2015 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$
\begin{aligned}
\text{maximize}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \quad & \boldsymbol{a}^\top(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \\
\text{subject to} \quad & \mathbf{1}^\top\boldsymbol{u}+\mathbf{1}^\top\boldsymbol{v} \le 1 \\
& \boldsymbol{u} \ge \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{minimize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^\top Q^{-1}\boldsymbol{x} \\
\text{subject to} \quad & ||\boldsymbol{x}||_\infty = 1
\end{aligned}
$$

2　解答

(1)

(1-1)

自明

(1-2)

todo

(1-3)

自明

(2)

(2-1)

まず、$||\boldsymbol{x}||_2 = 1$ という制約に変更した問題を解く。
$Q = P^\top DP$ と分解する。ただし、P は直交行列で、D は対角行列であり、

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

とする。
$Q^{-1} = P^\top D^{-1} P$ である。なお、正定値性より、D^{-1} は定義可能である。
その上で、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^\top Q^{-1} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^\top P^\top D^{-1} P \boldsymbol{x} \\ &= (P\boldsymbol{x})^\top D^{-1} (P\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{y}^\top D^{-1} \boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, ||\boldsymbol{y}||_2 = \boldsymbol{x}^\top P^\top P \boldsymbol{x} = 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{d_i} \end{aligned}$$

となるので、この制約下における解は、Q の最大固有値を $d_{\max}$ として、$\frac{1}{d_{\max}}$ となる。
……が、この議論は恐らく関係ない。
ラグランジュの未定乗数法の考え方を用いる。
まず、$x_k = 1 (1 \le k \le n)$ という制約に変更した問題を解く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \big(\boldsymbol{x}^\top Q^{-1} \boldsymbol{x} - \lambda (x_k - 1) \big) \\ &= 2Q^{-1}\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{e}_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \frac{\lambda}{2} Q \boldsymbol{e}_k \\ x_k &= \frac{\lambda}{2} q_{kk} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \\
\lambda &= \frac{2}{q_{kk}}
\end{aligned}
$$

と置くと、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^\top Q^{-1}\boldsymbol{x} &= \frac{1}{q_{kk}^2}\boldsymbol{e}_k^\top Q^\top Q^{-1} Q\boldsymbol{e}_k \\
&= \frac{1}{q_{kk}^2}\boldsymbol{e}_k^\top Q\boldsymbol{e}_k \\
&= \frac{1}{q_{kk}^2} q_{kk} \\
&= \frac{1}{q_{kk}}
\end{aligned}
$$

となる。よって、最小値の候補は、Q の対角成分の最大値を $d_{\max} = d_k$ として、$\frac{1}{d_{\max}}$ となる。特に、これより大きい解は存在しない (ここの議論が本来もう少しきちんとすべき) ので、もしこのような解が存在すれば、これが最適解である。

そして、このような解が、変更された制約下のみならず、元の制約下においても存在することは、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \frac{1}{q_{kk}} Q\boldsymbol{e}_k \\
&= \begin{pmatrix} \frac{q_{1k}}{q_{kk}} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{q_{nk}}{q_{kk}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が、$||\boldsymbol{x}||_\infty = 1$ を満たすことから分かる。

最後の部分で、$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{z} = -\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_k$ に対して、Q が正定値対称行列なことを用いると、

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} q_{ii} + q_{kk} + 2q_{ik} \geq 0 \\ q_{ii} + q_{kk} - 2q_{ik} \geq 0 \end{cases} \\
\Rightarrow & 1 \geq \frac{q_{ii} + q_{kk}}{2} \geq q_{ik} \geq -\frac{q_{ii} + q_{kk}}{2} \geq -1
\end{aligned}
$$

となることを用いた。

(2-2)

$$C = d_{\max}$$

3 知識

3.1 ラグランジュの未定乗数法

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & g(x,y) = 0 \end{aligned}$$

この問題は、以下のように解ける。

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

とおくと、(α, β) が極値を与えるならば、(α, β) は

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

の解、または、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

の解。[1]

参考文献

[1] 高校数学の美しい物語.“ラグランジュの未定乗数法と例題”.2021 年 3 月 7 日.https://manabitimes.jp/math/879