Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2019-1**

[Código: CM334 Curso: Análisis Numérico I]
[Prof: L. Paredes]

Examen Parcial Solucionario

---

1. **Las raíces de los polinomios son:**

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1.$$

$$x^2 - 2x + 1 - \epsilon = 0 \;\Rightarrow\; x = 1 - \sqrt{\epsilon} \wedge x = 1 + \sqrt{\epsilon}$$

Donde

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & \overline{x} & \rightsquigarrow & f(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

con $\overline{x} = (1\ \ -2\ 1)^T$. **Luego**

$$\delta x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1-\epsilon \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\epsilon \end{pmatrix} \wedge \delta f = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{\epsilon} \\ 1+\sqrt{\epsilon} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\epsilon} \\ \sqrt{\epsilon} \end{pmatrix}$$

El número de condición relativo es:

$$K = \sup_{\delta\overline{x}} \frac{\|\delta f\|_\infty \|\overline{x}\|_\infty}{\|f(\overline{x})\|_\infty \|\delta\overline{x}\|_\infty} = \sup_{\epsilon>0} \frac{\sqrt{\epsilon}\cdot 2}{1\cdot\epsilon} = \sup_{\epsilon} \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} = \infty.$$

Por lo tanto, no es recomendable construir un algoritmo numérico a partir de los coeficientes del polinomio para el cálculo de sus raíces.

2. **De** $YLBFLBDMUWOQ$, **se representa numericamente y agrupados de 3 en 3 por**

$$(25;11;1),(5;11;1),(3;12;21),(23;15;17)$$

Luego, la inversa de la matriz A **usando Gauss-Jordan es:**

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0909091 & -0.5454545 & -0.0909091 \\ 0.2272727 & 0.1363636 & -0.2272727 \\ -0.1818182 & 0.0909091 & 0.1818182 \end{bmatrix}$$

Como el denominador de la inversa es 22 busquemos su inversa, es decir:

$$22 * a = 1(\text{módulo } 27) \Rightarrow a = 16.$$

Donde $22*16=352$ el cual en módulo 27 es 1. Luego

$$352*\begin{bmatrix} 1.0909091 & -0.5454545 & -0.0909091 \\ 0.2272727 & 0.1363636 & -0.2272727 \\ -0.1818182 & 0.0909091 & 0.1818182 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}$$

Multiplicando este último resultado con los vectores iniciales, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7456 \\ 2448 \\ -1184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -224 \\ 848 \\ 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1824 \\ -864 \\ 1536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 384 & -192 & -32 \\ 80 & 48 & -80 \\ -64 & 32 & 64 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ 15 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5408 \\ 1200 \\ 96 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Finalmente de $(4;18;4),(19;11;15),(12;0;24),(8;12;15)$ el mensaje enviado por el profesor es $ERESLOMAXIMO$, es decir

$$ERES\ LO\ MAXIMO.$$

3. De la lectura, las variables son los coeficientes de cada molécula de la ecuación química dada por:

$$xMnSO_4 + yKMnO_4 + zH_2O \longrightarrow aMnO_2 + bK_2SO_4 + 2H_2SO_4.$$

(a) El conjunto de ecuaciones que se forman son:

$$\begin{array}{lccccccccccc} Mn: & x & + & y & & & = & a & & & & \\ S: & x & & & & & = & & & b & + & c \\ O: & 4x & + & 4y & + & z & = & 2a & + & 4b & + & 4c \\ K: & & & y & & & = & & & 2b & & \\ H: & & & & & 2z & = & & & & & 2c \end{array}$$

El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(b) Sea $\|A\|_\infty = 15$.

Luego, su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & -1 & -0.25 \\ -2 & -2 & 1 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ -4 & -2 & 1.5 & -2 & -0.75 \\ -1 & -1 & 0.5 & -1 & -0.25 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\|_\infty = 10.25$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 153.75$$

(c) Por el método de Gauss, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

La solución aproximada es:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por el método de LU se tiene:

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -0.25 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \wedge L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -0.125 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & -0.125 & -1 & 1 \end{bmatrix} \wedge P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuya solución aproximada es:

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Para ambos métodos, se cumple:

$$\frac{0}{8} \times \frac{1}{153.75} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 153.75 \times \frac{0}{8}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, dado que la condición es un valor pequeño.

4. (a) El sistema es:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 56 \\ 25 \\ 62 \\ 41 \\ 10 \\ 47 \end{bmatrix}$$

(b) Sea $\|A\|_\infty = 7$.

Luego, su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 & 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 \\ 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 & 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 \\ 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 & 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 \\ 0.0861284 & 0.0496894 & 0.0194617 & 0.2948240 & 0.0931677 & 0.0281573 \\ 0.0496894 & 0.1055901 & 0.0496894 & 0.0931677 & 0.3229814 & 0.0931677 \\ 0.0194617 & 0.0496894 & 0.0861284 & 0.0281573 & 0.0931677 & 0.2948240 \end{bmatrix}$$

con $\|A^{-1}\|_\infty = 0.7142857$, donde el número de condición es:

$$Cond_\infty(A) = 4.9999999$$

(c) Por el método de Cholesky, se tiene

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.9364917 & -0.5163978 & -0.1290994 & -0.5163978 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9321836 & -0.0345033 & -0.1380131 & -0.5175492 \\ 0 & 0 & 0 & 1.9318755 & -0.5546054 & -0.0092434 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8457244 & -0.5832696 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8416987 \end{bmatrix}$$

La solución aproximada es:

$$x = \begin{bmatrix} 25.52795 \\ 24.496894 \\ 27.52795 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

Por el método de Parlett-Reid, se tienen:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4.5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4.875 & -2.9375 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.9375 & 5.71875 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo se tiene

$$x = \begin{bmatrix} 25.52795 \\ 24.496894 \\ 27.52795 \\ 21.614907 \\ 19.931677 \\ 23.614907 \end{bmatrix}$$

(d) Para ambos métodos, se cumple:

$$\frac{3 \times 10^{-6}}{62} \times \frac{1}{4.9999999} \leq \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 4.9999999 \times \frac{3 \times 10^{-6}}{62}$$

$$\Longrightarrow \frac{\|E\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0$$

Para este problema los dos métodos resultan ser buenos, dado que la condición es un valor pequeño.

07 de Mayo del 2018