

**KURATOWSKIN UPOTUSLAUSE
KANDINTYÖ**

PEKKA KEIPI
013592712

1. FUNKTION RAJOITTUMA, NORMI JA SUP-NORMI

Määritelmä 1.1. Vektoriavaruus

Joukko V on \mathbb{R} -kertoiminen vektoriavaruus, jos kaikkiin $v, w \in V$ ja $a \in \mathbb{R}$ on liitetty yksikäsitteinen summa $v + w \in V$ ja tulo $av \in V$ niin, että seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

- i) $(u + v) + w = u + (v + w)$ kaikilla $u, v, w \in V$.
- ii) $v + w = w + v$ kaikilla $v, w \in V$.
- iii) On olemassa sellainen $0 = 0_v$, että $v + 0 = v$ kaikilla $v \in V$.
- iv) Jokaiseen $v \in V$ liittyy sellainen $-v \in V$, että $v + (-v) = 0$.
- v) $a(v + w) = av + aw$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, v, w \in V$.
- vi) $(a + b)v = av + bv$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.
- vii) $a(bv) = (ab)v$ kaikilla $a, b \in \mathbb{R}, v \in V$.
- viii) $1_v = v$ kaikilla $v \in V$.

Tässä avaruuden V alkioita kutsutaan vektoreiksi ja avaruuden \mathbb{R} alkioita skalaareiksi.

Määritelmä 1.2. Vektorialiavaruus

Osa joukko $W \in V$ on vektoriavaruuden V (vektori)aliavaruus, jos

- i) $v + w \in W$ kaikilla $v, w \in W$,
- ii) $av \in W$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, v \in W$ ja
- iii) $0_v \in W$

Määritelmä 1.3. Rajoitettu funktio

Olkoon D avaruus ja $F(D, \mathbb{R})$ kaikkien avaruudessa D määriteltyjen reaaliarvoisten funktioiden $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ joukko. Funktio $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu, jos on olemassa sellainen $M \in \mathbb{R}, M \geq 0$, jolla $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in D$.

Rajoitettujen funktioiden avaruus $Raj(D, \mathbb{R})$ koostuu kaikista rajoitetuista funktioista $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Lemma 1.4. *Rajoitettujen funktioiden avaruus $Raj(D, \mathbb{R})$ on reaaliarvoisten funktioiden joukon $F(D, \mathbb{R})$ aliavaruus.*

Todistus. Olkoon $f, g \in Raj(D, \mathbb{R}), M, N \in \mathbb{R}, M, N \geq 0$ niin, että $|f(x)| \leq M$ ja $|g(x)| \leq N$ kaikilla $x \in D$. Tällöin seuraavat kohdat pätevät:

- i) $|f(x)| + |g(x)| \leq M + N \leq \infty$, siis $f + g \in Raj(D, \mathbb{R})$ kaikilla $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$,
- ii) $|af(x)| \leq a \cdot M \leq \infty$, siis $af \in Raj(D, \mathbb{R})$ kaikilla $a \in \mathbb{R}, f \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja
- iii) $0_{F(D, \mathbb{R})}(x) = 0$ kaikilla $x \in D$, jolloin $0_{F(D, \mathbb{R})} \in Raj(D, \mathbb{R})$.

Määritelmä 1.5. Normi

Olkoon E vektoriavaruus ja $|\cdot|: E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$ kuvaus joukossa E . Kuvaus $|\cdot|$ on normi avaruudessa E , jos seuraavat ominaisuudet pätevät kaikilla $x, y \in E, a \in \mathbb{R}$.

- (N1) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- (N2) $|ax| = |a||x|$,
- (N3) Jos $|x| = 0$, niin $x = \bar{0}$.

Vektoriavaruutta, jossa on annettu jokin normi, sanotaan normiavaruudeksi.

Esimerkki 1.6. Olkoon \mathbb{R}^n joukko, jossa määritellään tavallinen euklidinen normi $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Määritelmä 1.7. *Sup-normi*

Olkoon D epätyhjä avaruus ja $Raj(D, \mathbb{R})$ kaikkien avaruudessa D määriteltyjen rajoitettujen funktioiden $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ vektoriavaruus. Yhtälö $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in D\}$ määrittelee normin avaruudessa $Raj(D, \mathbb{R})$. Tätä normia sanotaan avaruuden $Raj(D, \mathbb{R})$ sup-normiksi.

Todistus.

- (N1) Olkoon $f, g \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja $x \in D$. Tällöin

$$|f + g|(x) = |f(x) + g(x)| \leq |f(x) + g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$$

kaikilla $x \in D$, joten $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

- (N2) Olkoon $f \in Raj(D, \mathbb{R})$ ja $x \in D$. Tällöin

$$|af|(x) = |af(x)| = |a||f(x)| \leq |a|\|f\|$$

kaikilla $x \in D$, joten $\|af\| \leq |a|\|f\|$. Jos $a = 0$, niin (N2) pätee muodossa $0 = 0$. Jos $a \neq 0$, niin $f = a^{-1}af$ ja edellisen mukaan $\|f\| \leq |a^{-1}|\|af\|$ ja edelleen $\|af\| \geq |a|\|f\|$ kaikilla $x \in D$. Tällöin siis $\|af\| = |a|\|f\|$.

- (N3) Jos $\|f\| = 0$, niin $|f(x)| = 0$ kaikilla $x \in D$, eli $f = \bar{0}$.

Esimerkki 1.8. Tapauksessa $D = \mathbb{N}$ saadaan kaikkien rajoitettujen jonojen joukko $raj(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Joukon alkioita ovat rajoitetut jonot $x = (x_1, x_2, \dots)$. Tälle joukolle käytetään usein merkintää l_∞ .

2. METRINEN AVARUUS

Määritelmä 2.1. *Metrinen avaruus* on pari (X, d) , jossa X on joukko ja d on *metriikka* joukossa X . Tällöin $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ on kuvaus, jolle pätee seuraavat ominaisuudet kaikilla $x, y, z \in X$:

- (M1) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
- (M2) $d(x, y) = d(y, x)$
- (M3) $d(x, y) = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Esimerkki 2.2. Euklidinen metriikka avaruuden \mathbb{R}^n kahden pisteen $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ja $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ välillä on määritelty $d(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \dots + (p_n - q_n)^2}$.

Esimerkki 2.3. Normiavaruus on aina metrinen avaruus.

Todistus. Olkoon E normiavaruus ja $x, y \in E$. Metriikaksi voidaan valita $d(x, y) = |x - y|$, jolloin kaikilla $x, y \in E$ pätee

- (M1) $d(x, y) = |x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |(-y)| = |x + 0| + |0 + y| = d(x, 0) + d(0, y)$
- (M2) $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$
- (M3) $d(x, y) = |x - y| = 0$, jos ja vain jos $x = y$.

Määritelmä 2.4. *Joukkojen välinen etäisyys*

Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$. Tällöin etäisyys osajoukkojen A ja B välillä on määritelty $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$, eli etäisyyksien $d(a, b)$ suurin alaraja, kun $a \in A$ ja $b \in B$.

Tällöin pätee $d(A, B) \geq 0$ ja jos $A = \emptyset$ tai $B = \emptyset$, niin $d(A, B) = 0$.

Lause 2.5. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x, y \in X$ ja $A \subset X$ epätyhjä. Tällöin $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$. Erityisesti $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$ kaikilla $z \in X$.

Todistus. Olkoon $a \in A$. Tällöin kaikilla $y \in A$ pätee $d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Ottamalla infimum kaikkien $a \in A$ yli saadaan $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$ ja edelleen $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Vastaavasti olkoon $y \in A$, jolloin kaikilla $x \in X$ pätee $d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x) = d(x, y)$. Nyt $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ ja $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$, jolloin siis $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

Määritelmä 2.6. *Homeomorfismi* tarkoittaa kuvausta $f: X \rightarrow Y$, jolla

- (1) f on bijektio,
- (2) f on jatkuva,
- (3) $f^{-1}: Y \rightarrow X$ on jatkuva.

Määritelmä 2.7. *Upotus* tarkoittaa kuvausta $f: X \rightarrow Y$, joka määrittelee homeomorfismin $f_1: X \rightarrow f[X]$, jolla $f_1(x) = f(x)$ kaikilla $x \in X$.

Määritelmä 2.8. *Isometria* on etäisyydet säilyttävä kuvaus. Olkoon (X, d) ja (X', d') metrisiä avaruuksia. Tällöin kuvaus $h: X \rightarrow X'$ on isometria, jos ja vain jos $d(x_1, x_2) = d'(h(x_1), h(x_2))$ kaikilla $x_1, x_2 \in X$.

Esimerkki 2.9. Peilaus, rotaatio ja siirtokuvaus ovat geometriasta tuttuja isometrioita avaruudessa \mathbb{R}^2 .

3. KONVEKSI VERHO

Määritelmä 3.1. *Konveksius.* Olkoon E normiavaruus, $A \subset E$ ja $a, b \in A$. Yhtälö

$$\alpha(t) = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$$

määrittelee janapolun $\alpha: [0, 1] \rightarrow E$. Kuvajoukko $\alpha[0, 1] = [a, b]$ on jana, jonka päätepisteet ovat $\alpha(0) = a \in A$ ja $\alpha(1) = b \in A$. Joukko $A \subset E$ on konvekksi, jos ja vain jos $[a, b] \subset A$ kaikilla $a, b \in A$.

Esimerkki 3.2. Avaruuden \mathbb{R}^n suljettu yksikkökuula $\bar{B}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ on konvekksi.

Määritelmä 3.3. *Konvekksi verho.* Olkoon E normiavaruus, $A \subset E$ ja $(A_j)_{j \in J} \subset \mathcal{P}(E)$ kaikkien sellaisten konveksien osajoukkojen $A_k \subset E$, $k \in J$ muodostama perhe, joilla $A \subset A_k$.

Tällöin joukko $C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$ on joukon A konvekssi verho.

Lemma 3.4. Konvekssi verho $C(A)$ on konvekksi.

Todistus. Olkoon $a, b \in C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j$. Tällöin $a, b \in A_i$ kaikilla $i \in J$. Jokainen A_i on konvekksi, joten kaikilla $i \in J$ pätee $[a, b] \subset A_i$. Tällöin kaikilla $a, b \in C(A)$ pätee $[a, b] \subset C(A)$, joten konvekssi verho $C(A)$ on konvekksi.

Korollaari 3.5. Konvekssi verho $C(A)$ on pienin konvekssi joukko, joka sisältää joukon A .

Todistus. Olkoon B sellainen konvekssi joukko, jolla $A \subset B \subset C(A)$. Joukko B on konvekssi ja $A \subset B$, joten $B \in (A_j)_{j \in J}$. Tällöin $C(A) = \bigcap_{j \in J} A_j \subset B$. Siis $B = C(A)$ ja $C(A)$ on pienin konvekssi joukko, jolla $A \subset C(A)$.

Lemma 3.6. Olkoon E normiavaruus ja $A \subset E$. Tällöin joukon A konvekssi verho $C(A)$ sisältää kaikki lineaarikombinaatiot joukon A vektoreista.

Todistus. Olkoon $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in A$, $a, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ ja $a, \lambda_i \geq 0$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Konveksiuden nojalla $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 \in C(A)$, kun $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$. Oletetaan, että jollain $n \geq 1$

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \in C(A), \text{ kun } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Tällöin myös

$$\begin{aligned} & a(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= a\lambda_0 x_0 + a\lambda_1 x_1 + \dots + a\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C(A), \end{aligned}$$

kun

$$\begin{aligned} a\lambda_0 + a\lambda_1 + \dots + a\lambda_n + \lambda_{n+1} &= a(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n) + \lambda_{n+1} \\ &= a(1) + \lambda_{n+1} = a + \lambda_{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Siis konvekssi verho $C(A)$ sisältää kaikki lineaarikombinaatiot joukon A vektoreista.

4. BANACHIN AVARUUS

Määritelmä 4.1. *Cauchyn jono* Jono $(x_n: n \in \mathbb{N})$

Määritelmä 4.2. *Banachin avaruus on täydellinen normiavaruus.*

Määritelmä 4.3. *Separoituva avaruus.* Olkoon X metrinen avaruus ja $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ epätyhjien avointen osajoukkojen perhe. Tällöin avaruus X on separoituva, jos seuraava ehto pätee: On olemassa numeroituva tiheä osajoukko $\{a_0, a_1, \dots\} = A \subset X$ niin, että jokaista $B \in \mathcal{B}$ kohti löytyy ainakin yksi $a_i \in A$, jolla $a_i \in B$ jollain $i \in \mathbb{N}$.

5. KURATOWSKIN UPOTUSLAUSE

Teoreema 5.1. *Jokaista metristä avaruutta (X, d) kohti on olemassa normiavaruus Z ja upotus $h: X \rightarrow Z$ missä $hX \subset Z$ on suljettu konveksissa verhossa $C(hX)$.*

Todistus. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Tällöin myös

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in X$$

on metriikka joukossa X , sillä kaikilla $x, y, z \in X$:

$$\begin{aligned} \text{(M1)} \quad d'(x, z) &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leq \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d'(x, y) + d'(y, z) \end{aligned}$$

$$\text{(M2)} \quad d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \frac{d(y, x)}{1 + d(y, x)} = d'(y, x)$$

$$\text{(M3)} \quad d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = 0, \text{ jos ja vain jos } d(x, y) = 0, \text{ eli jos ja vain jos } x = y.$$

Tällöin joukon X pisteiden d' -etäisyydet toisistaan ovat korkeintaan 1.

Olkoon Z joukon X kaikkien rajoitettujen jatkuvien funktioiden joukko. Asetetaan

$$|f_1| = \sup_{x \in X} |f_1(x)|, \quad f_1 \in Z$$

ja

$$d(f_1, f_2) = |f_1 - f_2| = \sup_{x \in X} |f_1(x) - f_2(x)|, \quad f_1, f_2 \in Z.$$

Tällöin Z on normiavaruus, sillä kaikilla $g_1, g_2 \in Z, a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{(N1)} \quad |g_1 + g_2| &= \sup_{x \in X} |g_1(x) + g_2(x)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |g_1(x)| + \sup_{x \in X} |g_2(x)| = |g_1| + |g_2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(N2)} \quad |ag_1| &= \sup_{x \in X} |ag_1(x)| = \sup_{x \in X} (|a| |g_1(x)|) \\ &= |a| \sup_{x \in X} |g_1(x)| = |a| |g_1| \end{aligned}$$

$$\text{(N3)} \quad |g_1| = \sup_{x \in X} |g_1(x)| = 0 \implies g_1(x) = 0 \quad \text{kaikilla } x \in X$$

Seuraavaksi määritellään homeomorfismi $h: X \rightarrow h(X) \subset Z$. Tätä varten asetamme funktion $f_x \in Z$ jokaiselle $x \in X$ yhtälön $f_x(y) = d(x, y)$ mukaisesti, eli

$$h(x) = f_x, \quad x \in X.$$

Tällöin pätee

$$d(f_{x_1}, f_{x_2}) \geq |d(x_1, x_2) - d(x_2, x_2)| = d(x_1, x_2).$$

Toisaalta mielivaltaiselle $y \in X$ pätee

$$|f_{x_1}(y), f_{x_2}(y)| = |d(x_1, y) - d(x_2, y)| \leq d(x_1, x_2),$$

jolloin siis $d(f_{x_1}, f_{x_2}) \leq d(x_1, x_2)$. Edeltävistä epäyhtälöistä saadaan $d(f_{x_1}, f_{x_2}) = d(x_1, x_2)$, joka osoittaa, että kuvaus h säilyttää pisteiden väliset etäisyydet ja on siten homeomorfismi.

Osoitetaan, että hX on suljettu konveksissa verhossa $C(hX)$. Tavoitteena on osoittaa, että minkä tahansa jonon $f_{x_n} \in hX$ raja-arvo kuuluu joukkoon hX . Olkoon $f \in C(hX)$ ja määritellään

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{x_n}, \quad f_{x_n} \in hX.$$

Tällöin koska f kuuluu konvekseen verhoon $C(hX)$, niin f on lineaarikombinaatio vektorialiavaruuden hX vektoreista. Tällöin olkoon $a_0, a_1, \dots, a_k \in X$, $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ja $\lambda_i \geq 0$, kaikilla $i \in \mathbb{N}$ niin, että

$$f = \sum_{i=0}^k \lambda_i f_{a_i} \quad \text{missä} \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Tällöin on ainakin yksi $i \leq k$, jolla $\lambda_i \geq 1/(k+1)$. Tämä seuraa siitä, että

$$\sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} = k \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1} < 1.$$

Tällöin voidaan vaihtaa λ_0 ja λ_i keskenään ja vastaavasti a_0 ja a_i keskenään, jolloin saadaan $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$. Jos jollain $i \neq j$ ja $i, j \leq k$ pätee $a_i = a_j$, niin on mahdollista valita uudet

$$a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k$$

ja vastaavat

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, (\lambda_i + \lambda_j), \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{k-1}.$$

Voidaan siis valita sellaiset a_0, a_1, \dots, a_k , jotka ovat erillisiä ja sellaiset $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$, että λ_0 täyttää ehdon $\lambda_0 \geq 1/(k+1)$. Tällöin

$$d(f, f_{x_n}) \geq |f(x_n) - f_{x_n}(x_n)| = |f(x_n)| \geq \lambda_0 f_{a_0}(x_n) \geq \frac{1}{k+1} d(a_0, x_n).$$

Tällöin yhtälöstä $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{x_n} = f$ seuraa, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_0$. Siis $f = f_{a_0} \in hX$ pätee.

6. KURATOWSKIN UPOTUSLAUSE V2

Teoreema 6.1. *Jokaista metristä avaruutta X kohti on olemassa upotus Banachin avaruuteen $L^\infty(X)$ missä $L^\infty(X)$ on avaruuden X kaikkien rajoitettujen funktioiden avaruus varustettuna sup-normilla.*

Todistus Olkoon $x_0 \in X$ ja

$$x \mapsto s^x, \quad s^x(a) = d(x, a) - d(a, x_0), x \in X.$$

Tällöin kolmioepäyhtälöllä saadaan

$$|s^x(a)| \leq d(x, x_0)$$

ja

$$|s^x(a) - s^y(a)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y),$$

jossa yhtäsuuruus pätee, jos $a = x$ tai $a = y$.

7. FRÉCHETIN UPOTUSLAUSE.

Jokainen separoituva metrinen avaruus (X, d) on upotettavissa (isometrisesti) Banachin avaruuteen l^∞ .

Teoreema 7.1. *Jokaista separoituvaa metristä avaruutta (X, d) kohti on olemassa etäisyydet säilyttävä upotus Banachin avaruuteen $s: X \rightarrow l^\infty$. (Huomautus: Banachin avaruus $l^\infty = L^\infty(\mathbb{N})$ on rajoitettujen jonojen sup-normilla varustettu avaruus.)*

Todistus. Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus. Tällöin on olemassa separoituvuuden määritelmän mukainen tiheä ja numeroituva osajoukko $\{x_0, x_1, \dots\} \subset X$. Tällöin voidaan määritellä

$$x \mapsto s^x, \quad s_i^x = d(x, x_i) - d(x_i, x_0).$$

Tällöin Kuratowskin upotuslauseen antama laajennus kiinnitetyllä pisteellä x_0 tiheästä osajoukosta täydelliseen avaruuteen on

$$\{x_0, x_1, \dots\} \hookrightarrow L^\infty(\{x_0, x_1, \dots\}) \simeq l^\infty.$$

Upotus $x \mapsto s^x$ säilyttää etäisyydet, sillä

$$|s_i^a - s_i^b| = |d(a, x_i) - d(b, x_i)| \leq d(a, b) \quad \text{kaikilla } a, b \in X, i \in \mathbb{N}.$$

Yhtälön yhtäsuuruus pätee jos $x_i = a$ tai $x_i = b$.