2023 年度 大問 4

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 8 月 24 日

1　問題

$Y = \frac{1}{X^2}$

2　解答

(1)

確率変数の変数変換の公式を用いると、また、$X = \pm\frac{1}{\sqrt{Y}}$ と、2 つの解があることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
f(y) &= \begin{cases} 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| & (0 < y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{3}{2}} & (0 < y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる。

なお、実際、$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}y = 1$ である。(Wolfram Alpha で計算)

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_0^\infty e^{-uy} f(y) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} e^{-uy} f(y) \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty -y e^{-uy} f(y) \,\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-uy} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2u\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2z}} e^{-uz} \left(\frac{1}{2uz}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{-2}\,\mathrm{d}z \\
&= \sqrt{2u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2z}} e^{-uz} z^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \sqrt{2u}L(u)
\end{aligned}
$$

微分と積分が交換できることは、$f(y)$ が確率密度関数であるため被積分関数が可積分であり、また、微分後の式も可積分であることから従う。

$\frac{1}{2y} = uz$ という変数変換が本質的。見つけた人曰く、「$\exp(-uy), \exp\left(-\frac{1}{2}y\right)$ の形を保存するにはどうすればいいのかなぁと思って、いろいろ気合いで推測」したらしいです。

(3)

(2) の式に当てはめて $L(-iu) = e^{-\sqrt{2u}\sqrt{-i}}$ としたい所だが、これは厳密な解答ではない。$\sqrt{-i}$ 自体が多価関数。

以下 Slack にあがっていた解答の書き起こし。なお、この解答の作成者は数学科の複素関数論を履修されていた方です。(私には無理……)

$$
\begin{aligned}
D &= \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{C} | r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} \\
E &= \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{C} | r > 0, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \right\}
\end{aligned}
$$

とおく。

$$
\begin{aligned}
&E \to D,\, z \mapsto z^2 \\
&D \to E,\, z \mapsto \sqrt{z} \left(re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \right)
\end{aligned}
$$

は正則かつ全単射で互いに逆写像。

ここで、L は D で正則、$\overline{D}$ で連続である。この証明は後述。

実軸正の部分で、

$$
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}u}(u) = -\frac{1}{\sqrt{2u}} L(u)
$$

が成り立つから、両辺が D 上で正則な為、一致の定理より、D 上

$$
\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2z}} L(z)
$$

が成立する。

E 上で $M(z) = L(z^2)$ とおけば、上式より、

$$
\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}z}(z^2) 2z
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2z^2}} L(z^2) 2z \\
&= -\sqrt{2} M(z) \ (\because \sqrt{z^2} = z \text{ on } E)
\end{aligned}
$$

これより、E 上 $M(z) = Ce^{-\sqrt{2}z}$ となる。ただし、C は積分定数。実軸正の部分から、$u \searrow 0$ とすれば、$M(u) = L(\sqrt{u}) \to L(0) = 1$ となる。従って、$C = 1$ で $M(z) = e^{-\sqrt{2}z}$、D 上で $L(z) = M(\sqrt{z}) = e^{-\sqrt{2z}}$ となる。

$u > 0$ の場合、$z = a - iu$ として、$a \searrow 0$ とすれば、$\sqrt{z} \to \sqrt{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ なので、

$$
\phi(u) = L(-iu) = \lim_{a \searrow 0} L(a - iu) = e^{-\sqrt{u}(1-i)}
$$

となる。極限を取る際に $\overline{D}$ 上での連続性を用いた。

$u < 0$ の場合、$z = a - iu$ として、$a \searrow 0$ とすれば、$\sqrt{z} \to \sqrt{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ なので、

$$
\phi(u) = L(-iu) = \lim_{a \searrow 0} L(a - iu) = e^{-\sqrt{-u}(1+i)}
$$

となる。極限を取る際に $\overline{D}$ 上での連続性を用いた。

u=0 の場合、

$$
\phi(0) = 1
$$

となる。

以上より、まとめて、

$$
\phi(u) = \begin{cases} e^{-\sqrt{u}(1-i)} & (u > 0) \\ e^{-\sqrt{-u}(1+i)} & (u < 0) \\ 0 & (u = 0) \end{cases}
$$

が答えとなる。

以下、L の正則性と連続性を見る。

まず正則性を見る。$u = a + ib \in D$ とする。$0 < |h| < \frac{a}{2}$ とし、$h = p + iq$ とおく。

$$
\frac{L(u+h) - L(u)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-(u+h)y} - e^{-uy}}{h} f(y) \, \mathrm{d}y
$$

で、被積分関数に関して、

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-(u+h)y} - e^{-uy}}{h} \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_u^{u+h} -ye^{-ky} \, \mathrm{d}k \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 -ye^{-(u+t(p+iq))y} (p+iq) \, \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 ye^{-(a+tp)y} |h| \, \mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 ye^{-\frac{a}{2}y} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq e^{-\frac{a}{2}y} \\
&< C \ (h \text{ によらず有界})
\end{aligned}
$$

となるため、$Cf(y)$ は可積分であるから優収束定理が使えて、

$$\frac{\mathrm{d}L(u)}{\mathrm{d}u} = \int_0^\infty -ye^{-uy} f(y)\,\mathrm{d}y$$

となる。つまり、D 上正則となる。

次に連続性を見る。$u = ib \in \overline{D}, |h| < 1, u + h \in \overline{D}$ とし、$h = p + iq (p \geq 0)$ とおく。

$$L(u+h) = \int_0^\infty e^{-(u+h)y} f(y)\,\mathrm{d}y$$

となるが、被積分関数に関して、

$$\left| e^{-(u+h)y} f(y) \right| = e^{-py} f(y) \leq f(y) \ (\because \ y \geq 0)$$

なので、優収束定理が使えて、

$$\lim_{z \to u} L(z) = \int_0^\infty e^{-uy} f(y)\,\mathrm{d}y$$

となる。つまり、$\overline{D}$ 上連続となる。

(4)

$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Y_i$ の特性関数を求める。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[e^{iu \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Y_i} \right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{iu \frac{1}{n^2} Y_i} \right] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{iu \frac{1}{n^2} Y_i} \right] \ (\because \text{i.i.d.}) \\
&= \mathbb{E}\left[e^{iu \frac{1}{n^2} Y} \right]^n \\
&= \phi\left(\frac{u}{n^2} \right)^n \\
&= \phi(u)
\end{aligned}
$$

となる。

よって、Y に分布収束する ($n \to \infty$ が関係ない答えである為、本当に正しいのかどうかは不明)。

3 知識

確率変数の変数変換の公式 [1]

単調写像でない場合に注意 [2]

$$
\begin{aligned}
&P(x < X < x + \delta x) = P(y < Y < y + \delta y) \\
\Rightarrow &\int_{x}^{x+\mathrm{d}x} f(x')\,\mathrm{d}x' = \int_{y}^{y+\mathrm{d}y} g(y')\,\mathrm{d}y' \\
\Rightarrow &f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y \\
\Rightarrow &g(y) = f(x)\left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] 石川顕一. “統計数理”. 東京大学工学部システム創成学科 C コース.
https://ocw.u-tokyo.ac.jp/lecture_files/engin_05/2/notes/ja/ishikawa2.pdf

[2] “【確率変数の変換】証明と例題”. ゆっくりキカイガクシュウ. 2020/2/11.
https://laid-back-scientist.com/change-of-variables