PC3. Sánchez Sauñe Cristhian Wiki

1- Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$ con rango$(A)=m$. Demuestre que existe una descomposición QR.

Sea $A \in M_{n\times m}$ $(M_{n\times m}=\mathbb{K}^{n\times m})$ con $n \geq m$ y sean sus columnas $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{C}^n$. Asumimos que $u_1, \dots, u_m$ son linealmente independientes.
Entonces el resultado es solo una forma de interpretar matricialmente el proceso de ortogonalización de Gram-Schmit de "n" vectores linealmente independientes en $\mathbb{C}^m$.
De hecho el proceso de ortogonalización de Gram-Schmit produce vectores ortogonales $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{C}^n$, tal que para cada $j \in [1:m]$,

$$u_j = \sum_{k=1}^{j} r_{k,j} v_k = \sum_{k=1}^{m} r_{k,j} v_k \quad \dots (*)$$

con $r_{k,j}=0$ para $k>j$, es decir, $R := [r_{i,j}]_{i,j=1}^{m}$ es una matriz triangular superior $m\times m$.

Las m ecuaciones en $(*)$ reducen la matriz a la forma $A=QR$, donde Q es una matriz $n\times m$ cuyas columnas son los vectores ortonormales $v_1, \dots, v_m$.

Para explicar la otra factorización QR, completamos $v_1, \dots, v_m$ con $v_{n+1}, \dots, v_m$ para formar una base ortogonal $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{C}^n$. Análogo a la ecuación $(*)$, $u_j = \sum_{k=1}^{n} r_{k,j} v_k$ con $r_{k,j}=0$ para $k>j$, tendremos $A=QR$ con Q matriz ortogonal $n\times n$ de columnas $v_1, \dots, v_n$ y R una matriz triangular superior $n\times m$.

2- Dada la matriz de Householder, demuestre que dicha matriz es simétrica y ortogonal

Simétrica:

$$H^T = (I - \rho u u^T)^T = I^T - \rho (u^T)^T u^T = I - \rho u u^T = H$$

con I: matriz identidad

u: una matriz unitaria.

Ortogonal:

debemos probar que $\boxed{HH^T = I}$

$$\Rightarrow \quad H^T H = HH$$

$$= \left(I - \frac{2uu^T}{u^T u}\right)\left(I - \frac{2uu^T}{u^T u}\right)$$

$$= I - \frac{4uu^T}{u^T u} + 4\frac{u(u^T u)u^T}{(u^T u)^2}$$

$$= I - \cancel{\frac{4uu^T}{u^T u}} + \cancel{\frac{4uu^T}{u^T u}}$$

$$H^T H = I$$

$\Rightarrow$ H es Ortogonal

③ Pide resolver $Ax = b$, mediando factorización QR en A.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 15 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 5 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Sea la 1^era^ matriz ortogonal $Q_{21} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{Sen}\theta & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5} = 0.6 \qquad \operatorname{Sen}\theta = \frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = -\frac{4}{5} = -0.8$$

$$Q_{21} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{21}^t A = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 15 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 9 & 9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8.20 & -2.20 \\ 0 & 12.60 & 0.40 \\ 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

La 2^da^ matriz ortogonal será:

$$Q_{31} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{Sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{Sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nuevamente:

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5^2+9^2}} = 0.49 \qquad \operatorname{Sen}\theta = \frac{9}{\sqrt{5^2+9^2}} = 0.87$$

$$Q_{31} = \begin{pmatrix} 0.49 & 0 & -0.87 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.87 & 0 & 0.49 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{31}^T Q_{21}^T A = \begin{pmatrix} 0.49 & 0 & 0.87 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.87 & 0 & 0.49 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8.20 & -2.20 \\ 0 & 12.60 & 0.40 \\ 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$Q_{31}^T \, Q_{21}^T A = \begin{pmatrix} 10.30 & 11.85 & 3.30 \\ 0 & 12.60 & 0.40 \\ 0 & -2.80 & 4.35 \end{pmatrix}$$

finalmente para la 3^{era} matriz ortogonal, tendremos:

$$Q_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Nuevamente

$$\cos\theta = \frac{12.60}{\sqrt{(12.60)^2 + (-2.80)^2}} = 0.98$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{-2.80}{\sqrt{(12.60)^2 + (-2.80)^2}} = -0.22.$$

$$Q_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0.22 \\ 0 & -0.22 & 0.98 \end{pmatrix}$$

finalmente.

$$Q = Q_{21} Q_{31} Q_{32}$$
$$R = Q^T A = Q_{32}^T Q_{31}^T Q_{21}^T A$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -0.30 & 0.92 & -0.25 \\ -0.39 & 0.13 & 0.91 \\ 0.87 & 0.36 & 0.32 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 102.84 & 3.11 & 3.89 \\ 0 & 17.24 & 1.16 \\ 0 & 0 & 3.68 \end{pmatrix}$$

Resolviendo.

$$AX = b$$

$$QRX = b \Rightarrow x_1 \approx 0.88$$

$$x_2 \approx 1.35$$

$$x_3 \approx 0.59$$

④ Sea $\|\cdot\|$ norma subordinada y A matriz inversible. Demostrar:

- $\text{Cond}(A) \geq 1$

como $\text{Cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ y existe A^{-1}

$$\|A\| \|A^{-1}\| \geq \underbrace{\|A A^{-1}\|}_{I} \quad \text{propiedad de normas}$$

$$\|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{cond}(A) \geq 1$$

- $\text{Cond.}(A) = \text{cond}(A^{-1})$

$$\begin{aligned} \text{cond}(A) &= \|A\| \|A^{-1}\| \\ &= \|A^{-1}\| \|A\| \quad \text{propiedad conmutativa de } \mathbb{R}, \\ &= \text{cond}(A^{-1}) \quad \text{con } A^{-1} \text{ que existe} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Cond} A = \text{cond}(A^{-1})$$

- $\text{Cond}(\lambda A) = \text{cond}(A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$

como $\lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{cond}(\lambda A) &= \|\lambda A\| \|(\lambda A)^{-1}\| \\ &= |\lambda| \|A\| \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|A^{-1}\| \\ &= |\lambda| \|A\| \frac{1}{|\lambda|} \|A^{-1}\| \\ &= \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \|A\| \|A^{-1}\| \\ &= 1 \times \text{Cond}(A) \end{aligned}$$

$$\text{Cond}(\lambda A) = \text{Cond} A$$

5:

Sea $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Determine la solución $Ax = b$ con $b = (10 \quad 20 \quad 10)^T$

$\Rightarrow \quad A x = b$

$$\underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Como $0.6^2 + 0.8^2 = 1$, el sistema se podria resolver por Given's.

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 0.8 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.6x_1 + 0.8x_2 \\ -0.6x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ No se puede resolver, es un sistema incompatible.

⑥ Solución para $A^T x = b$ con $b = [20 \;\; 40]^t$

$$\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0 \\ 2.2 & -0.4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left(\begin{array}{cc|c} 0.6 & 0.8 & 20 \\ 2.2 & -0.4 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + 2f_2} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 100 \\ 2.2 & -0.4 & 40 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad x_1 = 20 \qquad x_2 = 10 \qquad x_3 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \forall \; x_3 \in \mathbb{R}.$$