SOLUCIONARIO EXAMEN PARCIAL 2020-1

AMNUM-I

Pregunta 1.- Dados los siguientes números reales

$$\begin{aligned} x &= 2560 \\ y &= 516000 \end{aligned}$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tales que:

$$i)\ f(x,y) = x + y, \quad ii)\ f(x,y) = x - y, \quad iii)\ f(x,y) = x.y, \quad iv)\ f(x,y) = x \div y$$

a) Realice las operaciones en representación de coma punto flotante (exponencial)
b) Realice las operaciones en el campo de los números enteros.
c) Explique concretamente que sucede en los resultados obtenidos.

Sol.

Eps de mi máquina 2.2204e^{-016}

$$x, y = \pm M \times 10^{E},\ en\ \ base\ 10$$

Incluyendo el signo

Precisión simple 32 bits

Precisión doble 64 bits

Sea x=2.560x10^3, 5.16000x10^5

a) i) x+y=5.1856x10^5, ii) x-y=-5.13440x10^5, iii) x.y=1.32096x10^9, iv)x/y=4.96124x10^{-3}

b) En el campo de los números enteros

x=2560, y=516000

x+y=518, 560, x-y= -513,440 x.y=1’320,960,000

c) Los resultados difieren por la pérdida de cifras significativas en coma flotante y el redondeo en el caso de los enteros, pero se evita así el desborde del número de cifras decimales en el caso de un formato de simple precisión y en coma flotante para evitar la pérdida de cifras significativas se debe normalizar luego de cada operación, sobre todo si se usa doble precisión.

Pregunta 2.-

Dado el sistema $AX = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 6 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Resuelva el sistema con el método de factorización LU, describiendo el proceso paso a paso.

b) Reordenando el sistema implemente un algoritmo basado en el método iterativo de Gauss-Seidel, de modo que permita hallar solución aproximada (Sug. Usar como condición inicial el vector nulo) .

c) Determine cuatro iteraciones con el item (b) y encuentre su error absoluto con las dos últimas iteraciones.

Rpta.Valor exacto [2.0909, 0.3636, 0.4545]

```
A =

     1     2     5
     8     4     2
     2    10     6

>> L=[1 0 0;8 1 0;2 -1/2 1]

L =

    1.0000         0         0
    8.0000    1.0000         0
    2.0000   -0.5000    1.0000

>> U=[1 2 5;0 -12 -38;0 0 -23]

U =

     1     2     5
     0   -12   -38
     0     0   -23

>>
```

```
L =

    1.0000         0         0
    8.0000    1.0000         0
    2.0000   -0.5000    1.0000

>> U=[1 2 5;0 -12 -38;0 0 -23]

U =

     1     2     5
     0   -12   -38
     0     0   -23

>> B=[1 3 -1]'

B =

     1
     3
    -1

>> y=B\L

y =

    2.0909    0.3182   -0.0909

>> X=y'\U

X =

    0.4666    0.0811    0.1014

>>
```

Error Absoluto =norm(valorexacto-Valor aprox)

```
>> XX-X

ans =

    1.6243    0.2825    0.3531

>> norm(XX-X)

ans =

    1.6861
```

Pregunta 3.-Sea la matriz A, donde $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

a) Para que valores de a, la matriz A es definida positiva?
b) Determine la matriz J denominada matriz de Jacobi
c) Si A es definida positiva para que valores de a, el método de Jacobi converge
d) Calcular el radio espectral de J.

Sol

a) Es definida positive si A satisface lo siguiente:

Sea
$$X = (x_1, x_2, x_3) \neq \vec{0}$$
$$X^T AX = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) > 0$$

Sea $\alpha = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$, $\beta = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$$X^T AX = \alpha + 2a\beta > 0, \; \Rightarrow a > \frac{-\alpha}{2\beta}; \quad \beta \neq 0$$

Entonces $Si \;\; \beta > 0 \Rightarrow a < 0$

(b) $$J = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D^{-1}} \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Si A es diagonal dominante el metodo de Jacobi converge

$$1 > |a| + |a| \rightarrow 1 > 2|a| \rightarrow \frac{1}{2} > |a|$$
$$\rightarrow \quad a \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

(d) Radio espectral de J

$$|J - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ -a & 0 & -a \\ -a & -a & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -\lambda & -a & -a \\ -a & -\lambda & -a \\ -a & -a & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)(\lambda - a)^2(\lambda + 2a) = 0$$

$$\lambda = a \wedge \lambda = -2a$$

$$\rho(J) = \max\{|a|, |-2a|\} = |2a|$$

Pregunta 4.- Si Q es una matriz ortogonal y X un vector n- dimensional
a) Probar que $\|Q(AX-b)\|_2 = \|AX-b\|_2$
b) Proponga un ejemplo particular para $n=3$ y comprobar el resultado de (a).

a) $$\|Q(Ax-b)\|_2 = \sqrt{[Q(Ax-b)]^T.[Q(Ax-b)]} = \sqrt{(Ax-b)^T \underbrace{Q^T.Q}_{I}(Ax-b)}$$
$$= \sqrt{(Ax-b)^T.(Ax-b)} = \|Ax-b\|_2$$

Por ejemplo

b) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 30 & 70 \\ 30 & 50 & 20 \\ 70 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 44 \\ 38 \\ 18 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \qquad QQ^T = I \quad det(Q) = -1.0$$

$$\|Ax-b\|_2 = \|(126, 112, 162)\|_2 = 233.803362$$
$$\|Q(Ax-b)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 126 \\ 112 \\ 162 \end{pmatrix} \right\|_2 = 233.803362$$

Pregunta 5.-Dada la matriz $H = I - 2WW^T$, W es un vector de $\mathbb{R}^n$,con norma euclidea igual a 1, I es la matriz identidad. Demuestre que:
i) H es simétrica
ii) H es Ortogonal.

Rpta.

$$H = I - 2\omega\omega^T \qquad \|\omega\| = 1$$

i) Simétrica: $H^T = (I - 2\omega\cdot\omega^T)^T = I^T - 2\omega^{T^T}\omega^T = I - 2\omega\,\omega^T = H$

ii) Ortogonal: $H^T H = (I - 2\omega\omega^T)^2 = I - 4\omega\omega^T + 4\omega(\overbrace{\omega^T\omega}^{\|\omega\|^2 = 1})\omega^T$

$$= I$$