Kuratowskin upotuslause

Pekka Keipi

6. heinäkuuta 2016

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä Kuratowskin upotuslause jne.. Luku 2, ks. [2]

Luku 2

Funktion rajoittuma, normi ja sup-normi

Tässä kappaleessa esitellään vektori- ja normiavaruuksien ja näiden funktioiden perusominaisuuksia. Enemmän aiheesta löytyy kirjoista [2] ja [3].

Määritelmä 2.1. *Vektoriavaruus*
Joukko V on $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus, jos kaikkiin $v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$ on liitetty yksikäsitteinen summa $v + w \in V$ ja tulo $av \in V$ niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ kaikilla $u, v, w \in V$.

ii) $v + w = w + v$ kaikilla $v, w \in V$.

iii) On olemassa sellainen $0 = 0_v$, että $v + 0 = v$ kaikilla $v \in V$.

iv) Jokaiseen $v \in V$ liittyy sellainen $-v \in V$, että $v + (-v) = 0$.

v) $a(v + w) = av + aw$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, v, w \in V$.

vi) $(a + b)v = av + bv$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.

vii) $a(bv) = (ab)v$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.

viii) $1_v = v$ kaikilla $v \in V$.

Tässä avaruuden V alkioita kutsutaan vektoreiksi ja avaruuden $\mathbb{R}$ alkioita skalaareiksi.

Määritelmä 2.2. *Vektorialiavaruus*
Osajoukko $W \subset V$ on vektoriavaruuden V (vektori)aliavaruus, jos

i) $v + w \in W$ kaikilla $v, w \in W$,

ii) $av \in W$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, v \in W$ ja

iii) $0_v \in W$

Määritelmä 2.3. *Rajoitettu funktio*
Olkoon D avaruus ja $F(D, \mathbb{R})$ kaikkien avaruudessa D määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden $f\colon D \to \mathbb{R}$ joukko. Joukko $F(D, \mathbb{R})$ on vektoriavaruus [2]. Funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, jos on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}, M \geq 0$, jolla $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in D$.

Rajoitettujen funktioiden avaruus $Raj(D, \mathbb{R})$ koostuu kaikista rajoitetuista funktioista $f\colon D \to \mathbb{R}$.

Lemma 2.4. *Rajoitettujen funktioiden avaruus $Raj(D, \mathbb{R})$ on reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruuden $F(D, \mathbb{R})$ aliavaruus.*

Todistus. Olkoon $f, g \in Raj(D, \mathbb{R}), M, N \in \mathbb{R}, M, N \geq 0$ niin, että $|f(x)| \leq M$ ja $|g(x)| \leq N$ kaikilla $x \in D$. Tällöin seuraavat kohdat pätevät:

i) $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N \leq \infty$, siis $f + g \in Raj(D, \mathbb{R})$ kaikilla $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$,

ii) $|af(x)| = |a| \cdot |f(x)| \leq |a| \cdot M \leq \infty$, siis $af \in Raj(D, \mathbb{R})$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, f \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja

iii) $0_{F(D,\mathbb{R})}(x) = 0$ kaikilla $x \in D$, jolloin $0_{F(D,\mathbb{R})} \in Raj(D, \mathbb{R})$.

$\square$

Määritelmä 2.5. *Normi*
Olkoon E vektoriavaruus ja $|\cdot|\colon E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto |x|$ kuvaus joukossa E. Kuvaus $|\cdot|$ on normi avaruudessa E, jos seuraavat ominaisuudet pätevät kaikilla $x, y \in E, a \in \mathbb{R}$.

(N1) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

(N2) $|ax| = |a||x|$,

(N3) Jos $|x| = 0$, niin $x = \bar{0}$.

Vektoriavaruutta, jossa on annettu jokin normi, sanotaan normiavaruudeksi.

Esimerkki 2.6. Määritellään joukossa $\mathbb{R}^n$ tavallinen euklidinen normi $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Määritelmä 2.7. *Sup-normi*
Olkoon D epätyhjä joukko ja $Raj(D, \mathbb{R})$ kaikkien avaruudessa D määriteltyjen rajoitettujen funktioiden $f \colon D \to \mathbb{R}$ vektoriavaruus. Yhtälö $||f|| = \sup\{|f(x)| \colon x \in D\}$ määrittelee normin avaruudessa $Raj(D, \mathbb{R})$. Tätä normia sanotaan avaruuden $Raj(D, \mathbb{R})$ supnormiksi.

Todistus. (N1) Olkoon $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja $x \in D$. Tällöin

$$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g||$$

kaikilla $x \in D$, joten $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.

(N2) Olkoon $f \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja $x \in D$. Tällöin

$$|af|(x) = |af(x)| = |a||f(x)| \leq |a|||f||$$

kaikilla $x \in D$, joten $||af|| \leq |a|||f||$. Jos $a = 0$, niin (N2) pätee muodossa $0 = 0$. Jos $a \neq 0$, niin $f = a^{-1}af$ ja edellisen mukaan $||f|| \leq |a^{-1}|||af||$ ja edelleen $||af|| \geq |a|||f||$ kaikilla $x \in D$. Tällöin siis $||af|| = |a|||f||$.

(N3) Jos $||f|| = 0$, niin $|f(x)| = 0$ kaikilla $x \in D$, eli $f = \bar{0}$.

□

Esimerkki 2.8. Tapauksessa $D = \mathbb{N}$ saadaan kaikkien rajoitettujen jonojen joukko $raj(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Joukon alkioita ovat rajoitetut jonot $x = (x_1, x_2, \dots)$. Tälle joukolle käytetään usein merkintää l_∞.

Luku 3

Metrinen avaruus

Tässä luvussa esitellään metristen avaruuksien ominaisuuksia.

Määritelmä 3.1. *Metrinen avaruus* on pari (X, d), jossa X on joukko ja d on *metriikka* joukossa X. Tällöin $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ on kuvaus, jolle pätee seuraavat ominaisuudet kaikilla $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Esimerkki 3.2. Euklidinen metriikka avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahden pisteen $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ja $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ välillä on määritelty

$$d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

Esimerkki 3.3. Normiavaruus on aina metrinen avaruus.

Todistus. Olkoon E normiavaruus ja $x, y \in E$. Metriikaksi voidaan valita $d(x, y) = |x - y|$, jolloin kaikilla $x, y \in E$ pätee

(M1) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$

(M2) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) = |x - y| = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

□

Määritelmä 3.4. *Joukkojen välinen etäisyys*
Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Tällöin etäisyys osajoukkojen A ja B välillä on määritelty $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$, eli etäisyyksien $d(a, b)$ suurin alaraja, kun $a \in A$ ja $b \in B$.

Tällöin pätee $d(A, B) \geq 0$ ja jos $A = \emptyset$ tai $B = \emptyset$, niin $d(A, B) = 0$.

Lause 3.5. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x, y \in X$ ja $A \subset X$ epätyhjä. Tällöin $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Erityisesti $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ kaikilla $z \in X$.*

Todistus. Olkoon $a \in A$. Tällöin kaikilla $y \in A$ pätee $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Ottamalla infimum kaikkien $a \in A$ yli saadaan $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ ja edelleen $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Vastaavasti olkoon $y \in A$, jolloin kaikilla $x \in X$ pätee $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$. Nyt $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ ja $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, jolloin siis $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

□

Määritelmä 3.6. *Homeomorfismi* tarkoittaa kuvausta $f \colon X \to Y$, jolla

(1) f on bijektio,

(2) f on jatkuva,

(3) $f^{-1} \colon Y \to X$ on jatkuva.

Määritelmä 3.7. *Upotus* tarkoittaa kuvausta $f \colon X \to Y$, joka määrittelee homeomorfismin $f_1 \colon X \to f[X]$, jolla $f_1(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$.

Määritelmä 3.8. *Isometria* on etäisyydet säilyttävä kuvaus. Olkoon (X, d) ja (X', d') metrisiä avaruuksia. Tällöin kuvaus $h \colon X \to X'$ on isometria, jos $d(x_1, x_2) = d'(h(x_1), h(x_2))$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$.

Esimerkki 3.9. Peilaus, rotaatio ja siirtokuvaus ovat geometriasta tuttuja isometrioita avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Lemma 3.10. *Metrisen avaruuden (X, d) joukolle X on aina olemassa sellainen metriikka d', jolla joukon X pisteiden d'-etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan* 1.

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin myös

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in X$$

on metriikka joukossa X, sillä kaikilla $x, y, z \in X$:

(M1) $d'(x,z) = \dfrac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \dfrac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$

$$= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d'(x,y) + d'(y,z)$$

(M2) $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x)$

(M3) $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$, jos ja vain jos $d(x,y) = 0$, eli jos ja vain jos $x = y$.

Tällöin joukon X pisteiden d'-etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1. $\square$

Luku 4

Konveksi verho

Tässä luvussa käsitellään konveksisuutta ja konveksia verhoa.

Määritelmä 4.1. *Konveksius.* Olkoon E normiavaruus, $A \subset E$ ja $a, b \in A$. Yhtälö

$$\alpha(t) = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$$

määrittelee janapolun $\alpha\colon [0,1] \to E$. Kuvajoukko $\alpha[0,1] = [a,b]$ on jana, jonka päätepisteet ovat $\alpha(0) = a \in A$ ja $\alpha(1) = b \in A$. Joukko $A \subset E$ on konveksi, jos ja vain jos $[a,b] \subset A$ kaikilla $a, b \in A$.

Esimerkki 4.2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikkökuula $\bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leq 1\}$ on konveksi.

Määritelmä 4.3. *Konveksi verho.* Olkoon E normiavaruus, $A \subset E$ ja $(A_j)_{j \in J} \subset \mathcal{P}(E)$ kaikkien sellaisten konveksien osajoukkojen $A_k \subset E$, $k \in J$ muodostama perhe, joilla $A \subset A_k$. Tällöin joukko $C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$ on joukon A konveksi verho.

Lemma 4.4. *Konveksi verho $C(A)$ on konveksi.*

Todistus. Olkoon $a, b \in C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$. Tällöin $a, b \in A_i$ kaikilla $i \in J$. Jokainen A_i on konveksi, joten kaikilla $i \in J$ pätee $[a,b] \subset A_i$. Tällöin kaikilla $a, b \in C(A)$ pätee $[a,b] \subset C(A)$, joten konveksi verho $C(A)$ on konveksi. □

Korollaari 4.5. *Konveksi verho $C(A)$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon A.*

Todistus. Olkoon B sellainen konveksi joukko, jolla $A \subset B \subset C(A)$. Joukko B on konveksi ja $A \subset B$, joten $B \in (A_j)_{j \in J}$. Tällöin

$$C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j \subset B.$$

Siis $B = C(A)$ ja $C(A)$ on pienin konveksi joukko, jolla $A \subset C(A)$. □

Lemma 4.6. *Olkoon E normiavaruus ja $A \subset E$. Konveksi verho $C(A)$ on muotoa*

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad \textit{missä } x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \textit{ ja } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$$

olevien lineaarikombinaatioiden muodostama joukko.

Todistus. Konveksi verho $C(A)$ on konveksi ja $A \subset C(A)$, joten kaikilla $a, b \in A$ pätee $[a, b] \subset C(A)$, toisin sanoen, $(1 - t)a + tb \in C(A)$ kaikilla $0 \leq t \leq 1$, erityisesti

$$c_0 a + c_1 b \in C(A), \text{ kun } c_0, c_1 \geq 0 \text{ ja } c_0 + c_1 = 1. \tag{4.7}$$

Olkoon $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in A$, $d_0, d_1, \ldots, d_n, e, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ ja $d_i, e, \lambda_{n+1} \geq 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että jollain $n \geq 1$ pätee

$$d_0 x_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n \in C(A), \text{kun } d_0 + d_1 + \cdots + d_n = 1.$$

Tällöin konveksiuden ja kaavan 4.7 nojalla pätee

$$\begin{aligned} &e(d_0 x_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ =&e d_0 x_0 + e d_1 x_1 + \cdots + e d_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A), \end{aligned}$$

kun $e + \lambda_{n+1} = 1$. Valitsemalla $ed_i = \lambda_i$ kaikilla $i \in 0, 1, \ldots, n$ saadaan

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A).$$

Siis $C(A)$ sisältää kaikki muotoa

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad \text{missä } x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ ja } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

olevat lineaarikombinaatiot. Osoitetaan seuraavaksi, että $C(A)$ sisältää ainoastaan kyseisiä lineaarikombinaatiota.

□

Luku 5

Banachin avaruus

Määritelmä 5.1. *Cauchyn jono* Jono $(x_n : n \in \mathbb{N}$

Määritelmä 5.2. Banachin avaruus on täydellinen normiavaruus.

Määritelmä 5.3. *Separoituva avaruus.* Olkoon X metrinen avaruus ja $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ epätyhjien avointen osajoukkojen perhe. Tällöin avaruus X on separoituva, jos seuraava ehto pätee: On olemassa numeroituva tiheä osajoukko $\{a_0, a_1, \cdots\} = A \subset X$, toisin sanoen, jokaista $B \in \mathcal{B}$ kohti löytyy ainakin yksi $a_i \in A$, jolla $a_i \in B$ jollain $i \in \mathbb{N}$.

Luku 6

Kuratowskin upotuslause

Lause 6.1. *Jokaista metristä avaruutta* (X, d) *kohti on olemassa normiavaruus* Z *ja upotus* $h \colon X \to Z$ *missä* $hX \subset Z$ *on suljettu konveksissa verhossa* $C(hX)$*.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin myös

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \qquad x, y \in X$$

on metriikka joukossa X, sillä kaikilla $x, y, z \in X$:

(M1) $$d'(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)}$$

$$\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d'(x,y) + d'(y,z)$$

(M2) $$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x)$$

(M3) $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$, jos ja vain jos $d(x,y) = 0$, eli jos ja vain jos $x = y$.

Tällöin joukon X pisteiden d'-etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1.

Olkoon Z joukon X kaikkien rajoitettujen jatkuvien funktioiden joukko. Asetetaan

$$|f_1| = \sup_{x \in X} |f_1(x)|, \qquad f_1 \in Z$$

ja

$$d(f_1, f_2) = |f_1 - f_2| = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|\,, \qquad f_1, f_2 \in Z.$$

Tällöin Z on normiavaruus, sillä kaikilla $g_1, g_2 \in Z, a \in \mathbb{R}$:

(N1) $|g_1 + g_2| = \sup_{x\in X} |g_1(x) + g_2(x)|$
$\le \sup_{x\in X} |g_1(x)| + \sup_{x\in X} |g_2(x)| = |g_1| + |g_2|$

(N2) $|ag_1| = \sup_{x\in X} |ag_1(x)| = \sup_{x\in X}(|a||g_1(x)|)$
$= |a| \sup_{x\in X} |g_1(x)| = |a||g_1|$

(N3) $|g_1| = \sup_{x\in X} |g_1(x)| = 0 \implies g_1(x) = 0 \qquad$ kaikilla $x \in X$

Seuraavaksi määritellään homeomorfismi $h\colon X \to h(X) \subset Z$. Tätä varten asetamme funktion $f_x \in Z$ jokaiselle $x \in X$ yhtälön $f_x(y) = d(x, y)$ mukaisesti, eli

$$h(x) = f_x\,, \qquad x \in X.$$

Tällöin pätee

$$d(f_{x_1}, f_{x_2}) \ge |d(x_1, x_2) - d(x_2, x_2)| = d(x_1, x_2).$$

Toisaalta mielivaltaiselle $y \in X$ pätee

$$|f_{x_1}(y), f_{x_2}(y)| = |d(x_1, y) - d(x_2, y)| \le d(x_1, x_2),$$

jolloin siis $d(f_{x_1}, f_{x_2}) \le d(x_1, x_2)$. Edeltävistä epäyhtälöistä saadaan $d(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2)$, joka osoittaa, että kuvaus h säilyttää pisteiden väliset etäisyydet ja on siten homeomorfismi.

Osoitetaan, että hX on suljettu konveksissa verhossa $C(hX)$. Tavoitteena on osoittaa, että minkä tahansa jonon $f_{x_n} \in hX$ raja-arvo kuuluu joukkoon hX. Olkoon $f \in C(hX)$ ja määritellään

$$f = \lim_{n\to\infty} f_{x_n}\,, \qquad f_{x_n} \in hX.$$

Tällöin koska f kuuluu konveksiin verhoon $C(hX)$, niin f on lineaarikombinaatio vektorialiavaruuden hX vektoreista. Tällöin olkoon $a_0, a_1, \cdots, a_k \in X$, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_i \ge 0$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$ niin, että

$$f = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_{a_i} \qquad \text{missä } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Tällöin on ainakin yksi $i \le k$, jolla $\lambda_i \ge 1/(k+1)$. Tämä seuraa siitä, että

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} = k \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1} < 1.$$

Tällöin voidaan vaihtaa λ_0 ja λ_i keskenään ja vastaavasti a_0 ja a_i keskenään, jolloin saadaan $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$. Jos jollain $i \neq j$ ja $i, j \leq k$ pätee $a_i = a_j$, niin on mahdollista valita uudet

$$a_0, a_1, \cdots a_i, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots a_k$$

ja vastaavat

$$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, (\lambda_i + \lambda_j), \cdots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \cdots, \lambda_{k-1}.$$

Voidaan siis valita sellaiset $a_0, a_1, \cdots, a_k$, jotka ovat erillisiä ja sellaiset $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_k$, että λ_0 täyttää ehdon $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$. Tällöin

$$d(f, f_{x_n}) \geq |f(x_n) - f_{x_n}(x_n)| = |f(x_n)| \geq \lambda_0 f_{a_0}(x_n) \geq \frac{1}{k+1} d(a_0, x_n).$$

Tällöin yhtälöstä $\lim_{n\to\infty} f_{x_n} = f$ seuraa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a_0$. Siis $f = f_{a_0} \in hX$ pätee.
$\square$

Kirjallisuutta

[1] Karol Borsuk: Theory of retracts, n. painos, Państwowe Wydawn. Naukowe, 1967.

[2] Jussi Väisälä: Topologia I, 4. korjattu painos, Limes ry, 2007.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.

[4] Juha Heinonen: Geometric embeddings of metric spaces, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2003