Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática — Ciclo 2019-1

[Cod: CM334 Curso: Análisis Numérico I]

[Prof: L. Paredes.]

Solucionario del Examen Sustitutorio

---

1. *a*) Sabemos que

$$\begin{aligned} f'(1) = exp(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{exp(1+h)-exp(1)}{h} \\ &\approx \frac{exp(1+h)-exp(1)}{h}, \quad \text{con } h \approx 0. \end{aligned}$$

Entonces $h = \frac{h}{r}$. El programa es:

function [tabla] $= eval1(x0, tol, h, r, maxit)$
DQ $= \frac{f4(x0+h)-f4(x0)}{h};$
$i = 0;$
$err = 1;$
tabla $= [i\ h\ DQ\ ];$
while $err >= tol$ and $i <= maxit$
$h = \frac{h}{r};$
$DQn = \frac{f4(x0+h)-f4(x0)}{h};$
$err = abs(DQn - DQ);$
$DQ = DQn;$
$i = i + 1;$
tabla $= [tabla\ i\ h\ DQ\ err];$
end
endfunction
function $fx = f4(x)$
$fx = exp(x);$
endfunction

b) La tabla es:

k	h	$f(x_k)$	$Error$
0	0,2	3,0091755	
1	0,02	2,7456468	0,2635287
2	0,002	2,7210019	0,0246449
3	0,0002	2,7185537	0,0024482
4	0,00002	2,718309	0,0002447
5	0,000002	2,7182845	0,0000245
6	0,0000002	2,7182821	0,0000024

2. *a*) Sean

$$\begin{array}{ll} I_1 & \text{Corriente } 1 \\ I_2 & \text{Corriente } 2 \\ I_3 & \text{Corriente } 3 \end{array}$$

Por la ley de Kirchhoff para el voltaje:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 11I_1 & - & 3I_2 & & & - & 30 & = & 0 \\ - & & 3I_1 & + & 3I_2 & - & I_3 & - & 5 & = & 0 \\ & & & - & I_2 & + & 3I_3 & + & 25 & = & 0 \end{array}$$

El sistema es:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} & & 11I_1 & - & 3I_2 & & & = & & 30 \\ - & & 3I_1 & + & 3I_2 & - & I_3 & = & & 5 \\ & & & - & I_2 & + & 3I_3 & = & - & 25 \end{array}$$

b) Por el método de LU, donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}2727273 & 1 & 0 \\ 0 & -0{,}1929825 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & -3 & 0 \\ 0 & 5{,}1818182 & -1 \\ 0 & 0 & 2{,}8070175 \end{bmatrix}}_{U} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 5 \\ -25 \end{bmatrix}$$

Al resolver, la solución es $[3\ 1\ -8]^T$. ⊡

c) Sea

$$R = A\tilde{x} - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donde $\|R\|_\infty = 0$ y $\|b\|_\infty = 30$. Luego

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}10625 & 0{,}05625 & 0{,}01875 \\ 0{,}05625 & 0{,}20625 & 0{,}06875 \\ 0{,}01875 & 0{,}06875 & 0{,}35625 \end{bmatrix}$$

El número de condición es $Cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 14 * 0{,}44375 = 6{,}2125$. Finalmente, el error relativo es:

$$\frac{0}{30} \cdot \frac{1}{6{,}2125} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 6{,}2125 \cdot \frac{0}{30} \ \Rightarrow\ \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.$$

Lo cual indica que la solución aproximada es la exacta. ⊡

3. *a*) Sean x, y: los catetos del triángulo rectángulo.

Donde, las funciones son:

$$\begin{array}{rcccl} f_1(x,y) & = & x^2 + y^2 - 225 & = & 0 \\ f_2(x,y) & = & x - y - 3 & = & 0 \end{array}$$

b) El Jacobiano es:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ -\frac{1}{2x} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & -\frac{x+y}{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x+y} \\ 0 & -\frac{x}{x+y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & -\frac{x+y}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$J(x,y)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x+y} \\ 0 & -\frac{x}{x+y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ -\frac{1}{2x} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2x+2y} \begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 1 & -2x \end{bmatrix} \quad ⊡$$

c) Por el método de Newton-Raphson, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{x_k^2 + y_k^2 + 6y_k + 225}{2(x_k + y_k)} \\ \\ \dfrac{x_k^2 + y_k^2 - 6x_k + 225}{2(x_k + y_k)} \end{bmatrix}$$

La tabla resulta con $(x_0, y_0) = (1; 1)$:

k	x_k	y_k
0	1	1
1	58,25	55,25
2	30,8463656387665	27,8463656387665
3	18,0516096296585	15,0516096296385
4	13,1062966058647	10,1062966058647
5	12,0527253533883	9,05272535338832
	$\vdots$	
9	12	9

4. a) Sean x: número de hembras de clase 1.
   y: número de hembras de clase 2.

   Donde

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 0{,}08 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix}$$

   Con $[x_0 \ y_0]^T = [100 \ 100]^T$.

   b) Por el método de Krylov, se sabe que $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$.
   Con $A^2y + b_1Ay + b_2Iy = 0$ y $y = [1 \ 0]^T$, se tiene:

$$\begin{array}{rcrcr} 1{,}5b_1 & + & b_2 & = & -2{,}41 \\ 0{,}08b_1 & & & = & -0{,}12 \end{array}$$

   La solución es:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}16 \end{bmatrix}$$

   Donde el polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1{,}5\lambda - 0{,}16.$$

   El cual tiene dos valores reales.

   c) Los valores y vectores propio real, usando el método de potencia es:

k	$y1_k$	$y2_k$	λ_k	$x1_1$	$x2_k$	$Error$
0				100	100	
1	350	8	350	1	0,0228571	348,633
2	1,5457143	0,08	1,5457143	1	0,051756	0,0576486
3	1,603512	0,08	1,603512	1	0,0498905	0,0037219
4	1,599781	0,08	1,599781	1	0,0500068	0,0002322
5	1,6000137	0,08	1,6000137	1	0,0499996	0,0000145
6	1,5999991	0,08	1,5999991	1	0,05	0,000001

   Donde el valor propio es $\lambda_1 = 1{,}5999991$ y su vector propio es $v_1 = (1 \ \ 0{,}05)^T$.

Por el método de potencia inversa, se tiene tabla siguiente:

k	$y1_k$	$y2_k$	λ_k	$x1_1$	$x2_k$	$Error$
0				100	100	
1	1250	$-887{,}5$	1250	1	$-0{,}71$	$1{,}71$
2	$-8{,}875$	$7{,}15625$	$-8{,}875$	1	$-0{,}806338$	$0{,}096338$
3	$-10{,}079225$	$8{,}059419$	$-10{,}079225$	1	$-0{,}799607$	$0{,}006731$
4	$-9{,}9950873$	$7{,}9963155$	$-9{,}9950873$	1	$-0{,}8000246$	$0{,}0004176$
5	$-10{,}000307$	$8{,}0002304$	$-10{,}000307$	1	$-0{,}7999985$	$0{,}0000261$
6	$-9{,}9999808$	$7{,}9999856$	$-9{,}9999808$	1	$-0{,}8000001$	$0{,}0000016$
7	$-10{,}000001$	$8{,}0000009$	$-10{,}000001$	1	$-0{,}8$	$0{,}0000001$

Luego el valor propio es $\lambda_2 = \dfrac{1}{-10{,}000001} = -0{,}1$ y su vector propio es $v_2 = (1 \quad -0{,}8)^T$.

5. a) Sea la interpolación de Lagrange de orden dos.

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_k(x) \\
&= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\
&= 8\frac{(x-5)(x-8)}{(3-5)(3-8)} + 22\frac{(x-3)(x-8)}{(5-3)(5-8)} + 73\frac{(x-3)(x-5)}{(8-3)(8-5)} \\
&= 17 - 9x + 2x^2 \\
&= 17 + x\,[-9 + 2x]
\end{aligned}$$

b) Evaluando en $x = 6{,}5$ se tiene $P_2(6{,}5) \approx 43$. $\boxdot$

c) Sea la tabla de la interpolación de Newton:

x_k	y_k	D.D. Orden 1	D.D. Orden 2
3	8		
5	22	7	
8	73	17	2

El polinomio de Newton es:

$$P_2(x) = 8 + (x-3)[7 + 2(x-5)].$$

d) Evaluando en $x = 6{,}5$ se tiene $P_2(6{,}5) \approx 43$. $\boxdot$

20 de Diciembre del 2018