PCS: Sánchez Sauñe Cristhian

1)

$$2x + y^2 + x^2y^2 = 9$$
$$x^3 - y^2 + xy = 5.$$

Usando el método de Newton - Rap[illegible]on, con $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Tenemos que

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y^2 + x^2y^2 - 9 \\ x^3 - y^2 + xy - 5 \end{pmatrix}$$

donde $J(F(x,y)) = \begin{pmatrix} 2x^2y + 2y & 2xy^2 + 2 \\ \cancel{x} - 2y & 3x^2 + y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow J^{-1}(F(x,y)) = \begin{pmatrix} \dfrac{3x^2+y}{2(3x^4y + 3x^2y + 2xy^3 - x + y^2 + 2y)} & \dfrac{-(xy^2+1)}{(3x^4y + 3x^2y + 2xy^3 - x + y^2 + 2x)} \\ \dfrac{(-\frac{x}{2} + y)}{(3x^4y + 3x^2y + 2xy^3 - x + y^2 + 2y)} & \dfrac{y(x^2+1)}{(3x^4y + 3x^2y + 2xy^3 - x + y^2 + 2y)} \end{pmatrix}$$

Fórmula iterativa:

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - J(F(X^{(k-1)}))\,F(x^{(k-1)})$$

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	1	0
1	0.33	4.66
2	0.44	3.16
3	0.80	2.22
4	1.11	1.75
5	1.23	1.65

El vector X más exacto es $\begin{pmatrix} 1.2376 \\ 1.6497 \end{pmatrix}$

(2) Si λ es un valor propio de A, entonces existe un vector propio $v \neq 0$ tal que:

$$Av = \lambda v$$

$$\Rightarrow Av - \lambda v = (A - \lambda I).v = 0 \quad \text{si } v \neq 0$$

$$\Rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$$

$$|A - \lambda I| = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

Valores propios:

$\lambda_1 = 1$ $\quad \lambda_2 = -2$ $\quad \lambda_3 = 3$ $\quad \Rightarrow$ radio espectral $= \max\{1, -2, 3\}$

radio espectral $= 3$

Vectores propios:

(a) $\lambda_1 = 1$ $\quad A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2/(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1/3 & -4/3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - \frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 - \frac{F_2}{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 4x_3 \\ x_3 = x_3 \end{array} \quad X = \begin{pmatrix} x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

el conjunto es solución $\left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, si $x_3 = 1$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\lambda_2 = -2$

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 4/3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5/3 & -5/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2/5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5/3 & -5/3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - \frac{5}{3} F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/3 & 4/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Del mismo modo. $X = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ cuya solución es $\left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

si $x_3 = 1$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\lambda_3 = 3$

$$A - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1/(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & -5/2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\left(\frac{-2}{5}\right) F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - \frac{F_2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\left\{ x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ si: $x_3 = 1$ $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ los valores propios de A. Sea λ el valor propio dominante, y x un vector propio asociado, entonces cumple:

$$A v = \lambda v \Rightarrow A^n v = \lambda^n v$$

Entonces se puede predecir el comportamiento de $x^{(n)}$ a partir del que tiene $\lambda^n v$, que depende de a qué tiende λ^n.

El método de la potencia nos proporciona dos sucesiones

$$\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \quad y \quad \{\lambda^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

Tales que, bajo determinadas condiciones $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$ suponiendo que λ_1 es el valor propio dominante.

Tomemos un vector inicial $x^{(0)}$ y a partir de él los vectores de la sucesión $\{x^{(k)}\}$ y los escalares $\{\lambda^{(k)}\}$:

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} \qquad \lambda^{(1)} = \frac{x_j^{(1)}}{x_j^{(0)}} \qquad \text{con } x_j^{(0)} \neq 0$$

$$\vdots$$

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)} \qquad \lambda^{(k)} = \frac{x_j^{(k)}}{x_j^{(k-1)}} \qquad \text{con } x_j^{(k-1)} \neq 0$$

$\Rightarrow$ para $A = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix}$ $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$

k	$x^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
0	$(0, 0, 0.5)^T$	
1	$(0.36, 0.45, 1)^T$	1.375
2	$(0.41, 0.48, 1)^T$	0.977
3	$(0.45, 0.49, 1)^T$	0.901
4	$(0.47, 0.49, 1)^T$	0.921
5	$(0.48, 0.49, 0.9)^T$	0.951
6	$(0.49, 0.5, 1)^T$	0.972
7	$(0.49, 0.5, 1)^T$	0.985
8	$(0.49, 0.5, 1)^T$	0.993
9	$(0.49, 0.5, 1)^T$	0.996
10	$(0.49, 0.5, 1)^T$	0.998
11	$(0.49, 0.50, 1)^T$	0.999
12	$(0.50, 0.50, 1)^T$	1

(a) Para aproximar $x^{(k)}$ podemos usar Cauchy.

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\| = \|(x^{(k+1)}-x^{(k)}) + (x^{(k+2)}-x^{(k+1)}) + \dots + (x^{(k+p)}-x^{(k+p-1)})\|$$
$$\leq \|x^{(k+1)}-x^{(k)}\| + \|x^{(k+2)}-x^{(k+1)}\| + \dots + \|x^{(k+p)}-x^{(k+p-1)}\|$$

Usando la relación de iteración:

$$\|x^{(s+1)}-x^{(s)}\| = \|G(x^{(s)}) - G(x^{(s-1)})\|$$
$$\leq q\|x^{(s)}-x^{(s-1)}\| \leq q^2\|x^{(s-1)}-x^{(s-2)}\|$$
$$\leq \dots$$
$$\leq q^s\|x^{(1)}-x^{(0)}\| \qquad \text{con } s \geq 0$$

$\Rightarrow$
$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\| \leq q^k\|x^{(1)}-x^{(0)}\| + q^{k+1}\|x^{(1)}-x^{(0)}\| + \dots + q^{k+p-1}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$$

Como $0 \leq q \leq 1$, como $q^k \to 0$ para un $k \to \infty$, se deduce que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ tal que para $k > N(\varepsilon)$ y $p > 0$ se cumple:

$$\|x^{(k+p)}-x^{(k)}\| < \varepsilon$$

Por consiguiente $p = \lim_{k \to \infty} x^{(k)}$ y $p \in D$, con D un dominio cerrado.

(b) p es una solución de $x = G(x)$, pues para un $k \to \infty$, se tiene (con G continua en D):

$$p = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \lim_{k\to\infty} G(x^{(k-1)}) = G(p)$$

Sea p' otra solución tal que $p' = G(p')$

Restando

$$p - p' = G(p) - G(p')$$

$$\Rightarrow \|p-p'\| = \|G(p)-G(p')\| \leq q\|p-p'\|$$
$$(1-q)\|p-p'\| \leq 0$$

como $(1-q) > 0 \Rightarrow \|p-p'\| = 0$

$$\Rightarrow p = p'$$

p es una solución única

© Ahora, puedo estimar.

$$\|p - x^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

que será aproximada a partir de

$$\|x^{(k+p)} - x^{(k)}\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

para $p \to \infty$