Applications of Stochasstic Calculus

Hiroaki Hanyu

December 3, 2022

ファイナンスと確率解析の歴史

◇ 1900 年：ルイ・バシュリエが博士論文でブラウン運動を用いてオプション価格を求める

◇ 1942 年：伊藤清が『Markov 過程ヲ定メル微分方程式』を発表

◇ 1973 年：Black と Scholes が Black-Scholes モデルを発表

◇ 1997 年：Scholes と Merton がノーベル経済学賞受賞

ファイナンスへの応用

Black-Scholes モデル

- 確率解析のファイナンスへの応用事例として Black-Scholes モデルを紹介する.
- Black-Scholes モデルはヨーロピアンコールオプションの価格付けに関するモデルである.[1]
- Black-Scholes モデルの登場後このモデルを基にオプション価格理論の研究が進展し，価格理論の実務への応用も拡大した[2]
- オプション価格理論に関する貢献から Scholes と Merton は 1997 年にノーベル経済学賞を受賞している[3]

[1]Merton によって詳細に理論的な根拠が与えられたことから Black-Scholes-Merton モデルと呼ばれることもある.

[2]この頃 Ross，Kreps, Harrison, Pliska らによってファイナンスの無裁定理論に関する研究が急速に拡大した.

[3]Black は 1995 年に鬼籍に入っている.

オプションとは

- 株式を原資産とする**ヨーロピアンコールオプション**とは，特定の期日（**権利行使日**と呼ばれる）に株式を特定の価格（**権利行使価格**と呼ばれる）で買う権利を金融商品化したもののことである．

- 例えば，「今日」「明日」の二時点で，（権利行使日が明日で）株式を原資産とするヨーロピアンコールオプションの取引について考えてみよう
- 今日株式の価格が 100 で，明日の株価が 105 円か 97 円になるとする．[4]
- 権利行使価格が 100 円のヨーロピアンコールオプションを今日購入した時，明日その価値はどうなるか．

[4]今日の時点でどちらの価格になるかはわからないとする

- ◇ 明日オプションの権利を行使したとすれば，市場価格に関わらず権利行使価格である 100 円を追加的に払い株式を入手することができ，権利を行使しなければ株式を入手しない.
- ◇ つまり，ヨーロピアンコールオプションを保有していれば，明日株式の市場価格が 105 円の時権利を行使して $105 - 100$ 円だけ得をし，97 円のときは権利を行使しないことになる
- ◇ したがって，明日株式の市場価格が権利行使価格を上回ったとき，権利を行使するのが得であり，市場価格が権利行使価格を下回ったとき権利を行使するのは得ではない.

◇ よって，ヨーロピアンコールオプションを購入すると

- ◦ 株価が権利行使価格以上に値上がりすれば (市場価格-権利行使価格) 分だけ資産を受け取り
- ◦ 権利行使価格以下に値下がりすれば権利を行使せず，0 だけ資産を受け取る．

のどちらかの取引を必ず行う．

◇ 以降この節ではヨーロピアンコールオプションの取引日における価格決定のための理論として Black-Scholes モデルを紹介する．

◇ 詳細な Black-Scholes モデルの詳細な内容に入る前に，金融工学のデリバティブ価格付けのモデルに共通する重要なルールについて紹介したい

Models in Financial Engineering

◇ デリバティブの売り手は，オプションの権利が行使された場合の支払いに対応できるだけの資金を準備しなければならず，そのような資金は基本的に市場でのみ調達出来なければいけない[a]

◇ また，その資金調達手段は原資産と無リスク資産の市場での取引によるものである

◇ （適切な情報構造の仮定を課して）デリバティブは買い手，売り手どちらか一方が有利な取引にはならない

[a]金融商品の取引以外の手段で支払いを行うことはない（self-financing）

Black-Scholes Economy

- 時間 $\mathbb{T} := [0, T]$ で株式，債券（無リスク）の 2 種類の金融資産が取引されている金融市場を考えたい
- t 期の株式の価格を S_t，債券の価格を B_t とし，以下の確率微分方程式を満たすとする．

Definition (Black-Scholes Economy)

以下の SDE を満たす確率過程の組 (B, S) を Black-Scholes Economy と呼ぶ．[a][b]

$$dB_t = rB_t\,dt, \quad B_0 = 1$$

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t, \quad S_0 = x > 0.$$

[a] ここで $\mu > r > -1, \sigma > 0$，$Z = \{Z_t\}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の一次元ブラウン運動とし，$\{\mathcal{F}_t\}$ は Z による standard filtration とする．

[b] 実は S が一般の伊藤過程（かつ r が適切な確率過程）であっても以降の議論は成立する．

◇ 伊藤の公式を用いれば

$$B_t = e^{rt}$$

と解析解が求まる．[5]

◇ ここで B としてモデル課されている資産は価格の変化に不確実性がないため，無リスク資産と呼ばれるものであり，値を特徴づける r は無リスク金利と呼ばれるものである．[6]

◇ 基本的にどのようなファイナンスの理論モデルでも無リスク資産は存在すると仮定する [7]

[5] 幾何ブラウン運動 $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dZ_t$ の解析解

$$S_t = \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right) + \sigma S_t\right\}$$

で $\sigma = 0$ と置いた形として導出して考えても良い

[6] 市場で無リスク資産が取引されているとき，その無リスク金利は一意である．

[7] しかし実際に存在するかどうかはかなり疑わしい

◇ t 期における総資産額を X_t とする.

◇ 今回金融工学のモデリングのルールに即して，t 期における株式の保有単位を ψ_t，債券の保有単位を ϕ_t として，総資産価値が以下のようにして与えられるとする.

$$X_t = \phi_t B_t + \psi_t S_t$$

◇ ここで将来のポートフォリオの保有量はその時点の資産価格に依存するため基本的に不確実であると考え,
$\phi = \{\phi_t\}_{t\in\mathbb{T}}, \psi = \{\psi_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な確率過程であるとする.

◇ 以降確率過程の組 (ϕ, ψ) をポートフォリオと呼ぶ.

◇ また，ポートフォリオに対し以下の条件を課す.

Definition (Self-Finaning)

ポートフォリオ (ϕ, ψ) は

$$dX_t = \phi_t \, dB_t + \psi_t \, dS_t \quad (= r\phi_t B_t \, dt + \psi_t dS_t)$$

かつ

$$\int_0^t |\phi_s r B_s| + |\psi_s \mu S_s| \, ds + \int_0^t |\psi_s \sigma S_s|^2 \, ds < \infty$$

を満たす. [a]

---

[a]やや技術的である.

◇ ここで仮に権利行使日 T のオプション価格 V_T が X_T と等しくなるようにポートフォリオ (ϕ, ψ) を組むことが出来たとする.

$$X_T = V_T = \max\{S_T - K, 0\} \quad \text{a.s.}$$

◇ このようなポートフォリオを複製ポートフォリオと呼ぶ

◇ このとき，以下のような問が立てられる.

Question

◇ 0 期におけるオプションの価格 V_0 はいくらか？

◇ また，複製ポートフォリオ (ϕ, ψ) は一意であるか？

◇ まず Black and Scholes (1973) による解答を見てみよう.

Black-Scholes モデルの導出法その 1

- ◇ オプション価格 V_t が仮に関数 $v \in C^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ によって $V_t = v(t, S_t)$ と与えられるとすれば，伊藤の公式から

$$\begin{aligned} dV_t &= v_t(t, S_t)\, dt + v_x(t, S_t)\, dS_t + \frac{1}{2} v_{xx}(t, S_t)\, (dS_t)^2 \\ &= \left[v_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) \right] dt + v_x(t, S_t)\, dS_t \end{aligned}$$

- ◇ すべての $t \in \mathbb{T}$ に関して $X_t = V_t$ なので，$dX_t = dV_t$ から，

$$\begin{cases} v_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) = r\phi_t B_t,\ v_x(t, S_t) = \psi_t & t \in [0, T) \\ v(T, S_T) = \max\{S_T - K, 0\} \end{cases}$$

が成立する．

◇ ここで

$$
\begin{aligned}
\phi_t B_t &= X_t - \psi_t S_t \\
&= V_t - \psi_t S_t \\
&= v(t, S_t) - \psi_t S_t
\end{aligned}
$$

を上式に代入すれば,

$$
\begin{cases}
v_t(t, S_t) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) = rv(t, S_t) - r\psi_t S_t, \\
v_x(t, S_t) = \psi_t, \\
v(T, S_T) = \max\{S_T - K, 0\}
\end{cases}
$$

$$
\therefore \begin{cases}
-rv(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) + v_t(t, S_t) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) = 0 \\
v(T, S_T) = \max\{S_T - K, 0\}
\end{cases}
$$

となる.

- ◇ 関数 v が上の二つの等式を成立させる十分条件は以下の偏微分方程式：

$$\begin{cases} -rv + rxv_x + v_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx} = 0 & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \\ v(T,x) = \max\{x - K, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

  を v が満たすことである.

- ◇ この方程式を Black-Scholes 偏微分方程式という
- ◇ Black と Scholes は初めこの方程式を純粋な偏微分方程式の解法で解いたが，今回は異なる方法で解いてみよう

◇ 偏微分作用素 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} = \mu x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

とすると，Black-Scholes 偏微分方程式は

$$\begin{cases} -rv(t,x) + v_t(t,x) + r\mathcal{A}v(t,x) = 0 & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R} \\ v(T,x) = \max\{x-K, 0\} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

と表現することができる.

◇ したがって Feynman-Kac の公式を用いれば,

$$v(t,x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} \max\left\{\hat{S}_T - K, 0\right\} \mid \hat{S}_t = x]$$

が成立する．ここで，$\hat{S}$ は $\mathcal{A}$ を生成作用素として持つ確率過程：

$$d\hat{S}_t = r\hat{S}_t\,dt + \sigma\hat{S}_t\,dZ_t$$

◇ したがって t 期に株価が S_t のときのオプションの価格 $v(t,x)$ は（$\log \hat{S}_T$ は正規分布に従うから）簡単に計算できて，標準正規分布の分布関数を Φ とすれば,

$$
\begin{aligned}
v(t,x) &= x\Phi(d_1(t,x)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2(t,x)),\\
d_1(t,x) &= \frac{\log(x/K) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\\
d_2(t,x) &= \frac{\log(x/K) + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

となる（0 期の価格は当然わかる）.

◇ また,

$$
\psi_t = v_x, \quad \phi_t = \frac{V_t - \psi_t S_t}{B_t}
$$

と決定できるため，一意的である.

Black-Scholes モデルの導出法その 2

◇ もう一つの方法でオプション価格を求めてみよう.

◇ Girsanov の定理を用いるとある確率測度 $\mathbb{Q}$ の下で $S = \{S_t\}_{t \leq \mathbb{T}}$ は

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}$$

を満たす. ここで $Z_t^{\mathbb{Q}}$ は $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{Q})$ 上のブラウン運動.

◇ このとき,

$$\begin{aligned} dV_t &= \phi_t\,dB_t + \psi_t\,dS_t \\ &= r\phi_t B_t\,dt + \psi_t[rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}] \\ &= r[V_t - \psi_t S_t]\,dt + \psi_t r S_t\,dt + \psi_t \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}} \\ &= rV_t\,dt + \psi_t \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

が成立する.

◇ $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t = V_t / B_t$ と置くと，$\tilde{V}_0 = V_0$ であって，伊藤の商の公式から

$$\begin{aligned} d\left(\frac{V_t}{B_t}\right) &= \frac{V_t}{B_t}\left[\frac{dV_t}{V_t} - \frac{dB_t}{B_t} - \frac{1}{V_t B_t}(dV_t)(dB_t) + \frac{1}{B_t^2}(dB_t)(dB_t)\right] \\ &= \frac{V_t}{B_t}\left[\frac{rV_t\,dt + \psi_t \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}}{V_t} - \frac{rB_t\,dt}{B_t} - \frac{1}{V_t B_t}\cdot 0 + \frac{1}{B_t^2}\cdot 0\right] \\ &= \frac{V_t}{B_t}\left[r\,dt + \frac{\psi_t \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}}{V_t} - r\,dt\right] \\ &= \psi_t \sigma B_t^{-1} S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

◇ すなわち

$$\tilde{V}_t = \int_0^t \psi_s \sigma B_s^{-1} S_s\,dZ_s^{\mathbb{Q}}$$

と表現できる.

◇ 伊藤積分のマルチンゲール性から，$\tilde{V}$ は確率測度 $\mathbb{Q}$ の下で $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールである．したがって，各 $t \in \mathbb{T}$ において

$$e^{-rt}V_t = \tilde{V}_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T \mid \mathcal{F}_t]$$

◇ 式を整理すれば

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}V_T \mid \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rt}\max\{S_T - K, 0\} \mid \mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

◇ また，

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max\{S_T - K, 0\}]$$

である．

◇ ここで

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}} \quad Z_0 = x,$$
$$\left(S_t = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}}\right\}\right)$$

であるから，$\log S_T$ が $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ 上の正規確率変数であることを用いて期待値を計算すると，

$$v(t,x) = x\Phi(d_1(t,x)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_2(t,x)),$$
$$d_1(t,x) = \frac{\log(x/K) + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2(t,x) = \frac{\log(x/K) + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

と求められる.

◇ また $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲール $\tilde{V} = \{\tilde{V}_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ について，マルチンゲール表現定理から [8]

$$\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \int_0^t \tilde{\Gamma}_s \, dZ_s^{\mathbb{Q}}$$

を満たすような $\{\mathcal{F}_t\}$ 適合過程 $\Gamma = \{\Gamma_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ が一意的に存在.

◇ したがって，$\tilde{\Gamma}_t = \psi_t \sigma B_t^{-1} S_t$ と $V_t = \phi_t B_t + \psi_t S_t$ から，

$$\psi_t = \frac{B_t \tilde{\Gamma}_t}{\sigma S_t}, \quad \phi_t = \frac{V_t - \psi_t S_t}{B_t} \qquad t \in \mathbb{T}$$

と，複製ポートフォリオ (ϕ, ψ) を一意に決定することができる.

[8] $Z_t^{\mathbb{Q}}$ は元のブラウン運動とは異なるものであるから，正確にはマルチンゲール表現定理の拡張（Dudley (1977)）である.

Black-Scholes モデルの含意

- Black-Scholes モデルの導出法を二つ紹介した
- これらの方法は，一般に資産価格が裁定機会のない市場でどのように決定されるべきかという問題に対して洞察を与えている．
- 二つ目の導出法では，

$$e^{-rt}V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\} \mid \mathcal{F}_t]$$

特に，

$$V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}\max\{S_T - K, 0\}]$$

という関係が与えられた．

- 両辺 e^{rT} をかければ,

$$e^{rT}V_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\max\{S_T - K, 0\}]$$

  となる.
- 左辺は，無リスク資産に V_0 だけ投資した場合の平均的なペイオフであり,
- 右辺は，オプションに V_0 だけ投資した場合の平均的なペイオフである.
- つまり $\mathbb{Q}$ の下では，あたかも無リスク資産とオプションの平均リターンが同じであるようにオプションが価格付けされている.

- ◇ $\mathbb{Q}$ の下では

$$e^{rT}S_0 = \mathbb{E}[S_T]$$

という関係も成立している．[9]

- ◇ 左辺は，無リスク資産に S_0 だけ投資した場合の平均的なペイオフであり，
- ◇ 右辺は，株式に S_0 だけ投資した場合の平均的なペイオフである．
- ◇ つまり $\mathbb{Q}$ の下では，あたかも無リスク資産と株式の平均リターンが同じであるようにオプションが価格付けされている．

[9]証明は Apendix 参照

- このような状況は実際には（確率測度 $\mathbb{P}$ の下では）起こりえない.
- なぜなら，多くの投資家はリスク回避的であり，リスク分無リスク資産よりも高い平均的なリターンを株式に対して望むからである
- つまり，

$$e^{rT} S_0 < \mathbb{E}[S_T]$$

が成立する（オプションについても同じである）.

- ◇ 裏を返せば，確率測度 $\mathbb{Q}$ の下ではリスク中立的な投資家によって取引が行われているかのようにリスク資産の市場価格が決定される．
- ◇ このことから，Girsanov の定理から得られた確率測度 $\mathbb{Q}$ をリスク中立確率測度と呼ぶ．
- ◇ 実は市場が無裁定であることとリスク中立確率測度が存在することはほとんど同値である．
- ◇ 無裁定を仮定することのメリットは，リスク中立確率測度の存在が得られること，リスク中立確率測度の下で，単なる期待値計算でリスク資産の価格が求められることである．[10]

[10]本来リスク資産の価格を決定づける他のモーメント（分散，尖度，歪度など）は $\mathbb{Q}$ に集約されている．

◇ また，$\mathbb{Q}$ の下では

$$e^{-rt}V_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}V_T \mid \mathcal{F}_t]$$

$$e^{-rt}S_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_T \mid \mathcal{F}_t]$$

が成立している．

◇ $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$，$\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ は割引株価，割引オプション価格等と呼ばれる．

◇ これらは確率過程 $\{\tilde{S}_t\}$，$\{\tilde{V}_t\}$ として確率測度 $\mathbb{Q}$ の下 $\{\mathcal{F}_t\}$ マルチンゲールである．

◇ この事実と，確率測度 $\mathbb{Q}$ が $\mathbb{P}$ と同値な測度であることから，$\mathbb{Q}$ は同値マルチンゲール測度と呼ばれる．

Appendix

◇ ここで

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}} \quad Z_0 = x,$$
$$\left(S_t = \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z_t^{\mathbb{Q}}\right\}\right)$$

であった.

◇ $\tilde{S}_t := e^{-rt}S_t = S_t/B_t$ として，伊藤の公式を用いれば,

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{S_t}{B_t}\right) &= \frac{S_t}{B_t}\left[\frac{dS_t}{S_t} - \frac{dB_t}{B_t} - \frac{1}{S_tB_t}(dS_t)(dB_t) + \frac{1}{B_t^2}(dB_t)(dB_t)\right] \\
&= \frac{S_t}{B_t}\left[\frac{rS_t\,dt + \sigma S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}}{S_t} - \frac{rB_t\,dt}{B_t} - \frac{1}{S_tB_t}\cdot 0 + \frac{1}{B_t^2}\cdot 0\right] \\
&= \frac{S_t}{B_t}\left[r\,dt + \sigma\,dZ_t^{\mathbb{Q}} - r\,dt\right] \\
&= \sigma B_t^{-1}S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}.
\end{aligned}$$

◇ すなわち,

$$S_t = \int_0^t \sigma B_s^{-1}S_t\,dZ_t^{\mathbb{Q}}$$