Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática **Ciclo 2020-I**

[Cod: CM4F1A-CM4F1B]
[Curso: Análisis y Modelamiento Numérico I]

Práctica Calificada $\mathcal{N}^{o}$ 1

1. Dada la integral $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$

   a) Es cierto que $I_n = 1 - nI_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ $\quad (*)$

   b) Usando I_0 valor calculado usando la integral. Halle $I_1, I_2, ..., I_n, ...,$ $n \geq 15$, observe que sucede en algunos de sus resultados encontrados.

   c) Es el algoritmo de recurrencia $(*)$ inestable o estable para el problema?

   d) Si $I_{n-1} = \frac{1-I_n}{n}$ y $I_{20} = 0$. $\quad (**)$
   Determine $I_{19}, I_{18}, ..., I_1$.
   Observe la coherencia e incoherencias de los resultados.
   Es el algoritmo de recurrencia $(**)$ inestable o estable para el problema?.

SOLUCIÓN

a) Verdadero. En efecto,
Integrando I_n por partes: $u = x^n$, $dv = e^{x-1}dx$, de donde $v = e^{x-1}$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n e^{x-1} dx \\ &= x^n e^{x-1} \mid_0^1 - \int_0^1 e^{x-1} n x^{n-1} dx \\ &= 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx \\ &= 1 - nI_{n-1} \end{aligned}$$

b) $I_0 = \int_0^1 x^0 e^{x-1} dx = \int_0^1 e^{x-1} dx = e^{x-1} \mid_0^1 = \frac{e-1}{e} \approx 0{,}63212056$

$I_1 = 0{,}36787944$	$I_{10} = 0{,}08812800$
$I_2 = 0{,}26424112$	$I_{11} = 0{,}03059200$
$I_3 = 0{,}20727664$	$I_{12} = 0{,}63289600$
$I_4 = 0{,}17089344$	$I_{13} = -7{,}22764800$
$I_5 = 0{,}14553280$	$I_{14} = 102{,}18707200$
$I_6 = 0{,}12680320$	$I_{15} = -1531{,}80608000$
$I_7 = 0{,}11237760$	$I_{16} = 24509{,}89728000$
$I_8 = 0{,}10097920$	$I_{17} = -416667{,}25376000$
$I_9 = 0{,}09118720$	$I_{18} = 7500011{,}56768000$

c) Se observa numéricamente que el algoritmo es inestable a partir del item I_{13} y ello mostraremos analíticamente como sigue
Sea $I_n' = I_n + \varepsilon_n$
Por tanto

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n &= I_n^{'} - I_n = (1 - nI_{n-1}^{'}) - (1 - nI_{n-1}) \\
&= -n(\underbrace{I_{n-1}^{'} - I_{n-1}}_{\varepsilon_{n-1}}) \\
&= -n\varepsilon_{n-1} \\
&= n(n-1)\varepsilon_{n-2} \\
&= -n(n-1)(n-2)\varepsilon_{n-3} \\
&\vdots \\
\varepsilon_n &= (-1)^{n-1} n! \varepsilon_1
\end{aligned}
$$

Note que: $\varepsilon_{n-2} = -(n-2)\varepsilon_{n-3}$, $\varepsilon_{n-3} = -(n-3)\varepsilon_{n-4}$,...

Vemos que $\varepsilon_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$

d) Cálculo de los $I_{19}, I_{18}, ..., I_1$.

$I_{20} = 0$	$I_{10} = 0{,}08387707010332623$
$I_{19} = 0{,}05$	$I_9 = 0{,}09161229298966737$
$I_{18} = 0{,}049999999999999996$	$I_8 = 0{,}10093196744559252$
$I_{17} = 0{,}05277777777777778$	$I_7 = 0{,}11238350406930094$
$I_{16} = 0{,}05571895424836601$	$I_6 = 0{,}12680235656152844$
$I_{15} = 0{,}05901756535947712$	$I_5 = 0{,}1455329405730786$
$I_{14} = 0{,}06273216230936819$	$I_4 = 0{,}17089341188538426$
$I_{13} = 0{,}06694770269218799$	$I_3 = 0{,}20727664702865395$
$I_{12} = 0{,}07177325363906246$	$I_2 = 0{,}26424111765711533$
$I_{11} = 0{,}07735222886341146$	$I_1 = 0{,}36787944117144233$

El algoritmo de recurrencia $(**)$ es estable tal como se puede observar en los datos

2. Suppose that $fl(y)$ is a $k-$digit rounding approximation to y. Show that

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0{,}5 \times 10^{-k+1}$$

[*Hint:* If $d_{k+1} < 5$, then $fl(y) = 0.d_1.d_2...d_k \times 10^n$. If $d_{k+1} \geq 5$, then $fl(y) = 0.d_1.d_2...d_k \times 10^n + 10^{n-k}$.]

SOLUTION

We will consider the solution in two cases, first when $d_{k+1} \leq 5$, and the when $d_{k+1} > 5$

When $d_{k+1} \leq 5$, we have

$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \frac{0.d_{k+1}... \times 10^{n-k}}{0.d_1... \times 10^n} \leq \frac{0{,}5 \times 10^{-k}}{0{,}1} = 0{,}5 \times 10^{-k+1}$

When $d_{k+1} > 5$, we have

$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| = \frac{(1 - 0.d_{k+1}...) \times 10^{n-k}}{0.d_1... \times 10^n} < \frac{(1 - 0{,}5) \times 10^{-k}}{0{,}1} = 0{,}5 \times 10^{-k+1}$

Hence the inequality holds in all situations

3. La velocidad del flujo de salida de un fluido ideal por un orificio en el lado de un tanque está dada por $v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$. Si los errores relativos máximo cometidos en la medición de v y P son del orden del 0,1 %, y 0,3 % respectivamente. Determine una cota máxima de error en la medición de ρ.

SOLUCIÓN

$v^2 = \frac{2P}{\rho}$, $\rho = \frac{2P}{v^2}$

a) Error absoluto

$$
\begin{aligned}
\Delta\rho &= \left|\frac{\partial\rho}{\partial P}\right|\Delta P + \left|\frac{\partial\rho}{\partial v}\right|\Delta v \\
&= \left|2v^{-2}\right|\Delta P + \left|2P(-2)v^{-3}\right|\Delta v \\
&= \frac{2}{v^2}\Delta P + \frac{4P}{v^3}\Delta v
\end{aligned}
$$

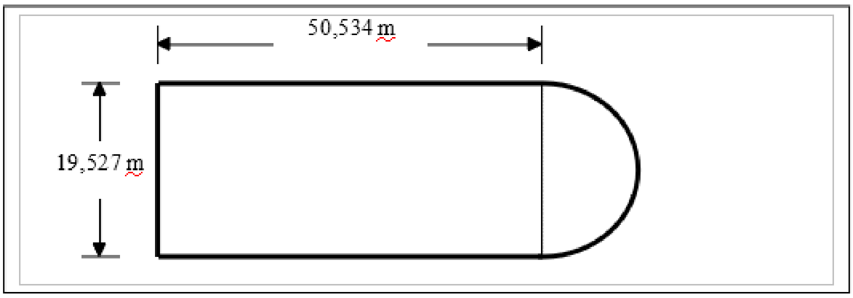
b) Error relativo

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta\rho}{\rho} &= \frac{v^2}{2P}\left(\frac{2}{v^2}\Delta P + \frac{4P}{v^3}\Delta v\right) \\
&= \frac{\Delta P}{P} + 2\frac{\Delta v}{v} \\
\delta\rho &= \delta P + 2\delta v
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
\delta\rho &\leq 2\delta v + \delta P = 2(0{,}1\,\%) + 0{,}3\,\% = 0{,}5\,\% \\
&\leq 0{,}5\,\%
\end{aligned}
$$

4. Un ingeniero civil desea construir un parque cuya forma es como se da en la figura (rectángulo coronado por una semicircunferencia). Si las medidas lineales a lo largo fueron realizadas con un error no superior al 0,20 % a lo ancho fue realizado con un error no superior al 0,15 %



a) Determinar el error que se puede cometer al calcular el área del terreno.

b) En qué rango se encuentra el valor exacto del área?.

SOLUCIÓN

a) $A = ab + \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi = ab + \frac{a^2\pi}{8}$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_A &\leq \left|\frac{\partial A}{\partial a}\right|\varepsilon_a + \left|\frac{\partial A}{\partial b}\right|\varepsilon_b \\
&\leq \left|b + \frac{\pi a}{4}\right|\varepsilon_a + |a|\,\varepsilon_b \\
&\leq \left|b + \frac{\pi a}{4}\right||a|\,\delta_a + |a|\,|b|\,\delta_b
\end{aligned}
$$

donde $\delta_a = \frac{\varepsilon_a}{|a|}$, $\delta_b = \frac{\varepsilon_b}{|b|}$

Sustituyendo los valores de $a = 19{,}527$, $b = 50{,}34$, $\pi = 3{,}1415$, $\delta_a = \frac{0{,}15}{100}$, $\delta_b = \frac{0{,}20}{100}$, se tiene

$\varepsilon_A \leq 3{,}889661754245063$

b) $\varepsilon_A = |A - a(R)| \leq 3{,}889661754245063$,

$a(R) - 3{,}889661754245063 \leq A \leq a(R) + 3{,}889661754245063$, donde $a(R) = ab + \frac{\pi a^2}{8}$

Sustituyendo los valores de $a = 19{,}527$, $b = 50{,}34$, $\pi = 3{,}1415$, se tiene

$1128{,}8327263274427 \leq A \leq 1136{,}6120498359328$

Por tanto

$A \in [1128{,}8327263274427\,; 1136{,}6120498359328]$

5. Suppose that as x approaches zero,

$F_1(x) = L_1 + O(x^\alpha)$ and $F_2(x) = L_2 + O(x^\beta)$.

Let c_1 and c_2 be nonzero constants, and define

$F(x) = c_1F_1(x) + c_2F_2(x)$ and $G(x) = F_1(c_1x) + F_2(c_2x)$.

Show that if $\gamma = \text{minimum}\,\{\alpha, \beta\}$, then as x approaches zero,

a) $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^\gamma)$

b) $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$

SOLUTION

Suppose for sufficiently small $|x|$ we have positive constants k_1 and k_2 independent of x, for which $|F_1(x) - L_1| \leq K_1\,|x|^\alpha$ and $|F_2(x) - L_2| \leq K_2\,|x|^\beta$.

Let $c = \max(|c_1|\,, |c_2|\,, 1)$, $K = \max(K_1, K_2)$, and $\delta = \max(\alpha, \beta)$.

a) We have

$$\begin{aligned}
|F(x) - c_1L_1 - c_2L_2| &= |c_1(F_1(x) - L_1) + c_2(F_2(x) - L_2)| \\
&\leq |c_1|\,K_1\,|x|^\alpha + |c_2|\,K_2\,|x|^\beta \\
&\leq cK\left(|x|^\alpha + |x|^\beta\right) \\
&\leq cK\,|x|^\gamma\left(1 + |x|^{\delta-\gamma}\right) \leq K\,|x|^\gamma
\end{aligned}$$

for sufficiently small. Thus, $F(x) = c_1L_1 + c_2L_2 + O(x^\gamma)$

b) We have

$$\begin{aligned}
|G(x) - L_1 - L_2| &= |F_1(c_1x) + F_2(c_2x) - L_1 - L_2| \\
&\leq K_1\,|c_1x|^\alpha + K_2\,|c_2x|^\beta \\
&\leq Kc^\delta\left(|x|^\alpha + |x|^\beta\right) \\
&\leq Kc^\delta\,|x|^\gamma\left(1 + |x|^{\delta-\gamma}\right) \leq K''\,|x|^\gamma
\end{aligned}$$

for sufficiently small. Thus, $G(x) = L_1 + L_2 + O(x^\gamma)$

Los Profesores.

UNI, 17 de junio de 2020.