Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2020-I**

[Cod: CM4F1A Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]
[Temas: Revisión de Cálculo. Errores de redondeo aritmética computacional. Algoritmos y convergencia.]

Práctica Dirigida $\mathcal{N}^o$ 1

1. La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que satisface una *condición de Lipschitz* con constante de Lipschitz L en $[a, b]$ si, para cada $x, y \in [a, b]$, se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|.$$

   a) Demuestre que si f satisface la condición de Lipschitz con constante de Lipschitz L en el intervalo $[a, b]$, entonces $f \in C[a, b]$.

   b) Demuestre que si f tiene una derivada que es acotada en $[a, b]$ por L, entonces f satisface la condición de Lipschitz con constante de Lipschitz L en el intervalo $[a, b]$.

   c) Dé un ejemplo de una función que sea continua en un intervalo cerrado pero que no satisfaga la condición de Lipschitz en el intervalo.

2. Suppose $f \in C[a, b]$, that x_1 and x_2 are in $[a, b]$.

   a) Show that a number ξ exists between x_1 and x_2 with $f(\xi) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$.

   b) Suppose that c_1 and c_2 are positive constants. Show that a number ξ exists between x_1 and x_2 with $f(\xi) = \frac{c_1 f(x_1)+c_2 f(x_2)}{c_1+c_2}$.

   c) Give an example to show that the result in part (b) does not necessarily hold when c_1 and c_2 opposite signs with $c_1 \neq -c_2$.

3. Sea $f \in C[a, b]$, y sea p en el intervalo (a, b).

   a) Suponga que $f(p) \neq 0$. Demuestre que existe un $\delta > 0$ con $f(x) \neq 0$, para todo x en $[p-\delta, p+\delta]$, con $[p-\delta, p+\delta]$ subconjunto de $[a, b]$.

   b) Suponga que $f(p) = 0$ y $k > 0$ es dado. Demuestre que existe $\delta > 0$ con $|f(x)| \leq k$, para todo x en $[p-\delta, p+\delta]$, con $[p-\delta, p+\delta]$ subconjunto de $[a, b]$.

4. Sea $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x - \sin x}$

   a) Encuentre $\lim_{x\to 0} f(x)$

   b) Use aritmética de redondeo de cuatro dígitos para evaluar $f(0{,}1)$

   c) Reemplace cada función trigonométrica con su tercer polinomio de Maclaurin, y repita la parte (b).

   d) El valor real es $f(0{,}1) = -1{,}99899998$. Encuentre el error relativo para los valores obtenidos en las partes (b) y (c).

5. Use aritmética de redondeo de cuatro dígitos y las fórmulas (1.1), (1.2) y (1.3) para encontrar las aproximaciones más precisas a las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas. Calcule los errores absolutos y los errores relativos.

   a) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{123}{4}x + \frac{1}{6} = 0$

   b) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{123}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

   c) $1{,}002x^2 - 11{,}01x + 0{,}01265 = 0$

   d) $1{,}002x^2 + 11{,}01x + 0{,}01265 = 0$

6. Suppose that $fl(y)$ is a $k-$digit rounding approximation to y. Show that

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0{,}5 \times 10^{-k+1}$$

   [*Hint:*If $d_{k+1} < 5$, then $fl(y) = 0.d_1.d_2...d_k \times 10^n$. If $d_{k+1} \geq 5$, then $fl(y) = 0.d_1.d_2...d_k \times 10^n + 10^{n-k}$.]

7. Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio, y sea dado x_0. Construya un algoritmo para evaluar $P(x_0$ usando multiplicación anidada.

8. Las ecuaciones (1.2) y (1.3) en la Sección 1.2 dan fórmulas alternativas para las raíces x_1 y x_2 de $ax^2 + bx + c = 0$. Construya un algoritmo con entrada a, b, c y salida x_1, x_2 que calcule las raíces x_1 y x_2 (que puede ser igual o ser conjugados complejos) usando la mejor fórmula para cada raíz.

9. Construya un algoritmo que tenga como entradas números enteros $n \geq 1$, $x_0, x_1, ..., x_n$ y un número x y que produzca como salida el producto

$$(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n).$$

10. Suppose that as x approaches zero,

$F_1(x) = L_1 + O(x^\alpha)$ and

$F_2(x) = L_2 + O(x^\beta)$.

Let c_1 and c_2 be nonzero constants, and define

$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ and

$G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x)$.

Show that if $\gamma = \text{minimum}\,\{\alpha, \beta\}$, then as x approaches zero,

   a) $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^\gamma)$

   b) $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$

11. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$f(x) = 1 - \cos x$

   a) Para qué valores de x el número de condición de $f(x)$ crece hacia el infinito?.

   b) Al aplicar Taylor alrededor de cero en el número de condición y hacemos que x tienda cero. Evitamos el mal condicionamiento?.

   c) Si aplicamos Taylor a $f(x)$ que se observa?.

12. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como

$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{x}$ para $|x| \gg 1$. Determine el número de condicionamiento de f.

13. Dado el polinomio de Wilkinson

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x-2)...(x-19)(x-20) \\ &= x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} - \cdots \end{aligned}$$

tiene ceros en los números $1, 2, 3, ..., 20$

   a) Usando una aritmética adecuada que sucede con los ceros de $q(x) = p(x) + 0{,}0001x^{19}$, con ello se puede afirmar que el problema está mal acondicionado?

   b) Pruebe analíticamente el resultado del item (a)

UNI, 01 de junio de 2020.