2019 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$e^X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

2　解答

(1)

$$\begin{aligned}
||e^X|| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\| X^k \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\| X \right\|^k \\
&= e^{\|X\|} \\
||e^X - I|| &= \left\| X^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k - I \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\| \\
&= \left\| X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} X^k \right\| \\
&\leq \|X\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \|X\|^k \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|X\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X\|^k \right) \\
&= \|X\| e^{\|X\|} \\
||e^X - I - X|| &= \left\| X^0 + X^1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k - I - X \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\| \\
&= \left\| X^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} X^k \right\| \\
&\leq \|X\|^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \|X\|^k \right) \\
&\leq \|X\|^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X\|^k \right) \\
&= \|X\| e^{\|X\|}
\end{aligned}
$$

(2)

まず、一般の $0 \leq i < m$ に対し、以下が成立する。

$$
\begin{aligned}
\left\| P^i Q^{m-1-i} \right\| &= \left\| e^{\frac{i(A+B)}{m}} e^{\frac{(m-1-i)A}{m}} e^{\frac{(m-1-i)B}{m}} \right\| \\
&\leq e^{\left\| \frac{i(A+B)}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&\leq e^{\left\| \frac{iA}{m} \right\| + \left\| \frac{iB}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&= e^{\left\| \frac{iA}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{iB}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&= e^{\left\| \frac{iA}{m} \right\| + \left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{iB}{m} \right\| + \left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&\leq e^{\frac{m-1}{m} ||A||} e^{\frac{m-1}{m} ||B||} \\
&= e^{\frac{m-1}{m} (||A|| + ||B||)}
\end{aligned}
$$

ただし、途中で e の単調性つまり、$x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y$ を用いた。
なお、$P \neq Q$ という事には十分に注意する必要がある。安易な指数法則は適用出来ない。
以上より、

$$
\begin{aligned}
||P^m - Q^m|| &= \left\| \sum_{i=0}^{m-1} P^i (P - Q) Q^{m-1-i} \right\| \\
&\leq ||P - Q|| \left\| \sum_{i=0}^{m-1} P^i Q^{m-1-i} \right\|
\end{aligned}
$$

$$\leq ||P-Q||me^{\frac{m-1}{m}(||A||+||B||)}$$

となる。

(3)

$f(X) \coloneqq e^X - I$, $g(X) \coloneqq e^X - I - X$ である。
よって、

$$\begin{aligned}
& g\left(\frac{A+B}{m}\right) - g\left(\frac{A}{m}\right) - g\left(\frac{B}{m}\right) - f\left(\frac{A}{m}\right) f\left(\frac{B}{m}\right) \\
&= \left(e^{\frac{A+B}{m}} - I - \frac{A+B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}} - I - \frac{A}{m}\right) - \left(e^{\frac{B}{m}} - I - \frac{B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}} - I\right)\left(e^{\frac{B}{m}} - I\right) \\
&= \left(e^{\frac{A+B}{m}} - \frac{A+B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}} - \frac{A}{m}\right) - \left(e^{\frac{B}{m}} - \frac{B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}} - e^{\frac{A}{m}} - e^{\frac{B}{m}}\right) \\
&= e^{\frac{A+B}{m}} - e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}} \\
&= P - Q
\end{aligned}$$

となる。

(4)

一部緩めの不等式評価になっていることに注意する必要があるが、以下のような式が成立する。

$$\begin{aligned}
||P-Q|| &= \left\|g\left(\frac{A+B}{m}\right) - g\left(\frac{A}{m}\right) - g\left(\frac{B}{m}\right) - f\left(\frac{A}{m}\right) f\left(\frac{B}{m}\right)\right\| \\
&\leq \left\|g\left(\frac{A+B}{m}\right)\right\| + \left\|g\left(\frac{A}{m}\right)\right\| + \left\|g\left(\frac{B}{m}\right)\right\| + \left\|f\left(\frac{A}{m}\right) f\left(\frac{B}{m}\right)\right\| \\
&\leq \left\|\frac{A+B}{m}\right\|^2 e^{\frac{||A+B||}{m}} + \left\|\frac{A}{m}\right\|^2 e^{\frac{||A||}{m}} + \left\|\frac{B}{m}\right\|^2 e^{\frac{||B||}{m}} + \left\|\frac{A}{m}\right\|\left\|\frac{B}{m}\right\| e^{\frac{||A||}{m}+\frac{||B||}{m}} \\
&= \frac{1}{m^2}\left(||A+B||^2 e^{\frac{||A+B||}{m}} + ||A||^2 e^{\frac{||A||}{m}} + ||B||^2 e^{\frac{||B||}{m}} + ||A||||B|| e^{\frac{||A||}{m}+\frac{||B||}{m}}\right) \\
&\leq \frac{1}{m^2}\left(||A+B||^2 e^{\frac{||A||+||B||}{m}} + ||A||^2 e^{\frac{||A||+||B||}{m}} + ||B||^2 e^{\frac{||A||+||B||}{m}} + ||A||||B|| e^{\frac{||A||+||B||}{m}}\right) \\
&= \frac{1}{m^2} e^{\frac{||A||+||B||}{m}} \left(||A+B||^2 + ||A||^2 + ||B||^2 + ||A||||B||\right) \\
&\leq \frac{1}{m^2} e^{\frac{||A||+||B||}{m}} \left(||A||^2 + 2||A||||B|| + ||B||^2 + ||A||^2 + ||B||^2 + ||A||||B||\right) \\
&= \frac{1}{m^2} e^{\frac{||A||+||B||}{m}} \left(2||A||^2 + 3||A||||B|| + 2||B||^2\right) \\
&\leq \frac{1}{m^2} e^{\frac{||A||+||B||}{m}} \left(2||A||^2 + 4||A||||B|| + 2||B||^2\right) \\
&= \frac{2}{m^2} e^{\frac{||A||+||B||}{m}} \left(||A|| + ||B||\right)^2
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}||P^m - Q^m|| &\le ||P - Q|| m e^{\frac{m-1}{m}(||A||+||B||)} \\ &\le \frac{2}{m^2} e^{\frac{||A||+||B||}{m}} \left(||A|| + ||B||\right)^2 m e^{\frac{m-1}{m}(||A||+||B||)} \\ &= \frac{2}{m} \left(||A|| + ||B||\right)^2 e^{||A||+||B||}\end{aligned}$$

が示される。

(4)

常微分方程式を解いて、

$$x(t) = ve^{(A+B)t}$$

を得る。
特に、

$$x(1) = ve^{A+B} = vP^m$$

である。
一方、

$$\tilde{x}^{2m} = v\left(e^{\frac{A}{m}} e^{\frac{B}{m}}\right)^m = vQ^m$$

である。
よって、

$$\begin{aligned}||x(1) - \tilde{x}^{2m}|| &= ||vP^m - vQ^m|| \\ &\le ||v|| ||P^m - Q^m|| \\ &\le ||v|| \frac{2}{m} \left(||A|| + ||B||\right)^2 e^{||A||+||B||} \\ &= \frac{C}{m}\end{aligned}$$

となる。ただし、C は m に依存しない定数である。
よって、

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} m^{\alpha}||x(1)-\tilde{x}^{2m}|| &\leq \lim_{m\to\infty} m^{\alpha}\frac{C}{m} \\
&= \lim_{m\to\infty}\frac{C}{m^{1-\alpha}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\lim_{m\to\infty} m^{\alpha}||x(1)-\tilde{x}^{2m}|| = 0
$$

が示される。

3 知識

連立 1 階線形常微分方程式の解は、行列の指数関数を用いて表す事が出来る。

参考文献

[1] 武内修.“線形代数 II/連立線形微分方程式”. 筑波大.2022 年 6 月 7 日.https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E4%BB%A3%E6%95%B0II%2F%E9%80%A3%E7%AB%8B%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E5%BE%AE%E5%88%86%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F#j6598f91

[2] https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E4%BB%A3%E6%95%B0II%2F%E9%80%A3%E7%AB%8B%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E5%BE%AE%E5%88%86%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F#j6598f91