Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2019-2

[Cod: CM-334] **[Curso: Análisis Numérico I]**

Solucionario del Examen Final

1. *a*) [1 *pto.*] Sean a, b y c los coeficientes de la ecuación cuadrática general, dado por:

$$f(t) = at^2 + bt + c.$$

Luego

$$\begin{array}{lcl} t = 0 & : & f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 0 \\ t = 8 & : & f(8) = a(8)^2 + b(8) + c = 320 \\ t = 16 & : & f(16) = a(16)^2 + b(16) + c = 0 \end{array}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 320 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	t_k	vx_k	vy_k	vz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.0000143	0.0531866	-0.7961693	-0.1499104	
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0642703	0.9075006	0.0581312	0.013233	0.0464866
2	-5.0000951	80.001895	-0.0094232	0.0000143	-0.000008	-0.0019375	0.0090598	0.0511709
$\vdots$								
9	-5.0000558	80.001294	-0.0064863					

Donde la ecuación cuadrática es $f(t) = -5.0000558t^2 + 80.001294t - 0.0064863$.

c) [1 *pto.*] La tabla es:

k	a_k	b_k	c_k	d_k	rx_k	ry_k	rz_k	Error
0	-5.05	80.05	0	0.6592089	3251.2	214.4	14.8	0.0464866
1	-5.0035134	80.053066	0.0002116	0.0000858	0.0531866	-0.7961826	-0.1499114	0.0511844
2	-5.0000812	80.001881	-0.0094259	1.037491	0.0000713	-0.0017096	0.0091048	0.0094259
3	-5	80	0	0	-0.0000493	-0.0000033	-0.0000002	0
4	-5	80	0					

Donde la ecuación cudrática es $f(t) = -5t^2 + 80t$.

d) [1 *pto.*] Hay que garantizar que la matriz debe ser simétrica, el cual es:

Si $A == A'$
entonces
  $B \leftarrow A;$
  $c \leftarrow b;$
sino
  $B \leftarrow A' \cdot A;$
  $c \leftarrow A' \cdot b;$
fin si.

e) [1 *pto.*] Se recomienda para este problema el método del Gradiente Conjugado, porque se logra obtener la solución en **4** iteraciones.

2. *a*) [1 *pto.*] Sean:

$$\begin{array}{lcl} x & : & \text{Cantidad de videojuegos.} \\ y & : & \text{El precio por videojuegos.} \end{array}$$

Las funciones generadas son:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x, y) = x \cdot y - 72 & = & 0 \\ f_2(x, y) = (x + 2) \cdot (y - 3) - 72 & = & 0 \end{array}$$

b) [1 *pto.*] La matiz Jacobiana y su inversa son:

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} y & x \\ y - 3 & x + 2 \end{bmatrix} \wedge JF(x, y)^{-1} = \frac{1}{3x + 2y} \begin{bmatrix} x + 2 & -x \\ 3 - y & y \end{bmatrix}$$

La tabla de método de Newton es:

k	x_k	y_k	Error
0	3	6	
1	7.7142857	14.571429	8.5714286
2	6.1686183	12.252927	2.3185012
3	6.0019831	12.002975	0.2499528
4	6.0000003	12	0.0029742
5	6	12	0.0000004

c) [1 *pto.*] Se requiere $N = 16$ en el método de Homotopía y Continuación, para lograr que la solución se aproxime con un error del 10^{-5}, la tabla es:

k	x_k	y_k	$K1x_k$	$K1y_k$	$K2x_k$	$K2y_k$	$K3x_k$	$K3y_k$	$K4x_k$	$K4y_k$
0	3	6	0.2946429	0.5357143	0.2802788	0.5141682	0.2808908	0.5150862	0.2682147	0.496072
1	3.2808661	6.5150492	0.2682166	0.4960749	0.2570219	0.4792828	0.2574297	0.4798946	0.2473735	0.4648103
2	3.5382817	6.9949225	0.2473745	0.4648117	0.2383352	0.4512527	0.2386228	0.4516842	0.2303938	0.4393407
$\vdots$										
16	6.0000005	12.000001	0.1378252	0.3004878	0.1358295	0.2974943	0.1358536	0.2975304	0.1339286	0.2946428

d) [1 *pto.*] El algoritmo para el gráfico es:

$er \leftarrow 1;$
$k \leftarrow 0;$
$x \leftarrow x0;$
mientras $e1 > tol$ o $k < maxit$ hacer
  $k \leftarrow k + 1;$
  $$x1 \leftarrow x - \frac{1}{3x_1 + 2x_2}\begin{bmatrix} x(1)+2 & -x(1) \\ 3 - x(2) & x(2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(1)\cdot x(2) - 72 \\ (x(1)+2)\cdot(x(2)-3) - 72 \end{bmatrix};$$
  $k1 \leftarrow [k1\ k];$
  $e1 \leftarrow \|x - x1\|_\infty;$
  $xr \leftarrow [xr\ x1];$
  $x \leftarrow x1;$
fin mientras
$grafico(k1, xr);$

e) [1 *pto.*] Se recomienda para el problema el método de Newton, porque se logra la solución en la 5 iteraciones.

3. *a*) [1 *pto.*] Sean

x : Número de familias de renta baja.
y : Número de familias de renta media.
z : Número de familias de renta alta.

Donde, tenemos:

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \\ z^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.30 & 0.10 \\ 0.20 & 0.60 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.60 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \\ z^{(k)} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, \cdots$$

con

$$\begin{bmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \\ z^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42158 \\ 147553 \\ 21079 \end{bmatrix}$$

b) [1 *pto.*] Sea el polinomio característico general:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3.$$

Aplicando el método de Krylov, se requiere resolver el sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} 87267.06 & 75884.4 & 42158 \\ 86634.69 & 103287.1 & 147553 \\ 36888.25 & 31618.5 & 21079 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90766.174 \\ -80500.701 \\ -39523.125 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por el método LU, el polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1.9\lambda^2 + 1.1\lambda - 0.2.$$

c) [2 *ptos.*] La primera tabla con $tol = 0.00001$ y error absoluto es:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	λ_k	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	Error
0					42158	147553	21079	
1	75884.4	103287.1	31618.5	103287.1	0.7346939	1	0.3061224	147551
2	0.844898	0.8387755	0.3571429	0.844898	1	0.886902	0.4227053	0.2653061
$\vdots$								
16	0.9999936	0.8461397	0.4615289	0.9999936	1	0.8461452	0.4615319	0.0000083

Donde $\lambda_1 = 0.9999936$ y $v_1 = (1\ 0.8461452\ 0.4615319)^T$.
La segunda tabla con $tol = 0.00001$ y error absoluto es:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	λ_k	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	Error
0					42158	147553	21079	
1	-52697.5	263487.5	0	263487.5	-0.2	1	0	147552
2	-1.18	2.14	-0.16	2.14	-0.5514019	1	-0.0747664	0.3514019
$\vdots$								
39	-2.4999281	2.500024	-0.0000959	2.500024	-0.9999617	1	-0.0000383	0.0000096

Donde $\lambda_2 = 0.3999962$ y $v_1 = (-0.9999617\ 1\ -0.0000383)^T$.
La tercera tabla con $q = 0.6$, $tol = 0.00001$ y error absoluto es:

k	$y1_k$	$y2_k$	$y3_k$	λ_k	$x1_k$	$x2_k$	$x3_k$	Error
0					42158	147553	21079	
1	263487.5	-52697.5	316185	316185	0.8333333	-0.1666667	1	147553.17
2	7.9166667	2.0833333	-5.8333333	7.9166667	1	0.2631579	-0.7368421	1.7368421
$\vdots$								
17	-10.000165	5	5.0001653	-10.000165	1	-0.4999917	-0.5000083	0.0000083

Donde $\lambda_3 = 0.5000017$ y $v_1 = (1\ -0.4999917\ -0.5000083)^T$.

d) **[1 pto.]** La distribución de renta es estable, debido a que $\lambda_1 = 1$, por consiguiente las autoridades deben estar tranquilos.

4. *a*) **[1 pto.]** La tabla de diferencia dividida, donde $D_i = f[x_k, \cdots, x_{k+i}]$, $i = 1, \cdots, 7$ es:

k	x_k	$f[x_k]$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
0	0	100	−116	60	−13.5	0.06	0.6090926	−0.1098769	0.0091199
1	0.5	42	−56	33	−13.32	3.1054630	−0.3797997	0.0269218	
2	1	14	−6.5	−0.3	0.6545833	−0.1228348	0.0105670		
3	2	7.5	−7.1	2.3183333	−0.3280952	0.0251037			
4	3	0.4	−0.145	0.0216667	−0.0017472				
5	5	0.11	−0.015	0.0007					
6	9	0.05	−0.008						
7	15	0.002							

El polinomio anidado de interpolación de Newton es:

$$\begin{aligned} P_6(x) &= 100 + x\{-116 + (x-0.5)[60 + (x-1)\{-13.5 + (x-2)[0.06 + \\ &\quad (x-3)\{0.6090926 + (x-5)[-0.1098769 + 0.0091199(x-9)]\}]\}]\}. \end{aligned}$$

b) **[1 pto.]** Evaluando se tiene:

$$P_6(5.5) = 50.12598615.$$

c) **[1 pto.]** Sea el spline lineal de tipo:

$$\varphi(x) = a_1 + a_2 x + a_3 (x-3)_+.$$

La matriz M es:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 6 \\ 1 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

Donde

$$M^T M \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} 100 \\ 42 \\ 14 \\ 7.5 \\ 0.4 \\ 0.11 \\ 0.05 \\ 0.002 \end{bmatrix}$$

El sistema ha resolver es:

$$\begin{bmatrix} 8 & 35.5 & 20 \\ 35.5 & 345.25 & 244 \\ 20 & 244 & 184 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 164.062 \\ 51.230 \\ 0.544 \end{bmatrix}$$

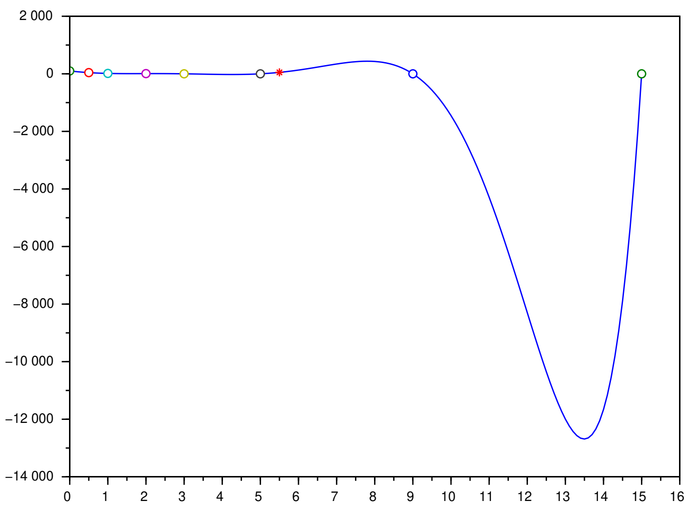
El ajuste spline lineal resuelto por el método de Cholesky es:

$$\varphi(x) = 67.854912 - 25.765095x + 26.794179(x-3)_+$$

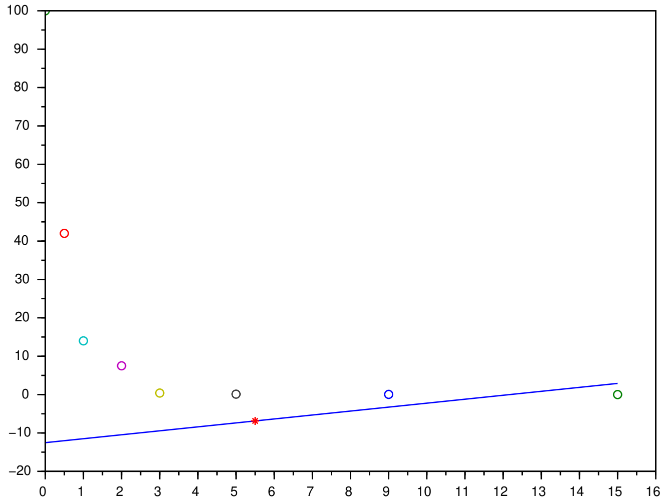
d) **[1 pto.]** Evaluando se tiene:

$$\varphi(5.5) = -6.867663.$$

e) **[1 pto.]** El gráfico de Newton es:



El gráfico de spline es:



UNI, 09 de Octubre del 2019*

*Hecho en LaTeX