(1) La propiedad asociativa no se cumple para aritmética de punto flotante, las computadora suman de la siguiente manera:
Sumando de mayor a menor, ordenamos.

$$S = (((0.1025\times10^4 + (-0.9123)\times10^{-3}) + (-0.9663)\times10^2) + (-0.9315)\times10^1)$$

Luego podemos sumar paso a paso

Sea $S_1 = 0.1025\times10^4$

$S_2 = S_1 - 0.0912\times10^4 = 0.0113\times10^4 = 0.1130\times10^3$

$S_3 = S_2 - 0.09663\times10^3 = 0.1130\times10^3 - 0.0966\times10^3$

$= 0.1640\times10^2$

$S_4 = S_3 - 0.09315\times10^2 = 0.1640\times10^2 - 0.0932\times10^2$

$= 0.0708\times10^2 = 0.7080\times10^1 = 7.080$

$\Rightarrow \delta = \dfrac{S_4 - S_E}{S_E}$

S_E: Suma exacta

$S_E = 1025 - 912.3 - 96.63 - 9.315 = 6.755$

$\delta = \dfrac{7.080 - 6.755}{6.755} = 0.048$

$\delta \approx 5\%$

Sumando en orden de menor a mayor.

$$(((-0.9315)\times10^1 + (-0.9663)\times10^2) + (-0.9123)\cdot10^3) + 0.1025\times10^4$$

Sumamos paso a paso:

$S_1' = -0.9315\times10^1$

$S_2' = S_1' - 0.9663\times10^2 = -0.09315\times10^2 - 0.9663\times10^2$

$\approx -0.0932\times10^2 - 0.9663\times10^2$

$= -1.0595\times10^2 = -0.1060\times10^3$

$S_3' = S_2' - 0.9123\times10^3 = -0.1060\times10^3 - 0.9123\times10^3$

$= -1.0183\times10^3 = -0.1018\times10^4$

$S_4' = S_3' + 0.1025\times10^4 = -0.1018\times10^4 + 0.1025\times10^4$

$= 0.0007\times10^4 = 0.7000\times10^1 = 7$

$$\delta' = \frac{S_4' - S_E}{S_E} = \frac{7 - 6.755}{6.755} = 0.036 \approx 4\%$$

δ' es menor que δ, por lo que concluimos que la suma de menor a mayor tiene una respuesta más exacta

(2) Sabemos que el número de condición se calcula como

$$n = \frac{|f'(x)|\,|x|}{|f(x)|} \qquad \text{pero como } f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h-x) - f(x)}{h}$$

$$h = \Delta x$$

aproximadamente:

$$\Rightarrow n = \left| \frac{\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)}}{\frac{x + \Delta x - x}{x}} \right| = \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)} \frac{x}{\Delta x} \right|$$

elegimos un $\Delta x = 1$

$$n = \left| \frac{\sqrt{10^4+2} - \sqrt{10^4+1} - \sqrt{10^4+1} + \sqrt{10^4}}{\sqrt{10^4+1} - \sqrt{10^4}} \frac{10^4}{1} \right| = 10^4 \frac{|100.01 - 2 \times 100.005 + 100|}{|100.005 - 100|}$$

$$\approx 0.5$$

Es decir, la función no esta mal condicionada

Operando con 6 decimales:

$$f(12345) = \sqrt{12346} - \sqrt{12345} = 111.113 - 111.108 = 0.005$$

para obtener un valor más exacto, realizamos la operación exacta

$$\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow f(12345) = \frac{1}{111.113 + 111.108} = \frac{1}{122.221} = 0.00450002$$

$$\approx 0.0045000З$$

(redondeado en aritmética exacta de 6 dígitos)

④ Sea $I_n = \int_0^1 t^n (t+10)^{-1} dt$ ... $(*)$

ⓐ Demostrar :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(t+10)} (t+10-10)\, dt = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(t+10)}(t+10)\, dt - 10\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(t+10)}\, dt$$

con $t \neq -10$

$$\Rightarrow I_n = \int_0^1 t^{n-1}\, dt - 10 I_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1}{n} - 10 I_{n-1} \qquad \forall\ t \neq -10$$

ⓑ
$$I_{20} = \frac{1}{20} - 10 I_{19}$$

$$I_{19} = \frac{1}{20} - 10 I_{18}$$

reemplazando

$$\vdots$$

$$I_1 = \frac{1}{20} - I_0$$

Reemplazando podemos estimar I_{20} = 0.0043 (Integral)

7483.468 (recursivo)

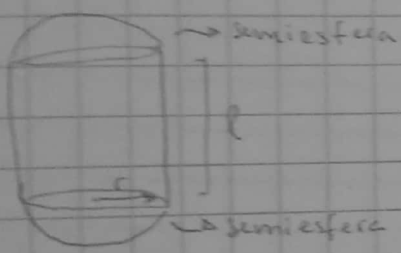
Usando truncamiento en los 4 decimales.

(4) Valor real: Integrando (*)   Valor estimado: usando la recursión (a)

	I_n	I_n
n = 1	0.0468	0.0468
n = 2	0.031	0.031
n = 3	0.0231	0.0231
n = 4	0.0184	0.0184
n = 5	0.0153	0.0153
n = 6	0.0131	0.0131
n = 10	0.0083	0.0083
n = 12	0.007	0.0071
n = 16	0.0053	0.7537
n = 19	0.0045	-748.3418
n = 20	0.0043	7483.468

truncar en 4 decimales produce una inestabilidad notable.

(5)



$l = 5.520\,m$ $r = 1.120\,m$

Volumen: $\frac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2 l$

Área de la superficie: $4\pi r^2 + 2\pi r l$

$\pi = 3.1415$

(a) $\varepsilon_v \leq \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| \varepsilon_r + \left|\frac{\partial V}{\partial l}\right| \varepsilon_l$

$\varepsilon_v \leq \left|4\pi r^2 + 2\pi r l\right| \varepsilon_r + \left|\pi r^2\right| \varepsilon_l = \left(4(3.1415)(1.120)^2 + 2(3.1415)(5.520)\cdot(1.120)\right)\varepsilon_r + \left(3.1415\,(1.120)^2\right)\varepsilon_l$

$= (54.60)\underset{(5\times10^{-4})}{\varepsilon_r} + (3.9406)\underset{(5\times10^{-4})}{\varepsilon_l} = 0.0292703$

(b) $\varepsilon_A \leq \left|\frac{\partial A}{\partial r}\right| \varepsilon_r + \left|\frac{\partial A}{\partial l}\right| \varepsilon_l$

$\varepsilon_A \leq \left|8\pi r + 2\pi l\right| \varepsilon_r + \left|2\pi r\right| \varepsilon_l = \left(8(3.1415)(1.120) + 2(3.1415)(5.520)\right)\varepsilon_r + \left(2(3.1415)(1.120)\right)\varepsilon_l$

$= 62.83\underset{(5\times10^{-4})}{\varepsilon_r} + 7.03696\underset{(5\times10^{-4})}{\varepsilon_l} = 0.003493348.$