2015 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t) - y(t) - x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) + \frac{x(t)y(t)}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(t) + y(t) - y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) - \frac{x(t)^2}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}}
\end{cases}
$$

2　解答

(1)

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r - r^3 \\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1 - \cos\theta
\end{cases}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r - r^3 \\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1 - \cos\theta
\end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases}
\int \frac{1}{r-r^3} dr = \int dt \\
\int \frac{1}{1-\cos\theta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} = \int dt
\end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{cases}
r = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{r_0^2}-1\right)e^{-2t}+1}} \\
\theta = 2\arctan \frac{1}{-t+\frac{1}{\tan\frac{\theta_0}{2}}}
\end{cases}
\end{aligned}
$$

前者は部分分数分解、後者は三角関数の半角公式を用いて解いた。
見えやすいのでこのままにしたが、もう少し簡略化すべき。

(3),(4)

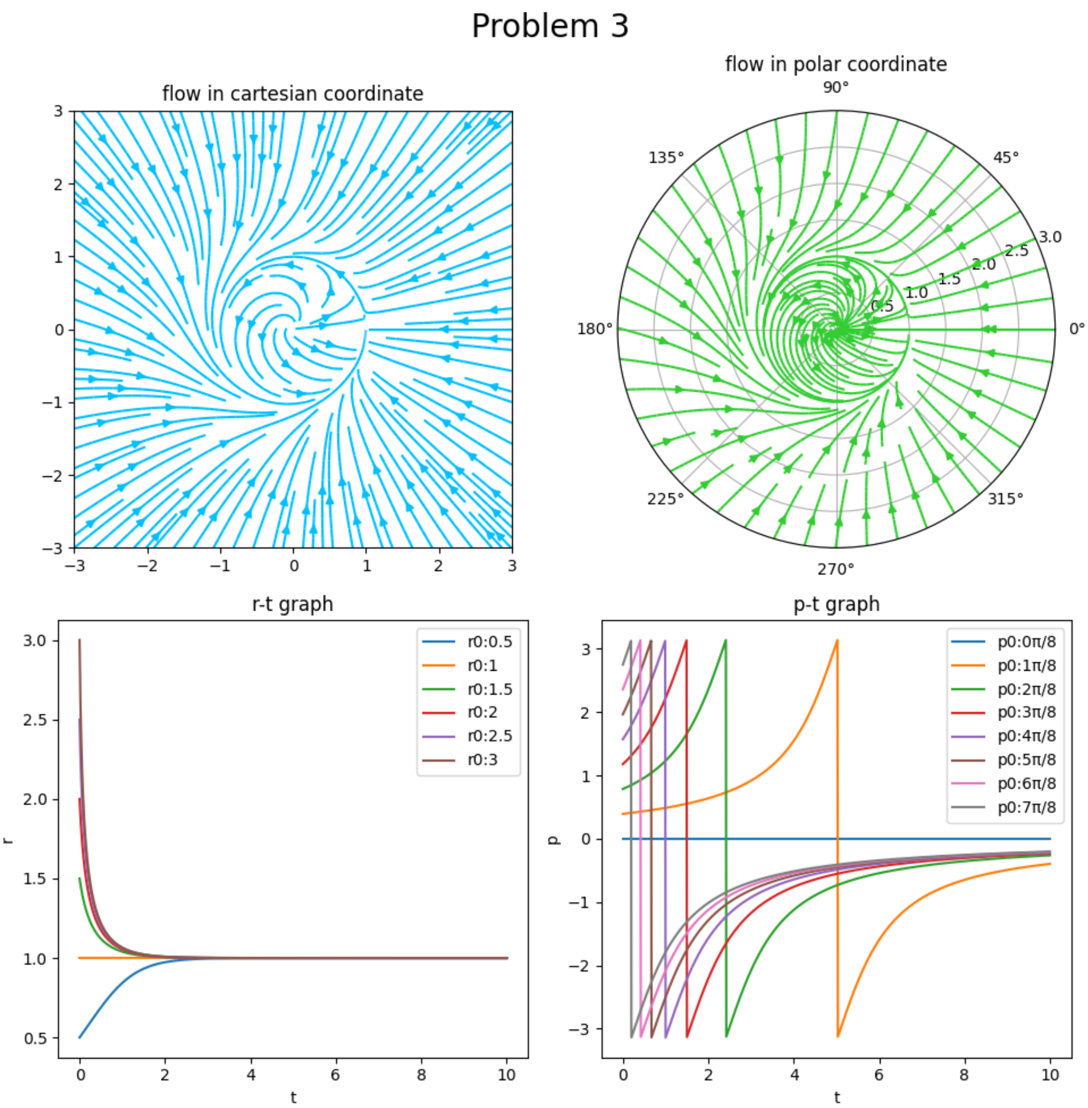

図 1　visualizations

p は θ を意味する。角度のグラフに関しては、Python の arctan の仕様のため不連続点が生じているが、本来はシグモイド的なグラフを描くべきだろう。

特に、$r_0 = 1.0, \theta_0 = 0.0$ のとき、これは安定固定点となる。

3　知識

　忘れている公式類があまりに多いので、全て記しておく。

3.1　三角関数

3.1.1　二倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x \\
\cos 2x &= \cos x^2 - \sin x^2 \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
\tan 2x &= \frac{2\tan x}{1-\tan x^2}
\end{aligned}
$$

3.1.2　二倍角の公式の逆

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}
\end{aligned}
$$

3.1.3　三倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\
\cos 3x &= 4\cos^3 x - 3\cos x
\end{aligned}
$$

3.1.4　三倍角の公式の逆

$$
\begin{aligned}
\sin^3 x &= \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \\
\cos^3 x &= \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}
\end{aligned}
$$

3.1.5 和積の公式

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

3.1.6 積和の逆

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$
$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$
$$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$$

3.2 積分

3.2.1 $1 \pm \cos x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\cos x}dx &= \int \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx \\ &= \tan\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

3.2.2 $1 \pm \sin x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sin x}dx &= \int \frac{1}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-x)}dx \\ &= \int \frac{1}{2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})}dx \\ &= -\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + C\end{aligned}$$

これらは、分母分子に $1 \mp \cos x$ や $1 \mp \sin x$ をかける事でも求められる。
また、最悪の場合、$\tan\frac{x}{2}$ を t と置くと、

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

となって、助かることがある。

3.2.3 $x^2 + a^2$

本題とは関連がないが、忘れていたので書いておく。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2+a^2} dx &= \int \frac{1}{a^2} \cos^2\theta \frac{a}{\cos^2\theta} d\theta \quad (x = a\tan\theta) \\
&= \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + C
\end{aligned}
$$

3.2.4 $\sqrt{x^2 + a^2}$

本題とは関連がないが、忘れていたので書いておく。

受験の月で最高難度とされているやつ。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{1}{t} dt \quad (t = x + \sqrt{x^2+1}) \\
&= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C
\end{aligned}
$$

4 おまけ

3.py がビジュアライズ用のコードである。

Listing 1 visualizer

```python
import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

MAX_R = 3
fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
fig.suptitle("Problem 3", fontsize=20)


# 直交座標表示
ax1 = plt.subplot(221)
ax1.set_aspect("equal")
```

```
raw_x = np.linspace(-MAX_R, MAX_R, 500 + 1)
raw_y = np.linspace(-MAX_R, MAX_R, 500 + 1)
x, y = np.meshgrid(raw_x, raw_y)
dxdt = x - y - x * (x**2 + y**2) + (x * y) / (np.sqrt(x**2 + y**2))
dydt = x + y - y * (x**2 + y**2) - (x * x) / (np.sqrt(x**2 + y**2))
ax1.streamplot(x=x, y=y, u=dxdt, v=dydt, color="deepskyblue", density=1.5)
ax1.set_xlim(-MAX_R, MAX_R)
ax1.set_ylim(-MAX_R, MAX_R)
ax1.set_title("flow in cartesian coordinate")

# 極座標表示
ax2 = plt.subplot(222, projection="polar")
raw_r = np.linspace(0, MAX_R, 100 + 1)
raw_p = np.linspace(0, 2 * math.pi, 360 * 10 + 1)
r, p = np.meshgrid(raw_r, raw_p)
drdt = r - r**3
dpdt = 1 - np.cos(p)
ax2.streamplot(x=p.T, y=r.T, u=dpdt.T, v=drdt.T, color="limegreen", density=1.5)
ax2.set_ylim(0, MAX_R)
ax2.set_title("flow in polar coordinate")

# r-t graph
ax3 = plt.subplot(223)
t = np.linspace(0, 10, 1000)
for r0 in [0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]:
    r = np.sqrt(1 / ((1 / (r0**2) - 1) * np.exp(-2 * t) + 1))
    ax3.plot(t, r, label=f"r0:{r0}")
ax3.set_xlabel("t")
ax3.set_ylabel("r")
ax3.legend()
ax3.set_title("r-t graph")

# p-t graph
ax4 = plt.subplot(224)
t = np.linspace(0, 10, 1000)
for _p0 in range(8):
    p0 = math.pi / 8 * _p0
    p = 2 * np.arctan(1 / (-t + 1 / np.tan(p0 / 2)))
    ax4.plot(t, p, label=f"p0:{_p0π}/8")
ax4.set_xlabel("t")
ax4.set_ylabel("p")
ax4.legend()
ax4.set_title("p-t graph")
```

```
plt.tight_layout()

# plt.show()
plt.savefig("情報理工/2015/3.png")
```

参考文献

[1] matplotlib.“matplotlib.pyplot.streamplot”.2020 年 1 月 5 日.https://matplotlib.org/3.1.1/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.streamplot.html

[2] 受験の月.“高校数学 3 積分法（基本計算パターン）”.https://examist.jp/category/mathematics/integration/