

# Kuratowskin upotuslause

Pekka Keipi

3. elokuuta 2016

# Sisältö

1	Johdanto	2
2	Funktion rajoittuma, normi ja sup-normi	3
3	Metrinen avaruus	6
4	Konvekxi verho	9
5	Banachin avaruus	11
6	Kuratowskin upotuslause	12

# Luku 1

## Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä Kuratowskin upotuslause jne.. Luku 2, ks. [2]

## Luku 2

# Funktion rajoittuma, normi ja sup-normi

Tässä kappaleessa esitellään vektori- ja normiavaruuksien ja näiden funktioiden perusominaisuuksia. Enemmän aiheesta löytyy kirjoista [2] ja [3].

### **Määritelmä 2.1.** *Vektoriavaruus*

Joukko  $V$  on  $\mathbb{R}$ -kertoiminen vektoriavaruus, jos kaikkiin  $v, w \in V$  ja  $a \in \mathbb{R}$  on liitetty yksikäsitteinen summa  $v + w \in V$  ja tulo  $av \in V$  niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

- i)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  kaikilla  $u, v, w \in V$ .
- ii)  $v + w = w + v$  kaikilla  $v, w \in V$ .
- iii) On olemassa sellainen  $0 = 0_v$ , että  $v + 0 = v$  kaikilla  $v \in V$ .
- iv) Jokaiseen  $v \in V$  liittyy sellainen  $-v \in V$ , että  $v + (-v) = 0$ .
- v)  $a(v + w) = av + aw$  kaikilla  $a \in \mathbb{R}, v, w \in V$ .
- vi)  $(a + b)v = av + bv$  kaikilla  $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$ .
- vii)  $a(bv) = (ab)v$  kaikilla  $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$ .
- viii)  $1_v = v$  kaikilla  $v \in V$ .

Tässä avaruuden  $V$  alkioita kutsutaan vektoreiksi ja avaruuden  $\mathbb{R}$  alkioita skalaareiksi.

### **Määritelmä 2.2.** *Vektorialiavaruus*

Osajoukko  $W \subset V$  on vektoriavaruuden  $V$  (vektori)aliavaruus, jos

- i)  $v + w \in W$  kaikilla  $v, w \in W$ ,
- ii)  $av \in W$  kaikilla  $a \in \mathbb{R}, v \in W$  ja
- iii)  $0_v \in W$

**Määritelmä 2.3.** *Rajoitettu funktio*

Olkoon  $D$  avaruus ja  $F(D, \mathbb{R})$  kaikkien avaruudessa  $D$  määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  joukko. Joukko  $F(D, \mathbb{R})$  on vektoriavaruus [2]. Funktio  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitettu, jos on olemassa sellainen  $M \in \mathbb{R}, M \geq 0$ , jolla  $|f(x)| \leq M$  kaikilla  $x \in D$ .

Rajoitettujen funktioiden avaruus  $Raj(D, \mathbb{R})$  koostuu kaikista rajoitetuista funktioista  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Lemma 2.4.** *Rajoitettujen funktioiden avaruus  $Raj(D, \mathbb{R})$  on reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruuden  $F(D, \mathbb{R})$  aliavaruus.*

*Todistus.* Olkoon  $f, g \in Raj(D, \mathbb{R}), M, N \in \mathbb{R}, M, N \geq 0$  niin, että  $|f(x)| \leq M$  ja  $|g(x)| \leq N$  kaikilla  $x \in D$ . Tällöin seuraavat kohdat pätevät:

- i)  $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N \leq \infty$ , siis  $f + g \in Raj(D, \mathbb{R})$  kaikilla  $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$ ,
- ii)  $|af(x)| = |a| \cdot |f(x)| \leq |a| \cdot M \leq \infty$ , siis  $af \in Raj(D, \mathbb{R})$  kaikilla  $a \in \mathbb{R}, f \in Raj(D, \mathbb{R})$  ja
- iii)  $0_{F(D, \mathbb{R})}(x) = 0$  kaikilla  $x \in D$ , jolloin  $0_{F(D, \mathbb{R})} \in Raj(D, \mathbb{R})$ .

□

**Määritelmä 2.5.** *Normi*

Olkoon  $E$  vektoriavaruus ja  $|\cdot|: E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$  kuvaus joukossa  $E$ . Kuvaus  $|\cdot|$  on normi avaruudessa  $E$ , jos seuraavat ominaisuudet pätevät kaikilla  $x, y \in E, a \in \mathbb{R}$ .

- (N1)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,
- (N2)  $|ax| = |a||x|$ ,
- (N3) Jos  $|x| = 0$ , niin  $x = \bar{0}$ .

Vektoriavaruutta, jossa on annettu jokin normi, sanotaan normiavaruudeksi.

**Esimerkki 2.6.** Määritellään joukossa  $\mathbb{R}^n$  tavallinen euklidinen normi  $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ .

**Määritelmä 2.7.** *Sup-normi*

Olkoon  $D$  epätyhjä joukko ja  $Raj(D, \mathbb{R})$  kaikkien avaruudessa  $D$  määriteltyjen rajoitettujen funktioiden  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  vektoriavaruus. Yhtälö  $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in D\}$  määrittelee normin avaruudessa  $Raj(D, \mathbb{R})$ . Tätä normia sanotaan avaruuden  $Raj(D, \mathbb{R})$  sup-normiksi.

*Todistus.* (N1) Olkoon  $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$  ja  $x \in D$ . Tällöin

$$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

kaikilla  $x \in D$ , joten  $\|f + g\| = \sup\{|f(x) + g(x)|\} \leq \|f\| + \|g\|$ .

(N2) Olkoon  $f \in Raj(D, \mathbb{R})$  ja  $x \in D$ . Tällöin

$$|af|(x) = |af(x)| = |a||f(x)| \leq |a|\|f\|$$

kaikilla  $x \in D$ , joten  $\|af\| \leq |a|\|f\|$ . Jos  $a = 0$ , niin (N2) pätee muodossa  $0 = 0$ . Jos  $a \neq 0$ , niin  $f = a^{-1}af$  ja edellisen mukaan  $\|f\| \leq |a^{-1}|\|af\|$  ja edelleen  $\|af\| \geq |a|\|f\|$  kaikilla  $x \in D$ . Tällöin siis  $\|af\| = |a|\|f\|$ .

(N3) Jos  $\|f\| = 0$ , niin  $|f(x)| = 0$  kaikilla  $x \in D$ , eli  $f = \bar{0}$ .

□

**Esimerkki 2.8.** Tapauksessa  $D = \mathbb{N}$  saadaan kaikkien rajoitettujen jonojen joukko  $raj(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ . Joukon alkioita ovat rajoitetut jonot  $x = (x_1, x_2, \dots)$ . Tälle joukolle käytetään usein merkintää  $l_\infty$ .

# Luku 3

## Metriten avaruus

Tässä luvussa esitellään metristen avaruuksien ominaisuuksia.

**Määritelmä 3.1.** *Metriten avaruus* on pari  $(X, d)$ , jossa  $X$  on joukko ja  $d$  on *metriikka* joukossa  $X$ . Tällöin  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  on kuvaus, jolle pätee seuraavat ominaisuudet kaikilla  $x, y, z \in X$ :

$$(M1) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, y) = 0, \text{ jos ja vain jos } x = y.$$

**Esimerkki 3.2.** Euklidinen metriikka avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kahden pisteen  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  ja  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  välillä on määritelty

$$d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}.$$

**Esimerkki 3.3.** Normiavaruus on aina metriten avaruus.

*Todistus.* Olkoon  $E$  normiavaruus ja  $x, y \in E$ . Metriikaksi voidaan valita  $d(x, y) = |x - y|$ , jolloin kaikilla  $x, y \in E$  pätee

$$(M1) \quad d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

$$(M2) \quad d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$$

$$(M3) \quad d(x, y) = |x - y| = 0, \text{ jos ja vain jos } x = y.$$

□

**Määritelmä 3.4.** *Joukkojen välinen etäisyys*

Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $A, B \subset X$ . Tällöin etäisyys osajoukkojen  $A$  ja  $B$  välillä on määritelty  $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ , eli etäisyyksien  $d(a, b)$  suurin alaraja, kun  $a \in A$  ja  $b \in B$ .

Tällöin pätee  $d(A, B) \geq 0$  ja jos  $A = \emptyset$  tai  $B = \emptyset$ , niin  $d(A, B) = 0$ .

**Lause 3.5.** *Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus,  $x, y \in X$  ja  $A \subset X$  epätyhjä. Tällöin  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ . Erityisesti  $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$  kaikilla  $z \in X$ .*

*Todistus.* Olkoon  $a \in A$ . Tällöin kaikilla  $y \in A$  pätee  $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$ . Ottamalla infimum kaikkien  $a \in A$  yli saadaan  $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$  ja edelleen  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ . Vastaavasti olkoon  $y \in A$ , jolloin kaikilla  $x \in X$  pätee  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$ . Nyt  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$  ja  $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$ , jolloin siis  $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ . □

**Määritelmä 3.6.** *Homeomorfismi* tarkoittaa kuvausta  $f: X \rightarrow Y$ , jolla

(H1)  $f$  on bijektio,

(H2)  $f$  on jatkuva,

(H3)  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  on jatkuva.

**Määritelmä 3.7.** *Upotus* tarkoittaa kuvausta  $f: X \rightarrow Y$ , joka määrittelee homeomorfismin  $f_1: X \rightarrow f[X]$ , jolla  $f_1(x) = f(x)$  kaikilla  $x \in X$ .

**Määritelmä 3.8.** *Isometria* on etäisyydet säilyttävä kuvaus. Olkoon  $(X, d)$  ja  $(X', d')$  metrisiä avaruuksia. Tällöin kuvaus  $h: X \rightarrow X'$  on isometria, jos  $d(x_1, x_2) = d'(h(x_1), h(x_2))$  kaikilla  $x_1, x_2 \in X$ .

**Esimerkki 3.9.** Peilaus, rotaatio ja siirtokuvaus ovat geometriasta tuttuja isometrioita avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemma 3.10.** *Bijektiivinen isometria on aina homeomorfismi.*

*Todistus.* Olkoon  $(X, d)$  ja  $(X', d')$  metrisiä avaruuksia ja olkoon kuvaus  $h: X \rightarrow X'$  isometria. Tällöin  $d(x_1, x_2) = d'(h(x_1), h(x_2))$  kaikilla  $x_1, x_2 \in X$ . Tällöin

(H1)  $h$  on määritelmän nojalla bijektio,

(H2) Kaikilla  $\epsilon > 0$  on olemassa  $\delta > 0$ , jolla pätee: Jos  $d(x_1, x_2) < \delta$ , niin  $d'(h(x_1), h(x_2)) = d(x_1, x_2) < \epsilon$ . Siis  $h$  on jatkuva.



(H3) Edellisen kohdan ja isometrisuuden nojalla myös  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  on jatkuva.

□

**Lemma 3.11.** *Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Tällöin*

$$d': X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

*on metriikka joukossa  $X$  ja joukon  $X$  pisteiden  $d'$ -etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1.*

*Todistus.* Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Kaikilla  $x, y, z \in X$  pätee

$$\begin{aligned} \text{(M1)} \quad d'(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z), \end{aligned}$$

$$\text{(M2)} \quad d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d'(y, x) \text{ ja}$$

$$\text{(M3)} \quad d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0, \text{ jos ja vain jos } d(x, y) = 0, \text{ eli jos ja vain jos } x = y.$$

Joukon  $X$  pisteiden  $d'$ -etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1, sillä  $d(x, y) \leq 1 + d(x, y)$  kaikilla  $x, y \in X$ . □

# Luku 4

## Konvekksi verho

Tässä luvussa käsitellään konveksisuutta ja konveksia verhoa.

**Määritelmä 4.1.** *Konveksius.* Olkoon  $E$  normiavaruus,  $A \subset E$  ja  $a, b \in A$ . Yhtälö

$$\alpha(t) = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$$

määrittelee janapolun  $\alpha: [0, 1] \rightarrow E$ . Kuvajoukko  $\alpha[0, 1] = [a, b]$  on jana, jonka päätepisteet ovat  $\alpha(0) = a \in A$  ja  $\alpha(1) = b \in A$ . Joukko  $A \subset E$  on konvekksi, jos ja vain jos  $[a, b] \subset A$  kaikilla  $a, b \in A$ .

**Esimerkki 4.2.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  suljettu yksikkökuula  $\bar{B}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n: |x| \leq 1\}$  on konvekksi.

**Määritelmä 4.3.** *Konvekksi verho.* Olkoon  $E$  normiavaruus,  $A \subset E$  ja  $(A_j)_{j \in J} \subset \mathcal{P}(E)$  kaikkien sellaisten konveksien osajoukkojen  $A_k \subset E$ ,  $k \in J$  muodostama perhe, joilla  $A \subset A_k$ . Tällöin joukko  $C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$  on joukon  $A$  konvekksi verho.

**Lemma 4.4.** *Konvekksi verho  $C(A)$  on konvekksi.*

*Todistus.* Olkoon  $a, b \in C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$ . Tällöin  $a, b \in A_i$  kaikilla  $i \in J$ . Jokainen  $A_i$  on konvekksi, joten kaikilla  $i \in J$  pätee  $[a, b] \subset A_i$ . Tällöin kaikilla  $a, b \in C(A)$  pätee  $[a, b] \subset C(A)$ , joten konvekssi verho  $C(A)$  on konvekksi.  $\square$

**Korollaari 4.5.** *Konvekssi verho  $C(A)$  on pienin konvekssi joukko, joka sisältää joukon  $A$ .*

*Todistus.* Olkoon  $B$  sellainen konvekssi joukko, jolla  $A \subset B \subset C(A)$ . Joukko  $B$  on konvekssi ja  $A \subset B$ , joten  $B \in (A_j)_{j \in J}$ . Tällöin

$$C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j \subset B.$$

Siis  $B = C(A)$  ja  $C(A)$  on pienin konvekssi joukko, jolla  $A \subset C(A)$ .  $\square$

**Lemma 4.6.** *Olkoon  $E$  normiavaruus ja  $A \subset E$ . Konvekksi verho  $C(A)$  on muotoa*

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad \text{missä } x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ ja } \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$$

*olevien lineaarikombinaatioiden muodostama joukko.*

*Todistus.* Konvekksi verho  $C(A)$  on konvekksi ja  $A \subset C(A)$ , joten kaikilla  $a, b \in A$  pätee  $[a, b] \subset C(A)$ , toisin sanoen,  $(1-t)a + tb \in C(A)$  kaikilla  $0 \leq t \leq 1$ , erityisesti

$$(4.7) \quad c_0 a + c_1 b \in C(A), \text{ kun } c_0, c_1 \geq 0 \text{ ja } c_0 + c_1 = 1.$$

Olkoon  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in A$ ,  $d_0, d_1, \dots, d_n, e, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$  ja  $d_i, e, \lambda_{n+1} \geq 0$  kaikilla  $i \in \mathbb{N}$ . Oletetaan, että jollain  $n \geq 1$  pätee

$$d_0 x_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n \in C(A), \text{ kun } d_0 + d_1 + \cdots + d_n = 1.$$

Tällöin konvekksiuden ja kaavan 4.7 nojalla pätee

$$\begin{aligned} & e(d_0 x_0 + d_1 x_1 + \cdots + d_n x_n) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= e d_0 x_0 + e d_1 x_1 + \cdots + e d_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A), \end{aligned}$$

kun  $e + \lambda_{n+1} = 1$ . Valitsemalla  $e d_i = \lambda_i$  kaikilla  $i \in 0, 1, \dots, n$  saadaan

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A).$$

Siis  $C(A)$  sisältää kaikki muotoa

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n, \quad \text{missä } x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \text{ ja } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

olevat lineaarikombinaatiot. Osoitetaan seuraavaksi, että  $C(A)$  sisältää ainoastaan kyseisiä lineaarikombinaatiota.

□

# Luku 5

## Banachin avaruus

**Määritelmä 5.1.** Kompakti joukko

**Määritelmä 5.2.** *Cauchyn jono* Jono  $(x_n: n \in \mathbb{N})$

**Määritelmä 5.3.** Banachin avaruus on täydellinen normiavaruus.

**Määritelmä 5.4.** *Separoituva avaruus.* Olkoon  $X$  metrinen avaruus ja  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$  epätyhjien avointen osajoukkojen perhe. Tällöin avaruus  $X$  on separoituva, jos seuraava ehto pätee: On olemassa numeroituva tiheä osajoukko  $\{a_0, a_1, \dots\} = A \subset X$ , toisin sanoen, jokaista  $B \in \mathcal{B}$  kohti löytyy ainakin yksi  $a_i \in A$ , jolla  $a_i \in B$  jollain  $i \in \mathbb{N}$ .

**Määritelmä 5.5.** *Homotopia*

Kaksi kuvausta ovat homotooppisia keskenään, jos ne voidaan muuntaa jatkuvalla kuvauksella toisikseen. Olkoon  $f, g: X \rightarrow Y$ . Sanomme kuvauksen  $f$  olevan homotooppinen kuvauksen  $g$  kanssa, jos on olemassa jatkuva  $h: X \times I \rightarrow Y$ , jolla  $h(x, 0) = f(x)$  ja  $h(x, 1) = g(x)$  kaikilla  $x \in X$ . Merkitsemme tällöin  $f \simeq g$  ja  $h: f \simeq g$ . Kuvaus  $h$  on homotopia, joka yhdistää kuvaukset  $f$  ja  $g$ .

# Luku 6

## Kuratowskin upotuslause

**Lause 6.1.** *Jokaista metristä avaruutta  $(X, d)$  kohti on olemassa normiavaruus  $Z$  ja upotus  $h: X \rightarrow Z$  missä  $hX \subset Z$  on suljettu konveksissa verhossa  $C(hX)$ .*

*Todistus.* Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus. Tällöin

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

on lemmän 3.11 mukaan metriikka joukossa  $X$  ja joukon  $X$  pisteiden  $d'$ -etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1.

Olkoon  $Z = \text{Raj}(X, \mathbb{R})$  joukon  $X$  kaikkien rajoitettujen reaaliarvoisten funktioiden vektoriavaruus. Tällöin avaruudella  $Z$  on määritelmän 2.7 mukaan muotoa

$$\|f_1\| = \sup_{x \in X} |f_1(x)|, \quad f_1 \in Z$$

oleva sup-normi.

Seuraavaksi määritellään homeomorfismi  $h: X \rightarrow h(X) \subset Z$ . Tätä varten asetetaan funktio  $f_x \in Z$  jokaiselle  $x \in X$  yhtälön  $f_x(y) = d'(x, y)$  mukaisesti, eli

$$h(x) = f_x, \quad x \in X.$$

Tällöin pätee

$$\|f_{x_1} - f_{x_2}\| = \sup_{x \in X} |d'(x_1, x) - d'(x_2, x)| \geq |d'(x_1, x_2) - d'(x_2, x_2)| = d'(x_1, x_2).$$

Toisaalta mielivaltaiselle  $y \in X$  pätee

$$|f_{x_1}(y) - f_{x_2}(y)| = |d'(x_1, y) - d'(x_2, y)| \leq d'(x_1, x_2),$$

jolloin siis  $\|f_{x_1} - f_{x_2}\| \leq d(x_1, x_2)$ . Edeltävistä epäyhtälöistä saadaan  $d(f_{x_1}, f_{x_2}) = d'(x_1, x_2)$ , jolloin kuvaus  $h: X \rightarrow h(X)$  on isometria.

Funktio  $h$  on bijektio, sillä kaikilla  $x, x' \in X, x \neq x'$  pätee

$$f_x(x) = d'(x, x) = 0 \neq d'(x', x) = f_{x'}(x)$$

ja edelleen  $h(x) = f_x \neq f_{x'} = h(x')$ . Lemman 3.10 nojalla funktio  $h$  on homeomorfismi. Osoitetaan, että  $hX$  on suljettu konveksissa verhossa  $C(hX)$ . Tavoitteena on osoittaa, että minkä tahansa jonon  $f_{x_n} \in hX$  raja-arvo kuuluu joukkoon  $hX$ . Olkoon  $f \in C(hX)$  ja määritellään

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{x_n}, \quad f_{x_n} \in hX.$$

Tällöin koska  $f$  kuuluu konvekseen verhoon  $C(hX)$ , niin  $f$  on lineaarikombinaatio vektoriavaruuden  $hX$  vektoreista. Tällöin olkoon  $a_0, a_1, \dots, a_k \in X, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  ja  $\lambda_i \geq 0$ , kaikilla  $i \in \mathbb{N}$  niin, että

$$f = \sum_{i=0}^k \lambda_i f_{a_i} \quad \text{missä} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Tällöin on ainakin yksi  $i \leq k$ , jolla  $\lambda_i \geq 1/(k+1)$ . Tämä seuraa siitä, että

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} = k \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1} < 1.$$

Tällöin voidaan vaihtaa  $\lambda_0$  ja  $\lambda_i$  keskenään ja vastaavasti  $a_0$  ja  $a_i$  keskenään, jolloin saadaan  $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$ . Jos jollain  $i \neq j$  ja  $i, j \leq k$  pätee  $a_i = a_j$ , niin on mahdollista valita uudet

$$a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k$$

ja vastaavat

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, (\lambda_i + \lambda_j), \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{k-1}.$$

Voidaan siis valita sellaiset  $a_0, a_1, \dots, a_k$ , jotka ovat erillisiä ja sellaiset  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ , että  $\lambda_0$  täyttää ehdon  $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$ . Tällöin

$$d(f, f_{x_n}) \geq |f(x_n) - f_{x_n}(x_n)| = |f(x_n)| \geq \lambda_0 f_{a_0}(x_n) \geq \frac{1}{k+1} d(a_0, x_n).$$

Tällöin yhtälöstä  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{x_n} = f$  seuraa, että  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_0$ . Siis  $f = f_{a_0} \in hX$  pätee.  $\square$

# Kirjallisuutta

- [1] Karol Borsuk: Theory of retracts, n. painos, Państwowe Wydawn. Naukowe, 1967.
- [2] Jussi Väisälä: Topologia I, 4. korjattu painos, Limes ry, 2007.
- [3] Jussi Väisälä: Topologia II, 2. korjattu painos, Limes ry, 2005.
- [4] Juha Heinonen: Geometric embeddings of metric spaces, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto, 2003