Sánchez Sauñe Cristhian Wiki PC-4

① Demuestre que la sucesión de vectores $\{x^{(k)}\}$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$ respecto a $\|\cdot\|_\infty$ si y solo si

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i \qquad \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$$

Supongamos que $\{x^{(k)}\}$ converge a x. Dado cualquier $\varepsilon>0$, existe un entero $f(\varepsilon)$ tal que para todo $k \geq f(\varepsilon)$, y

$$\max_{i=1,2,\dots,n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|x^{(k)} - x\| < \varepsilon$$

Es decir $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$ $\forall i = 1,2,\dots,n$, de modo que $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$

Ahora supongamos que $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$, para $i=1,2,\dots,n$.
Para un $\varepsilon>0$, sea:

$$f_i(\varepsilon) \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

con la propiedad de $|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon$
tal que $k \geq f_i(\varepsilon)$

Definimos $f(\varepsilon) = \max_{i=1,2,\dots n} f_i(\varepsilon)$. Si $k \geq f(\varepsilon)$, entonces:

$$\max_{i=1,2,\dots n} |x_i^{(k)} - x_i| = \|x^{(k)} - x\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\{x^{(k)}\}$ converge a x mediante $\|\cdot\|_\infty$.

Válido para cualquier norma de $\mathbb{R}^n$.

2) Demuestre que A es una matriz estrictamente diagonal dominante por filas, los métodos de Jacobi y Gauss - Seidel son convergentes

Si A es estrictamente de forma diagonal dominante, se cumple:

$$|a_{ii}| < \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots, n$$

como $|a_{ii}| \neq 0$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

Sea B_J la matriz de iteración por el método de jacobi, que cumple $\| B_J \| < 1$, entonces la sucesión de vectores $\{ x^{(k)} \}$ converge, para cualquier norma consistente.
Ahora consideremos la norma infinito:

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Sabemos que $B_j = (b_{ij})$ tiene definidas sus componentes como $b_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ cuando $i\neq j$ y $b_{ij} = 0$ cuando $i = j$.

$\Rightarrow$ el método de Jacobi convergerá ya que

$$\| B_J \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$$

El caso Gauss - Seidel se demuestra de forma similar

3: Halla un valor aproximado en:

$$\begin{aligned} 9x - 2y &= 5 \\ -2x + 4y - z &= 1 \\ -y + z &= -\frac{5}{6} \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -5/6 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

(a)

Factorizamos $A = LU$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/9 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 0 \\ 0 & 32/9 & -1 \\ 0 & 0 & 23/32 \end{pmatrix}$$

Sacando los autovares de A: $\lambda_1 \approx 9,72$
$\lambda_2 \approx 3,64$
$\lambda_3 \approx 0,65$

Como A es diagonal dominante, la convergencia Gauss-Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}\left(b - (L+U)x^{(k)}\right)$$

esta garantizada.

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5556 \\ 0.2500 \\ -0.8330 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.6111 \\ 0.3195 \\ -0.5830 \end{pmatrix} \qquad x^{3} = \begin{pmatrix} 0.6266 \\ 0.4098 \\ -0.5135 \end{pmatrix}$$

(b) Como A es simétrica y definida positiva (todos los autovalores son positivos), el método Gauss-Seidel converge.

$$x^{(k+1)} = (L+D)^{-1}\left(b - Ux^{(k)}\right)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.5556 \\ 0.5278 \\ -0.3055 \end{pmatrix} \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.6728 \\ 0.5100 \\ -0.3233 \end{pmatrix} \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.6689 \\ 0.5036 \\ -0.3297 \end{pmatrix}$$

ⓒ Vamos a aplicar el método de relajación a Gauss-Seidel.

$$x^{(k)} = \omega \, (L+D)^{-1} \left(b - U x^{(k-1)} \right) + (1-\omega) \, x^{(k-1)}$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.6667 \\ 0.7000 \\ -0.1600 \end{pmatrix} \qquad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.7200 \\ 0.5440 \\ -0.3152 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.6677 \\ 0.4973 \\ -0.3402 \end{pmatrix}$$

(4). Sea el sistema

$$\begin{aligned} x + ay &= 1 \\ x + y + z &= 1 \\ by + z &= 1 \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Valores de a y b para que el sistema tenga solución única.

$$|A| = 1 - a - b \neq 0 \qquad a+b \neq 1$$

(b) Valores de a y b para que converga el método Gauss-J.

Convergerá si

$$\| J \| = \| D^{-1} (L + U) \| = \| L + U \| < 1$$

No sirven $\|\cdot\|_1$ ni $\|\cdot\|_\infty$ pues no converge:

$$\| J \|_1 = \max \{ 1, |a| + |b| \} \qquad \| J \|_\infty = \max \{ 2, |a|, |b| \}$$

La convergencia quedará asegurada si el radio espectral:

$$\rho(J) = \max |\lambda_J| \leq 1$$

donde los autovares son

$$|J - \lambda_J I| = \begin{vmatrix} -\lambda_J & a & 0 \\ 1 & -\lambda_J & 1 \\ 0 & b & -\lambda_J \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda_J^3 + a\lambda_J + b\lambda_J = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_J = 0 \quad \vee \quad \lambda_J = \pm \sqrt{a+b} \qquad \text{con } a+b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

es decir

$$\rho(J) = \sqrt{a+b} < 1$$

$\therefore$ convergerá pues $a+b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

ⓒ Valores de a, b para la convergencia Gauss - Seidel
Convergerá si S tiene un radio espectral $\rho(S) < 1$

$$S = (L+D)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ b & -b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & ab & -b \end{pmatrix}$$

los autovalores son:

$$|S - \lambda_S I| = \begin{vmatrix} -\lambda_S & a & 0 \\ 0 & -a-\lambda_S & 1 \\ 0 & ab & -\lambda_S-b \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_S \left(ab - (a+\lambda_S)(b+\lambda_S) \right) = 0$$

$$\lambda_S = 0 \quad \vee \quad \lambda_S^2 + \lambda_S (a+b) = 0$$

es decir

$$\lambda_S = 0 \quad \vee \quad \lambda_S = -(a+b)$$

$\Rightarrow$ El método converge si

$$\rho(S) = |a+b| < 1$$

ⓓ Estudie las convergencias anteriores para A simétrica.

A es simétrica cuando $a = b = 1$, por lo que Gauss - Jac. no converge

$$\rho(J) = \sqrt{a+b} = \sqrt{2} > 1$$

Gauss - Seidel converge cuando

$$\rho(S) = 2|a| < 1$$

El método Cholesky no es iterativo como los anteriores.
"A" debe ser una matriz positiva y hermítica.
Si $a = b = 1$, A es simétrica

Determinemos los autovalores:

$$|C-\lambda_c I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda_c & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda_c & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_c \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda_c^3 + 3\lambda_c^2 - \lambda_c - 1 = 0$$

$$\lambda_c = 1 \qquad \lambda_c = 1 \pm \sqrt{2}$$

tiene una raiz no positiva $\Rightarrow$ no es definida positiva

$\therefore$ No se puede aplicar el método de Cholesky