Kuratowskin upotuslause

Pekka Keipi

10. elokuuta 2016

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on todistaa Kuratowskin upotuslause. Lause on nimetty puolalaisen matemaatikon Kazimierz Kuratowskin mukaan. Osa lauseen todistuksesta on tehtävänä kurssikirjassa Topologia I, joka on yksi matematiikan pääaineopiskelijoiden aineopintoja.

Kazimierz Kuratowski (2.2.1896 - 18.6.1980) oli puolalainen matemaatikko, joka keskittyi tutkimuksessaan abstraktiin topologiaan ja metrisiin struktuureihin. Tohtorin tutkinnon hän suoritti vuonna 1921 Varsovan yliopistossa. Toisen maailmansodan aikana hän luennoi Varsovan maanalaisessa yliopistossa. Toisen maailmansodan jälkeen Kuratowski toimi aktiivisesti Puolan tiedeyhteisössä. Hänen merkittävimpiin töihinsä lukeutuvat Kuratowskin sulkeuma-aksioomat sekä Kuratowski-Zornin lemma.

Kuratowskin upotuslauseen todistamiseen tarvitaan esityetoja vektoriavaruuksistaja metrisistä avaruuksista. Tutkielmassa käydään läpi tarvittavat esitiedot ja keskeiset käsitteet kuten sup-normi, metrinen avaruus ja konveksi verho esitellään omissa luvuissaan.

Luku 2

Funktion rajoittuma, normi ja sup-normi

Tässä kappaleessa esitellään vektori- ja normiavaruuksien ja näiden funktioiden perusominaisuuksia. [2]

Määritelmä 2.1. *Vektoriavaruus*
Joukko V on $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus, jos kaikkiin $v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$ on liitetty yksikäsitteinen summa $v + w \in V$ ja tulo $av \in V$ niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ kaikilla $u, v, w \in V$.

ii) $v + w = w + v$ kaikilla $v, w \in V$.

iii) On olemassa sellainen $0 = 0_v$, että $v + 0 = v$ kaikilla $v \in V$.

iv) Jokaiseen $v \in V$ liittyy sellainen $-v \in V$, että $v + (-v) = 0$.

v) $a(v + w) = av + aw$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, v, w \in V$.

vi) $(a + b)v = av + bv$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.

vii) $a(bv) = (ab)v$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.

viii) $1_v = v$ kaikilla $v \in V$.

Tässä avaruuden V alkioita kutsutaan vektoreiksi ja avaruuden $\mathbb{R}$ alkioita skalaareiksi.

Määritelmä 2.2. *Vektorialiavaruus*
Osajoukko $W \subset V$ on vektoriavaruuden V (vektori)aliavaruus, jos

i) $v + w \in W$ kaikilla $v, w \in W$,

ii) $av \in W$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, v \in W$ ja

iii) $0_v \in W$

Määritelmä 2.3. *Rajoitettu funktio*
Olkoon D avaruus ja $F(D, \mathbb{R})$ kaikkien avaruudessa D määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden $f\colon D \to \mathbb{R}$ joukko. Joukko $F(D, \mathbb{R})$ on vektoriavaruus [2]. Funktio $f\colon D \to \mathbb{R}$ on rajoitettu, jos on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}, M \geq 0$, jolla $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in D$.

Rajoitettujen funktioiden avaruus $Raj(D, \mathbb{R})$ koostuu kaikista rajoitetuista funktioista $f\colon D \to \mathbb{R}$.

Lemma 2.4. *Rajoitettujen funktioiden avaruus $Raj(D, \mathbb{R})$ on reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruuden $F(D, \mathbb{R})$ aliavaruus.*

Todistus. Olkoon $f, g \in Raj(D, \mathbb{R}), M, N \in \mathbb{R}, M, N \geq 0$ niin, että $|f(x)| \leq M$ ja $|g(x)| \leq N$ kaikilla $x \in D$. Tällöin seuraavat kohdat pätevät:

i) $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N < \infty$, siis $f + g \in Raj(D, \mathbb{R})$ kaikilla $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$,

ii) $|af(x)| = |a| \cdot |f(x)| \leq |a| \cdot M < \infty$, siis $af \in Raj(D, \mathbb{R})$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, f \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja

iii) $0_{F(D,\mathbb{R})}(x) = 0$ kaikilla $x \in D$, jolloin $0_{F(D,\mathbb{R})} \in Raj(D, \mathbb{R})$.

□

Määritelmä 2.5. *Normi*
Olkoon E vektoriavaruus ja $|\cdot|\colon E \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto |x|$ kuvaus joukossa E. Kuvaus $|\cdot|$ on normi avaruudessa E, jos seuraavat ominaisuudet pätevät kaikilla $x, y \in E, a \in \mathbb{R}$.

(N1) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

(N2) $|ax| = |a||x|$,

(N3) Jos $|x| = 0$, niin $x = \bar{0}$.

Vektoriavaruutta, jossa on annettu jokin normi, sanotaan normiavaruudeksi.

Esimerkki 2.6. Määritellään joukossa $\mathbb{R}^n$ tavallinen euklidinen normi $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Määritelmä 2.7. *Sup-normi*
Olkoon D epätyhjä joukko ja $Raj(D, \mathbb{R})$ kaikkien avaruudessa D määriteltyjen rajoitettujen funktioiden $f\colon D \to \mathbb{R}$ vektoriavaruus. Yhtälöä $||f|| = \sup\{|f(x)|\colon x \in D\}$ sanotaan avaruuden $Raj(D, \mathbb{R})$ sup-normiksi.

Lause 2.8. *Määritelmän 2.7 yhtälö* $||f|| = \sup\{|f(x)|\colon x \in D\}$ *määrittelee normin avaruudessa* $Raj(D, \mathbb{R})$.

Todistus. (N1) Olkoon $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja $x \in D$. Tällöin

$$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq ||f|| + ||g||$$

kaikilla $x \in D$, joten $||f + g|| = \sup\{|f(x) + g(x)|\} \leq ||f|| + ||g||$.

(N2) Olkoon $f \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja $x \in D$. Tällöin

$$|af|(x) = |af(x)| = |a||f(x)| \leq |a|||f||$$

kaikilla $x \in D$, joten $||af|| \leq |a|||f||$. Jos $a = 0$, niin (N2) pätee muodossa $0 = 0$. Jos $a \neq 0$, niin $f = a^{-1}af$ ja edellisen mukaan $||f|| \leq |a^{-1}|||af||$ ja edelleen $||af|| \geq |a|||f||$ kaikilla $x \in D$. Tällöin siis $||af|| = |a|||f||$.

(N3) Jos $||f|| = 0$, niin $|f(x)| = 0$ kaikilla $x \in D$, eli $f = \bar{0}$.

□

Esimerkki 2.9. Tapauksessa $D = \mathbb{N}$ saadaan kaikkien rajoitettujen jonojen joukko $raj(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Joukon alkioita ovat rajoitetut jonot $x = (x_1, x_2, \dots)$. Tälle joukolle käytetään usein merkintää l_∞.

Luku 3

Metrinen avaruus

Tässä luvussa esitellään metristen avaruuksien ominaisuuksia. Metrisiä avaruuksia käsitellään syvemmin kirjassa Topologia I.

Määritelmä 3.1. *Metrinen avaruus* on pari (X, d), jossa X on joukko ja d on *metriikka* joukossa X. Tällöin $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ on kuvaus, jolle pätee seuraavat ominaisuudet kaikilla $x, y, z \in X$:

(M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Esimerkki 3.2. Euklidinen metriikka avaruuden $\mathbb{R}^n$ kahden pisteen $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ja $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ välillä on määritelty

$$d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2}.$$

Esimerkki 3.3. Normiavaruus E on aina metrinen avaruus, kun metriikaksi valitaan $d(x, y) = |x - y|$ kaikilla $x, y \in E$.

Todistus. Olkoon E normiavaruus. Tällöin kaikilla $x, y \in E$ pätee

(M1) $d(x, z) = |x-z| = |x-y+y-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y|+|y-z| = d(x, y)+d(y, z)$

(M2) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$

(M3) $d(x, y) = |x - y| = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

$\square$

Määritelmä 3.4. *Joukkojen välinen etäisyys*
Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Tällöin etäisyys osajoukkojen A ja B välillä on määritelty $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$, eli etäisyyksien $d(a, b)$ suurin alaraja, kun $a \in A$ ja $b \in B$.

Tällöin pätee $d(A, B) \geq 0$ ja jos $A = \emptyset$ tai $B = \emptyset$, niin $d(A, B) = 0$.

Lause 3.5. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x, y \in X$ ja $A \subset X$ epätyhjä. Tällöin $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Erityisesti $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ kaikilla $z \in X$.*

Todistus. Olkoon $a \in A$. Tällöin kaikilla $y \in A$ pätee $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Ottamalla infimum kaikkien $a \in A$ yli saadaan $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ ja edelleen $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Vastaavasti olkoon $y \in A$, jolloin kaikilla $x \in X$ pätee $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$. Nyt $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ ja $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, jolloin siis $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

□

Määritelmä 3.6. *Homeomorfismi* tarkoittaa kuvausta $f \colon X \to Y$, jolla

(H1) f on bijektio,

(H2) f on jatkuva,

(H3) $f^{-1} \colon Y \to X$ on jatkuva.

Määritelmä 3.7. *Upotus* tarkoittaa kuvausta $f \colon X \to Y$, joka määrittelee homeomorfismin $f_1 \colon X \to fX$, jolla $f_1(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$.

Määritelmä 3.8. *Isometria* on etäisyydet säilyttävä kuvaus. Olkoon (X, d) ja (X', d') metrisiä avaruuksia. Tällöin kuvaus $h \colon X \to X'$ on isometria, jos $d(x_1, x_2) = d'(h(x_1), h(x_2))$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$.

Esimerkki 3.9. Peilaus, rotaatio ja siirtokuvaus ovat geometriasta tuttuja isometrioita avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Lemma 3.10. *Bijektiivinen isometria on aina homeomorfismi.*

Todistus. Olkoon (X, d) ja (X', d') metrisiä avaruuksia ja olkoon kuvaus $h \colon X \to X'$ isometria. Tällöin $d(x_1, x_2) = d'(h(x_1), h(x_2))$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$. Tällöin

(H1) h on määritelmän nojalla bijektio, (H2) Kaikilla $\epsilon > 0$ voidaan valita $\delta = \epsilon$, jolla pätee: Jos $d(x_1, x_2) < \delta$, niin

$$d'(h(x_1), h(x_2)) = d(x_1, x_2) < \delta = \epsilon.$$

Siis h on jatkuva.

(H3) Edellisen kohdan ja isometrisuuden nojalla myös $f^{-1}\colon Y \to X$ on jatkuva.

$\square$

Lemma 3.11. *Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin*

$$d'\colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \qquad x, y \in X$$

on metriikka joukossa X ja joukon X pisteiden d'-etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1.

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kaikilla $x, y, z \in X$ pätee

(M1) $$\begin{aligned} d'(x,z) = \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} &\leq \frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &= \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\ &\leq \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} = d'(x,y) + d'(y,z), \end{aligned}$$

(M2) $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y,x)$ ja

(M3) $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0$, jos ja vain jos $d(x,y) = 0$, eli jos ja vain jos $x = y$.

Joukon X pisteiden d'-etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1, sillä $d(x,y) \leq 1 + d(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$. $\square$

Luku 4

Konveksi verho

Tässä luvussa esitellään konveksius, konveksi verho ja tämän ominaisuuksia. Näitä käsitteitä tarkastellaan syvemmin kirjoissa Topologia I ja Topologia II.

Määritelmä 4.1. *Konveksius.* Olkoon E normiavaruus, $A \subset E$ ja $a, b \in A$. Yhtälö

$$\alpha(t) = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$$

määrittelee janapolun $\alpha\colon [0,1] \to E$. Kuvajoukko $\alpha[0,1] = [a,b]$ on jana, jonka päätepisteet ovat $\alpha(0) = a \in A$ ja $\alpha(1) = b \in A$. Joukko $A \subset E$ on konveksi, jos ja vain jos $[a,b] \subset A$ kaikilla $a, b \in A$.

Esimerkki 4.2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikkökuula $\bar{B}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leq 1\}$ on konveksi.

Määritelmä 4.3. *Konveksi verho.* Olkoon E normiavaruus, $A \subset E$ ja $(A_j)_{j \in J} \subset \mathcal{P}(E)$ kaikkien sellaisten konveksien osajoukkojen $A_k \subset E$, $k \in J$ muodostama perhe, joilla $A \subset A_k$. Tällöin joukko $C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$ on joukon A konveksi verho.

Lemma 4.4. *Konveksi verho $C(A)$ on konveksi.*

Todistus. Olkoon $a, b \in C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$. Tällöin $a, b \in A_i$ kaikilla $i \in J$. Jokainen A_i on konveksi, joten kaikilla $i \in J$ pätee $[a,b] \subset A_i$. Tällöin kaikilla $a, b \in C(A)$ pätee $[a,b] \subset C(A)$, joten konveksi verho $C(A)$ on konveksi. □

Korollaari 4.5. *Konveksi verho $C(A)$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää joukon A.*

Todistus. Olkoon B sellainen konveksi joukko, jolla $A \subset B \subset C(A)$. Joukko B on konveksi ja $A \subset B$, joten $B \in (A_j)_{j \in J}$. Tällöin

$$C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j \subset B.$$

Siis $B = C(A)$ ja $C(A)$ on pienin konveksi joukko, jolla $A \subset C(A)$. □

Lemma 4.6. *Olkoon E normiavaruus ja $A \subset E$. Konveksi verho $C(A)$ on muotoa*

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i, \qquad \textit{missä } x_i \in A, \lambda_i \geq 0 \textit{ ja } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

olevien lineaarikombinaatioiden muodostama joukko.

Todistus. Konveksi verho $C(A)$ on konveksi ja $A \subset C(A)$, joten kaikilla $a, b \in A$ pätee $[a, b] \subset C(A)$, toisin sanoen, $(1-t)a + tb \in C(A)$ kaikilla $0 \leq t \leq 1$, erityisesti

$$c_0 a + c_1 b \in C(A), \text{ kun } c_0, c_1 \geq 0 \text{ ja } c_0 + c_1 = 1. \tag{4.7}$$

Olkoon $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in A$, $d_0, d_1, \ldots, d_n, e, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ ja $d_i, e, \lambda_i \geq 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että jollain $n \geq 1$ pätee

$$d_0 x_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n \in C(A), \text{kun } d_0 + d_1 + \cdots + d_n = 1.$$

Olkoon $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ =&e\left(\frac{\lambda_0}{e} x_0 + \frac{\lambda_1}{e} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{e} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A)\end{aligned}$$

Olkoon $\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}&\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ =&(1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_0}{1-\lambda_{n+1}} x_0 + \frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A)\end{aligned}$$

Tällöin konveksiuden ja kaavan 4.7 nojalla pätee

$$\begin{aligned}&e(d_0 x_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ =&ed_0 x_0 + ed_1 x_1 + \cdots + ed_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A),\end{aligned}$$

kun $e + \lambda_{n+1} = 1$. Valitsemalla $ed_i = \lambda_i$ kaikilla $i \in 0, 1, \ldots, n$ saadaan

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A).$$

Siis $C(A)$ sisältää kaikki muotoa

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad \text{missä } x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ ja } \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$$

olevat lineaarikombinaatiot.

Osoitetaan seuraavaksi, että $C(A)$ sisältää ainoastaan kyseisiä lineaarikombinaatiota.

□

Luku 5

Kuratowskin upotuslause

Lause 5.1. *Jokaista metristä avaruutta* (X, d) *kohti on olemassa normiavaruus* Z *ja upotus* $h\colon X \to Z$ *missä* $hX \subset Z$ *on suljettu konveksissa verhossa* $C(hX)$.

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \qquad x, y \in X$$

on lemman 3.11 mukaan metriikka joukossa X ja joukon X pisteiden d'-etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1.

Olkoon $Z = Raj(X, \mathbb{R})$ joukon X kaikkien rajoitettujen reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruus. Tällöin avaruudella Z on määritelmän 2.7 mukaan muotoa

$$||f_1|| = \sup_{x \in X} |f_1(x)|, \qquad f_1 \in Z$$

oleva sup-normi.

Seuraavaksi määritellään homeomorfismi $h\colon X \to hX \subset Z$. Tätä varten asetetaan funktio $f_x \in Z$ jokaiselle $x \in X$ yhtälön $f_x(y) = d'(x, y)$ mukaisesti, eli

$$h(x) = f_x, \qquad x \in X.$$

Tällöin pätee

$$||f_{x_1} - f_{x_2}|| = \sup_{x \in X} |d'(x_1, x) - d'(x_2, x)| \geq |d'(x_1, x_2) - d'(x_2, x_2)| = d'(x_1, x_2).$$

Toisaalta mielivaltaiselle $y \in X$ pätee

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d'(x_1, y) - d'(x_2, y)| \leq d'(x_1, x_2),$$

jolloin siis

$$||f_{x_1} - f_{x_2}|| = \sup_{x \in X} |d'(x_1, x) - d'(x_2, x)| \leq d'(x_1, x_2).$$

Edeltävistä epäyhtälöistä saadaan $||f_{x_1} - f_{x_2}|| = d'(x_1, x_2)$, jolloin kuvaus $h\colon X \to hX$ on isometria. Funktio h on bijektio, sillä kaikilla $x, x' \in X$, $x \neq x'$ pätee

$$f_x(x) = d'(x, x) = 0 \neq d'(x', x) = f_{x'}(x)$$

ja edelleen

$$h(x) = f_x \neq f_{x'} = h(x').$$

Lemman 3.10 nojalla funktio h on homeomorfismi kuvajoukolle hX.

Seuraavaksi osoitetaan, että hX on suljettu konveksissa verhossa $C(hX)$. Tavoitteena on osoittaa, että avaruuden hX alkioista muodostuvan ja joukossa $C(hX)$ suppenevan jonon raja-arvo kuuluu avaruuteen hX. Olkoon $f \in C(hX)$, $f_{x_i} \in hX$ ja $x_i \in X$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Oletetaan, että

$$f = \lim_{n \to \infty} f_{x_n}.$$

Tällöin koska f kuuluu konveksiin verhoon $C(hX)$, niin lemman 4.6 nojalla f on lineaarikombinaatio vektorialiavaruuden hX vektoreista. Tällöin olkoon $a_0, a_1, \ldots, a_k \in X$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_i \geq 0$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$ niin, että

$$f = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_{a_i}, \qquad \text{missä } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Nyt jollain $i \leq k$ pätee $\lambda_i \geq 1/(k+1)$. Tämä seuraa siitä, että jos $\lambda_i < 1/(k+1)$ kaikilla $i \leq k$, niin

$$\sum_{i=0}^{k} \lambda_i < \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{k+1} = 1,$$

joka on ristiriidassa oletuksen $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$ kanssa. Voidaan siis valita sellaiset $a_0, a_1, \ldots, a_k$, $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_k$, että

$$\lambda_0 \geq \frac{1}{k+1} \text{ ja } f = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_{a_i}, \qquad \text{missä } \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1.$$

Tällöin

$$||f - f_{x_n}|| \geq |f(x_n) - f_{x_n}(x_n)| = |f(x_n) - d'(x_n, x_n)| = |f(x_n)|$$

ja edelleen

$$|f(x_n)| = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_{a_i}(x_n) \geq \lambda_0 f_{a_0}(x_n) \geq \frac{1}{k+1} d(a_0, x_n).$$

Tällöin yhtälöstä $\lim_{n\to\infty} f_{x_n} = f$ seuraa, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a_0$.
Siis $f = \lim_{n\to\infty} f_{x_n} = f_{a_0} \in hX$, joten $hX \subset C(hX)$ on suljettu.

$\square$

Kirjallisuutta

[1] Karol Borsuk: Theory of retracts, Państwowe Wydawn. Naukowe, 1967.

[2] Jussi Väisälä: Topologia I, 4. korjattu painos, Limes ry, 2007.

[3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.

[4] Juha Heinonen: Geometric embeddings of metric spaces, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2003