Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2018-2**

[Cod: CM334 Curso: Análisis Numérico I]
[Prof: L. Paredes.]

Solucionario del Examen Sustitutorio

---

1. Sean $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}$ con

   $\boldsymbol{x_1}$: el valor del chocolate.

   $\boldsymbol{x_2}$: el valor del caramelo.

   a) Luego
   $$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{f:} & \boldsymbol{X} & \to & \boldsymbol{Y} \\ & \boldsymbol{(x_1, x_2)} & \rightsquigarrow & \boldsymbol{f(x_1, x_2) = x_1 - x_2.} \end{array}$$

   b) Donde
   $$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\tilde{f}:} & \boldsymbol{X} & \to & \boldsymbol{Y} \\ & \boldsymbol{(x_1, x_2)} & \rightsquigarrow & \boldsymbol{\tilde{f}(x_1, x_2) = fl(x_1) - fl(x_2).} \end{array}$$

   c) Como $\boldsymbol{x_1 = \pi}$ y $\boldsymbol{x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
   $$\boldsymbol{fl(x_1) = 3{,}142 \ \wedge \ fl(x_2) = 0{,}07071 = 7{,}07071 \times 10^{-1}}$$
   Por (a): $\boldsymbol{fl(x_1) - fl(x_2) = 3{,}142 - 7{,}071 \times 10^{-1} = 2{,}4349}$.

   Por (b): $\boldsymbol{fl(x_1) \ominus fl(x_2) = 2{,}435}$

   Tomando, como $\boldsymbol{\tilde{x}_1 = 3{,}142}$ y $\boldsymbol{\tilde{x}_2 = 0{,}707}$ entonces $\boldsymbol{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 2{,}435}$. $\boxdot$

   d) El error relativo es:
   $$\boldsymbol{\frac{|x_1 - \tilde{x}_1|}{|x_1|} \leq 1{,}3 \times 10^{-4} \quad \wedge \quad \frac{|x_2 - \tilde{x}_2|}{|x_2|} \leq 1{,}5 \times 10^{-4}}$$
   Donde $\boldsymbol{\varepsilon_M = 10^{-3}}$. $\boxdot$

2. a) Para el equilibrio se cumplen:
   $$\boldsymbol{P_A = D_A,\ P_B = D_B \ \wedge \ P_C = D_C.}$$
   Luego:
   $$\boldsymbol{2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 30 = 140 - 8x_1 - 5x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad 10x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 170}$$
   $$\boldsymbol{4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 10 = 107 - x_1 - 8x_2 - x_3 \quad \Rightarrow \quad 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 117}$$
   $$\boldsymbol{x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 20 = 78 - x_1 - x_2 - 5x_3 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 98}$$
   El sistema es:
   $$\boldsymbol{\begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 5 & 10 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 117 \\ 98 \end{bmatrix}}$$

b) Por el método de $\boldsymbol{LU}$, donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & -0{,}5 \\ 0 & 0 & 6{,}4 \end{bmatrix}}_{U}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 170 \\ 117 \\ 98 \end{bmatrix}$$

Al resolver, la solución es $[5\ 6\ 8]^T$. ⊡

3. *a*) Sean x, y: los catetos del triángulo rectángulo.

Donde, las funciones son:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2+y^2-225 &= 0 \\ f_2(x,y) &= x-y-3 &= 0 \end{aligned}$$

b) El Jacobiano es:

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ -\frac{1}{2x} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & -\frac{x+y}{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x+y} \\ 0 & -\frac{x}{x+y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & -\frac{x+y}{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:

$$J(x,y)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{y}{x+y} \\ 0 & -\frac{x}{x+y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2x} & 0 \\ -\frac{1}{2x} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2x+2y}\begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 1 & -2x \end{bmatrix} \quad \boxdot$$

c) Por el método de Newton-Raphson, se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{x_k^2+y_k^2+6y_k+225}{2(x_k+y_k)} \\ \dfrac{x_k^2+y_k^2-6x_k+225}{2(x_k+y_k)} \end{bmatrix}$$

La tabla resulta con $(x_0, y_0) = (1; 1)$:

k	x_k	y_k
0	1	1
1	58,25	55,25
2	30,8463656387665	27,8463656387665
3	18,0516096296585	15,0516096296385
4	13,1062966058647	10,1062966058647
5	12,0527253533883	9,05272535338832
	⋮	
9	12	9

4. *a*) Sean x: Las lechuzas moteadas juvenil.

y: Las lechuzas moteadas subadulto.

z: Las lechuzas moteadas adulto.

Donde

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}33 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}$$

Con $[x_0\ y_0\ z_0]^T = [198\ 202\ 600]^T$.

b) Por el método de Krylov, se sabe que $\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$.

Con $A^3y + b_1A^2y + b_2Ay + b_3Iy = 0$ y $y = [198\ 202\ 600]^T$, se tiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 690{,}2792b_1 & + & 707{,}42b_2 & + & 600b_3 & = & -674{,}166848 \\ 233{,}4486b_1 & + & 198b_2 & + & 198b_3 & = & -227{,}792136 \\ 35{,}64b_1 & + & 35{,}64b_2 & + & 203b_3 & = & -42{,}020748 \end{array}$$

Por el método LU, se tiene:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3381945 & 1 & 0 \\ 0{,}0516313 & 0{,}0214569 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 690{,}2792 & 707{,}42 & 600 \\ 0 & -41{,}245524 & -4{,}9166749 \\ 0 & 0 & 171{,}12673 \end{bmatrix}$$

La solución es:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}94 \\ 0 \\ -0{,}042174 \end{bmatrix}$$

Donde el polinomio característico es:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 0{,}94\lambda^2 - 0{,}042174.$$

El cual tiene un valor real y dos valores complejos.

c) El valor y vector propio real, usando el método de potencia es:

k	x_k	y_k	z_k	λ_1
0	198	202	600	
1	0,2798903	0,0503803	1	707,42
2	0,3381945	0,0516313	1	0,97577
3	0,3378869	0,0623299	1	0,9766582
4	0,3352792	0,0617926	1	0,9842542
5	0,3354092	0,0613395	1	0,9838728
	$\vdots$			
10	0,3355048	0,0613982	1	0,9835926

Donde el valor propio es $0{,}9835927$ y su vector propio es $x = (0{,}3355048\ \ 0{,}0613982\ \ 1)^T$.

5. *a*) Sea la interpolación de Lagrange de orden dos.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} f(x_k)L_{2,k}(x) \\ &= f(x_0)L_{2,0}(x) + f(x_1)L_{2,1}(x) + f(x_2)L_{2,2}(x) \\ &= 8\frac{(x-5)(x-8)}{(3-5)(3-8)} + 22\frac{(x-3)(x-8)}{(5-3)(5-8)} + 73\frac{(x-3)(x-5)}{(8-3)(8-5)} \\ &= 17 - 9x + 2x^2 \\ &= 17 + x\,[-9 + 2x] \end{aligned}$$

b) Evaluando en $x = 6{,}5$ se tiene $P_2(6{,}5) \approx 43$. ⊡

c) Sea la tabla de la interpolación de Newton:

x_k	y_k	D.D. Orden 1	D.D. Orden 2
3	8		
5	22	7	
8	73	17	2

El polinomio de Newton es:

$$P_2(x) = 8 + (x-3)[7 + 2(x-5)].$$

d) Evaluando en $x = 6{,}5$ se tiene $P_2(6{,}5) \approx 43$. ⊡

20 de Diciembre del 2018