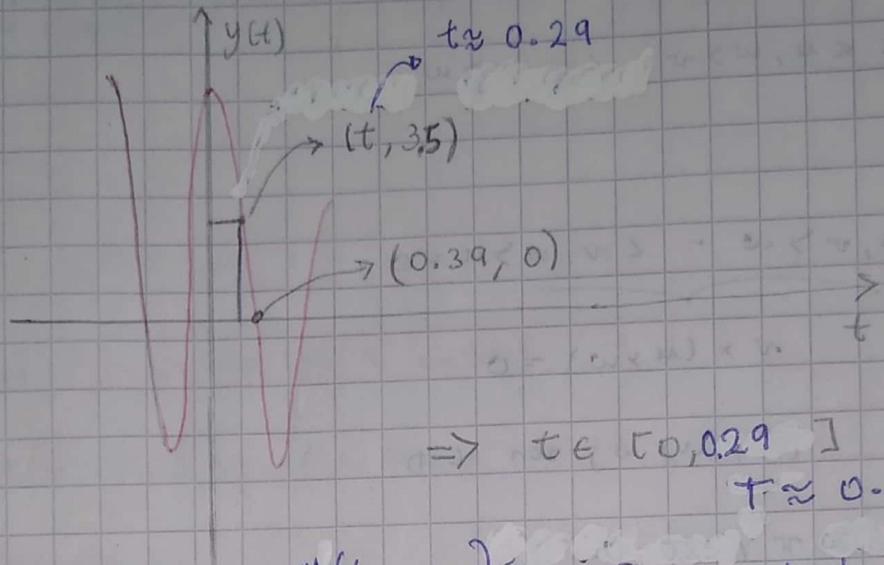
Final Sánchez Sauñe Cristhian W.

① ⓐ Graficando $y(t) = 9e^{-kt}\cos(wt)$ $\quad w = 4$, $k = 0.7$



$\Rightarrow t \in [0, 0.29]$

$t \approx 0.29$

Nota, para hallar $y(t = 3.5)$ necesitamos actualizarlo $y(t) = y(t) - 3.5$

ⓑ Para usar el método de newton, necesitamos hallar la derivada de $y(t)$:

$$y'(t) = -9ke^{-kt}\cos(wt) - 9e^{-kt}\operatorname{sen}(wt)\,w$$

La fórmula iterativa de Newton

$$x^{(t+1)} = x^{(t)} - \frac{f(x^{(t)})}{f'(x^{(t)})}$$

comenzamos con $x_0 = 0.29$

iteración	x	error
1	0.274283	0.1011
2	0.270402	0.0015
3	0.270397	1.59×10^{-6}
4	0.270397	1.77×10^{-12}

ⓒ Usando el método de bisección:

usando el intervalo $[0.0, 0.29]$, para un error de 4 decimales tenemos:

iteración	x	error
9	0.2728	0.0001
10	0.2703	5.37×10^{-5}

$\Rightarrow$ # iteraciones : 10.

② ⓐ Para resolver el sistema mediante Newton:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 - x + y^2 + z^2 - 5 \\ x^2 + y^2 - y + z^2 - 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 + z - 6 \end{pmatrix} \quad \text{con } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Necesitamos calcula el Jacobiano y su inversa:

$$J(F(x,y,z)) = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 & 2z \\ 2y-1 & 2x & 2z \\ 2y & 2x & 2z+1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}(F(x,y,z)) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{(2x+2y-2z-1)} & \frac{(-2x+2z+1)}{(2x+2y-2z-1)} & \frac{-2z}{(2x+2y-2z-1)} \\ \frac{(-2y+2y+1)}{(2x+2y-2z-1)} & \frac{2y}{(2x+2y-2z-1)} & \frac{-2z}{(2x+2y-2z-2)} \\ \frac{-2x}{(2x+2y-2z-1)} & \frac{-2y}{(2x+2y-2z-1)} & \frac{(2x+2y-1)}{(2x+2y-2z-1)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Usando el método iterativo:

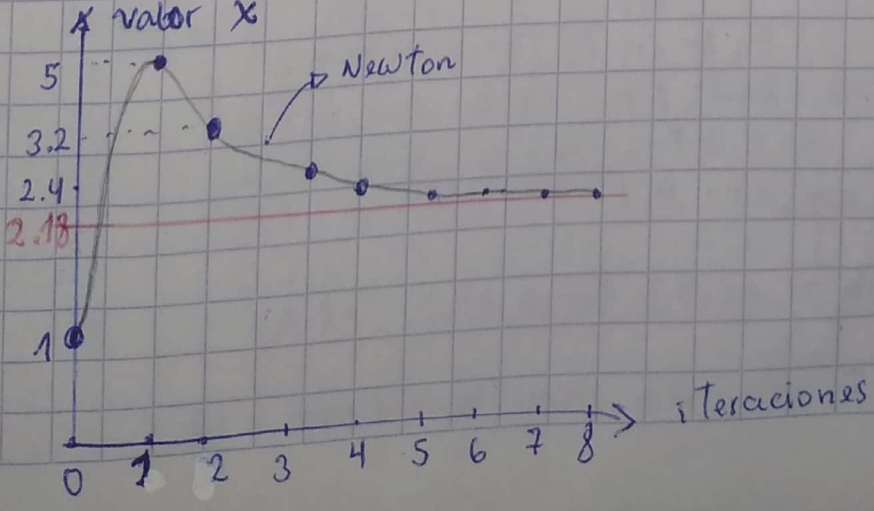
$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J^{-1}(F(x^{(k-1)})) \cdot F(x^{(k-1)})$$

Usando 10 decimales de precisión tenemos:

iteración	x	y	z
0	1	0	0
1	5	4	-3
2	3.21	2.21	-1.21
3	2.44	1.44	-0.44
⋮	⋮	⋮	⋮
7	2.18	1.18	-1.18
8	2.18	1.18	-1.18

ⓒ

Para el caso de la variable x.



(3) Sea $A \in M_n(\mathbb{C})$ $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene

$$r_j := \sum_{\substack{1 < k < n \\ k \neq j}} |A_{j,k}|$$

Demostraremos que cada valor propio λ de A, petenece al espectro de A; que esta contenido en la unión de discos cerrados A_{jj} y radio r_j.

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$|\lambda - A_{jj}| > r_j$$

Basta probar que $A - \lambda I$ es invertible.

$\Rightarrow$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$$|(A - \lambda I)_{jj}| = |A_{jj} - \lambda| > r$$

$$= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} |A_{jk}| = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} |(A - \lambda I)_{jk}|$$

$\Rightarrow$ $A - \lambda I$ es estrictamente diagonal dominante.

$\Rightarrow$ $A - \lambda I$ es invertible.

④

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$v^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ⓐ Si λ es un valor propio de A, entonces existe un vector propio $v \neq 0$ tal que

$$Av = \lambda v$$
$$\Rightarrow \quad Av - \lambda v = (A - \lambda I) \cdot v = 0$$
$$\Rightarrow \quad |A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 8$$
$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 6) = 0$$

$\Rightarrow$ radio espectral $\rho = \max\{3, 1, 6\} = \underline{6}$

ⓑ A será diagonal dominante si $|A_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |A_{ij}| \quad \forall i$

$\Rightarrow i = 0$

$|4| \geq |-1| + |1| = 2$ cumple

$i = 1$

$|3| \geq |-1| + |-2| = 3$ cumple

$i = 2$

$|3| \geq |1| + |-2| = 3$ cumple

$\therefore$ A es diagonal dominante

ⓒ Usando el método de la potencia se encontraron los siguiente valores

$$\boxed{Ax = y}$$

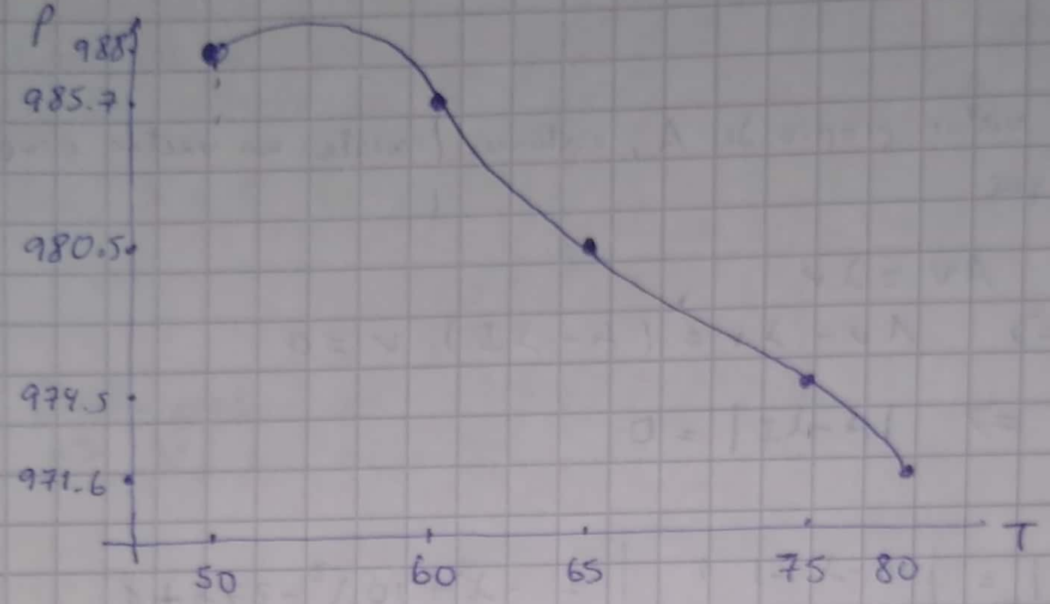
iteración	x_i	y_i
	[1, -0.25, 0.25]	[4, -1, 1]
1	[1, -0.5, 0.5]	[4.5, -2.25, 2.25]
2	[1, -0.7, 0.7]	[5, -3.5, 3.5]
3	[1, -0.83, 0.83]	[5.4, -4.5, 4.5]
4		
⋮		
15	[0.99, -0.99, 0.99]	[5.99, -5.99, 5.99]

El vector propio asociado $\approx [1, -1, 1]$

(5).

(a) Usando la interpolación de Newton: (Sin contar el dato faltante).

Graficando:



El polinomio es:

$$P(t) = -0.23t - 0.00016(t-75)(t-65)(t-60)(t-50) - 0.054(t-60)(t-50) + 999.5$$

en $P(68) \approx 977.9$

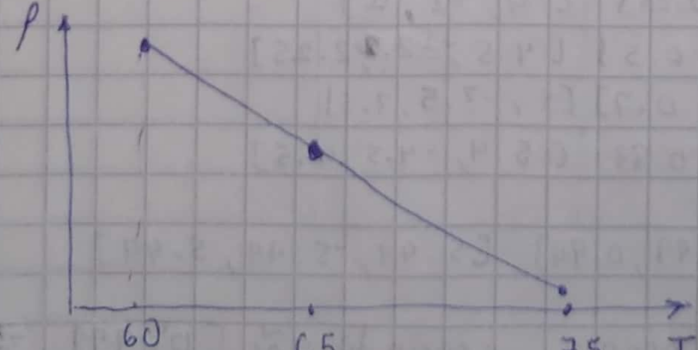
Usando un polinomio de Lagrange de grado 2, considerando los puntos:

x :	60	65	75
y :	985.7	980.5	974.5

El polinomio de Lagrange es:

$$L(x) = 0.029x^2 - 4.7x + 1162.49$$

$$L(68) \approx 978.084 \approx 978.1$$



$\Rightarrow$ el error es $|978.1 - 977.9| \approx 0.2$

el error depende de los puntos elegidos para la interpolación de lagrange.