Sánchez Sauñe Cristhian - PC5

(1) Tomamos un intervalo pequeño $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \ / f'(x) \neq 0$

Sea un $$M = \frac{\max_{x \in I} |f''(x)|}{2 \min_{x \in I} |f'(x)|}$$

tal que
$$|\alpha - x_1| \leq M |\alpha - x_0|^2$$
$$M|\alpha - x_1| \leq (M|\alpha - x_0|)^2$$

Sea $|\alpha - x_0| \leq \varepsilon$ y $M|\alpha - x_0| < 1$. Entonces $M|\alpha - x_1| < 1$ y $M|\alpha - x_1| \leq M|\alpha - x_0|$, tal que $|\alpha - x_1| \leq \varepsilon$.
Aplicando para $x_1, x_2, \ldots,$ demostramos $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$ y $M|\alpha - x_n| < 1 \quad \forall n \geq 1$

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq M|\alpha - x_n|^2$$
$$M|\alpha - x_{n+1}| \leq (M|x - x_n|)^2$$

tenemos:
$$M|\alpha - x_n| \leq (M|\alpha - x_0|)^{2^n}$$
$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{M}(M|\alpha - x_0|)^{2^n}$$

Como $M|\alpha - x_0| < 1$, $x_n \rightarrow \alpha$ cuando $n \rightarrow \infty$
Sea ξ_n un punto entre x_n y α.
$\Rightarrow \xi_n \rightarrow \alpha$ cuando $n \rightarrow \infty$, es decir

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\lim_{n \to \infty} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} = \frac{-f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

donde el orden de convergencia de x_n para α:

$$|\alpha - x_0| < \frac{1}{M}$$

M es la medida de que tan cerca esta α de x_0

(2) Nos basaremos en:

- Teorema de los intervalos encajados: Sea una sucesión de intervalos $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$ ... $I_n = [a_n, b_n]$ tales que $I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n$ con $b_n - a_n$ tendiendo a 0. Existe $\exists!\ c \ / \ c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$
- Propiedad de funciones continuas: una función es continua en x_0 / $f(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ existe una bola en x_0 en donde la función tiene el mismo signo que $f(x_0)$

Sea $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, c_1 punto medio de $[a, b]$.

- Si $f(c_1) = 0$ $\Rightarrow$, ya demostramos lo que queríamos.
- Si $f(c_1) \neq 0$ subdivimos el intervalo $[a, b]$ en $[a, c_1]$ y $[c_1, b]$

y así sucesivamente.

Ahora para n intervalos encajados, la longitud de estos será $\dfrac{b-a}{2^n}$ que tiende a 0. Usando el teorema de los intervalos encajados, existe un punto c común a ellos:

(1) Si $f(c) > 0$, por propiedad de funciones continuas, existe un intervalo $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$ en el que la función siempre será positiva.

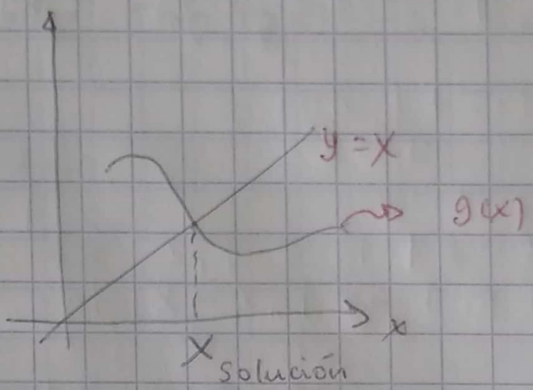
$\rightarrow\leftarrow$ pues en dicho intervalo hay infinitos intervalos de la sucesión anterior, y habíamos dicho que dichos intervalos se caracterizan porque f cambia de signo en sus extremos.

De forma similar para $f(c) < 0$

$\Rightarrow f(c) = 0$

3

a) El método de punto fijo trata de aproximar x, mediante una función $g(x)$, intersecándola con otra $y = x$.



donde $f(x) = g(x) - x$.

b) El método de secante tiene la siguiente fórmula:

$$x_{nuevo} = x_2 - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

y el método Newton:

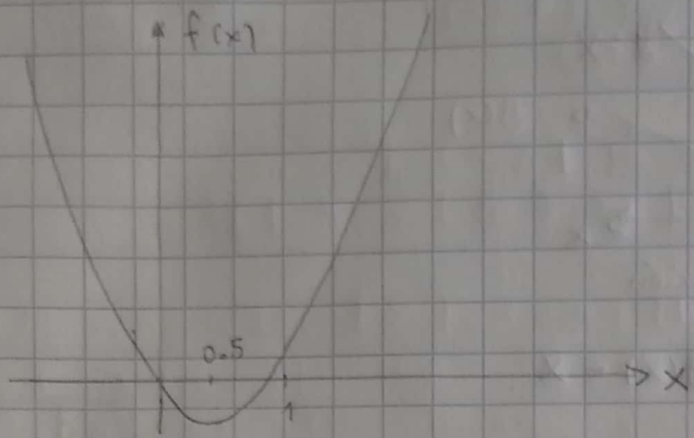
$$x_{nuevo} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

El primer método tiene una aproximación de la derivada de f, mientras el de Newton lo usa de forma exacta, por tal razón converge rápido.

4: Sea la ecuación $x = 1 - e^{-2x}$

tenemos $f(x) = x - 1 + e^{-2x}$

Graficando $f(x)$:



- Por el método de **Secante**

① Como datos iniciales $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1$

② Calculamos

$$x_{nuevo} = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} f(x_2)$$

③ Si $|x_{nuevo} - x_2| < 10^{-6}$, la salida es x_{nuevo} y detenemos el algoritmo.

④ Si el número de iteraciones supera el máximo, paramos. Sino actualizamos $x_1 = x_2$ y $x_2 = x_{nuevo}$

⑤ Repetimos los pasos desde ②.

- Por el método de newton.

① Como datos iniciales $x_1 = 0.5$

② Calculamos

$$x_{nuevo} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

③ Si $|x_{nuevo} - x_1| < 10^{-6}$, la salida es x_{nuevo} y paramos.

④ Si el número de iteraciones supera el máximo, paramos. Sino actualizamos $x_1 = x_{nuevo}$.

⑤ Repetimos desde ②

∴ Usando ambos métodos obtenemos $x_{nuevo} = 0.796812$

Secante: iteración 6

Newton: iteración 4

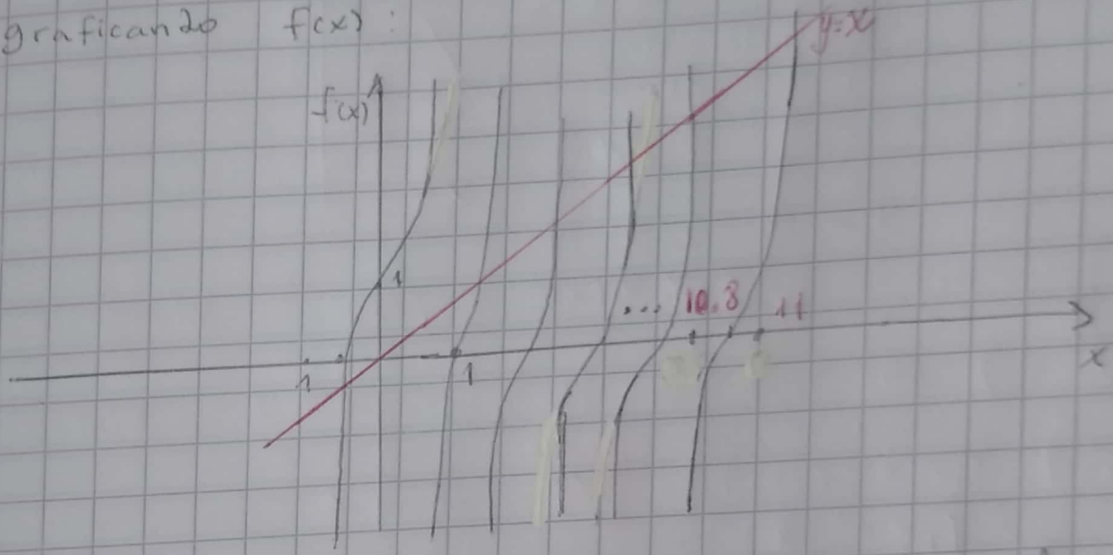
(3) Tenemos

$$\tan(3x) = x+1$$

tenemos las siguientes funciones

$$f(x) = \tan(3x) - x - 1$$
$$g(x) = \tan(3x) - 1 = x$$

graficando $f(x)$:



La 5ta raíz positiva se encuentra en el intervalo $\langle 10.8, 11 \rangle$.

Algoritmo:

(1) Como dato inicial $x_0 = 10.8$

(2) Calculamos

$$x_{nuevo} = g(x_0)$$

(3) Si $|x_{nuevo} - x_0| < 10^{-8}$, la salida es x_{nuevo} y detenemos el algoritmo.

(4) Si el número de iteraciones supera el máximo, paramos.
Si no actualizamos $x_0 = x_{nuevo}$

(5) Repetimos desde (2)

$\therefore$ El resultado es: 10.9622262 69