset X$, jolla $W(x) \times W(x) \subset W^{-1} \circ W \subset V$ ja $W(x) \in \mathcal{F}$. Määritelmän 6.9 nojalla $\mathcal{F}$ on Cauchy filtteri. □

**Lause 6.15.** Minimaalinen Cauchy filtteri. *Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus. Jokaiselle joukon $X$ Cauchy filtterille $\mathcal{F}$ on olemassa yksikäsitteinen minimaalinen Cauchy filtteri $\mathcal{F}_0$, joka on karkeampi kuin $\mathcal{F}$, eli $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$. Jos $B$ on kanta filtterille $\mathcal{F}$ ja $G$ on uniformiteetin $\mathcal{U}$ symmetristen lähistöjen kanta, niin kokoelma $B_0 = \{V(M) \mid M \in B, V \in G\}$ missä $V(M) = \{y \mid (x, y) \in V, x \in M\}$ on filtterin $\mathcal{F}$ minimaalisen Cauchy filtterin $\mathcal{F}_0$ kanta.*

*Todistus.* Tarkistetaan kannan ehdot joukolle $B_0$:

1. Olkoot $V_1(M_1), V_2(M_2) \in B_0$ joukkoja. Nyt $M_1, M_2 \in B$, joten on olemassa joukko $M_3 \in B$, jolla pätee $M_3 \subset M_1 \cap M_2$. Toisaalta $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, joten on olemassa joukko $V_3 \in \mathcal{U}$, jolla pätee $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. Näin ollen joukko $V_3(M_3) = \{y \mid (x, y) \in V_3, x \in M_3\}$ on joukon $(V_1 \cap V_2)(M_1 \cap M_2) = V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$ osajoukko, eli $V_3(M_3) \subset V_1(M_1) \cap V_2(M_2)$.

2. Olkoon $M \in B$ joukko ja $V \in \mathcal{U}$ lähistö. Tällöin joukko $M$ on epätyhjä, joten myös joukko $V(M)$ on epätyhjä. Näin ollen tyhjä joukko ei ole joukon $B_0$ alkio.

Jokaisella $M \in B$ ja $V \in \mathcal{U}$ pätee $M \subset V(M)$, joten erityisesti jokaiselle $V(M) \in B_0$ löytyy sellainen $M \in B$, jolla $M \subset V(M)$. Näin ollen lauseen 6.7 nojalla minimaalinen Cauchy filtteri $\mathcal{F}_0$ on karkeampi kuin filtteri $\mathcal{F}$. □

# Luku 7

# Uniformisoituvat avaruudet

Tässä luvussa esitellään uniformisoituva (uniformizable) topologinen avaruus ja annetaan tätä karakterisoiva ehto.

**Määritelmä 7.1.** Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ uniformiteetti joukolle $X$. Olkoon lisäksi $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoima topologia joukolle $X$. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *yhteensopiva* topologian $\mathcal{T}$ kanssa, jos topologiat $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}$ ja $\mathcal{T}$ ovat samoja.

**Määritelmä 7.2.** Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on *uniformisoituva*, jos joukolle $X$ voidaan muodostaa topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti.

**Lause 7.3.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Avaruuden $(X, \mathcal{T})$ uniformisoituvuus on yhtäpitävää seuraavan ehdon kanssa:*

*(Z) Kaikkien alkioiden $x \in X$ kaikilla ympäristöillä $V \subset X$ on olemassa jatkuva reaaliarvoinen kuvaus $f\colon X \to [0,1]$, jolla $f(x) = 0$ ja $f(y) = 1$ kaikilla $y \in X \setminus V$.*

*Todistus.* Näytetään ensin, että ehto on välttämätön. Lauseen 5.13 nojalla uniformiteetille voidaan määritellä pseudometriikkaperhe, joka indusoi kyseisen uniformiteetin. Lisäksi uniformiteetin indusoiman pseudometriikkaperheen voidaan olettaa korollaarin 5.10 nojalla olevan saturoitu. Tällöin määritelmän 5.2 nojalla on olemassa $a \in [0, \infty]$, $\alpha \in I$ ja pseudometriikka $f_\alpha \in (f_i)_{i \in I}$, jolla $f_\alpha(x_0, x) \geq a$ kaikilla $x \in X \setminus V_0$ ja $f_\alpha(x_0, x) = 0$. Tämän seurauksena kuvaus $g\colon X \to [0,1]$ kaavalla $g(x) = \inf\big(1, \frac{1}{a} f_\alpha(x_0, x)\big)$ pisteelle $x_0$ ja ympäristölle $V_0$ toteuttaa ehdon (Z).

Toisaalta ehto on myös riittävä: Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus, jolla ehto (Z) pätee. Olkoon $x_0 \in X$ alkio, $V_0 \subset X$ alkion $x_0$ ympäristö ja $f\colon X \to [0,1]$ ehdon (Z) antama kuvaus alkiolle $x_0$ ja sen ympäristölle $V_0$. Tällöin kuvaus $g\colon X \times X \to [0, \infty]$ kaavalla $g(x_0, x) = f(x)$ on pseudometriikka. Olkoon $\mathcal{U}$ pseudometriikan $g$ määräämä uniformiteetti ja $a \in [0, \infty]$ luku. Tällöin $g^{\leftarrow}[0, a] = \{(x, y) \mid g(x, y) \leq a\}$ on lähistö pseudometriikan $g$ määräämässä uniformiteetissa $\mathcal{U}$. Merkitään $g^{\leftarrow}[0,a] = U_a$, jolloin joukko $U_a(x_0) = \{y \mid g(x_0,y) \leq a\}$ on alkion $x_0$ ympäristö uniformiteetin $\mathcal{U}$ indusoimassa topologiassa $\mathcal{T}'$. Joukkojen määrittelyistä seuraa, että jos $a < 1$, niin $U_a(x) \subset V_0$ ja tällöin kokoelma $B = \{U_a(x_0) \mid g(x_0,y) \leq a\}$ on alkion $x_0$ ympäristökanta topologiassa $\mathcal{T}$.

Siis avaruus $(X,\mathcal{T})$, joka toteuttaa ehdon (Z) on uniformisoituva. □

**Määritelmä 7.4.** *Universaali uniformiteetti.* Olkoon $(X,\mathcal{T})$ uniformisoituva topologinen avaruus ja $(f_i)_{i\in I}$ kaikkien jatkuvien pseudometriikkojen perhe, jossa $f_i\colon X \times X \to [0,\infty]$ kaikilla $i \in I$. Perheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemä uniformiteetti on avaruuden $(X,\mathcal{T})$ *universaali uniformiteetti* (universal uniformity), jota merkitsemme symbolilla $\mathcal{U}_0$.

**Lause 7.5.** *Uniformisoituvan topologisen avaruuden $(X,\mathcal{T})$ universaali uniformiteetti $\mathcal{U}_0$ on hienoin niistä uniformiteeteista, jotka ovat yhteensopivia topologian $\mathcal{T}$ kanssa.*

*Todistus.* Olkoon $(X,\mathcal{T})$ uniformisoituva topologinen avaruus ja $\mathcal{U}_0$ avaruuden $(X,\mathcal{T})$ universaali uniformiteetti. Olkoon lisäksi $\mathcal{U}$ joukon $X$ uniformiteetti, joka on yhteensopiva topologian $\mathcal{T}$ kanssa.

Puuttuu. □

**Lause 7.6.** *Olkoon $(X,\mathcal{T})$ uniformisoituva topologinen avaruus ja $\mathcal{U}_0$ avaruuden $(X,\mathcal{T})$ universaali uniformiteetti. Olkoon $(Y,\mathcal{T}')$ uniformisoituva avaruus ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Jos kuvaus $f$ on jatkuva, niin $f$ on myös tasaisesti jatkuva.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 7.7.** *Olkoon $(X,\mathcal{T})$ uniformisoituva topologinen avaruus ja $\mathcal{U}_0$ avaruuden $(X,\mathcal{T})$ universaali uniformiteetti. Olkoon tällöin $\mathcal{U}$ sellainen joukon $X$ uniformiteetti, joka on yhteensopiva topologian $\mathcal{T}$ kanssa ja jolla avaruus $(X,\mathcal{U})$ on täydellinen. Tällöin myös $(X,\mathcal{U}')$ on täydellinen jokaisella uniformiteetilla $\mathcal{U}'$, jolla $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_0$.*

*Todistus.* Puuttuu. □

# Luku 8

# Hausdorff uniforminen avaruus

Tässä luvussa määritellään Hausdorff uniformiset avaruudet ja esitetään niiden ominaisuuksia, oleellisimpana täydelliseen Hausdorff uniformiseen avaruuteen laajentaminen.

**Määritelmä 8.1.** Olkoon $(X, \mathcal{U})$ uniforminen avaruus ja $(f_i)_{i\in I}$ sellainen pseudometriikkaperhe, joka määrittelee uniformiteetin $\mathcal{U}$. Uniformiteetti $\mathcal{U}$ on *Hausdorff*, jos jokaisilla alkioilla $x, y \in X$ ehdosta $x \neq y$ seuraa $f_k(x, y) \neq 0$ jollain pseudometriikalla $f_k \in (f_i)_{i\in I}$. Erityisesti, jos uniformiteetti $\mathcal{U}$ on Hausdorff ja yhden pseudometriikan $f$ määrittelemä, niin $f(x, y) \neq 0$ kaikilla $x, y \in X$, $x \neq y$.

*Huomautus* 8.2. Olkoon $X$ joukko ja $(f_i)_{i\in I}$ pseudometriikkaperhe joukolle $X$. Pseudometriikkaperheen $(f_i)_{i\in I}$ määrittelemä uniformiteetti ei ole Hausdorff, jos on olemassa sellaiset alkiot $x, y \in X$, joilla $x \neq y$ ja $f_k(x, y) = 0$ kaikilla $f_k \in (f_i)_{i\in I}$.

**Lause 8.3.** *Olkoon $X$ uniforminen avaruus. Tällöin on olemassa täydellinen (complete) Hausdorff uniforminen avaruus $\hat{X}$ ja tasaisesti jatkuva kuvaus $i\colon X \to \hat{X}$, jolle pätee seuraava ominaisuus:*

*(P) Olkoon $Y$ täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $f\colon X \to Y$ tasaisesti jatkuva kuvaus. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva $g\colon \hat{X} \to Y$, jolla pätee $f = g \circ i$.*

*Tällöin sanotaan, että avaruus $\hat{X}$ on avaruuden $X$* Hausdorff täydennys.

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 8.4.** *Olkoon $X$ uniforminen avaruus ja $\hat{X}$ Hausdorff täydennys avaruudelle $X$. Olkoon lisäksi $X_1$ täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus ja $i_1\colon X \to X_1$ tasaisesti jatkuva kuvaus, jolla on ominaisuus (P). Tällöin on olemassa yksikäsitteinen isomorfismi $\varphi\colon \hat{X} \to X_1$, jolla pätee $i_1 = \varphi \circ i$.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Korollaari 8.5.** *Olkoon $X$ on Hausdorff uniforminen avaruus ja $\hat{X}$ määritelmän 8.3 mukainen täydellinen Hausdorff uniforminen avaruus. Niin sanottu kanoninen kuvaus $i\colon X \to \hat{X}$ määrää isomorfismin $X \to X'$, jossa $X' \subset \hat{X}$ on tiheä joukossa $\hat{X}$.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 8.6.** *Olkoon $X$ ja $Y$ uniformeja avaruuksia ja $i_X\colon X \to \hat{X}$ ja $i_Y\colon Y \to \hat{Y}$ kanonisia kuvauksia. Jokaiselle tasaisesti jatkuvalle kuvaukselle $f\colon X \to Y$ löytyy yksikäsitteinen tasaisesti jatkuva kuvaus $\hat{f}\colon \hat{X} \to \hat{Y}$, jolla oheinen diagrammi kommutoi.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ \hat{X} \arrow[r, "\hat{f}"'] & \hat{Y} \end{tikzcd}$$

*Todistus.* Puuttuu. □

# Luku 9

# Kompakti uniforminen avaruus

**Määritelmä 9.1.** Topologinen avaruus on *täysin säännöllinen* (completely regular), jos se on uniformisoituva ja Hausdorff.

**Määritelmä 9.2.** Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Olkoon $(f_i)_{i \in I}$ kaikkien uniformiteetin $\mathcal{U}$ suhteen tasaisesti jatkuvien kuvausten $f_i \colon X \to [0, 1]$ perhe. Tällöin merkitään symbolilla $\mathcal{U}^*$ sitä uniformiteettia, joka on karkein niistä uniformiteeteista, joilla kaikki kuvausperheen $(f_i)_{i \in I}$ kuvaukset ovat tasaisesti jatkuvia.

**Lause 9.3.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen topologinen avaruus. Tällöin uniformiteetti $\mathcal{U}^*$ on Hausdorff ja yhteensopiva topologian $\mathcal{T}$ kanssa.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Määritelmä 9.4.** Uniforminen avaruus $X, \mathcal{U}$ on *esikompakti*, jos sen Hausdorff täydennys $\hat{X}$ on kompakti. Epätyhjä osajoukko $A \subset X$ on esikompakti, jos $(A, \mathcal{U}|_A)$ on esikompakti. (Rajoitettu uniformiteetti $\mathcal{U}|_A = \{U \cap (A \times A) \mid U \in \mathcal{U}\}$.)

**Lause 9.5.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen topologinen avaruus. Tällöin avaruus $(X, \mathcal{U}^*)$ on esikompakti.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Lause 9.6.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen topologinen avaruus ja $\mathcal{U}$ topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Olkoon $(K, \mathcal{T}')$ kompakti (topologinen) avaruus ja $\mathcal{U}_{\mathcal{T}'}$ topologian $\mathcal{T}'$ kanssa yhteensopiva uniformiteetti. Olkoon $f \colon X \to K$ kuvaus, joka on tasaisesti jatkuva uniformiteetin $\mathcal{U}$ suhteen. Tällöin kuvaus $f$ on tasaisesti jatkuva myös uniformiteetin $\mathcal{U}^*$ suhteen.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Korollaari 9.7.** *Uniformiteetti $\mathcal{U}^*$ on hienoin niistä topologian $\mathcal{T}$ kanssa yhteensopivista uniformiteeteista $\mathcal{U}$, joilla $(X, \mathcal{U})$ on esikompakti.*

*Todistus.* Puuttuu. □

**Määritelmä 9.8.** *Stone–Čech kompaktisointi.* Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen topologinen avaruus ja $\mathcal{U}_0$ avaruuden $(X, \mathcal{T})$ universaali uniformiteetti. Olkoon $\mathcal{U}_0^*$ karkein uniformiteetti, jolla kaikki jatkuvat kuvaukset $f_i \colon X \to [0,1]$ ovat tasaisesti jatkuvia. Olkoon $\beta X$ avaruuden $(X, \mathcal{U}_0^*)$ Hausdorff täydennys. Avaruutta $\beta X$ sanotaan avaruuden $(X, \mathcal{T})$ Stone–Čech kompaktisoinniksi.

**Lause 9.9.** *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ täysin säännöllinen topologinen avaruus ja $(K, \mathcal{T}')$ kompakti topologinen avaruus. Tällöin jokainen jatkuva kuvaus $f \colon X \to K$, voidaan laajentaa kuvaukseksi $f' \colon \beta X \to K$.*

*Todistus.* Puuttuu. □

# Kirjallisuutta


[1] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 1, 1. painos, Hermann, 1966.

[2] Nicolas Bourbaki: General Topology Part 2, 1. painos, Hermann, 1966.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.