Sánchez Sauñe Cristhian

1) tenemos la ecuación

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V(V+b)+b(V-b)}$$

Pide P a $T = 340K$, $V = 0.168\ m^3/mol$ $R = 8.31441\ J/(mol-K)$

$$P = \frac{8.31441(340)}{0.168-b} - \frac{a}{0.168(0.168+b)+b(0.168-b)}$$

pero como V es medido con una precisión de $0,01$, necesitamos propagar los errores, para encontrar el rango de P.

El valor exacto de P es: (usando los datos de "a" y "b")

$$P_0 = \frac{8.31441(340)}{0.168-0.02664} - \frac{364.61}{0.168(0.168+0.02664)+0.02664(0.168-0.02664)}$$

$$P_0 = 29996,68049147$$

$$\delta_P = \delta_{\left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V(V+b)+b(V-b)}\right)} \leq \delta_{\frac{RT}{V-b}} + \delta_{\frac{a}{V(V+b)+b(V-b)}}$$

$$= \delta_{RT} + \delta_{(V-b)} + \delta_a + \delta_{V^2+2Vb-b^2}$$

$$= \cancel{\delta_R} + \cancel{\delta_T} + \delta_V + \cancel{\delta_b} + \cancel{\delta_a} + \delta_{V^2} + \delta_V + \cancel{\delta_b} + \delta_{b^2}$$

$$= \delta_V + 2\delta_V + \delta_V + \cancel{2\delta_b}$$

$$= 4\delta_V$$

$$= 0.04 \Rightarrow \varepsilon_P = P_0 \times 0.04 = (1199.867)$$

$$\Rightarrow P \in [28796.8132718,\ 31196.5477111 2\rangle$$

2) Podemos observar que "A" tiene forma LU. Y como nos pide resolver

$$Ax = b$$

podemos reemplar :

$$Ax = b$$
$$LUx = b$$
$$Ux = L^{-1}b$$
$$x = U^{-1}(L^{-1}b)$$

Podemos calcular $U^{-1} = \frac{Adj(U)}{det(U)}$, que será fácil de calcular

$$\det U = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad Adj^{T} U = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo para $L^{-1} = \frac{Adj\, L}{Det(L)}$

$$\det(L) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad Adj\, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

③ δA es una matriz que cumple $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ (igualmente cumple "δx" y "δb")
y sea δx una solución de $(A+\delta A)(x+\delta x) = b+\delta b$
Si $A+\delta A$ es no singular, se cumple:

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\,\|\delta A\|} \quad \ldots (\alpha)$$

usando la solución δx y usando la ecuación $Ax = b$, Tenemos:

$$(A+\delta A)\delta x + Ax + (\delta A)x = b + \delta b$$

$$\delta x = (A+\delta A)^{-1}[\delta b - (\delta A)x]$$

por definición del número de condición, y usando (α):

$$\|\delta x\| \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\|\delta b\| + \|x\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

Ahora dividimos por $\|x\|$ en ambos lados. $(\|x\| > 0)$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\|x\|}\,\frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}A\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\|\delta b\| + \frac{\|x\|\,\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

De un sistema $Ax = b$, sabemos que cumple $\|b\| \leq \|A\|\,\|x\|$

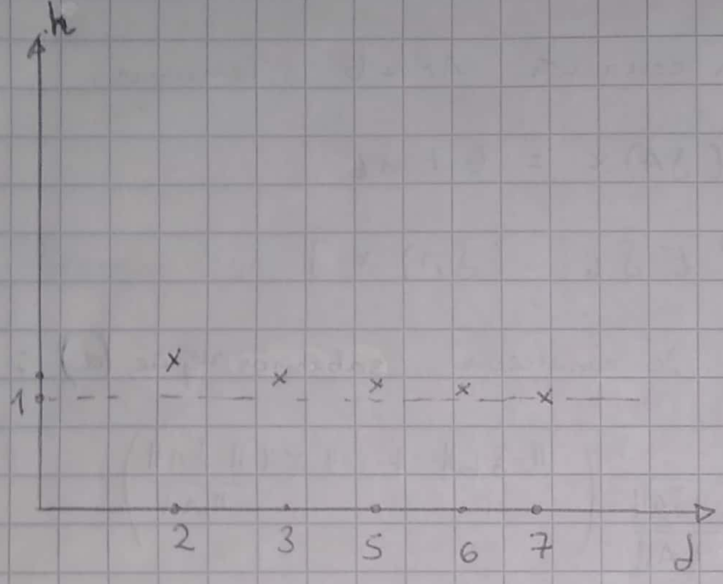
$$\Rightarrow \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1-\operatorname{cond}(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}\right)$$

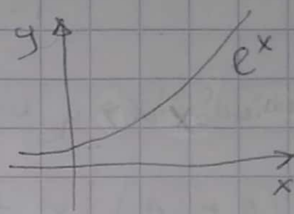
$/\!/$

(4) Tenemos la tabla :

d	2	3	4	5	6	7
h	1.25	1.07	1.03	1.02	1.01	1.00

graficando estos puntos





Si $x \to -\infty$ e^x tiende a 0

Vemos que la gráfica que se aproxima a estos puntos es la de la ecuación $h = e^{a+bd}$.

El criterio para escogerla es debido a los valores que puede tomar $a + bd$, con a y b constantes, entonces, como los puntos decrecen conforme aumenta d, esperaríamos de que $a+bd < 0$.

Sea $f(d) = e^{a+bd}$ y $D(b,a) = \sum\left(h_i - e^{a+bd}\right)^2$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial D}{\partial a} = 0$$

Podemos hacer el artificio $g(d) = \ln\left(e^{a+bd}\right) = a+bd$

con $\ln$ creciente

(3) Sea $v_1 = \|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x$ $\qquad v_2 = -\|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x$

Definimos los vectores unitarios como:

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

De los datos tenemos un expresión para Q: $Q u_i = (I_n - 2 u_i u_i^*)$

$$\Rightarrow \quad Q u_1 x = (I - 2 u_1 u_1^*) x$$
$$= x - 2 (u_1^* x) u_1$$
$$= x - 2 \frac{v_1^* x}{\sqrt{v_1^* v_1}} \cdot \frac{v_1}{\sqrt{v_1^* v_1}}$$

$$\boxed{Q u_1 x = x - 2 \frac{v_1^* x}{v_1^* v_1}}$$

$$\Rightarrow \quad v_1^* x = (\|x\|_2 e^{-i\theta} e_1^T - x^*) x$$
$$= \|x\|_2 e^{-i\theta} x_1 - x^* x$$
$$= \|x\|_2 e^{-i\theta} e^{i\theta} |x_1| - \|x\|_2^2$$
$$v_1^* x = \|x\|_2 (|x_1| - \|x\|_2) \quad \ldots \ldots (\alpha)$$

Por otro lado:

$$v_1^* v_1 = (\|x\|_2 e^{-i\theta} e_1^T - x^*)(\|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x)$$
$$= \|x\|_2^2 e_1^T e_1 - \|x\|_2 e^{-i\theta} e_1 x - \|x\|_2 e^{i\theta} x^* e_1 + x^* x$$
$$= \|x\|_2^2 - \|x\|_2 e^{-i\theta} x_1 - \|x\|_2 e^{i\theta} \bar{x}_1 + \quad + \|x\|_2^2$$
$$= 2\|x\|_2^2 - \|x\|_2 e^{-i\theta} |x_1| e^{i\theta} - \|x\|_2 e^{i\theta} |x_1| e^{-i\theta}$$
$$v_1^* v_1 = 2\|x\|_2^2 - 2|x_1| \, \|x\|_2 = 2\|x\|_2 (\|x\|_2 - |x_1|) \quad \ldots (\beta)$$

complemento

De "α" y "β":

$$Q_{u_1} x = x - \frac{2\|x\|_2 (|x_1| - \|x\|_2)}{2\|x\|_2 (\|x\|_2 - |x_1|)} v_1 = x + v_1$$

$$Q_{u_1} x = (x + \|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x) = \|x\|_2 e^{i\theta} e_1$$

De forma similar podemos calcular $Q u_2$, obteniendo

$$Q u_2 = -\|x\|_2 e^{i\theta} e_1$$