UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Análisis de Modelamiento Numérico I

Ciclo 2020_01
Fecha: 05/08/2020
Profesores: Fidel Jara Huanca y Victor Huanca Sullca

Solucionario de la Practica Calificada No.4

Problema 1.-

Demostración. Que $(i) \Rightarrow (ii)$ es evidente: lo que por (i) sabemos que se cumple para todas las sucesiones de puntos de A que converjan a x, se cumplirá en particular para las sucesiones que, además, sean monótonas.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Probaremos que si no se verifica (iii) tampoco se puede cumplir (ii). Si la afirmación (iii) no es cierta, existirá un $\varepsilon_0 > 0$ con la siguiente propiedad: para cada $\delta > 0$ puede encontrarse $y \in A$ (evidentemente y dependerá de δ) tal que $|y - x| < \delta$ y, sin embargo, $|f(y) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, podemos entonces tomar $\delta = 1/n$, para obtener un $y_n \in A$ verificando que $|y_n - x| < 1/n$, mientras que $|f(y_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Puesto que toda sucesión de números reales admite una sucesión parcial monótona, existe una sucesión monótona $\{x_n\}$ que es una sucesión parcial de $\{y_n\}$. Es evidente que $\{y_n\} \to x$, luego $\{x_n\} \to x$, pero de ser $|f(y_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que también $|f(x_n) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En resumen, $\{x_n\}$ es una sucesión monótona de puntos de A que converge a x, pero $\{f(x_n)\}$ no converge a $f(x)$, luego no se cumple (ii), como queríamos.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de A que converge a x, deberemos probar que $\{f(x_n)\} \to f(x)$. Para $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ dado por la afirmación (iii), y usemos que $\{x_n\} \to x$ para encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$ se tenga $|x_n - x| < \delta$. Entonces, también para $n \geqslant m$ tenemos $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$, como queríamos. ■

Problema 2.-

Demostr.: $(x_n) \to x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| \leq \varepsilon$. (I)
$n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists K_0 \in \mathbb{N} / n_{K_0} \geq n_0$
Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists K_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / K \geq K_0 \Rightarrow |x_{n_K} - x| \leq \varepsilon$
lo cual es cierto, pues si $K \geq K_0 \Rightarrow n_K \geq n_{K_0} \geq n_0 \Rightarrow n_K \geq n_0$ y verifica la condición (I). Luego $(x_{n_K}) \to x$. csqd.

Problema 3.-

Demostración Sea $h(x) = g(x) - x$, para todo $x \in [a,b]$. Entonces $h(x)$ es continua y verifica que $h(a) > 0$ y $h(b) < 0$, por lo que se verifican las condiciones del Teorema de Bolzano. En consecuencia, existe un $s \in (a,b)$ tal que $h(s) = 0$, es decir $g(s) = s$.

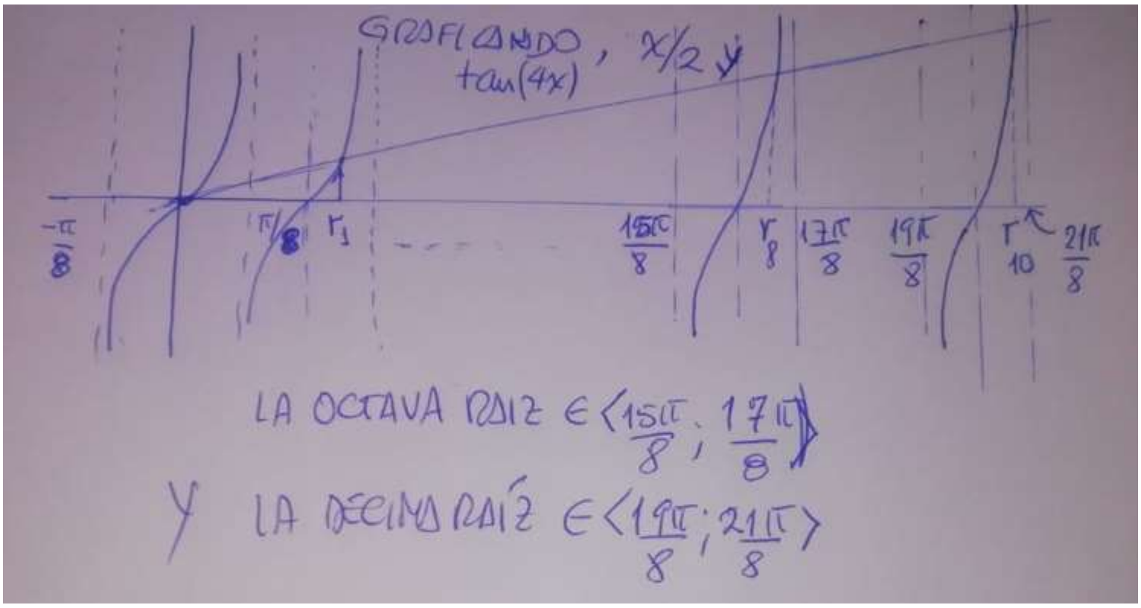
Para demostrar la unicidad, supongamos que existe dos valores $s, t \in (a,b)$ tales que $g(s) = s$ y $g(t) = t$, entonces, por el Teorema del Valor Medio, existe $c \in (s,t)$ tal que $g(t) - g(s) = g'(c)(t-s)$, es decir, $g'(c) = 1$, lo que contradice la segunda condición.

Sea ahora $\{x_n\}$ la sucesión generada a partir de $x_0 \in [a,b]$ mediante la iteración $x_{n+1} = g(x_n$, para $m \geq 0$, y sea $L = \max_{x\in[a,b]} |g'(x)| < 1$.

Se verifica entonces que

$$\begin{aligned} e_n &= |x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(x)|e_{n-1} \\ &\leq Le_{n-1} \leq L^2 e_{n-2} \leq \cdots \leq L^n e_0. \end{aligned}$$

Problema 4.-



Problema 5.-

REEMPLAZANDO LOS VALORES OBTENEMOS
LA SGTE ECUACIÓN

$$\cos(0,22\sqrt{p})\cosh(0,22\sqrt{p})+1=0$$

GRAFICANDO OBTENEMOS:

LA PRIMERA RAIZ $\in [72;74]$,
LA SEGUNDA RAÍZ $\in [450;460]$ y
LA TERCERA RAÍZ $\in [1270;1280]$