Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2020-2**

[Cod: CM4F1, Sección: A, B]
[Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Dirigida $\mathcal{N}^{\text{o}}$ 2

1. Factorice, si es posible, la matriz A en la forma LU

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 8 \\ -10 & 4 & -7 \end{pmatrix}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Diga si las siguientes matrices son simétricas, diagonalmente dominantes y positivas definidas.

   a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$

   c) $C = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{pmatrix}$

3. Resuelva por eliminación de Gauss con aritmética de tres cifras decimales el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 3{,}01x + 6{,}03y + 1{,}99z &= 1 \\ 1{,}27x + 4{,}16y - 1{,}23z &= 1 \\ 0{,}98x - 4{,}81y + 9{,}34z &= 1 \end{aligned}$$

   a) ¿El sistema admite solución única? ¿Por qué?

   b) ¿La matriz se puede factorizar en la forma LU? ¿Por qué?

   c) Determine el número de condición de la matriz. ¿Está mal condicionada la matriz?. Resuelva el sistema usando 10 cifras decimales. Tome esta solución como la exacta. Calcule el error absoluto y relativo.

   d) Calcule el residuo.

4. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial subordinada, A matriz inversible y $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Demuestre que si

$$(A + \Delta A)(u + \Delta u) = b + \Delta b$$

   entonces

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

5. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial subordinada y A matriz inversible. Demuestre que

   a) $\text{cond}(A) \geq 1$

   b) $\text{cond}(A) = \text{cond}(A^{-1})$

   c) $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$

6. Resuelva

$$\begin{aligned} 0{,}780x + 0{,}563y &= 0{,}217 \\ 0{,}913x + 0{,}659y &= 0{,}254 \end{aligned}$$

   con tres cifras decimales. En un ordenador (1) se ha obtenido el resultado

$$x_{c_1} = \begin{pmatrix} 0{,}341 \\ -0{,}087 \end{pmatrix}$$

   mientras que en un segundo ordenador (2) se ha obtenido

$$x_{c_2} = \begin{pmatrix} 0{,}999 \\ -1{,}001 \end{pmatrix}$$

calcule el residuo $r = b - Ax$ para las soluciones x_{c_1} y x_{c_2}. ¿Cúal es el ordenador que le da mejor resultados? ¿Por qué? ¿Sugiere usted el uso del residuo como una indicación de la exactitud de la solución calculada? ¿Por qué? ¿Cúal es el número de condición de la matriz de coeficientes? ¿Es un problema bien condicionado?

7. Calcule la solución exacta de $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6384 & 0{,}8065 \\ 0{,}8321 & 0{,}4096 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0{,}8319 \\ 0{,}4225 \end{pmatrix}$$

   Calcule el vector x_c tal que $r = Ax_c - b$ es exactamente igual

$$e = \begin{pmatrix} -10^{-8} \\ 10^{8} \end{pmatrix}$$

   Calcule el número de condición de A usando norma infinito. Si el ordenador representa b exactamente (sin error), calcule el error relativo de A tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Si el ordenador no comete error al representar A, calcule el error relativo de b tal que el error relativo de la solución sea menor o igual que 10^{-8} en la norma infinito. Repita los resultados anteriores en norma 1.

8. Si $r = Ax_c - b$, $x_c = x_e + \Delta x$, $Ax_e = b$, y $R = AC - I$ donde C es una aproximación a la inversa de A. Demuestre que

$$\frac{\|C\| \|r\|}{\|R\| - 1} \leq \|\Delta x\| \leq \frac{\|C\| \|r\|}{\|R\| + 1}$$

9. En el contexto de Sistemas de Ecuaciones Incompatibles. Ecuaciones Normales.

   Sean X e Y dos espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ una transformación lineal representada en dos bases de X e Y por la matriz A. Demuestre que para un vector dado $b \in Y$, el vector $x \in X$ minimiza $\|Ax - b\|_2$ si y sólo si $A^T Ax = A^T b$.

10. Realice una interpretación adecuada del problema anterior.

11. En el contexto de Sistemas de Ecuaciones Indeterminados.

   Sean X e Y dos espacios vectoriales de dimensiones finitas n y m sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $\mathcal{A}$ una transformación lineal representada en dos bases de X e Y por la matriz A. Demuestre que el vector x de norma euclídea mínima que satisface la ecuación $Ax = b$ es el dado por $x = A^T z$, donde z es una solución de la ecuación

$$AA^T z = b.$$

12. Realice una interpretación adecuada del problema anterior.

13. Considérese la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y el vector } b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   a) ¿Cuál es el rango de la matriz A?. Obtener una expresión general de los vectores del subespacio $\mathrm{Im}(A)$.

   b) Demostrar que la dimensión del subespacio $\mathrm{Ker}(A^T)$ es 2. Obtener dos vectores linealmente independientes de este último subespacio. Deducir una expresión general de dicho subespacio.

   c) Encontrar dos vectores $b_I \in \mathrm{Im}(A)$ y $b_K \in \mathrm{Ker}(A^T)$ tales que $b = b_I + b_K$.

14. Deducir la transformación de Householder que anula el segundo elemento del vector $[5, 12]^T$.

15. Calcular la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -13 \\ 12 & 26 \end{bmatrix}$$

   .

16. Igual que el ejercicio anterior usando transformaciones de Givens.

17. Demostrar que cualquier matriz de Householder 2×2 tiene la forma

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix},$$

   donde $a^2 + b^2 = 1$.

18. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}8 & -0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Determinar la solución del sistema

$$Ax = b, \text{ donde } b = [10, 20, 10]^T.$$

   b) Determinar la solución del sistema

$$A^T x = b, \text{ donde } b = [20, 40]^T.$$

19. Dada la matriz de Givens $G(1,2,\theta) = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$ y el vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Hallar los valores de c y s para transformar x en $\begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$

20. Hallar las constantes c y s de la matriz de Givens que al premultiplicarla por el vector

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

produce un cero en la segunda componente del vector x.

21. Sea el vector $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de Givens que hace 0 la tercera componente y hallar el nuevo vector.

22. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Hacer cero la entrada $(4,2)$ usando matrices de Givens.

23. Hallar la factorización QR de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 6 \\ -2 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \\ -2 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Los Profesores
UNI, 02 de diciembre de 2020.