UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA
Análisis de Modelamiento Numérico I

Ciclo 2020_01
Fecha: 15/07/2020
Profesores: Fidel Jara Huanca y Victor Huanca Sullca

Solucionario de la Practica Calificada No.3

Solución 1

Sean $v_1 = \|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x$ y $v_2 = -\|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x$

Hacemos $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ y $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|}$

Observamos que

$$
\begin{aligned}
Q_{u_1}x &= (I - 2u_1u_1^*)x \\
&= x - 2(u_1^* x)u_1 \\
&= x - 2\frac{v_1^* x}{(v_1^* v_1)^{1/2}} \cdot \frac{v_1}{(v_1^* v_1)^{1/2}} \\
&= x - \frac{2v_1^* x}{v_1^* v_1}
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
v_1^* x &= (\|x\|_2 e^{-i\theta} e_1^T - x^*)x \\
&= \|x\|_2 e^{-i\theta} x_1 - x^* x \\
&= \|x\|_2 e^{-i\theta} e^{i\theta} |x_1| - \|x\|_2^2 \\
&= \|x\|_2 (|x_1| - \|x\|_2)
\end{aligned}
$$

y $\quad v_1^* v = (\|x\|_2 e^{-i\theta} e_1^T - x^*)(\|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - x)$

$$= \|x\|_2^2 e_1^T e_1 - \|x\|_2 e^{-i\theta} e_1 x - \|x\|_2 e^{i\theta} x^* e_1 + x^* x$$

$$= \|x\|_2^2 - \|x\|_2 e^{-i\theta} x_1 - \|x\|_2 e^{i\theta} \bar{x}_1 + \|x\|_2^2$$

$$= 2\|x\|_2^2 - \|x\|_2 e^{-i\theta} |x_1| e^{i\theta} - \|x\|_2 e^{i\theta} |x_1| e^{-i\theta}$$

$$= 2\|x\|_2^2 - 2|x_1|\|x\|_2 = 2\|x\|_2(\|x\|_2 - |x_1|)$$

POR CONSIGUIENTE:

$$Q_{u_1} x = x - \frac{2\|x\|_2(|x_1| - \|x\|_2)}{2\|x\|_2(\|x\|_2 - |x_1|)} v_1 = x + v_1$$

$$= (\cancel{x} + \|x\|_2 e^{i\theta} e_1 - \cancel{x}) = \|x\|_2 e^{i\theta} e_1$$

Análogamente se determina

$$Q_{u_2} = -\|x\|_2 e^{i\theta} e_1$$

Solución 2

a) SEA $\quad D(m;b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - m x_i - b)^2$

LA DESVIACIÓN CUADRÁTICA,

LA IDEA ES MINIMIZAR

$(P) \quad \text{Min } D(m;b)$

AL REALIZAR

$$\frac{\partial D}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial b} = 0 \iff \underbrace{\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}}_{B}$$

Y SE PRUEBA QUE b y m MINIMIZA (P) USANDO EL HESSIANO EN DICHOS VALORES.

(b) TENIENDO EN CUENTA LOS DATOS:

	x	y	x^2	xy
	2	1	4	2
	4	2	16	8
	6	3	36	18
	8	1	64	8
	10	2	100	20
SUMAS	30	9	220	56.

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 220 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 56 \end{pmatrix}}_{(*)}$$

AL RESOLVER $(*)$:

$$\boxed{p = 1{,}5 \ \text{ y } \ m = 0{,}05}$$

Solución 3

SEAN $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$

$\|a_1\|_2 = \sqrt{1+(-2)^2+2^2} = 3$, $r_{11} = -\|a\|_2 = -3$ y $u_1 = \begin{bmatrix} 1+3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ENTONCES

$$H_1 = I - \frac{2\, u_1 . u_1^T}{\|u_1\|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{2}{16+(-2)^2+2^2}\right)\begin{pmatrix} 16 & -8 & 8 \\ -8 & 4 & -4 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

POR TANTO

$$A^{(2)} = H_1 . A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} ; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\|a_2\|_2 = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = 5 ; \quad r_{22} = -5 \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3-r_{22} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{64+16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 32 \\ 0 & 32 & 16 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & -4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$R = H_2 A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \quad Q^T = H_2 H_1 = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/15 & -2/3 & -11/15 \\ -14/15 & -1/3 & 2/15 \end{pmatrix}$$

POR CONSIGUIENTE :

$$Q^T b = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad Rx = Q^T b$$

y

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$x_3 = 1$; $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$

Solución 4

Sea $G(i;j;\theta)\cdot \overset{\to \bar{x}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}} = \overset{\to \bar{y}}{\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ donde b es cualquier número.

Como los valores 2 y -1 son invariantes, entonces

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = G(2;3;\theta)$$

Luego

$$G(2;3;\theta)\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta \\ -3\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta \\ -1 \end{pmatrix}$$

De donde

$$-3\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta = 0 \;,\; \tan\theta = -\frac{4}{3} \;;\; \theta = 127^\circ$$

Por otro lado

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{2^2+(-3)^2+(-4)^2+(-1)^2} = \sqrt{30}$$

Se $y_1 = -3\cos(127) + 4\operatorname{sen}(127) = -5$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\bar{y}\| = \sqrt{2^2+5^2+(-1)^2} = \sqrt{30}$$

Por consiguiente la matriz de Givens

es: $G(2;3;127^\circ)$

Solución 5

El algoritmo hace $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{U}$, donde $\boldsymbol{E}^{m\times n}$ es la matriz de columnas $\boldsymbol{e}_i$ y $\boldsymbol{U}^{n\times n}$ la matriz triangular superior de los productos interiores auxiliares u_{ij}.

- Sustituyendo esta expresión de $\boldsymbol{A}$ en las ecuaciones normales, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$, resulta que

  $$\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{b}$$

  y, por fin, dado que $\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E} = \boldsymbol{I}$,

  $$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}^T\boldsymbol{b}.$$

  Un sistema triangular superior.

En condiciones adecuadas, por consiguiente, el método de Gram-Schmidt podría valer para resolver un problema lineal de mínimos cuadrados.

En la práctica se va perdiendo ortogonalidad en los vectores $\boldsymbol{e}_i$ por errores numéricos y, especialmente, si alguno de los vectores columna $\boldsymbol{a}_j$ está próximo al subespacio generado por los vectores anteriores $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{j-1}$.

En ese caso, los sumandos de la expresión $\boldsymbol{a}_j - \sum_{i=1}^{j-1}\langle\boldsymbol{a}_j|\boldsymbol{e}_i\rangle\boldsymbol{e}_i$ pueden llegar a ser muy pequeños, o muy distantes unos de otros pero con un resultado final que puede ser muy pequeño, por lo que el error numérico que se va produciendo es relativamente grande. Al dividir el resultado por su norma (también muy pequeña) los errores se amplificarán aún más.

En cuanto a la perdida de cifras significativas se puede hacer lo siguiente:

que en una etapa k en vez de sustraer del vector $\boldsymbol{a}_k$ sus proyecciones sobre los $k-1$ vectores $\boldsymbol{e}_i$ ya calculados, el vector $\boldsymbol{e}_k$ se hace igual a $\boldsymbol{a}_k$ al principio y luego se le van sustrayendo su proyección en $\boldsymbol{e}_1$, pasando el resultado a ser el nuevo $\boldsymbol{e}_k$, el cual se proyecta luego en $\boldsymbol{e}_2$, y así sucesivamente en cada uno de los $k-1$ $\boldsymbol{e}_i$ anteriores.