SOLUCIONARIO DEL EXAMEN SUSTITUTORIO DE ANÁLISIS NUMÉRICO I

Problema 1.
Considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 2x-2y-z &= 2 \\ -2x+3y+3z &= -1 \\ 2y+4z &= b \end{aligned}$$

Analice para que valores de b existe solución, y halle la solución.

Solución
La matriz ampliada
caso 1
$$[A:B]=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & : & 2 \\ -2 & 3 & 3 & : & -1 \\ 0 & 2 & 4 & : & b \end{bmatrix}$$
caso 2
$$[A:B]=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 2 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & : & b-2 \end{bmatrix}$$
caso 1: $b \neq 2$, en la última ecuación no satisface el sistema por tanto no tiene solución

En el caso 2

No Existen restricciones sobre $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ y se obtiene de manera arbitraria al hallarse por sustitución regresiva obteniéndose infinitas soluciones. $\overline{y}=1-2\overline{z}$, $\overline{x}=\frac{1}{2}(2+2\overline{y}+\overline{z}\ )=\frac{1}{2}[2+2(1-2\overline{z})+\overline{z}]$

Haciendo $\overline{z}=t$

Se tiene infinitas soluciones.

Problema 2

Use la Factorización de Choleski para resolver el sistema cuya matriz de coeficientes A y vector fuente B son:

$$A=\begin{bmatrix} 18 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 12 \\ -8 & 12 & 22 \end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solución
sea A triangulalizable, tal que

$$A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{12} & l_{22} & 0 \\ l_{13} & l_{23} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$, Si A es tal que $A^T = A$, $l_{ii} = u_{ii} \geq 0$, $i = 1, 2, 3$ y haciendo uso de la simetría de A, es decir $a_{ij} = a_{ji}$, $A = LU$, $U = L^T \Rightarrow A = LL^T$, donde $L = [l_{ij}]$

$diag_m(L) : \sqrt{a_{mm} - \sum_{j=1}^{m-1} l_{mj}^2}$

$\text{col}_m\, L :$ $\quad l_{im} = \dfrac{1}{l_{mm}} \left(a_{mm} - \sum_{j=1}^{m-1} l_{ij}\, l_{mj} \right)$, $i = m+1, ..., n$, siempre que $a_{mm} - \sum_{j=1}^{m-1} l_{mj}^2 \quad > 0$

por sustitución progresiva: $AX = L(L^T X) = \overline{B}$, $l_{11} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, $l_{21} = \dfrac{0}{3\sqrt{2}} = 0$, $l_{31} = \dfrac{-8}{3\sqrt{2}} = -\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$, $l_{22} = \sqrt{8 - l_{21}^2} = 2\sqrt{2}$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \frac{12 - (-\frac{4}{3}\sqrt{2}).0}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}, \quad l_{33} = \sqrt{22 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{4}{3}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Paso 1 resolver $LC = B$; $\quad C = (c_i) = \dfrac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{m-1} l_{ij}\, c_j \right)$, $i = 1, 2, 3$

Paso 2 resolver $L^T X = \overline{C}$, $\overline{x}_i = \dfrac{1}{l_{ii}} \left(c_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ij}\, \overline{x}_j \right)$, $\quad i = 3, 2, 1$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \overline{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3

Encuentre el polinomio de interpolación de Lagrange $P_2(x)$ para el conjunto de datos

$$\{(-1, 1/2), \ (0, 1), \ \ (1, -1)\}$$

y determine $P(1/2)$.

Solución

$$P(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i L_i(x); \qquad L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)}, \quad i = 0, 1, 2$$

Tal que $P(x_i) = y_i$,

$L_0(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = L_0(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(0+1)(-1-0)(-1-1)} = \frac{(x^2-1)x}{2}$

$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_0-x_1)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(0+1)(-1-0)(0-1)} = \frac{(x^2-1)x}{1}$

$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(1+1)(1-0)(0-1)} = \frac{(x^2-1)x}{-2}$

$P(x) = y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-1)x}{2}+\frac{(x^2-1)x}{1}+\frac{(x^2-1)x}{2} = \frac{7(x^2-1)x}{4}$

$P(1/2) = \frac{7((1/2)^2-1)(1/2)}{4} = \frac{-21}{32}$

Problema 4

Considere una función continua y los nodos x_0, x_1, x_2

a) Escriba la forma de Newton para el polinomio de interpolación en los 3 nodos

b) Demostrar que para cualesquiera 3 puntos verifica la igualdad:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_1, x_2, x_0]$$

c) Demuestre que $P_2''(x) = 2f[x_0, x, x_2]$.

Solución

Para x_0, x_1, x_2, la forma de Newton es:

a) $P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$

b) $f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{1}{x_2-x_0}(\frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1} - \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}) = \frac{1}{x_2-x_0}(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0})$

$f[x_2, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_2, x_0]}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x_1-x_2}(\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0} - \frac{f[x_0]-f[x_2]}{x_0-x_2}) = \frac{1}{x_1-x_2}(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} - \frac{f(x_0)-f(x_2)}{x_0-x_2})$

$f[x_1, x_2, x_0] = \frac{f[x_2, x_0] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_1} = \frac{1}{x_0-x_1}(\frac{f[x_0]-f[x_2]}{x_0-x_2} - \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}) = \frac{1}{x_0-x_1}(\frac{f(x_0)-f(x_2)}{x_0-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1})$

c) $P_2(x) = f(x_0) + (\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0})(x-x_0) + (\frac{1}{x_2-x_0})(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}))(x-x_0)(x-x_1)$

derivando dos veces y operando se tiene que

$P_2''(x) = 2f[x_0, x, x_2]$

UNI, 18 de Diciembre de 2017