Microeconomics of Risk and Time

Hiroaki Hanyu

October 17, 2022

Preparation

Motivation

- 個人は不確実性の中でどのように行動するか？ 特に不確実性が確率分布として表現できる場合に話を絞って考える
- ファイナンスやマクロ経済学で良く出てくる効用関数についてリスク回避度を追いつつまとめる
- 余裕があればファイナンスやマクロへの応用を話す

意思決定とリスク

- ファイナンスやマクロ経済学では，個人は消費量を決定する際に不確実性に直面すると仮定することが多い
- なぜかというと，個人は自分の富を消費に配分するが，富を構成する賃金および投資のリターンが不確実である状況を考えると，富が確定しない段階では消費も不確実にならざるを得ないからである
- 現実的に将来の労働所得および投資のリターンが現在時点でわかっていることは少ないので．ミクロ経済学の静学的な分析の文脈でも富の量がランダムに変動するような状況を考えたりすることはあるし，不確実性下の経済の均衡概念を特別に定義したりするわけである．[1]

[1] Arrow-Debreu 均衡，Radner 均衡などが代表的な例である

Outline

- まず不確実性のある静学的な環境を考える．静学的な場合のメインの指標はリスク回避度である．
- 次に不確実性のある動学的な環境を考える．動学的な場合はリスク回避度に加え，異時点間の限界代替率（EIS）が重要
- 静学的な環境ではリスク回避度を見れば人々の意思決定や選好についてよくわかるが，動学的な環境ではそうはいかない．
- ファイナンスやマクロ経済学で資本市場が登場するタイプの動学的な環境では，EIS とリスク回避度をどの程度区別できているか，確率的割引ファクター（SDF）をどのように特定化するかが一つの重要なポイントである（と思う）．

Static Environment

Utility

- まずある個人が 1 期間生存するような静学的な環境を考える
- gamble W は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の確率変数
  $W : \Omega \ni \omega \mapsto W(\omega) \in \mathbb{R}$ であり，期末にはある富の水準 $w \in \mathbb{R}$ に確定するものとする．
- $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単調非減少な関数とし，個人は期末に富が $w \in \mathbb{R}$ に確定した場合には，貨幣的効用 $u(w)$ を得るとする．
- 個人の選好は期待効用表現を持つと仮定する．すなわち，
  gamble W_1 の方が gamble W_2 よりも好ましいならば
  $\mathbb{E}[u(W_1)] \leq \mathbb{E}[u(W_2)]$ である．[2]

---

[2] $\mathbb{E}$ は確率測度 $\mathbb{P}$ に関する期待オペレーターである．すなわち $\mathbb{E}[u(W)]$ は $u(W)$ の期待値を表す．

Remark

- ◇ 個人の富は gamble によって決定される（富と gamble は同一視する）
- ◇ 静学的な環境では，個人は期末の富から効用を得ると仮定する．ただし，この富はインフレ率で deflate した実質単位のものであるので，どの消費財とも交換可能なある程度普遍的な価値をもつ財と考えていればよい．
- ◇ 短期のモデルでは選好が富の確率分布にのみ依存すると仮定して話を進める [3]

[3]動学的な環境ではほとんどこの仮定が適切ではない．例えば，多期間にわたって投資および消費を行う場合を考えると，各期の投資機会集合は富の量とともに変動するため，投資機会と富の相関も重要な懸念事項になる．

Concavity and Risk Aversion

Definition

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の任意の確率変数 X ($\mathbb{E}[X] < \infty$) に対して,

$$u(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[u(X)]$$

が成立するとき，個人はリスク回避的であると言う.

Theorem (1)

次の 1-3 は同値.

1 効用関数 u を持つ個人がリスク回避的.

2 $w \in \mathbb{R}$,（$\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}$) 上の任意の確率変数 ϵ, ($\mathbb{E}[\epsilon] = 0$) に対し,

$$u(w) \geq \mathbb{E}[u(w + \epsilon)].$$

3 u が凹関数 Jump to Proof

- ◇ 上の定理は，リスク回避的な個人は平均的な利得が 0 の賭け（a fair bet）を好まないことを表している．
- ◇ また，個人がリスク回避的かどうかの結論は，u が凹関数であるかどうかに帰せされる
- ◇ すなわち，u が C^2 級関数であるならば，u の二階の微分係数の正負を確認すれば，個人がリスク回避的であるかどうかの判定はできるはずである
- ◇ この事実が imply するのは，個人のリスク回避の程度を表す際に，u の微分係数の大きさを使ってしまえばいいということ．
- ◇ したがって，以降効用関数 u は C^2 級関数であると仮定して，2 種類のリスク回避度を導入していく

Coefficients of Risk Aversion

Definition (Absolute Risk Aversion: ARA)

ある富の水準 $w \in \mathbb{R}$ での，個人の絶対的リスク回避度（ARA）は以下のように与えられる．

$$\alpha(w) \triangleq -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

- ◇ $u' > 0$ であるので，$\alpha(w) > 0, \forall w \in \mathbb{R}$ と個人がリスク回避的であることは同値である．
- ◇ この指標の素晴らしい点は，効用関数の monotone linear transformation に対して不変なことである
- ◇ つまり効用関数ではなく，選好によって確定する指標である．

Definition (Relative Risk Aversion: RRA)

ある富の水準 $w \in \mathbb{R}$ での，個人の相対的リスク回避度（RRA）は以下のように与えられる．

$$\rho(w) \triangleq w\alpha(w) = -\frac{wu''(w)}{u'(w)}$$

- ◇ w が入っていることによって，富の水準からの割合の意味での変化に対しての反応を測定することができる
- ◇ α, ρ をそれぞれ絶対的リスク回避係数，相対的リスク回避係数と呼ぶ
- ◇ α が w によらず一定のとき CARA 型効用関数，ρ が w によらず一定のとき CRRA 型効用関数という．

Example (Exponential Utility)

$$u(w) \triangleq -e^{-\theta w}, \quad \theta > 0$$

と与える．このとき

$$\alpha(w) = \theta, \quad \rho(w) = \theta w.$$

Example (Power Utility)

$$u(w) \triangleq \frac{w^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma}, \quad \gamma > 0$$

と与える．このとき

$$\alpha(w) = \frac{\gamma}{w}, \quad \rho(w) = \gamma.$$

リスクプレミアム

以下 gamble $G = g + \epsilon\,(g \in \mathbb{R})$ について考える．ただし ϵ は期待値 0，分散 $\sigma^2\,(\sigma > 0)$ の確率変数である．

Definition (Certainty Equivalence)

以下の等式を満たす $C^e \in \mathbb{R}$ を G の確実性等価（CE）と呼ぶ．

$$u(C^e) = \mathbb{E}[u(G)].$$

Definition (Risk Premium)

以下の等式を満たす $\pi \in \mathbb{R}$ を G のリスクプレミアムと呼ぶ．

$$u(g - \pi) = \mathbb{E}[u(G)]$$

- ◇ 文字通り，リスクプレミアムは個人がリスクに対して支払っても良いと考える保険料である．

リスクプレミアムの近似

Theorem (2)

gamble G のリスクプレミアム π は，σ が十分小さいとき，以下のように近似できる．

$$\pi \approx \frac{1}{2}\sigma^2\alpha(g).$$

Jump to Proof

◇ 例えば，公平なコインを投げて表が出たとき 1，裏が出たとき -1 のリターンを得るような gamble を考えると，$Var[G] = 1$ であるので，$\pi \approx \frac{1}{2}\alpha(0)$ となる．

Dynamic Environment

動学問題と Power Utility

- 動学的な環境において Power Utility の性質について考えてみる
- 例えば以下のような問題を考えよう

$$
\begin{aligned}
&\max_{\xi_t} u(c_t) + \beta \mathbb{E}_t[u(c_{t+1})] \\
&\text{s.t.} \quad c_t = w_t - \xi_t p_t, \\
&\qquad\quad c_{t+1} = w_{t+1} + \xi_t x_{t+1}.
\end{aligned}
$$

ここで c_t は t 期の消費，w_t は t 期初の endowment，p_t は t 期の証券価格，x_{t+1} は t 期の証券のペイオフ，ξ_t は t 期の株式購入量を表す．t 期において証券のペイオフは不確実であると仮定している．

FONC から Euler 方程式

$$
\begin{aligned}
p_t u'(c_t) &= \mathbb{E}_t[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}] \\
\Leftrightarrow \qquad 1 &= \mathbb{E}_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} R_{t+1}], \quad \left(R_{t+1} := \frac{x_{t+1}}{p_t}\right)
\end{aligned}
$$

が得られる．このとき，

$$
M_{t+1} := \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}
$$

が確率的割引ファクター（Stochastic Discount Factor; SDF）である．

確率的割引ファクター

より一般的な形で導入する．

Definition

ある $M = \{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ が存在して，任意の証券の価格とペイオフの流列 $(P = \{P_t\}_{t \in \mathbb{T}}, X = \{X_{t+1}\}_{t \in \mathbb{T}})$ に対して次の等式を満たすとする．

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad P_t = \mathbb{E}_t[M_{t+1} X_{t+1}]$$

このとき $M = \{M_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ 確率的割引ファクターという．

Theorem (Fundmental Theorem 1)

市場が一物一価である $\Longleftrightarrow$ SDF M が存在

Theorem

無裁定 $\Longleftrightarrow$ 非負値 SDF $M = \{M_t\}_{t\in\mathbb{T}}(M_t \geq 0; \forall t \in \mathbb{T})$ が存在
無裁定かつ市場が完備 $\Longleftarrow$ 非負値 SDF が $M =$

価格が 1 で確実なペイオフ R_f が発生するような金融商品（安全資産）を考えれば,

$$1 = \mathbb{E}[MR_f] \Longleftarrow R_f = \frac{1}{\mathbb{E}[M]}$$

すなわち t

Empirical Estimation

$$u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

に対して，$u'(c) = c^{-\gamma}$ であるから，

$$\begin{aligned} p_t &= \mathbb{E}_t[\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} x_{t+1}] \\ &= \mathbb{E}_t[\beta \left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{-\gamma} x_{t+1}]. \end{aligned}$$

を得る．データ $\hat{c} = \{\hat{c}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$，$\hat{p} = \{\hat{p}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ と照合すると γ は 50 から 100 と推定される．（通常リスク回避度 γ は 1 から 3 とされている）

Updating Preference

- 時間加法的な preference を拡張することが，リスク回避度を適切に推定する一つの方法である．
- $U_t = \sum_{i=t}^{\infty} \beta^i u(c_i)$ とある選好の Time Horizon に関する和として与えられる選好から拡張する方法は，$U = \{U_t\}_t$ をある関数方程式の解として与えることである．

Definition (Recursive Preference)

ある適当な関数 f, μ に対して，

$$U_t = f(c_t, \mu(U_{t+1}))$$

と与えられる選好を Recursive Preference という．

Epstein-Zin Preference

Definition (Epstein-Zin)

$$U_t = \left\{(1-\delta)c_t^{1-\frac{1}{\psi}} + \delta\left(\mathbb{E}_t\left[U_{t+1}^{1-\gamma}\right]^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}}\right)\right\}^{\frac{1}{1-\frac{1}{\psi}}}$$

- ◇ Epstein-Zim Preference は vNM preference とはならない

Proofs

Proof for Theorem (1)

▸ Jump to Theorem.

$1 \Leftrightarrow 2$：個人のリスク回避性から，$w \in \mathbb{R}$，確率変数 ϵ ($\mathbb{E}[\epsilon] = 0$) に対して，$X \triangleq w + \epsilon$ と与えられれば,

$$\begin{aligned} & u(\mathbb{E}[w+\epsilon]) \geq \mathbb{E}[u(w+\epsilon)] \\ \iff \quad & u(w) \geq \mathbb{E}[u(w+\epsilon)]. \end{aligned}$$

$1 \Leftrightarrow 3$：Jensen の不等式から，u が凹関数であることと任意の確率変数 X に対して

$$u(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[u(X)]$$

となることは同値. $\square$

Proof for Theorem (2)

.

gamble G のリスクプレミアムを $\pi(\sigma)$ とする．このとき

$$u(g - \pi(\sigma)) = \mathbb{E}[u(G)]$$

が成立．明らかに $\pi(0) = 0$，また，微分から得られる条件から $\pi'(0) = 0$，$\pi''(0) = \alpha(g)$ であるから，$\pi(\sigma)$ を $\sigma = 0$ 周辺でテイラー展開すると，

$$\begin{aligned} \pi(\sigma) &= \pi(0) + \pi'(0)\sigma + \frac{1}{2}\pi''(0)\sigma^2 + O(\sigma^3) \\ &\approx \pi'(0) + \pi'(0)\sigma + \frac{1}{2}\pi'(0)\sigma^2 \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2\alpha(g). \end{aligned}$$