# Mathematical Preparation

Hiroaki Hanyu

October 17, 2022

# 前回の内容

- 連続時間モデルが使われ始めた経緯
  - 基本的に解析的にも数値的にも連続時間モデルが優れているという話
- 確率微分方程式の定義を簡単に紹介
- 微分方程式と確率微分方程式の違いについて
  - 微分方程式は適切な一意性の仮定の下で，解の軌道を一つだけ図示できる
  - 一方確率微分方程式の解について，一般的には微分方程式のようにして（全く同じ意味で）**解の軌道**が一つに定まるわけではない
- 確率微分方程式の中でも扱いやすいクラスのモデルとして伊藤拡散過程を紹介した

# 前回の内容 $+\alpha$

伊藤拡散過程は

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dZ_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}$$

という確率微分方程式表現を持つ確率過程のことであった.

- $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\mu(x) = -\theta x,\ \sigma(x) = \sigma, \quad (\theta > 0,\, \sigma > 0)$$

  のとき **Ornstein-Uhlenbeck 過程.**

$$\mu(x) = \mu x,\ \sigma(x) = \sigma x, \quad (\mu :\ \text{const.}\,,\, \sigma > 0)$$

  のとき幾何ブラウン運動

と呼んでいた.

## Definition (1 次元伊藤拡散過程（フォーマルな定義）)

$\mathbb{T} := [0, \infty]$ とおく．
$Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元ブラウン運動とし，
$\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ をブラウン運動から生成した **Filtration**（すなわち，
$\mathcal{F}_t = \sigma(\{Z_s; s \leq t\})$ とする．
1 次元確率過程 $X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ が以下のように表されるとき，$X$ を
1 次元伊藤拡散過程と呼ぶ．

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dZ_s, \quad x \in \mathbb{R}$$

ここで $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $\mu, \sigma$ は **Lipschitz** 条件を満たす．
定義から $X$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程であり，上記のように与えられる伊藤過程 $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を形式的に

$$dX_t = \mu(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dZ_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}$$

と表現する．これを $X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ の満たす確率微分方程式と呼ぶ．

# Introduction

- ◇ 今回は確率論・確率過程論・確率解析の基本事項を Review する.
- ◇ この勉強会の暫定的な目標は,「確率微分方程式」の定義を理解すること
- ◇ つまり, 確率空間・ブラウン運動・Filtration... といった用語の意味を理解することである
- ◇ 時間の配分の都合上細かい内容は端折って話すが, 本スライドの内容を知れば応用学者向けの確率論・確率解析の本は楽に読めると思う

# 参考文献

- 確率論：原『測度・確率・ルベーグ積分』, Williams "Probability with Martingale"
- 確率過程論：Durret『確率過程の基礎』
- 確率解析：Shreve『ファイナンスのための確率解析 2』, Öksendal 『確率微分方程式』, 谷口説男『確率微分方程式』
- その他多数

# Probability Theory

# 確率

## Definition ($\sigma$-algebra)

$\Omega$ を集合とする.
$\Omega$ 上の $\sigma$-加法族とは，$\Omega$ の部分集合族 $\mathcal{F}$ で以下の 3 条件を満たすものである．またこのとき，組 $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間と呼ぶ.

- $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\} \in \mathcal{F}$
- $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$
  $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \omega \in A_n\} \in \mathcal{F}$

- $\sigma$-加法族の 3 条件は，ある事象らに対して「確率」を定義したとき，それらの余事象，和集合（や積集合等）に対しても確率を定義できていないといけないという思惑があるからである
- ここで $\mathcal{F}$ は $\sigma$-加法族の中でもちょうどいいサイズのものを想定する

## Definition (probability measure)

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする．
関数 $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ が以下の 2 条件を満たすとき，$\mathbb{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度と呼ぶ．

- ◇ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- ◇ $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ は非交差 $(A_i \cap A_j = \emptyset; i \neq j)$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$$

また，組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間と呼ぶ．

- ◇ 任意の確率測度 $\mathbb{P}$ に対して $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ は必ず成立する．
- ◇ これ以降ベースとなる確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を最初に set up して話をすすめる．このとき $\Omega$ や $\mathcal{F}$ がどのような集合（族）かどうかはあまり考えずに話を展開していく．
- ◇ $\mathbb{P}$ もまた曖昧なもので，上の 2 条件を満たすものであればどんなものでも確率測度と呼ぶ．

適切なサイズの $\sigma$-加法族を作るのに便利な概念を用意する.

**Definition (generated $\sigma$-algebra)**

$\Omega$ を集合, $\mathcal{A}$ を $\Omega$ の部分集合族とする. このとき,

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{(\mathcal{A}\subset)\mathcal{G}:\sigma\text{-加法族}} \mathcal{G}$$

を, $\mathcal{A}$ を含む最小の $\sigma$-加法族, あるいは $\mathcal{A}$ から生成される $\sigma$-加法族と呼ぶ.

- $\sigma(\mathcal{A})$ は $\sigma$-加法族である.

**Example**

$\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ の開集合全体を $\mathcal{O}$ とする. このとき

$$\mathcal{B}(R) := \sigma(\mathcal{O})$$

を $\mathbb{R}$ の Borel 集合族と呼ぶ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$ は可測空間である.

# 確率変数

**Definition (Random Variable)**

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする.

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

を満たす関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率変数と呼ぶ.

- 確率変数 $X$ に対して与えれる集合族 $\sigma(X) := \{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(R)\} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ は $\sigma$-加法族である.
- $\sigma(X)$ は確率変数 $X$ の持つ情報ととらえることができる. $X$ と $Y$ という確率変数が与えられたとき, $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$ は $Y$ の方が情報が大きいことを表す. [1]

[1] サイコロ投げで...$X$: 偶数目のとき 1 を返し, 奇数目のとき 0 を返す, $Y$: 出た目を返す, とすると $\sigma[X] \subset \sigma[Y]$ である.

# 分布測度，分布関数

**Definition**

$X:\Omega\to\mathbb{R}$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上の確率変数とする．このとき

$$\mu_X(B) := \mathbb{P}\circ X^{-1}(B) := \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)\in B\}),\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

のように与えられる $\mu_X$ を $X$ の分布測度という．また,

$$F_X(x) := \mu_X((-\infty,x])$$

を $X$ の分布関数という．

- ◇ $\mu_X$ は $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ 上の確率測度である．[2]
- ◇ 分布測度から分布関数を定めたが，実は分布関数から分布測度を一意に定めることができる．

[2]分布測度は分布関数と異なり，値域が $\mathbb{R}$ 以外の確率変数に対しても与えられる概念であるので便利である．

# 具体例

- ◇ ここでサイコロ投げを考えてみよう.
- ◇ 各目の出る確率が等しく 1/6 のサイコロを 1 回投げたとき，そのような事象の分布はどのように表現されるべきであるか.
- ◇ 初等確率論では以下のようにして与えた.
  $j = 1, 2, \dots, 6$ に対して,

$$A_j := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j\} \, (= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in \{j\}\})$$

$$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{6}, \quad j = 1, 2, \dots, 6.$$

- ◇ ここまでの用語を使ってサイコロ投げを表現しようとすると，どのように定義することになるだろうか
- ◇ 実は分布さえ定められれば実用上 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は基本的に都合の良いものをとればよい.

◇ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，確率変数 $X$ はどのように定まるか

◇ よくある例は

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\},\ \mathcal{F} = 2^{\Omega},$$

と可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ を定め，その上に

$$\mathbb{P}(\{\omega_j\}) = \frac{1}{6}, \quad X(\omega_j) = j \quad \omega_j \in \Omega$$

[3] と確率測度 $\mathbb{P}$，確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ を与えることである．

◇ このとき $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = j) = \mathbb{P}(\{\omega_j\})$ なので，サイコロ投げの分布を表現できている

---

[3]より正確に書けば，集合 $A \in \mathcal{F}$ の濃度を $\#\{A\}$ と表したときに

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\{A\}}{6} \quad A \in \mathcal{F}$$

◇ 他の例として

$$\Omega := [0,1]$$

$$\mathcal{F} = \sigma\left(\left\{\left[0,\frac{1}{6}\right],\left[\frac{1}{6},\frac{2}{6}\right],\left[\frac{2}{6},\frac{3}{6}\right],\left[\frac{3}{6},\frac{4}{6}\right],\left[\frac{4}{6},\frac{5}{6}\right],\left[\frac{5}{6},1\right]\right\}\right)$$

と可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ を定め，$\mathbb{P}$ を Lebesgue 測度，$X:\Omega\to\mathbb{R}$ を

$$X(\omega) = j, \quad \omega \in \left[\frac{j-1}{6},\frac{j}{6}\right]$$

と与えればどうか．[4]

◇ このとき，

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=j\} = \mathbb{P}\left(\left[\frac{j-1}{6},\frac{j}{6}\right]\right) = \frac{1}{6}$$

であるので，やはりこの例でもサイコロ投げの分布が表現できている．

[4] Lebesgue 測度とは $\mathbb{P}([a,b]) = b-a\,(0<a<b<1)$

- ◇ どちらの例でも $X$ の値域と
  $\mu_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\})\,(B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ は同じである．
- ◇ サイコロ投げのような，ある現象を表現したいときは $X$ の値域と $\mu_X$ を特定化してしまえば，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ は適当なものであれば基本的に何でもよいはずである．[5]
- ◇ そのため，不確実性を表現する際には確率空間を与える必要があるが，それ自体を明示的に与えることはほとんどない．初等確率論で確率空間や $X$ の可測性という概念が登場しないのはこのためである．
- ◇ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ をわざわざ与えるのは，複数の確率変数が登場したり，不確実性が部分的にしか解消されないときに，確率変数から得られる情報を $\mathcal{F}$ の部分 $\sigma$-加法族として与えることができるからである．

[5]確率変数は $X : \Omega \to \mathbb{R}$ という**関数**である．なぜ変数と命名されているかというと，確率変数の定義域は基本的に明示されずその実現値が重要であること，または確率変数をある関数空間の元として見たりすることがあるから，特定の空間の点として確率変数を認識することの方が多いからではないかと思われる．

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とはこの世界のすべてとその計測器の組を記号を用いて表現したものと言える
- 我々が世界のすべて $(\Omega, \mathcal{F})$ を特定化することは普通できるわけではないが，世界の状況がある特定のシナリオ $\omega \in \Omega$ に沿っているということを前提に，事象の生起（確率変数の実現値の集合）$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ からさかのぼって，シナリオが標本空間 $\Omega$ のどの部分に含まれるかを特定化している
- つまり，確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ とは $(\Omega, \mathcal{F})$ からの情報の露出の規則であり，確率変数の可測性が特定化の方法の正当化になっている．
- 世界のすべてにはその重みが割り当てられていて，その規則が $\mathbb{P}$ である．情報の露出 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して直接重みを割り当てるのが $\mu_X$ であって，この重みは計測器 $\mathbb{P}$ と $X$ に依存している．

# 独立性

## Definition (Independence)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間，$X, Y$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とする．

- ◇ 事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ が独立 $(A_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp A_n)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n A_k) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$
- ◇ $\sigma$-加法族 $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n$ $(\forall k, \mathcal{G}_k \subset \mathcal{F})$ が独立 $(\mathcal{G}_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_n)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall G_1 \in \mathcal{G}_1, \ldots, \forall G_n \in \mathcal{G}_n, \quad \mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n G_k) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(G_k)$
- ◇ 確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が独立 $(X_1 \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_n)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall G_1 \in \sigma(X_1), \ldots, \forall G_n \in \sigma(X_n),$
  $$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^n G_k) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(G_k)$$
- ◇ 確率変数の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立 $(X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \perp\!\!\!\perp \ldots)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall k \in \mathbb{N}, \forall \{n_j\}_{j=1}^k \subset \mathbb{N}, \; X_{n_1} \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp X_{n_k}$

- 初等確率論の授業で，独立性は排反（$A_i \cap A_j = \emptyset$）とは一般に異なると念押しされたことがあるかもしれない
- この事実は $\sigma$-加法族を情報ととらえて，独立性を「情報の独立性」と捉えれば，この事実が排反と異なるという事実についても，納得しやすいのではないだろうか．[6]
- 4 つめの確率変数列に関する独立性だけやや婉曲的で，任意に有限個の事象を固定したときに確率変数が独立であれば良いといっている

[6]例えば，ある $\sigma$-加法族の元（事象）$A$ の補集合 $A^c$ も $\sigma$-加法族に含まれているので，排反な事象 $A, A^c$ は直観的に情報として独立ではない．

- これは定義の都合上の問題で，もし 3 つめと同様に独立性を定義しようとすると，$\forall G_1 \in \sigma(X_1), \forall G_2 \in \sigma(X_2), \ldots$ に対して

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(G_k)$$

となるが，右辺が必ず 0 か 1 になってしまうのに対し，左辺は 0 か 1 になるとは限らない．この問題を任意の $n_1, \ldots, n_k$ の文言で有限個の確率変数を固定することによって解消している．
- 同様の問題から，可算個の事象（$\sigma$-加法族）の独立性も，任意の有限個の事象を固定してその独立性を確認することによって定義される．（ここでは取り上げない）

# Almost Surely

## Definition (Almost Surely)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする.
命題 $A(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ が成り立つ確率が 1 のとき，すなわち

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid A(\omega) \text{ が成立 }\}) = 1$$

のとき，$A$ **はほとんど確実に成り立つ**といい，$A$ $a.s.$ とかく.

- 例えば，$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\}) = 1$ のとき，$X = Y$ a.s.
- $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$ のとき，$\lim_{n\to\infty} X_n = X$ a.s. 等と書く.

# 期待値

◇ 確率変数の期待値をルベーグ積分によって定義する．

**Definition (Simple Function and its Expectation)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．ある $k \in \mathbb{N}$， $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$，$A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{F}$ によって，

$$Y(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

と表される確率変数を**単純関数**と呼ぶ．単純関数全体を $\mathcal{S}$ と表記する．

また，単関数 $Y = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}$ の**期待値**を以下のように定義する．

$$\mathbb{E}[Y] := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbb{P}(A_j)$$

## Definition (Expectation)

$X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の非負値確率変数とする．
非負値確率変数 $X$ の期待値を以下のように定義する．

$$\mathbb{E}[X] \coloneqq \sup\{\mathbb{E}[Y] \mid Y \in \mathcal{S},\, Y \leq X\}$$

## Definition

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とする．
$X^+ \coloneqq \max\{X, 0\}$，$X^- \coloneqq \max\{-X, 0\}$ に対し，$\mathbb{E}[X^+] < \infty$ または $\mathbb{E}[X^-] < \infty$ が成立しているとき，$X = X^+ - X^-$ の期待値を以下のように定義する．

$$\mathbb{E}[X] \coloneqq \mathbb{E}[X^+] - \mathbb{E}[X^-]$$

$\mathbb{E}[X] < \infty$ であれば $X$ は（ルベーグ）積分可能であるという．[a]

[a] $\mathbb{E}[X^+] = \infty, \mathbb{E}[X^-] = \infty$ のとき，右辺 $= \infty - \infty$ と不定形となるため定義されない．$\mathbb{E}[X]$ は $\pm\infty$ のどちらかの値をとることを許して定義される

- 今まで区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ の積分はリーマン和の極限として定義されていた
- つまり，区間 $[a,b]$ の分割を $\Pi: a=x_1<x_2<\cdots<x_n<x_{n+1}=b$ と取ったとき，点 $\xi_k\in[x_k,x_{k+1}]\,(k=1,\ldots,n)$ でのリーマン和を

$$S(\{\xi_k\}_{k=1}^n;\Pi)\coloneqq\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$$

とし，$f$ のリーマン積分を

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx\coloneqq\lim_{\max_j|x_{j+1}-x_j|\to 0} S(\{\xi_k\}_{k=1}^n;\Pi)$$

と与えた．このとき $f$ に連続性を課せば $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$ はリーマン和 $S$ の取り方によらず一意に決定されたはずである．

- ◇ 期待値を確率変数の積分で定義したいという思惑に立ち返ると，確率変数 $X$ の積分をリーマン和の極限で定義することができないことがわかる
- ◇ なぜなら，そもそもリーマン積分を定義するために，まず定義域の分割を取りリーマン和を定義しなくてはいけないが，確率変数の定義域は $\Omega$ であって，この分割および分割の長さは（リーマン積分の枠組みでは）与えられないからである．
- ◇ ではどうすれば積分が定義出来るのかということになるが，ルベーグ積分の発想は，定義域の集合の長さをその測度で与えれば良く，特に定義域で分割を取るのではなく，確率変数の中でも定数関数の和（単純関数）に話を絞って面積を与えてそれを一般の確率変数の積分の概念に拡張するというものである．
- ◇ （ある集合上で定義された）定数関数の積分は長方形の面積であり，縦と横の長さがあれば計算が可能である．

- 確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ として，ある集合 $A \in \mathcal{F}$ 上でのみ定数 $\alpha$ をとる定数関数（確率変数）$X : A \to \alpha\,(:\ \mathrm{const.})$，もしくは $X = \alpha \mathbb{I}_A$ の積分は縦（関数値）$\times$ 横（集合 $A$ の長さ）で与えられる
- A の集合の長さを $\mathbb{P}(A)$ で与えれば，$X$ の積分（期待値）は

$$\mathbb{E}[X] = \alpha \mathbb{P}(A)$$

と与えられる．さらに $\Omega$ のある部分集合上で定義された定数関数 $X_j : A_j \in \mathcal{F} \to \alpha_j :$ const. の和（単純関数）$Y = \sum_{j=1}^{k} X_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}$ の積分は

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbb{P}(A_j)$$

になるはずである．

# イメージ

◇ 一般の確率変数の積分はどのように定義されるかということになるが，単純な関数の積分で近似を定義しようとするのである.

◇ この方法の根拠の背景には，次の事実がある

**Theorem**

$(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とする.

$$X : (\Omega, \mathcal{F}) \text{ 上の}\textbf{非負値}\text{確率変数}$$

$$\Rightarrow \exists \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S} \text{ s.t. } \forall \omega \in \Omega,$$

$$Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \cdots, \quad \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = X(\omega).$$

◇ つまり，任意の確率変数は単純関数の単調増加列の各点収束極限として下から近似できるということを言っている

◇ 非負確率変数の積分（期待値）の定義はこの定理を根拠にしており，非負値確率変数に対して下から近似する単純関数の列を取ったときに，その期待値を各単純関数列の期待値の上限として与えるということをしている.

# イメージ

- 期待値を確率変数のルベーグ積分として与えることには多くの利点がある
- まず，$X$ の定義域 $\Omega$ に特別な仮定を課さなくても良いという事実が利点としてある．（順序・位相構造が無くても良い）
- また，ここでは微分を経由せずに積分を定義することが出来ているのがかなり嬉しい
  - そもそも関数の $\Omega$ 上での微分という概念を定義することは難しいし，$\Omega = \mathbb{R}$ として考えても，微分可能な関数に比べて積分可能な関数は多いはずである．
  - よって単純関数に対して積分を定義し，対象とする関数の定義を拡張することによって，広いクラスの関数を取り扱うことが出来るわけである
- さらに，先の例にも関連するがルベーグ積分は関数空間 $L^p$ 上の有界線型作用素であるという事実がある．有界線型作用素は作用させる関数のクラスを広く扱いやすい．

- ◇ 注意すべき点がいくつかある
- ◇ 抽象的に積分を定義していることによって，$\mathbb{E}[X]$ を定義通りに計算するのはハードである．積分計算をするとなるとやはりリーマン積分が便利であるため，どのタイミングでルベーグ積分とリーマン積分が一致するかを確認しておかなければいけない
- ◇ また，$\mathbb{E}[X]$ と $X$ の積分を与えた際に，定義の背後に $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 $\mathbb{P}$ があることを忘れてはならない．
- ◇ ファイナンスや統計では $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の他の確率測度 $\mathbb{Q}$ の下での期待値を計算することがしばしばある．$\mathbb{P}$ と $\mathbb{Q}$ の関連性は後述のラドンニコディムの定理で確認することができる．

# 期待値の計算例

- 各目の出る確率が $\frac{1}{6}$ のサイコロを 1 回投げるとき，その期待値を考えよう
- 以前の ▸ サイコロ投げの表現 を思い出せば
- $j = 1, 2, \ldots, 6$ について，$A_j := \{\omega_j\}$ としたとき，$\mathbb{P}(A_j) = \frac{1}{6}$ かつ

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^{6} j \mathbb{I}_{A_j}(\omega), \quad \omega \in \Omega$$

と表現できる

- このとき，$X$ は単純関数であって，その期待値は

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{6} j \mathbb{P}(A_j) = \frac{7}{2}$$

になる．

# 期待値（積分）の性質

以降 $A \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathbb{E}[X; A] := \mathbb{E}[X\mathbb{I}_A]$ と書き，$X$ の $A$ 上での積分（期待値）と呼ぶ．

**Theorem**

$X, Y$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の非負値確率変数または積分可能な関数とする [a].

$a, b \in \mathbb{R}$ に対し，次の 4 つの性質が成立する．

- ◇ $X \leq Y$ a.s. $\Rightarrow \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- ◇ $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$
- ◇ $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ が非交差な集合ならば

$$\mathbb{E}[X; \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X; A_n]$$

- ◇ $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

[a] 非負値確率変数の場合期待値は $+\infty$ をとることを許して定義される．よって

# 収束定理

**Theorem (単調収束定理，Fatou の補題)**

$X_1, X_2, \ldots$ を非負値確率変数または $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上積分可能とする．

- ◇ $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} X_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n]$
- ◇ (Monotone) $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加な列
  $(X_1(\omega) \le X_2(\omega) \le \ldots, \forall \omega \in \Omega)$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\lim_{n \to \infty} X_n].$$

- ◇ (Fatou)

$$\mathbb{E}[\liminf X_n] \le \liminf \mathbb{E}[X_n]$$

**Theorem (ルベーグの収束定理，有界収束定理)**

$X, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とし，
$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$ が成立すると仮定する．[a]

- ◇ $\exists Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上積分可能 s.t. $\forall (n, \omega), |X_n(\omega)| \leq Y$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

- ◇ $\exists M > 0$ s.t. $\forall (n, \omega), |X_n(\omega)| \leq M$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X]$$

[a] $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$

# $L^p$ 空間

以降 $\mathbb{E}$ は確率測度 $\mathbb{P}$ に関する期待値を表す．[7]

**Definition ($L^p$ space)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．実数 $p \in (0, +\infty)$ に対し，

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \text{ 上の確率変数かつ } \|X\|_p := \left(\mathbb{E}\left[|X(\omega)|^p\right]\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

- ◇ $L^p$ には種々の素晴らしい性質がある．
- ◇ 例えば，$L^p$ はノルム $\|\cdot\|_p$ から誘導される距離に関して完備な空間であり，$L^2$ 空間は適当に内積構造を導入することによってヒルベルト空間となる．（ここで $L^p$ の元で $X_n = X$ a.s. となる関数はすべて同一視することにする．）
- ◇ 今回はそれらを事実として認めて話を進める．

[7]同じ確率変数に対して別の確率測度 $\mathbb{Q}$ の下での期待値を考えることがある．その場合，$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}, \tilde{\mathbb{E}}$ などと表記する

# 確率変数の収束

## Definition

$X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数と確率変数列とし，$F_{X_n}, F_X$ を対応する分布関数とする.

- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に概収束する $(X_n \overset{a.s.}{\to} X)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$
- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に $L^p$ 収束する [a] $(X_n \overset{L^p}{\to} X)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0.$
- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に確率収束する $(X_n \overset{p}{\to} X)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\epsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon\}) = 0.$
- $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に分布収束する $(X_n \overset{d}{\to} X)$
  $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in \mathbb{R}(F_X$ の連続点$), \quad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$

---

[a] $X, X_n \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする.

### Theorem (確率変数の収束の関係)

$X, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とする.

- ◇ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に概収束するならば，確率収束する.
- ◇ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に $L^p$ 収束するならば，確率収束する.
- ◇ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $X$ に確率収束するならば，分布収束する.

- ◇ $L^p$ 収束と確率収束は $\Omega$ 上の関数の収束である
- ◇ 統計学で重要なのは確率収束と分布収束であり，統計量の収束概念として用いることよくある

# 中心極限定理と大数の法則

**Theorem (中心極限定理)**

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の独立かつ同分布な確率変数列とし，$\mu = \mathbb{E}[X_1], \sigma = \sqrt{V[X_1]} < \infty$．$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ とする．[a] このとき

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

[a] ここで $V[X] := \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

**Theorem (大数の弱法則)**

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の独立かつ同分布な確率変数列とし，$E[|X_1|^2] < \infty$ であるとする．このとき

$$\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{p} \mathbb{E}[X_1].$$

# モンテカルロ法

- 中心極限定理と大数の弱法則はどちらも重要な定理ではあるが，ここでは特に大数の弱法則に着目したい．
- 今ある確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ の分布が得られているが，$X$ の期待値 $\mathbb{E}[X]$ は計算出来ていないとする
- このとき大数の法則によれば，仮に $X$ と同分布で独立な sample の列 $\{X^{(n)}\}_{n=1}^{N}$ が十分に多く得られているならば，

$$\mathbb{E}[X] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

と近似できることを表している．

- より一般的な形で言えば，$X, \{X^{(n)}\}_{n=1}^{N}$ に関して上と同じ仮定のもとで，適当な関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{E}[g(X)] \approx \frac{1}{N} g(X_i^{(n)})$$

が成立することを意味している．このようにして $E[g(X)]$ の期待値を近似計算する方法をモンテカルロ法という
- 以下でいくつかモンテカルロ法の応用例を見よう

# モンテカルロ法の例 1

- 各目の出る確率が $\frac{1}{6}$ のサイコロを 1 回投げるとき，その期待値を考えよう
- これを確率変数 $X$ で表現したとき，その期待値は

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} i \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

  であった.
- コンピューター上で疑似的に 1 回のサイコロ投げを $N$ セット $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(N)}$ 行ったとき，その実現値の平均 $\sum_{i=1}^{N} X^{(i)}$ は期待値 $7/2$ に近いだろうか？

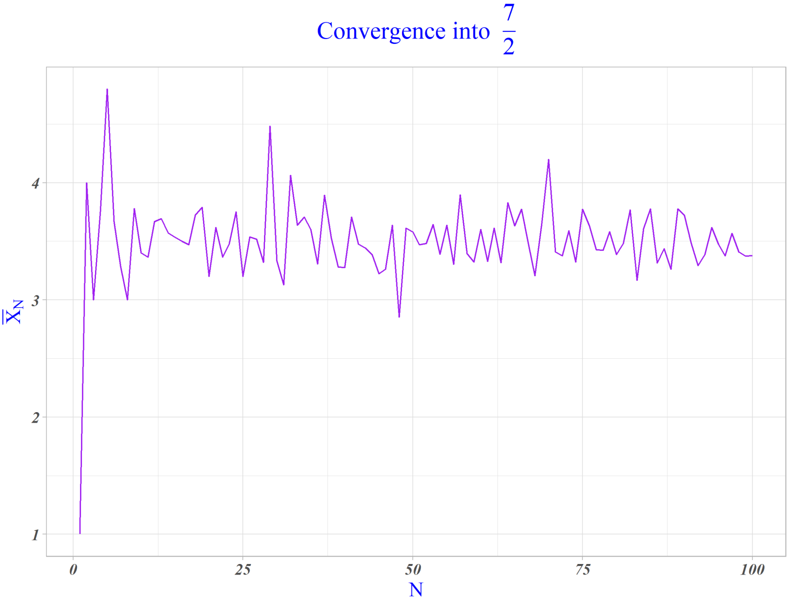


**Figure:** サイコロ投げにおける標本平均の収束

# モンテカルロ法の例 2

- モンテカルロ法で株式を原資産とするヨーロピアンコールオプションの価格を求めてみよう．
- 株式を原資産とするヨーロピアンコールオプションとは，特定の期日（**権利行使日**と呼ばれる）に株式を特定の価格（**権利行使価格**と呼ばれる）で買う権利を金融商品化したもののことである．
- つまり，このヨーロピアンコールオプションを取引したとき：
  - 株価が権利行使価格以上に値上がりすれば (株価-権利行使価格) 分だけ資産を受け取り
  - 権利行使価格以下に値下がりすれば権利を行使せず，0 だけ資産を受け取る．

  契約である．
- Black-Scholes モデルはこのヨーロピアンコールオプションの価格の理論値を与えるものである．

◇ Black-Scholes モデルの 1 つの帰結として，原資産を株式とする，権利行使日 $T > 0$，権利行使価格 $K > 0$ のヨーロピアンコールオプションの 0 期での価格 $C_0$ は次のように与えられることが理論的に知られている

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max\{S_T - K, 0\}].$$

ここで，$S_T$ は $T$ 期の株価で確率変数，$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ は確率測度 $\mathbb{Q}$ の下での期待値，$r > 0$ は無リスク利子率である．

◇ ちなみに $C_T := \max\{S_T - K, 0\}$ は $T$ 期でのオプションの価値であり，株価に依存して値が決まる

◇ 株価が $S_T$ が $Z_T^{\mathbb{Q}} \sim N(0,T)$ によって

$$S_T = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma Z_T^{\mathbb{Q}}\right\}, \quad \sigma > 0$$

と表現されるとき，コールオプションの価格 $C_0$ はどのような値になるか．ここで $S_0$ は 0 期の株価（定数）である．

◇ コンピューターによって，疑似的に株価 $T$ 期の株価が $N$ セット $S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, \ldots, S_T^{(N)}$ 得られたとする．

$$g(x) = e^{-rT} \max\{x - K, 0\}$$

としたとき，モンテカルロ法を用いればコールオプションの 0 期での価格は

$$C_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(S_T)] \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(S_T^{(i)}) =: C_0^{(N)}$$

と近似計算できる．

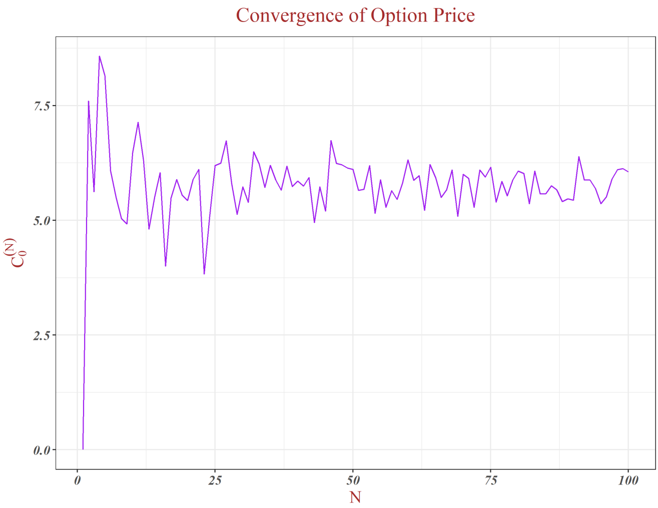


**Figure:** コールオプションの価格の平均
（$K = 100, T = 1, S_0 = 0, r = 0.06, \sigma = 0.03$ としている）

# Radon-Nikodym の定理

- $\mathbb{P}$ を $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とする.
- $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の非負確率変数 $Z$ で $\mathbb{P}$ に対して $\mathbb{E}[Z] = 1$ を満たすものがあったとき, $\mathcal{F}$ 上の関数 $\mathbb{Q}$ を

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Z; A], \quad A \in \mathcal{F}$$

と定めると, 期待値の性質から $\mathbb{Q}$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度となる.

- この逆は成立するだろうか?
- すなわち, $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に確率測度 $\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ があったとき, 任意の $A \in \mathcal{F}$ に対し

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Z; A]$$

を満たす確率変数 $Z$ があるか, という問題がある.

- 実は $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ に絶対連続性と呼ばれる，特別な仮定を課せば $Z$ の存在のみならず一意性まで保証できる．

**Definition (測度の絶対連続性)**

$\mathbb{P},\mathbb{Q}$ を可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度とする

- $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{P}$ に関して**絶対連続** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A\in\mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A)=0\Rightarrow\mathbb{Q}(A)=0$$

- $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{P}$ が**同値** $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall A\in\mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(A)=0\Leftrightarrow\mathbb{Q}(A)=0$$

## Theorem (Radon-Nikodym の定理)

$\mathbb{P}, \mathbb{Q}$ を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度とし，$\mathbb{Q}$ が $\mathbb{P}$ に関して絶対連続とする．このとき

$$\exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}) \text{ s.t. } \forall A \in \mathcal{F},\ \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Z; A]$$

が成立．$Z$ は非負値かつほとんど確実に一意であり，$\mathbb{E}[Z] = 1$ を満たす．
また，この $Z$ をラドンニコディム微分と呼び,

$$Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

と表記する.

- ◇ これはルベーグ積分論における微分理論の出発地点であり，絶対連続性は微分の十分条件である
- ◇ 一般の $\mathbb{R}$ 上の関数の微分可能性は実は Radon-Nikodym の定理の一般形から得られる（今回は紹介しない）

# 確率密度関数

**Theorem (確率密度関数)**

$X$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の $\mathbb{R}$-値確率変数とし，$\mu_X$ は $X$ の分布とする．このとき，$\mu_X$ が一次元 Lebesgue 測度 $dx$ に関して絶対連続ならば

$$\exists f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{s.t.}\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu_X(B) = \int_B f(x)\,dx$$

ここで $f$ は $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$ を満たすものとして取れる．

- ◇ 分布測度 $\mu_X$ が $\mathbb{P}$ に関して絶対連続ならば分布には確率密度関数 $f$ が存在する．
- ◇ 確率密度関数は分布関数の微分として得られるというイメージが強いかもしれない．上で与えた事実から，$x \in \mathbb{R}$ に対して，$(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ なので，

$$F_X(x) = \mu_X((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

と，我々が良く知る密度関数と一致する．

# 積率母関数

**Definition (積率母関数)**

$X$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とする.

$$\phi_X(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda X}]$$

が存在するとき，関数 $\phi_X(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ を積率母関数という.

**Theorem**

$X$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数とし，積率母関数

$$\mathbb{E}[X^n] = \phi_X^{(n)}(0)$$

ここで，$\phi_X^{(n)}$ は $\phi_X$ の $n$ 階導関数である.

# 正規分布

**Definition (正規分布)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数 $X$ の積率母関数 $\phi_X$ が以下のように与えられるとき，$X$ はパラメーター $\mu, \sigma$ の正規分布に従うといい，
$X \sim N(\mu, \sigma)$ とかく．

$$\phi_X(\lambda) = e^{\mu\lambda + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2}.$$

定義から $\mathbb{E}[X] = \mu, \mathbb{E}[X^2] = \sigma^2$ である．

# 条件付き期待値

**Theorem (Conditional Expectation)**

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする[a]．$\sigma$-加法族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ が与えられたとき，

$$\|X - Y\|_2 = \inf\{\|X - Z\|_2 \mid Z \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})\}$$

が成立するような $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ が存在する．このとき，$Y$ を $X$ の情報 $\mathcal{G}$ のもとでの条件付き期待値と呼び，$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ と表記する．

[a] 実は $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ でも条件付き期待値を定義することができる． ▸ 詳細

- 条件付き期待値は $\mathcal{G}$ 可測な**確率変数**であり，ほとんど確実に一意である．
- 初等確率論における $\mathbb{E}[X \mid Y]$ は $\mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)]$ を表していると考えてよい．[8]

[8] $y \in \mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{E}[X \mid Y = y]$ と与えたものは確率変数ではなく定数である．

**Theorem (Properties of Conditional Expectation)**

$X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ を $\sigma$-加法族とする.

- $\diamond$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathbb{E}[c_1 X + c_2 Y \mid \mathcal{G}] = c_1 \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] + c_2 \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}], \quad \text{a.s.}$$

- $\diamond$ $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \mid \mathcal{H}\right] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{H}], \quad \text{a.s.}$
- $\diamond$ $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X], \quad \text{a.s.}$
- $\diamond$ $\sigma(X) \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] = X\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}], \quad \text{a.s.}$

- $\diamond$ いずれの性質も重要である.

- $X$ の $\mathcal{G}$ に関する条件付き期待値は，$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ への直交射影である
- よって，$\mathbb{E}[X \mid Z]$ は $X$ の空間 $L^2(\Omega, \sigma(Z), \mathbb{P})$ への射影であって，$X$ の $Z$ への回帰にあたるものである．

# Stochastic Calculus

- 確率解析（Stochastic Calculus）は確率過程に関する解析学である．
- 実は確率微分方程式は形式的に与えられるものであって，それ自体数学的な性質を持つものではないから，確率過程に対する解析学を展開するためには，積分論を展開する必要がある
- 以降特に断ることなく，$\mathbb{T}$ を時間集合として扱い，$\mathbb{T} := [0, T]$, $\mathbb{T} := [0, \infty]$ もしくは $\mathbb{T} := \bar{\mathbb{Z}}_+ := \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ する．

# 1 次元確率過程

**Definition (1 次元確率過程)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．
関数

$$X : \mathbb{T} \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}$$

が，$\forall t \in \mathbb{T}$ で $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数となるとき，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元確率過程と呼び，$X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ とかく．

**Definition ($d$ 次元確率過程)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元確率過程 $X^1, \ldots, X^d$ が与えられたとき，組

$$X = (X^1, \ldots, X^d) : \mathbb{T} \times \Omega \ni (t, \omega) \mapsto (X_t^1(\omega), \ldots, X_t^d(\omega)) \in \mathbb{R}^d$$

を $d$ 次元確率過程と呼ぶ.

## Definition (サンプルパス)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を $d$ 次元確率過程とする.
$\omega \in \Omega$ を固定するごとに得られる関数

$$w(\cdot) := X_{\cdot}(\omega) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^d$$

を $X$ の sample path と呼ぶ.

- 確率過程 $X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ には二つの見方がある.
- 1 つ目は，$t \in \mathbb{T}$ を固定した時，$X_t(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ が確率変数となることである
  - つまり，確率過程 $X$ の各時点での値を観測することは，シナリオを部分的に特定化するのに役立つことを意味している
- 2 つ目は，$\omega \in \Omega$ を固定した時 $w(\cdot) := X_{\cdot}(\omega) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ が時間に依存する関数（sample path）となることである.

◇ 種々の確率過程を図示しようとしたとき，そのパスは 1 つに定まらなかったことが思い出される

◇ これは当然のことで，1 回ごとのシミュレーションで得られたパスは，いずれかの元 $\omega \in \Omega$ を固定して得られた sample path $w(\cdot) = X(\cdot, \omega) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$（の近似）でしかない．

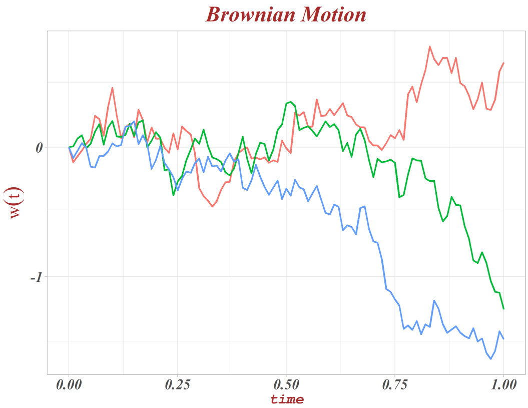


**Figure:** ブラウン運動のシミュレーション（$M = 3$）

# ブラウン運動

**Definition (one-dimentional Brownian Motion)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．次の 4 性質を満たす確率過程 $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元ブラウン運動という．

- $Z_0 = 0$ a.s.
- $Z$ の sample path が連続 a.s.
- 任意に時間 $t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k < \cdots$ を固定したとき，

$$Z_{t_0} \perp\!\!\!\perp Z_{t_1} - Z_{t_0} \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}} \perp\!\!\!\perp \ldots$$

- $s < t$ に対し，$Z_t - Z_s \sim N(0, t - s)$.

- ブラウン運動は存在する（technical なので説明は省く）
- ブラウン運動はホワイトノイズを連続時間で考えたとき，その積分と考えられるものである

より一般に $m$ 次元のブラウン運動を定義することができる．

**Definition (m-dimentional Brownian Motion)**

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする．次の 2 性質を満たす $m$ 次元確率過程 $Z = (Z^1, \ldots, Z^m)^\top$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の m 次元ブラウン運動という．

- $\forall i = 1, \ldots, m,\ Z^i = \{Z^i_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は 1 次元ブラウン運動
- $\forall t \in \mathbb{T},\ Z^1_t \perp\!\!\!\perp \ldots \perp\!\!\!\perp Z^m_t$

- ブラウン運動というのは確率過程のクラスのことであって，単一の確率過程を指していることではないことに注意されたい．
- 一口にブラウン運動といっても様々なものが考えられる
- 例えば，$m$ 次元ブラウン運動はいくつかの無相関（独立な）1 次元ブラウン運動で特徴付けられたが，相関のある 1 次元ブラウン運動も考えられる（後述）

# Filtration

## Definition (Filtration)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間とする.
次の 3 つの性質を満たす族 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration（情報増大系）と呼ぶ.

- ◇ $\forall t \in \mathbb{T}, \quad \mathcal{F}_t (\subset \mathcal{F})$ は $\sigma$-加法族
- ◇ $u \leq t \, (u, t \in \mathbb{T}) \Rightarrow \mathcal{F}_u \subset \mathcal{F}_t$

## Theorem (確率過程の情報)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の $d$ 次元確率過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ について,
$\{\sigma(X_s; s \leq t)\}_{t\in\mathbb{T}}$ は Filtration である. [a]

[a] ある $t$ について, $\sigma(X_s; s \leq t) := \sigma(\{\omega \in \Omega \mid \forall k, \forall t_1, \ldots, t_k, \forall B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), X_{t_1}(\omega) \in B_1, \ldots, X_{t_k}(\omega) \in B_k\})$

- ◇ $\sigma(X_s; s \leq t)$ を $X = \{X_t\}$ の $t$ 期までの情報と呼ぶ.

# 適合過程

**Definition (適合過程)**

$X=\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上の $d$ 次元確率過程，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を Filtration とする．

$X$ が $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$-適合過程 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall t\in\mathbb{T},\ \sigma(X_s;s\le t)\subset\mathcal{F}_t$

- ◇ 離散時間の動学モデルにおいて特にややこしかったのが，期初・期中・期末のどの時点で変数の値が決定されるのかという事項である
- ◇ 連続時間モデルにおいて，各変数の決定順序が曖昧になりがちだが，不確実性の絡むモデルを考えたとき，どの変数から不確実性が解消されるのかはかなり重要な事項である
- ◇ 実は不確実性の解消の順序は適合性が与えると考えてよい．
- ◇ 例えば $Y=\{Y_t\}$ が $\{\sigma(X_s;s\le t)\}$ 適合であるとき，$X$ の不確実性が解消すれば，$Y$ の不確実性が解消することになる．

## Definition (発展的可測性)

$\{\mathcal{F}_t\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration とする．
$d$ 次元確率過程 $X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ について，任意に $T \in \mathbb{T}$ を固定したとき，

$$X : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^d \text{ が } \mathcal{B}([0,T]) \times \mathcal{F}_T\text{-可測である}$$

i.e. $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \{(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega \mid X_t(\omega) \in B\} \in \mathcal{B}([0,T])\times\mathcal{F}_T$

ならば，確率過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ -発展的可測であると言う．

- ◇ 確率積分を定義する際に確率過程に対して発展的可測を満たすことを要請する
- ◇ Fubini の定理 [9] から $\{\mathcal{F}_t\}$-発展的可測な確率過程は $\{\mathcal{F}_t\}$-適合である

[9] 測度論の本を参照していただきたい．

# マルチンゲール

**Definition (Martingale)**

$X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元確率過程，$\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を Filtration とする．$X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が次の 3 条件を満たすとき，確率過程 $X$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールであると言う．

- $X$ は $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ 適合
- $\forall t \in \mathbb{T}, \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$
- $s \leq t\,(s, t \in \mathbb{T}) \Rightarrow \mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$.

- $X$ が $\{F_t\}$-マルチンゲールであるとき，その定義から $\forall s, t\,(s \leq t)$ に対し

$$\mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s] = 0$$

  が成立する．
- これは，確率過程 $X$ が $s$ 時点から $t$ 時点にかけて**平均的に上昇も下落もしないこと**を表している

- このことから，マルチンゲールとは公平な賭けのことであると言及されることがある
- $s$ 期において賭け金（購入額）$X_s$ で，$t$ 期のペイオフが $X_t$ のギャンブル（金融資産）に投資をしたとき[10]，ギャンブルの平均的な純収益は $\mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s]$ である
- $X = \{X_t\}$ がマルチンゲールであれば，このギャンブルの平均的な純収益が 0 になることは明らかである
- このギャンブルは胴元と打ち手にとって公平な賭けになることがわかる[11]

---

[10] 同じ期の賭け金とペイオフは同一だと考えてよい

[11] 金融資産の価格がマルチンゲール（ないし Random Walk）であるかどうかは金融市場の効率性と大きな関係がある．1980 年代までの実証ファイナンスの研究対象のメインは市場が効率的かどうかにあったが，実際その検証方法は金融資産価格がマルチンゲールかどうかを統計的に検証することであった．

# 離散時間確率過程の例

$\mathbb{T} := \bar{\mathbb{Z}}_+$ とする．
$\{\epsilon_t\}_{t\in\bar{\mathbb{Z}}_+}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の独立な確率変数列で，各 $t \in \bar{\mathbb{Z}}_+$ に対し $\epsilon_t \sim N(0,1)$ とする．
このとき，$\{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ は 1 次元確率過程であり，

$$\mathcal{F}_t^{\epsilon} := \sigma\big(\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_t\}\big)$$

は Filtration をなす．

**Example (AR(1))**

AR(1) モデル（$\rho \in (-1,1)$, $\sigma > 0$,

$$X_{t+1} = \rho X_t + \sigma\epsilon_{t+1}, \quad X_0 := x \in \mathbb{R}$$

$\{X\}_{t\in\bar{\mathbb{Z}}_+}$ は確率過程であり，$\{\mathcal{F}_t^{\epsilon}\}$-適合である．

また，有名な確率過程として Random Walk と呼ばれるものがある

### Example (Random Walk（酔歩）)

$\mathbb{T} = \bar{\mathbb{Z}}_+$ $\epsilon = \{\epsilon_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を独立な確率変数列で，$\forall t \in \mathbb{T}, \epsilon_t \sim N(0,1)$（ホワイトノイズ）とする．

$$X_{t+1} = X_t + \epsilon_{t+1}, \quad X_0 = 0 \in \mathbb{R}$$

としたとき，$X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は（1 次元）Random Walk と呼ばれる．
Random Walk $X$ は確率過程であり，$\{\mathcal{F}_t^\epsilon\}$-マルチンゲールである．

◇ $s, t \in \mathbb{T}\,(s < t)$ に対し，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s^\epsilon] &= \mathbb{E}[X_t - X_s \mid \mathcal{F}_s^\epsilon] + \mathbb{E}[X_s \mid \mathcal{F}_s^\epsilon] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{i=s+1}^{t} \epsilon_i \mid \mathcal{F}_s^\epsilon] + X_s \quad (\because X \text{ は } \{\mathcal{F}_t^\epsilon\}\text{-適合}) \\
&= \mathbb{E}[\sum_{i=s+1}^{t} \epsilon_i] + X_s = X_s.
\end{aligned}$$

## Example (Stochastic Difference Equation)

$\rho, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．[a]

$$X_{t+1} = \rho(X_t) + \sigma(X_t)\,\epsilon_{t+1}, \quad X_0 = x \in \mathbb{R}$$

としたとき，$X = \{X_t\}$ を（1 次元）確率差分方程式（Stochastic Difference Equation）と呼ぶ．$X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は確率過程であり，$\{\mathcal{F}_t^\epsilon\}$-適合である．

[a] 特に Borel-可測関数とする．$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ がボレル可測であるとは，$\forall B \in \mathcal{B}(R)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ となることである．

確率差分方程式は

$$X_{t+1} = \rho(X_t) + \sigma(X_t)\,\epsilon_{t+1}$$

- ◇ $\rho(x) = \rho x, \sigma(x) \equiv \sigma > 0$ のとき AR(1) モデル
- ◇ $\rho(x) = x, \sigma(x) \equiv 1$ のとき，Random Walk

に一致する

# 連続時間確率過程の例

次に連続時間確率過程の具体例を見てみよう．
以降 $\mathbb{T} = [0, T]$ $(T > 0)$ かつ，$Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上のブラウン運動とし，[12]

$$\mathcal{F}_t^Z = \sigma(\{Z_s; s \leq t\}), \quad t \in \mathbb{T}$$

と定める．（次元は何でもよい）

**Definition**

$\{\mathcal{F}_t^Z\}$ をブラウン運動 $Z$ による standard Filtration と呼ぶ．

- standard Filtration という名称は，この Filtration が確率過程のモデリングおよび確率解析の展開において，中心的な役割を担うことから来ている
- standard Filtration に対して適合な確率過程は，不確実性の源泉（ノイズ）がブラウン運動で十分であると示唆している

[12] 以降の議論は $\mathbb{T} = [0, \infty]$ としてもほとんど成り立つが，$\mathcal{L}$ や $\mathcal{M}^2$ の与え方を工夫しなくてはいけない．

以降 $Z = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は 1 次元ブラウン運動とする.

**Example (Brownian Motion)**

ブラウン運動 $Z = \{Z_t\}$ は確率過程である.
また, $\{\mathcal{F}_t^Z\}$-マルチンゲールである.

実際, $s < t$ に対して

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_t \mid \mathcal{F}_s^Z] &= \mathbb{E}[Z_t - Z_s \mid \mathcal{F}_s^Z] + \mathbb{E}[Z_s \mid \mathcal{F}_s^Z] \\ &= \mathbb{E}[Z_t - Z_s] + Z_s \\ &= Z_s.\end{aligned}$$

が成立する.

## Example (Brownian Motion with drift)

$X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ を $\mu \in \mathbb{R}$ によって

$$X_t(\omega) := \mu t + Z_t(\omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$$

としたとき，$X$ をドリフト付きのブラウン運動と呼ぶ.
$X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は確率過程であり，$\{\mathcal{F}_t^Z\}$ 適合過程である.

## Example (Geometric Brownian Motion)

$Y : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ を $\alpha \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ によって

$$Y_t(\omega) := \exp\{\alpha t + \sigma Z_t(\omega)\}, \quad (t, \omega) \in \mathbb{T} \times \Omega$$

としたとき，$Y$ を幾何ブラウン運動と呼ぶ.
$Y = \{Y_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は確率過程であり，$\{\mathcal{F}_t^Z\}$ 適合過程である.

# 二次変分

## Definition (共変分，二次変分)

$X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}, Y = \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の sample path が連続な 1 次元確率過程とする．
このとき，以下のようにして定義される確率過程 $\langle X, Y\rangle = \{\langle X, Y\rangle_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $X, Y$ の共変動過程といい，特に $\langle X, X\rangle$ を $X$ の二次変分という．

$$Q(X,Y)_t^{(n)}(\omega) := \sum_{i=0}^{2^n-1} |X_{t_{i+1}^{(n)}}(\omega) - X_{t_i^{(n)}}(\omega)||Y_{t_{i+1}^{(n)}}(\omega) - Y_{t_i^{(n)}}(\omega)|$$

$$\langle X, Y\rangle_t := \operatorname*{p-lim}_{n\to\infty} Q(X,Y)_t^{(n)}$$

ここで $t_i^{(n)} = \frac{i}{2^n}t$ であり，p-lim は確率収束極限を表している．

◇ 確率過程がマルチンゲールである場合，共変分・二次変分には以下の素晴らしい性質がある

**Theorem**

$X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}, Y = \{Y_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の sample path が連続な 1 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールとする．このとき，

$$M = \{M_t\} := \{X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t\}_{t \in \mathbb{T}}$$

は $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールである．とくに

$$N = \{N_t\}_{t \in \mathbb{T}} := \{X_t^2 - \langle X, X \rangle_t\}_{t \in \mathbb{T}}$$

は $\{\mathcal{F}_t\}$ マルチンゲールとなる．

**Theorem** (1 次元ブラウン運動の二次変分)

$Z = \{Z_t\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元ブラウン運動とする．
このとき，$\langle Z, Z\rangle_t = t$ であり，特に $\{Z_t^2 - t\}$ は $\{\mathcal{F}_t^Z\}$-マルチンゲールである．

**Theorem** ($m$ 次元ブラウン運動の二次変分)

$Z = (Z^1, \ldots, Z^m)$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の $m$ 次元ブラウン運動とする．
このとき，各 $t \in \mathbb{T}$ で

$$\langle Z^i, Z^j\rangle_t = \begin{cases} t & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

となる．

# ブラウン運動の特徴

- 基本的に $\{\mathcal{F}_t^Z\}$ を使えば十分な場面も多いが，より一般の Filtration とブラウン運動（ないし $\{\mathcal{F}_t^Z\}$）の対応関係が必要になることがあるため，以下を定義しておく

**Definition ($\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動)**

$\{\mathcal{F}_t\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration とする．
$m$ 次元ブラウン運動 $Z = (Z^1, \ldots, Z^m)$ が次の 2 条件を満たすとき，
$Z$ を $m$ 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動と呼ぶ．

- $Z$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-適合
- $s, t \in \mathbb{T}\,(s \le t) \Rightarrow \sigma(Z_t - Z_s)$ と $\mathcal{F}_s$ が独立

- 当然 $m$ 次元ブラウン運動 $Z$ は $m$ 次元 $\{\mathcal{F}_t^Z\}$ ブラウン運動である．

**Theorem (Properties of Brownian Motion)**

$\{\mathcal{F}_t\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration とし，$Z$ を 1 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動とする．

- $\diamond$ ブラウン運動 $Z = \{Z_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールである

$t, s \in \mathbb{T}$ に対し，

- $\diamond$ $\mathbb{E}[(Z_t - Z_s)^3] = 0$
- $\diamond$ $\mathbb{E}[(Z_t - Z_s)^4] = 3(t-s)^2$
- $\diamond$ $\mathbb{E}[Z_t Z_s] = \min\{t, s\}$

$s > 0$ を任意に固定する．$\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+s}$, $W_t := Z_{t+s} - Z_t \, (t \in \mathbb{T})$ としたとき，

- $\diamond$ $W = \{W_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は 1 次元 $\{\mathcal{G}_t\}$-ブラウン運動である．

ここで

$$\mathcal{M}^2(\mathbb{T},\{\mathcal{F}_t\}) := \Big\{ M:\mathbb{T}\times\Omega\to\mathbb{R} \mid M \text{ は } \{\mathcal{F}_t\} \text{ マルチンゲールかつ } \|M\|_{\mathcal{M}} := \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}[M_t^2] < \infty \Big\}$$

$$\mathcal{M}_c^2(\mathbb{T},\{\mathcal{F}_t\}) := \Big\{ M\in\mathcal{M}^2(\mathbb{T},\{\mathcal{F}_t\}) \mid M \text{ は sample path が連続} \Big\}$$

とする．[13]

**Theorem (Levy によるブラウン運動の特徴づけ)**

$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ を確率空間，以下の 2 条件は同値である．

- ◇ $Z=\{Z_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は 1 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動
- ◇ $Z\in\mathcal{M}_c^2(\mathbb{T},\{\mathcal{F}_t\})$ かつ $\{\langle Z,Z\rangle_t\}_{t\in\mathbb{T}}=\{t\}_{t\in\mathbb{T}}$

[13] もし $\mathbb{T}:=[0,\infty]$ としたいならば $\|M\|_{\mathcal{M}^2} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\min\{\sup_{t\in[0,n]}\mathbb{E}[M_t^2],1\}}{2^n}$ と定める必要がある．

# マルチンゲール変換

- ◇ 伊藤積分を導入する前にマルチンゲール変換を与える
- ◇ マルチンゲール変換は離散版伊藤積分といえるもので，伊藤積分に対する直観はマルチンゲール変換から得られる

**Definition (Martingale)**

$\mathbb{T} := \bar{\mathbb{Z}}_+$，$\{\mathcal{F}_t\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration とする．
$\Delta = \{\Delta_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を有界な $\{\mathcal{F}_t\}$-適合過程としたとき，$\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲール $M = \{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ に対して

$$H_M(\Delta)_t := \sum_{i=0}^{t-1} \Delta_i \left(M_{i+1} - M_i\right)$$

と確率過程 $H_M(\Delta) := \{H_M(\Delta)_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を定義する．
このとき，$H_M(\Delta)$ を確率過程 $\Delta$ の $M$ によるマルチンゲール変換といい，単に $H_M$ と表記したときは $M$ によるマルチンゲール変換という．

## Theorem (Properties of Martingale)

$\mathbb{T} := \bar{\mathbb{Z}}_+$，$\{\mathcal{F}_t\}$ を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration とする．
$M$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールであるとし，$H_M$ を $M$ によるマルチンゲール変換とする．このとき，

- ⋄ 任意の有界な $\{\mathcal{F}_t\}$ 適合過程 $\Delta$ に対して，
  $H_M(\Delta) = \{H_M(\Delta)_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$ マルチンゲールである

◇ マルチンゲール変換の直観は何か

◇ $t \in \mathbb{T} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ として，$S_t$ を $t$ 期初の株価，$\Delta_t$ を $t$ 期初の株式の保有単位とする

◇ このとき，ある $i$ に対し

$$\Delta_n(S_{i+1} - S_i)$$

は $i$ 期初から $i+1$ 期初にかけて株式を保有することによる利益となる

◇ よってすなわち，

$$H_S(\Delta)_t := \sum_{i=0}^{t-1} \Delta_i(S_{i+1} - S_i)$$

は 0 期初から $t$ 期初までの株式保有による利益となる [14]

[14] $S = \{S_t\}$ がマルチンゲールのとき，上で与えた定理から，任意の $\Delta = \{\Delta_t\}$ に対して，マルチンゲール変換 $H_S(\Delta) = \{H_S(\Delta)_t\}$ はマルチンゲールとなる．この事実は「**公平な賭けに対してどのような賭け方をしても，公平な賭けに変わりない**」ことを示唆している」．

# 伊藤積分とは何か

- 伊藤積分はマルチンゲール変換の極限として得られる確率過程である
- 伊藤積分を広いクラスの確率過程に対して定義する方法があるが，ここでは紹介しない ▸ 参考
- これ以降以下の確率過程のクラスを考える

**Definition ($\mathcal{L}^2$ 過程)**

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\}) := \Big\{ X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R} \mid X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}} : \{\mathcal{F}_t\}\text{-発展的可測}, \\ \|X\|_{\mathcal{L}^2} := \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}[\int_0^t X_s^2\, ds] < \infty \Big\}$$

## Definition (伊藤積分)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の sample path が連続な 1 次元確率過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \{F_t\})$ をとる．各 $t \in \mathbb{T}$ に対し

$$t_i^{(n)} := \frac{i}{2^n}t, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^{n-1}$$

をとる．このとき,

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} X_{t_i}\left(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i}\right) \xrightarrow{L^2} \int_0^t X_s\, dM_s =: I(X)_t$$

となる確率過程 $I(X) = \{I(X)_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $X$ の $Z = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ による伊藤積分と言う．

# 伊藤積分の性質

**Theorem (Properties of Itô Integral)**

- （期待値 0）

$$\mathbb{E}[\int_0^t X_s\, dZ_s] = 0$$

- （連続性）伊藤積分 $I(X) = \{\int_0^t X_s\, dZ_s\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールかつ sample path が連続である．
- （等長性）

$$\mathbb{E}[\Big(\int_0^t X_s\, dZ_s\Big)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t X_s^2\, ds]$$

- いずれの性質も重要である．
- 伊藤積分もやはりマルチンゲール変換と同様の直観を持つのがよい．

### Theorem (Itô Representation Theorem)

$T>0$, $X$ を $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上の確率変数とする.

$$
\begin{aligned}
&X \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^Z,\mathbb{P}) \\
\Longleftrightarrow & \xi \in \mathcal{L}^2([0,T],\{\mathcal{F}_t^Z\}) \text{ s.t. } X=\mathbb{E}[X]+\int_0^T \xi_t\,dZ_t
\end{aligned}
$$

- 先程伊藤積分は確率過程であると言及した. ここで $\int_0^T \xi_t\,dZ_t$ は $T$ を固定しているため確率変数である.
- 伊藤の表現定理の主張は次のように言い換えることができる：$T>0$ に対し,

$$
\mathcal{I}(T) \coloneqq \left\{ I=\int_0^T \xi_t\,dZ_t \mid \xi=\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{T}} \in \mathcal{L}^2([0,T],\{\mathcal{F}_t^Z\}) \right\}
$$

と置いたとき,

$$
L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^Z,\mathbb{P})=\{c+I \mid c\in\mathbb{R}, I\in\mathcal{I}(T)\}
$$

である.

◇ 伊藤の表現定理から次の定理をすぐに与えることができる.

**Theorem (Martingale Representation Theorem)**

$M=\{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{T},\{\mathcal{F}_t^Z\})$ とする.

$$
\begin{aligned}
& M=\{M_t\}_{t\in\mathbb{T}} \text{は} \{\mathcal{F}_t^Z\}\text{-マルチンゲール} \\
\Longleftrightarrow\ & \exists!\xi=\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{T}}\in\mathcal{L}^2(\mathbb{T},\{\mathcal{F}_t^Z\}), M_t=\mathbb{E}[M_0]+\int_0^t\xi_t\,dZ_t,\ t\in\mathbb{T}.
\end{aligned}
$$

◇ ブラウン運動に駆動される連続マルチンゲールは伊藤積分によって表現可能であると言っている

◇ 伊藤積分は連続マルチンゲールであるから, $M=\{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は連続過程となる.

# 微分方程式再考

- 一般に**微分方程式**とは，時間に依存する関数 $x_{\cdot} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ が解となる方程式のことであって，関数 $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ によって

$$\frac{dx_t}{dt} = \mu(t, x_t) \quad x_0 = c \in \mathbb{R}$$

  と表現された.
- この方程式はシンプルながら $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を適当に変えることによって，**deterministic なものに限れば**一般性の高い時系列モデルを表現できた．[15]
- では，不確実性のある時系列モデル（確率過程）を表現する微分方程式を作ることはできるだろうか
- 微分方程式の一般化として，非常に多くの確率過程を表現するのに役立つのが確率微分方程式である

[15]例えば $\mu(t, x) = \mu x$ $(\mu \in \mathbb{R})$ と置けば，$x_t = ce^{\mu t}$ という時系列モデルを表現できた.

# Wong-Zakai 変換

- ◇ 先程の微分方程式にノイズを追加すると微分方程式を拡張出来るのではないかと考えるのは自然である．すなわち，独立な正規確率変数の族 $\epsilon = \{\epsilon_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ ($\epsilon_t \sim N(0,1)$) を加えて

$$
\begin{aligned}
& \frac{dX_t}{dt} = \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\epsilon_t \\
\Leftrightarrow \quad & dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)\epsilon_t dt \\
\Leftrightarrow \quad & X_t = \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\epsilon_s \, ds
\end{aligned}
$$

  と表現する方法である．
- ◇ 確率微分方程式は $\int_0^t \sigma(s, X_s)\epsilon_s ds$ を伊藤積分の形式的な $\int_0^t \sigma(s, X_s) dZ_s$ で代用するものであり，
- ◇

$$
X_t = \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dZ_s
$$

  と表したものである．

## Definition (1 次元伊藤過程)

$Z=\{Z_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上の 1 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動とする．1 次元確率過程 $X:\mathbb{T}\times\Omega\to\mathbb{R}$ が以下のように表されるとき，$X$ を 1 次元伊藤過程と呼ぶ.

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s,X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)\,dZ_s, \quad X_0 = x\in\mathbb{R},$$

ここで $\mu:\mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \sigma:\mathbb{T}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は Lipschitz 条件および Growth 条件：$\exists K>0$ s.t.

$$\begin{aligned}
&\forall t\in\mathbb{T},\forall x,y\in\mathbb{R}, && |\mu(t,x)-\mu(t,y)|+|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)|\le K|x-y|,\\
&\forall t\in\mathbb{T},\forall x\in\mathbb{R}^n, && |\mu(t,x)|+|\sigma(t,x)|\le K(1+|x|)
\end{aligned}$$

を満たすとする.

伊藤過程 $X=\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は形式的に確率微分方程式で表現する.

$$dX_t = \mu(t,X_t)\,dt + \sigma(t,X_t)\,dZ_t, \quad X_0 = x\in\mathbb{R}$$

# 確率微分方程式の直観

- 伊藤過程 $X$ を与える確率微分方程式 (SDE) が $\mu, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ によって以下のように与えられるとする.

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dZ_t,$$

このとき，この SDE の直観をやや厳密さを犠牲にしつつ説明しよう.

- ちなみにこの場合の $\mu$ をドリフト (drift) 係数，$\sigma$ を拡散 (diffusion) 係数と呼び，解となる確率過程 $X$ を伊藤拡散過程と呼ぶ.

- 応用上伊藤拡散過程を扱うことが多いが，それは上のようにして定式化される伊藤拡散過程が自然に Markov 性を持つからである．今回はこの話題に触れないが，伊藤拡散過程を用いて与えられる諸定理はこの Markov 性を背後で用いていると考えてよい.

◇ さて伊藤拡散過程を与える SDE の直観を与えよう．$\Delta t > 0$ を十分小さくとったとき，$\Delta t \approx dt$ とすると，
$\Delta X_t := X_{t+\Delta t} - X_t \approx dX_t$，$\Delta Z_t := Z_{t+\Delta t} - Z_t \approx dZ_t$ と考えられる．このとき，

$$dX_t \approx \Delta X_t \approx \mu(X_t)\,\Delta t + \sigma(X_t)\Delta Z_t,$$

となる．[16]

◇ この両辺の関係は，時間区間 $[t, t+dt]$ において，時系列過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ がどれだけ変化するかがおおよそ右辺のようにして与えられることを表している．

◇ 特にその変化の量は $\mu$ と $\sigma$ によってスケーリングされている．$\mu(X_t)$ が正であるならば，$X$ は時間区間 $[t, t+dt]$ で上昇傾向，$\sigma(X_t)$ が大きいほど volatile になることを表している．

[16] 一般に $\Delta X_t \approx \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,\Delta Z_t$ は等号で成り立たないことに注意．本来左辺は SDE から $\Delta X_t = \int_t^{t+\Delta t} \mu(t, X_s)\,ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s, X_s)\,dZ_s$ と与えられる．

# 具体的な伊藤過程 1

◇ 例えば冒頭の Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$dX_t = -\theta X_t \, dt + \sigma \, dZ_t, \quad \sigma > 0$$

であれば,

$$dX_t \approx \Delta X_t \approx -\gamma X_t \, \Delta t + \sigma \, \Delta Z_t$$

となる.

◇ $\Delta X_t = X_{t+\Delta t} - X_t$ であるから,

$$X_{t+\Delta t} = X_t + -\gamma X_t \Delta t + \sigma \, \Delta Z_t$$

◇ これがもし $\Delta t = 1$ であれば,

$$X_{t+1} = X_t - \gamma X_t + \sigma \epsilon_{t+1}, \quad \epsilon_{t+1} := Z_{t+1} - Z_t \sim N(0,1)$$

と,パラメーター $1-\gamma$ の AR(1) モデルに一致している.[17]

[17] つまり,Ornstein-Uhlenbeck 過程は $\gamma$ の値が大きいほど平均回帰的になり,逆に $\gamma$ の値が 0 に近いほど平均回帰性を失い,ブラウン運動(Random Walk)に近い動きをすることが想像できる.

# 具体的な伊藤過程 2

◇ 同様に幾何ブラウン運動

$$dY_t = \mu Y_t \, dt + \sigma Y_t \, dZ_t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

の近似は

$$dY_t \approx \Delta Y_t \approx \mu Y_t \, \Delta t + \sigma Y_t \, \Delta Z_t$$

となる.

◇ このとき

$$\frac{dY_t}{Y_t} \approx \mu \Delta t + \sigma \, \Delta Z_t,$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{dY_t}{Y_t} \mid \mathcal{F}_t\right] \approx \mu \Delta t, \quad \mathrm{Var}\left[\frac{dY_t}{Y_t} \mid \mathcal{F}_t\right] \approx \sigma^2 \Delta t$$

- これは $[t, t+dt]$ 区間で近似的に $Y$ の平均的な上昇率が $\mu$，平均的な変動率が $\sigma$ で与えられることを表している．

- 幾何ブラウン運動は金融商品の価格のモデルに使うことが多い．

- 幾何ブラウン運動を使う際，$\mu$ を収益率，$\sigma$ をボラティリティと想定する．

## Definition ($n$ 次元伊藤過程)

$Z=(Z^1,\dots,Z^m)^\top$ を確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上の $m$ 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動とする．$n$ 次元確率過程 $X=(X^1,\dots,X^n):\mathbb{T}\times\Omega\to\mathbb{R}$ が以下のように表されるとき，$X$ を $n$ 次元伊藤過程と呼ぶ．

$$X_t^i=X_0^i+\int_0^t \mu_i(t,X_s)\,ds+\sum_{j=1}^m\int_0^t \sigma_{ij}(t,X_s)\,dZ_s^j,\quad X_0^i=x\in\mathbb{R},$$

ここで $\mu^i:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\sigma_{ij}:\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ は Lipschitz 条件及び Growth 条件：$\exists K>0$ s.t.

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{T},\forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ &|\mu(t,x)-\mu(t,y)|+\|\sigma(x)-\sigma(y)\|\le K|x-y|,\\ \forall t\in\mathbb{T},\forall x\in\mathbb{R}^n,\ &|\mu(t,x)|+\|\sigma(t,x)\|\le K(1+|x|)\end{aligned}$$

を満たすとする．[a] 定義から $X$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程である．

[a] $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_n)^\top,\sigma=[\sigma_{ij}]_{ij}$ かつ，$\|\sigma(t,x)\|^2=\sum_{ij}|\sigma_{ij}(t,x)|^2$ である．

◇ $n$ 次元伊藤過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ も形式的に SDE として

$$
\begin{aligned}
& dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dZ_t, \quad X_0 = x \in \mathbb{R} \\
& \mu : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \sigma : \mathbb{T}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}, \\
& Z : m \text{ 次元ブラウン運動}
\end{aligned}
$$

と表すことが多い.

◇ 例えば 1 次元伊藤過程の組 $X = (Y^1, Y^2)$：($Z$ は 1 次元ブラウン運動)

$$
\begin{aligned}
dY_t^1 &= \mu^1(t, Y_t^1)\,dt + \sigma^1(t, Y_t^1)\,dZ_t \\
dY_t^2 &= \mu^2(t, Y_t^2)\,dt + \sigma^2(t, Y_t^2)\,dZ_t
\end{aligned}
$$

は多次元の伊藤過程と解釈できる.

# 伊藤の公式

**Theorem (Itô Formula)**

$f \in C^2(\mathbb{R})$ をとる．
1 次元ブラウン運動 $Z = \{Z_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ によって $Y_t := f(Z_t)$ として得られる 1 次元確率過程 $Y = \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は

$$\begin{aligned} dY_t = df(Z_t) &= f'(Z_t)\,dZ_t + \frac{1}{2} f''(Z_t)\,d\langle Z, Z\rangle_t \\ &= f'(Z_t)\,dZ_t + \frac{1}{2} f''(Z_t)\,dt \end{aligned}$$

と表現できる．[a]

---

[a]ただし，$f'(Z_t) := f'(x)|_{x=Z_t}$，　$f''(Z_t) := f''(x)|_{x=Z_t}$.

- $\diamond$ $d\langle Z, Z\rangle_t$ は

$$(dZ_t)^2 \quad \text{もしくは} \quad (dZ_t)(dZ_t)$$

とかくことが多い．すなわち，

$$df(Z_t) = f'(Z_t)\,dt + \frac{1}{2}f''(Z_t)\,(dZ_t)(dZ_t)$$

である．

- $\diamond$ $d\langle Z, Z\rangle_t = dt$ という演算規則は非常に便利である．

## Theorem (Itô Formula in 1-dim)

$f \in C^2(\mathbb{R})$ をとる.

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dZ_t$$

と表せる 1 次元伊藤拡散過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $Y_t := f(X_t)$ として得られる 1 次元確率過程 $Y = \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は

$$\begin{aligned} dY_t = df(X_t) &= f'(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\,d\langle X, X\rangle_t \\ &= \left[f'(X_t)\mu(X_t) + \frac{1}{2}f''(X_t)\sigma^2(X_t)\right]dt + f'(X_t)\sigma(X_t)\,dZ \end{aligned}$$

と表現できる. [a] ここで $d\langle X, X\rangle_t = \sigma^2(X_t)\,dt$.

[a] ただし, $f'(X_t) := f'(x)|_{x=X_t}$, $\quad f''(X_t) := f''(x)|_{x=X_t}$.

上の伊藤の公式は

$$df(X_t) = f'(X_t)\,dt + \frac{1}{2}f''(X_t)\,dX_t dX_t$$

と表現されることの方が多い．以下の演算規則

$$(dZ_t)(dZ_t) = dt, \quad dZ_t dt = dt dZ_t = dt dt = 0$$

を用いれば,

$$dX_t dX_t = (\mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dZ_t)(\mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dZ_t) = \sigma^2(X_t)\,dt$$

と演算できる．

## Theorem

$f \in C^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R}^n)$ に対し,

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dZ_t$$

と表せる 1 次元伊藤過程 $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ に対し, $Y_t := f(t, X_t)$ として得られる 1 次元確率過程 $Y = \{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は伊藤過程であって

$$\begin{aligned} dY_t = df(t, X_t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)\, dX_t^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)\, d\langle X^i, X^j\rangle_t \end{aligned}$$

と表現できる. [a]

---

[a] ただし, $\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) := \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)|_{x=X_t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t) := \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)|_{x=X_t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x)|_{x=X_t}$ である.

- ◇ 伊藤過程 $X = \{X_t\}$ に対して，$\{f(X_t)\}$ として得られる確率過程は伊藤過程である．
- ◇ よって伊藤の公式を適用して得られた確率過程に対し，さらに $g(f(X_t))$ として伊藤の公式を適用することができる．
- ◇ $d\langle X^i, X^j\rangle_t$ は $(dX_t^i)(dX_t^j)$ と表記することが多い．その演算は $n$ 次元ブラウン運動 $Z$ の演算規則

$$(dZ_t^i)(dZ_t^j) = \begin{cases} dt & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

を用いて

$$d\langle X_t^i, X_t^j\rangle_t = [\sigma\sigma^\top]_{ij}\sigma_{kj}\, dt$$

と与えられる．

# 伊藤の公式の応用例 1

伊藤の公式を用いると

$$dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dZ_t,$$

の解析解を求めることができる．$f(x) = \log x$ とすると，

$$\begin{aligned} d\log X_t &= \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}\,(dX_t)(dX_t) \\ &= \frac{1}{x_t}(\mu\,dt + \sigma\,dZ_t) - \frac{1}{2X_t^2}(\sigma^2 X_t^2\,dt) \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dZ_t, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \log X_t = \log X_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t,$$

$$\Rightarrow \quad X_t = X_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t\right\}.$$

# 伊藤の公式の応用例 2

◇ 最適化問題

$$V(t, X_t) = \max_{\{u_t\}} \mathbb{E}_t\Big[\int_t^\infty f(s, X_s, u_s)\,ds\Big]$$
$$\text{s.t. } dX_t = \mu(t, X_t, u_t)\,dt + \sigma(t, X_t, u_t)\,dZ_t$$

の解を考える．ここで $X = \{X_t\}$ は一次元確率過程で，解が一意的に存在すると仮定する．

◇ このとき，最適化の必要条件は何か．

最適解が確率過程 $u^* = \{u_t^*\}$ として得られているとき,

$$\begin{aligned} V(t, X_t) &:= \mathbb{E}_t[\int_t^\infty f(s, X_s, u_s^*)\, ds] \\ &= \mathbb{E}_t[\int_t^{t+\Delta t} f(s, X_s, u_s^*)\, ds] + \mathbb{E}_t[\int_{t+\Delta t}^\infty f(s, X_s, u_s^*)\, ds] \\ &= \mathbb{E}_t[\int_t^{t+\Delta t} f(s, X_s, u_s^*)\, ds] + \mathbb{E}_t[V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t})] \end{aligned}$$

が成立する．この方程式をベルマン方程式と呼ぶ.

このとき，$V \in C(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ であれば，伊藤の公式から

$$
\begin{aligned}
dV(t, X_t) &= \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial x}\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,(dX_t)^2 \\
&= \frac{\partial V}{\partial t}\,dt + \frac{\partial V}{\partial x}\,\left[\mu\,dt + \sigma\,dZ_t\right] + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dt \\
&= \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]\,dt + \sigma\frac{\partial V}{\partial x}\,dZ_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(t+\Delta t, X_{t+\Delta t}) = V(t, X_t) + \int_t^{t+\Delta t}\left[\frac{\partial V}{\partial s} + \mu\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]\,ds \\
+ \int_t^{t+\Delta t}\sigma\frac{\partial V}{\partial x}\,dZ_s
\end{aligned}
$$

これを上式に代入すれば

$$
0 = \mathbb{E}_t[\int_t^{t+\Delta t} f(s, X_s, u_s^*)\,ds] + \mathbb{E}_t\left[\int_t^{t+\Delta t}\left[\frac{\partial V}{\partial s} + \mu\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right]\,ds\right.
$$

が成立する．

$\Delta t \to 0$ とたとき，微分積分学の基本定理から

$$
\begin{aligned}
0 = f(t, X_t, u_t^*) + \frac{\partial V}{\partial t}(t, X_t) &+ \mu(t, X_t, u_t^*)\frac{\partial V}{\partial x}(t, X_t) \\
&+ \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t, u_t^*)\frac{\partial V}{\partial x^2}(t, X_t, u_t^*)
\end{aligned}
$$

が成立する．この式を Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式（HJB 方程式）と呼ぶ.

# 伊藤の積・商の公式

**Theorem (積の公式)**

$X=\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}, Y=\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を 1 次元伊藤過程とする．このとき，

$$d(X_tY_t)=X_t\,dY_t+Y_t\,dX_t+d\langle X,Y\rangle_t.$$

**Theorem (商の公式)**

$X=\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}, Y=\{Y_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を 1 次元伊藤過程とする．このとき，

$$d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right)=\frac{X_t}{Y_t}\left[\frac{1}{X_t}\,dX_t-\frac{1}{Y_t}\,dY_t-\frac{1}{X_tY_t}\,d\langle X,Y\rangle_t+\frac{1}{Y_t^2}\,d\langle Y,Y\rangle_t\right].$$

$f(x,y)=xy$，伊藤過程 $X,Y$ に対して，$Z=f(X,Y)$ として伊藤の公式を適用すれば[18]

$$
\begin{aligned}
dZ_t = d\left(X_tY_t\right) &= Y_t\,dX_t + X_t\,dY_t \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(0\,(dX)^2 + 1\,dXdY + 1\,dYdX + 0\,(dY)^2\Big) \\
&= Y_t\,dX_t + X_t\,dY_t + dX_tdY_t
\end{aligned}
$$

となる

[18] $f_x(x,y)=y, f_y(x,y)=x, f_{xx}(x,y)=0, f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=1, f_{yy}(x,y)=0$

$f(x,y)=x/y$，伊藤過程 $X,Y$ に対して，$Z=f(X,Y)$ として伊藤の公式を適用すれば[19]

$$
\begin{aligned}
dZ = d\left(\frac{X}{Y}\right) &= \frac{1}{Y}\,dX + \frac{-X}{Y^2}\,dY \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(0\,dX + \frac{-1}{Y^2}\,dXdY + \frac{-1}{Y^2}\,dYdX + \frac{2X}{Y^3}\,(dY)^2\right) \\
&= \frac{X}{Y}\left[\frac{dX}{X} - \frac{dY}{Y} - \frac{dX}{X}\frac{dY}{Y} + \left(\frac{dY}{Y}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

となる

[19] $f_x(x,y)=y^{-1}, f_y(x,y)=-xy^{-2}, f_{xx}(x,y)=0, f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-y^{-2}, f_{yy}(x,y)=2xy^{-3}$

# Feynman-Kac Formula

## Definition (generator)

$X = \{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ を

$$dX_t = \mu(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dZ_t,$$

と表せる 1 次元伊藤拡散過程とする．
適当な関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathcal{A}_X := \mu \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

と定義する．[a] このとき $A_X$ を確率過程 $X$ の生成作用素（generator）という．

[a] 普通 $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ とするが，$f \in C^2(\mathbb{R})$ を想定してよい．

## Theorem (Feynman-Kac Formula)

$f, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を適当な関数とする [a].
$V : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$V(t,x) := \mathbb{E}\left[\exp\{-\int_t^T r(X_s)\,ds\} f(X_T) \mid X_t = x\right]$$

は偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \mathcal{A}_X V(t,x) = rV(t,x) & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \\ V(T,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

の解である.

---

[a] $f \in C_0^2(\mathbb{R}), r \in C_b(\mathbb{R})$ とすることが多いが，より広い関数のクラスを想定できる.

# Girsanov の定理

**Theorem (Girsanov Theorem)**

$T \le \infty$ とする．ここで $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元 $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動 $Z = \{Z_t\}$ に対し，1 次元伊藤過程 $Y := \{Y_t\}$ が

$$dY_t = u(t, Y_t)\, dt + dZ_t, \quad t \le T, Y_0 = 0$$

と表されるとする．条件 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\exp\{\frac{1}{2}\int_0^T a^2(s, Y_s)\, ds\} < \infty$ を満たすとき，

$$M_t := \exp\left\{\int_0^t u(s, Y_s)\, dZ_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s, Y_s)\, ds\right\}$$

に対して

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}[M_T; A], \quad A \in \mathcal{F}$$

と与える．このとき $\mathbb{Q}$ は確率測度であり，$Y = \{Y_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ は $\mathbb{Q}$ の下 $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ 上の $\{\mathcal{F}_t\}$-ブラウン運動となる．

- $u \in \mathbb{R}$ の場合を Cameron-Martin の定理と呼ぶ
- つまり，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元ブラウン運動 $Z = \{Z_t\}$ に対し，$M_t = \exp\{-uZ_t + \frac{1}{2}u^2 t\}$ を用いて

$$\mathbb{Q}(A) \coloneqq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[M_T; A], \quad A \in \mathcal{F}$$

と与えると，$\mathbb{Q}$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度である．

- さらに $Y = \{Y_t\}$（$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 下でドリフト付きのブラウン運動）

$$Y_t = ut + Z_t$$

は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上の 1 次元ブラウン運動である．

◇ 次のような使い方ができる.

◇ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の 1 次元ブラウン運動 $Z = \{Z_t\}$ に対し,

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dZ_t,\ \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

と与える.

◇ $r < \mu$ をとり，この確率微分方程式を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上の 1 次元ブラウン運動を用いて

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dZ_t^{\mathbb{Q}}$$

と変換出来ないだろうか. [20]

◇ Girsanov の定理はこの変換を保証する.

[20] 問題はこのような $\mathbb{Q}$ が存在するか否かである.

$$
\begin{aligned}
dS_t &= rS_t\,dt + (\mu - r)S_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t \\
&= rS_t\,dt + \sigma S_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\,dt + \,dZ_t\right)
\end{aligned}
$$

である.

◇ このとき，Girsanov の定理[21] からある確率測度 $\mathbb{Q}$ が存在して

$$
Z_t^{\mathbb{Q}} := \frac{\mu - r}{\sigma} t + Z_t
$$

は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上の 1 次元ブラウン運動となる.

◇ このとき

$$
dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}
$$

が成立する.

[21] Cameron-Martin の定理でも良い

# Appendix

# 直交射影定理

## Definition (内積空間)

$\mathcal{H}$ を線形空間とする．関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ が次の 3 条件を満たすを満たすとき，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ を内積，組 $(\mathcal{H},\langle,\rangle)$ を内積空間と呼ぶ.
$x,y,z\in\mathcal{H}$ に対し，

- ◇ $\langle x,x\rangle\geq 0$，特に $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- ◇ $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$.
- ◇ $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.

## Definition (Hilbert 空間)

$(\mathcal{H},\langle,\rangle)$ を内積空間とする．内積から誘導される距離[a] $d(x,y) := \langle x-y, x-y\rangle$ に関して $X$ が完備であるとき $X$ は Hilbert 空間であると言う.

---

[a]丁寧に言えば内積から誘導されるノルムを $\|x-y\| := \sqrt{\langle x-y,x-y\rangle}$ とし，ノルム $\|\cdot\|$ から誘導される距離を $d(x,y) := \|x-y\|$ とする.

**Theorem (直交射影定理)**

$\mathcal{H}$ を内積 $\langle , \rangle_{\mathcal{H}}$ 構造をもつ Hilbert 空間とし，$E \subset \mathcal{H}$ を閉部分空間とする．このとき，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して，$\hat{x} \in E, z \in E^{\perp}$ が一意的に存在して

$$x = \hat{x} + z$$

が成立する．また，$\hat{x}$ は

$$\hat{x} = \operatorname*{argmin}_{y \in E} \|x - y\|_{\mathcal{H}}$$

と与えられ，任意の $y \in E$ に対し，$\langle x - \hat{x}, y \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ を満たす．

## Theorem (Conditional Expectation in $L^1$)

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ とする．$\sigma$-加法族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ が与えられたとき，

- $Y$ は $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ 上の確率変数
- $\forall A \in \mathcal{G}$ に対して

$$\mathbb{E}[X; A] = \mathbb{E}[Y; A]$$

を満たす $Y$ が **a.s. 一意的に存在**する．このとき，$Y$ を $X$ の情報 $\mathcal{G}$ の下での条件付き期待値と呼び，$Y = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ と表記する．

**Proof.**

$X(\omega) \geq 0\,(\omega \in \Omega)$ と仮定してよい.

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}[X; A], \quad A \in \mathcal{G}$$

と置いたとき，$\mathbb{Q}$ は $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の確率測度であって，$\mathbb{P}(A) = 0$ ならば $\mathbb{Q}(A) = 0$ を満たす．したがって，ラドンニコディムの定理から $Y := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ が a.s. 一意的に存在して

$$\mathbb{E}[X; A] = \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Y; A]$$

を満たす. $\square$

# 伊藤積分のフォーマルな定義

- ◇ 上では伊藤積分を直接マルチンゲール変換の極限として定義したが，あまり数学的とは言えない．
- ◇ ここでは，確率過程 $X$ の伊藤積分を解析学的に定義したいと思う．
- ◇ どうすれば良いかというと，先のルベーグ積分の定義と同様に，ある連続時間の確率過程の中でも単純な確率過程（単純過程）のクラス $\mathcal{P}$ に対して伊藤積分を定義し，それを $\mathcal{L}^2$ というより一般的なクラスの確率過程に対し伊藤積分の定義に拡張する方法である
- ◇ ここでその単純過程は必ずある時間区間で一定値を取るような確率過程であるので，連続時間確率過程の中でも離散時間確率過程と同等のものである．したがって単純過程の確率積分はマルチンゲール変換と同様にして定義すればよいと考えられる．

## Definition (単純過程)

$\mathbb{T} = [0, \infty]$, $\{\mathcal{F}_t\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の Filtration とする．
$\phi = \{\phi_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ を $\{\mathcal{F}_t\}$-発展的可測過程でかつ，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して分割 $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ が存在して，

$$\phi_t(\omega) = \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{t_i}(\omega)\mathbb{I}_{[t_i, t_{i+1}]}(t) \tag{S}$$

と表されるとき，（ただし，$\sup_i \sup_{\omega\in\Omega} \theta_{t_i}(\omega) < \infty$ とする）確率過程 $\phi : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ を単純過程と呼ぶ．単純過程全体を $\mathcal{P}(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\})$ または省略して $\mathcal{P}$ とかく．

### Definition (Itô Integral of simple process)

$(S)$ のような表現を持つ単純過程 $\phi = \{\phi_t\}_{t\in\mathbb{T}} \in \mathcal{P}(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\})$ の伊藤積分を次のように定義する.

$$I(\phi)_t(\omega) := \int_0^t \phi_s\, dZ_s(\omega) := \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}(\omega) \left[ Z_{t_{i+1}}(\omega) - Z_{t_i}(\omega) \right].$$

このとき, $I(\phi) = \{I(\phi)_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は確率過程である.

### Theorem (Properties of Itô Integral)

$\phi = \{\phi_t\} \in \mathcal{P}^2(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\})$ に対して,

- ◇ （連続性）$I(\phi) = \{I(\phi)_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は sample path が連続かつ $\{\mathcal{F}_t^Z\}$-マルチンゲールである
- ◇ （等長性）

$$\mathbb{E}[\{I(\phi)_t\}^2] = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i}^2 (t_{i+1} - t_i)] < \infty$$

◇ 上で定義してきた伊藤積分は

$$I : \mathcal{P}(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\}) \to \mathcal{M}_c^2(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\})$$

という作用素である [22]

**Theorem**

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\}) := \Big\{ X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R} \mid X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}} : \{\mathcal{F}_t\}\text{-発展的可測}, \\ \|X\|_{\mathcal{L}^2} := \sup_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{E}[\int_0^t X_s^2\, ds] < \infty \Big\}$$

とすると，$\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\})$ はノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$ に関してバナッハ空間をなす.

[22] 伊藤積分 $I$ は有界線型作用素であることが証明できる

## Theorem

$\mathcal{P}$ は $\mathcal{L}^2$ 内で稠密である.

$$\text{i.e.}\quad \forall X \in \mathcal{L}^2\, \exists\{\phi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{P},\ \text{s.t.}\ \|X - \phi^{(n)}\|_{\mathcal{L}^2} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

## Definition (伊藤積分)

$X \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T}, \{\mathcal{F}_t\})$ に対し，その伊藤積分を

$$I(X)_t := \int_0^t X_s\, dZ_s := \lim_{n\to\infty} I(\phi^{(n)})$$

と与える．ただし，ここで $\{\phi^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\phi^{(n)} \in \mathcal{P}$ かつ，$X$ に対し，$\|X - \phi^{(n)}\|_{\mathcal{L}} \to 0$ となる列であり，$I(X) = \{I(X)_t\}$ はこの列の取り方によらずに定義される.