

2023 年度 大問 4

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1 問題

$$Y = \frac{1}{X^2}$$

2 解答

(1)

確率変数の変数変換の公式を用いると、また、 $X = \pm \frac{1}{\sqrt{Y}}$ と、2つの解があることに注意すると、

$$\begin{aligned} f(y) &= \begin{cases} 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} \left| \frac{dx}{dy} \right| & (0 < y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{3}{2}} & (0 < y) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

なお、実際、 $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{3}{2}} dy = 1$ である。(Wolfram Alpha で計算)

(2)

$$\begin{aligned} \frac{dL(u)}{du} &= \frac{d}{du} \int_0^\infty e^{-uy} f(y) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{du} e^{-uy} f(y) dy \\ &= \int_0^\infty -y e^{-uy} f(y) dy \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-uy} e^{-\frac{1}{2y}} y^{-\frac{1}{2}} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2u\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2z}} e^{-uz} \left(\frac{1}{2uz}\right)^{-\frac{1}{2}} z^{-2} dz \\
&= \sqrt{2u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2z}} e^{-uz} z^{-\frac{3}{2}} dz \\
&= \sqrt{2u} L(u)
\end{aligned}$$

微分と積分が交換できることは、 $f(y)$ が確率密度関数であるため被積分関数が可積分であり、また、微分後の式も可積分であることから従う。

$\frac{1}{2y} = uz$ という変数変換が本質的。見つけた人曰く、「 $\exp(-uy), \exp(-\frac{1}{2}y)$ の形を保存するにはどうすればいいのかなぁと思って、いろいろ気合いで推測」したらしいです。

(3)

(2) の式に当てはめて $L(-iu) = e^{-\sqrt{2u}\sqrt{-i}}$ としたい所だが、これは厳密な解答ではない。 $\sqrt{-i}$ 自体が多価関数。

以下 Slack にあがっていた解答の書き起こし。なお、この解答の作成者は数学科の複素関数論を履修されていた方です。(私には無理……)

$$\begin{aligned}
D &= \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\} \\
E &= \left\{ re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r > 0, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4} \right\}
\end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow D, z \mapsto z^2 \\
D &\rightarrow E, z \mapsto \sqrt{z} \left(re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}} \right)
\end{aligned}$$

は正則かつ全単射で互いに逆写像。

ここで、 L は D で正則、 \overline{D} で連続である。この証明は後述。

実軸正の部分で、

$$\frac{dL}{du}(u) = -\frac{1}{\sqrt{2u}} L(u)$$

が成り立つから、両辺が D 上で正則な為、一致の定理より、 D 上

$$\frac{dL}{dz}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2z}} L(z)$$

が成立する。

E 上で $M(z) = L(z^2)$ とおけば、上式より、

$$\frac{dM}{dz} = \frac{dL}{dz}(z^2) 2z$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2}z^2}L(z^2)2z \\
&= -\sqrt{2}M(z) \quad (\because \sqrt{z^2} = z \text{ on } E)
\end{aligned}$$

これより、 E 上 $M(z) = Ce^{-\sqrt{2}z}$ となる。ただし、 C は積分定数。実軸正の部分から、 $u \searrow 0$ とすれば、 $M(u) = L(\sqrt{u}) \rightarrow L(0) = 1$ となる。従って、 $C = 1$ で $M(z) = e^{-\sqrt{2}z}$ 、 D 上で $L(z) = M(\sqrt{z}) = e^{-\sqrt{2}z}$ となる。

$u > 0$ の場合、 $z = a - iu$ として、 $a \searrow 0$ とすれば、 $\sqrt{z} \rightarrow \sqrt{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ なので、

$$\phi(u) = L(-iu) = \lim_{a \searrow 0} L(a - iu) = e^{-\sqrt{u}(1-i)}$$

となる。極限を取る際に \overline{D} 上での連続性を用いた。

$u < 0$ の場合、 $z = a - iu$ として、 $a \searrow 0$ とすれば、 $\sqrt{z} \rightarrow \sqrt{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$ なので、

$$\phi(u) = L(-iu) = \lim_{a \searrow 0} L(a - iu) = e^{-\sqrt{-u}(1+i)}$$

となる。極限を取る際に \overline{D} 上での連続性を用いた。

$u=0$ の場合、

$$\phi(0) = 1$$

となる。

以上より、まとめて、

$$\phi(u) = \begin{cases} e^{-\sqrt{u}(1-i)} & (u > 0) \\ e^{-\sqrt{-u}(1+i)} & (u < 0) \\ 0 & (u = 0) \end{cases}$$

が答えとなる。

以下、 L の正則性と連続性を見る。

まず正則性を見る。 $u = a + ib \in D$ とする。 $0 < |h| < \frac{a}{2}$ とし、 $h = p + iq$ とおく。

$$\frac{L(u+h) - L(u)}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-(u+h)y} - e^{-uy}}{h} f(y) dy$$

で、被積分関数に関して、

$$\begin{aligned}
\left| \frac{e^{-(u+h)y} - e^{-uy}}{h} \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_u^{u+h} -ye^{-ky} dk \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_0^1 -ye^{-(u+t(p+iq))y} (p+iq) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|h|} \int_0^1 ye^{-(a+tp)y} |h| dt \\
&\leq \int_0^1 ye^{-\frac{a}{2}y} dt
\end{aligned}$$

$$\leq e^{-\frac{a}{2}y}$$

$$< C \text{ (} h \text{ によらず有界)}$$

となるため、 $Cf(y)$ は可積分であるから優収束定理が使えて、

$$\frac{dL(u)}{du} = \int_0^\infty -ye^{-uy} f(y) dy$$

となる。つまり、 D 上正則となる。

次に連続性を見る。 $u = ib \in \overline{D}, |h| < 1, u + h \in \overline{D}$ とし、 $h = p + iq (p \geq 0)$ とおく。

$$L(u + h) = \int_0^\infty e^{-(u+h)y} f(y) dy$$

となるが、被積分関数に関して、

$$\left| e^{-(u+h)y} f(y) \right| = e^{-py} f(y) \leq f(y) \text{ (} \because y \geq 0 \text{)}$$

なので、優収束定理が使えて、

$$\lim_{z \rightarrow u} L(z) = \int_0^\infty e^{-uy} f(y) dy$$

となる。つまり、 \overline{D} 上連続となる。

(4)

$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Y_i$ の特性関数を求める。

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[e^{iu \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Y_i} \right] &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n e^{iu \frac{1}{n^2} Y_i} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{iu \frac{1}{n^2} Y_i} \right] \text{ (} \because \text{i.i.d.)} \\ &= \mathbb{E} \left[e^{iu \frac{1}{n^2} Y} \right]^n \\ &= \phi \left(\frac{u}{n^2} \right)^n \\ &= \phi(u) \end{aligned}$$

となる。

よって、 Y に分布収束する ($n \rightarrow \infty$ が関係ない答えである為、本当に正しいのかどうかは不明)。

3 知識

確率変数の変数変換の公式 [\[1\]](#)

単調写像でない場合に注意 [\[2\]](#)

$$\begin{aligned}
P(x < X < x + \delta x) &= P(y < Y < y + \delta y) \\
\Rightarrow \int_x^{x+\delta x} f(x') \, dx' &= \int_y^{y+\delta y} g(y') \, dy' \\
\Rightarrow f(x) \, dx &= g(y) \, dy \\
\Rightarrow g(y) &= f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] 石川顕一. “統計数理”. 東京大学工学部システム創成学科 C コース.
https://ocw.u-tokyo.ac.jp/lecture_files/engin_05/2/notes/ja/ishikawa2.pdf
- [2] “【確率変数の変換】証明と例題”. ゆっくりキカイガクシュウ. 2020/2/11.
<https://laid-back-scientist.com/change-of-variables>