問題

座標空間内に点 $P(0,0,1)$ をとる．また，$x = 2y^2$ で定まる xy 平面上の曲線 C 上に点 Q をとる．さらに，点 Q の y 座標が $0 \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を D とする．このとき，D を x 軸まわりに一回転してできる立体の体積 V を求めよ.

解答

曲面 D の $x=s$ における断面に現れる曲線を $D_{x=s}$ とする．また，条件より $0 \leqq x \leqq 1$.

題意より，点 $R \in D$ のとき，この点は C 上のある点 Q に対して線分 PQ を内分する点である．この点 Q をここでは $Q_R(x_R, \sqrt{x_R/2}, 0)$ とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\exists t,\ 0 \leqq t \leqq 1 \ \ s.t.\ \ \overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \\
&= (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_R \\ \sqrt{x_R/2} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} tx_R \\ t\sqrt{x_R/2} \\ 1-t \end{pmatrix} \qquad (1)
\end{aligned}$$

さらに，点 $R \in D_{x=s}$ のとき $tx_R = s$ であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \begin{pmatrix} s \\ s\sqrt{1/(2x_R)} \\ 1 - s/x_R \end{pmatrix}\ ,\quad s \leqq x_R \leqq 1 \qquad (2)$$

ここで，x_R は $D_{x=s}$ 上の点とは限らないことに注意．以上より，

$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right\|^2 &= \left(s\sqrt{\frac{1}{2x_R}}\right)^2 + \left(1 - \frac{s}{x_R}\right)^2 \\
&= \frac{s^2}{2x_R} + \left(1 - \frac{s}{x_R}\right)^2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

D を x 軸まわりに回転させるとき，断面 $D_{x=s}$ は x 軸まわりに回転して円環を形成する．この円環は $\left\|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right\|$ の最大値を半径とする円と，最小値を半径とする円に囲まれた領域である．よってここからは，式 (3) を $f_s(x_R)$ とおいて，その最大最小を考える．ただし，$f_s(0)$ については，式 (1) と各変数の定義より例外として 0〜1 の任意の値を取るとする．

i) 最大値

$$f_s'(x) = \frac{s}{2x^3}\left(x(4-s) - 4s\right) \qquad (4)$$

より，