Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2018-1**

[Cod: CM334 Curso: Análisis Numérico I]
[Prof: L. Paredes.]

Solucionario del Examen Sustitutorio

---

1. Sean $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$ con

   x_1: el valor del chocolate.

   x_2: el valor del caramelo.

   a) Luego
   $$\begin{array}{cccc} f: & X & \to & Y \\ & (x_1, x_2) & \rightsquigarrow & f(x_1, x_2) = x_1 - x_2. \end{array}$$

   b) Donde
   $$\begin{array}{cccc} \tilde{f}: & X & \to & Y \\ & (x_1, x_2) & \rightsquigarrow & \tilde{f}(x_1, x_2) = fl(x_1) - fl(x_2). \end{array}$$

   c) Como $x_1 = \pi$ y $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   $$fl(x_1) = 3{,}142 \ \wedge \ fl(x_2) = 0{,}07071 = 7{,}07071 \times 10^{-1}$$
   Por (a): $fl(x_1) - fl(x_2) = 3{,}142 - 7{,}071 \times 10^{-1} = 2{,}4349$.

   Por (b): $fl(x_1) \ominus fl(x_2) = 2{,}435$

   Tomando, como $\tilde{x}_1 = 3{,}142$ y $\tilde{x}_2 = 0{,}707$ entonces $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 2{,}435$. $\boxdot$

   d) El error relativo es:
   $$\frac{|x_1 - \tilde{x}_1|}{|x_1|} \leq 1{,}3 \times 10^{-4} \quad \wedge \quad \frac{|x_2 - \tilde{x}_2|}{|x_2|} \leq 1{,}5 \times 10^{-4}$$
   Donde $\varepsilon_M = 10^{-3}$. $\boxdot$

2. *a*) Para el equilibrio se cumplen:
   $$P_A = D_A,\ P_B = D_B \ \wedge \ P_C = D_C.$$
   Luego:
   $$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 30 = 140 - 8x_1 - 5x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 170$$
   $$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 107 - x_1 - 8x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 117$$
   $$x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 20 = 78 - x_1 - x_2 - 5x_3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 98$$
   El sistema es:
   $$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 5 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 117 \\ 98 \end{bmatrix}$$

b) Por el método de $\boldsymbol{LU}$, donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 6{,}4 \end{bmatrix}}_{U}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 117 \\ 98 \end{bmatrix}$$

Al resolver, la solución es $[5\ 6\ 8]^T$. ⊡

3. *a*) Sean x: Representa los moles de A convertidos en la reacción 1.

y: Representa los moles de A convertidos en la reacción 2. En el equilibrio tenemos:

Moles	Masas
A	$2-x-y$
B	$1-x$
C	$x-y$
D	x
E	$2y$
Total	3

Por la aplicación de la ley de acción de masas, se tiene:

Reacción 1:

$$2{,}6 = \frac{(x-y)x}{(2-x-y)(1-x)}$$

Reacción 2:

$$3{,}1 = \frac{(2y)^2}{(2-x-y)(x-y)}$$

Donde

$$f_1(x,y) = \frac{(x-y)x}{(2-x-y)(1-x)} - 2{,}6 \quad = \quad 0$$

$$f_2(x,y) = \frac{4y^2}{(2-x-y)(x-y)} - 3{,}1 \quad = \quad 0$$

b) El Jacobiano es:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{(2x-y)(2-x-y)(1-x) - x(x-y)(-3+2x+y)}{(2-x-y)^2(1-x)^2} & -\dfrac{2x}{(2-x-y)^2} \\[2ex] -\dfrac{8y^2(1-x)y^2}{(2-x-y)^2(x-y)^2} & \dfrac{8y^2[(2-x-y)(x-y)+1-y]}{(2-x-y)^2(x-y)^2} \end{bmatrix}$$

c) Por el método de Jacobi, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{(2-x_k-y_k)^2(1-x_k)^2}{(2x_k-y_k)(2-x_k-y_k)(1-x_k)-x_k(x_k-y_k)(-3+2x_k+y_k)}\left(\frac{(x_k-y_k)x_k}{(2-x_k-y_k)(1-x_k)} - 2{,}6\right) \\[2ex] \frac{(2-x_k-y_k)^2(x_k-y_k)^2}{8y_k^2[(2-x_k-y_k)(x_k-y_k)+1-y_k]}\left(\frac{4y_k^2}{(2-x_k-y_k)(x_k-y_k)} - 3{,}1\right) \end{bmatrix}$$

La tabla resulta con $(x_0, y_0) = (0{,}8; 0{,}4)$:

k	x_k	y_k
0	0,8	0,4
1	0,83	0,495652174
2	0,836406263	0,45105138
3	0,831127396	0,458715845
4	0,831785818	0,4544609021
5	0,831305366	0,4562098893
	⋮	
25	0,831437753	0,4556548081

4. *a*) Sean x: Las lechuzas moteadas juvenil.

y: Las lechuzas moteadas subadulto.

z: Las lechuzas moteadas adulto.

Donde

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Con $[x_0\ y_0\ z_0]^T = [198\ 202\ 600]^T$.

b) Por el método de Krylov, se sabe que $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$.

Con $A^3y + b_1A^2y + b_2Ay + b_3Iy = 0$ y $y = [198\ 202\ 600]^T$, se tiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 690{,}2792b_1 & + & 707{,}42b_2 & + & 600b_3 & = & -674{,}166848 \\ 233{,}4486b_1 & + & 198b_2 & + & 198b_3 & = & -227{,}792136 \\ 35{,}64b_1 & + & 35{,}64b_2 & + & 203b_3 & = & -42{,}020748 \end{array}$$

Por el método LU, se tiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3381945 & 1 & 0 \\ 0{,}0516313 & 0{,}0214569 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 690{,}2792 & 707{,}42 & 600 \\ 0 & -41{,}245524 & -4{,}9166749 \\ 0 & 0 & 171{,}12673 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}94 \\ 0 \\ -0{,}042174 \end{bmatrix}$$

Donde el polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 0{,}94\lambda^2 - 0{,}042174.$$

El cual tiene un valor real y dos valores complejos.

c) El valor y vector propio real, usando el método de potencia es:

k	x_k	y_k	z_k	λ_1
0	198	202	600	
1	0,2798903	0,0,0503803	1	707,42
2	0,3381945	0,0516313	1	0,97577
3	0,3378869	0,0623299	1	0,9766582
4	0,3352792	0,0617926	1	0,9842542
5	0,3354092	0,0613395	1	0,9838728
	⋮			
10	0,3355048	0,0613982	1	0,9835926

Donde el valor propio es **0,9835927** y su vector propio es $x = (0{,}3355048\ \ 0{,}0613982\ \ 1)^T$.

5. *a*) Sea la interpolación de Lagrange de orden cuatro.

$$\begin{aligned} P_4(x) &= \sum_{k=0}^{4} f(x_k)L_{4,k}(x) \\ &= f(x_0)L_{4,0}(x) + f(x_1)L_{4,1}(x) + f(x_2)L_{4,2}(x) + f(x_3)L_{4,3}(x) + f(x_4)L_{4,4}(x) \\ &= 35{,}5\tfrac{(x-160)(x-170)(x-180)(x-190)}{(150-160)(150-170)(150-180)(150-190)} + 37{,}8\tfrac{(x-150)(x-170)(x-180)(x-190)}{(160-150)(160-170)(160-180)(160-190)} + \\ &\quad 43{,}6\tfrac{(x-150)(x-160)(x-180)(x-190)}{(170-150)(170-160)(170-180)(170-190)} + 45{,}7\tfrac{(x-150)(x-160)(x-170)(x-190)}{(180-150)(180-160)(180-170)(180-190)} + \\ &\quad 47{,}3\tfrac{(x-150)(x-160)(x-170)(x-180)}{(190-150)(190-160)(190-170)(190-180)} \\ &= 37141 - 872{,}295x + 7{,}661166666667x^2 - 0{,}0298x^3 + 0{,}000043333333x^4 \\ &= 37141 + x\left[-872{,}295 + x\left(7{,}661166666667 + x\left\{-0{,}0298 + 0{,}000043333333x\right\}\right)\right] \end{aligned}$$

b) Evaluando en $\boldsymbol{x = 210}$ se tiene $\boldsymbol{P_4(210) \approx 113{,}7993517447}$. $\boxdot$

c) Sea la tabla de la interpolación de Newton:

$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{y_k}$	D.D. Orden **1**	D.D. Orden **2**	D.D. Orden **3**	D.D. Orden **4**
150	**35,5**				
160	**37,8**	**0,23**			
170	**43,6**	**0,58**	**0,0175**		
180	**45,7**	**0,21**	**−0,0185**	**−0,0012**	
190	**47,3**	**0,16**	**−0,0025**	**0,000533333**	**0,0000433333**

El polinomio de Newton es:

$$\boldsymbol{P_4(x) = 35{,}5 + (x - 150)[0{,}23 + (x - 160)\{0{,}0175 + (x - 170)[-0{,}0012 + (x - 180)0{,}0000433333]\}].}$$

d) Evaluando en $\boldsymbol{x = 210}$ se tiene $\boldsymbol{P_4(210) \approx 113{,}8}$. $\boxdot$

18 de Julio del 2018