2020 年度 大問 2

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

1　問題

$$f(x;\mu) = \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$Y_i = \begin{cases} a & (X_i \leq a) \\ X_i & (X_i > a) \end{cases}$$

2　解答

(1)

Y_1 の期待値は

$$\int_0^a af(x;\mu)dx + \int_a^\infty xf(x;\mu)dx = a + \mu e^{-\frac{a}{\mu}}$$

(2)

$g(\hat{\mu}) - a = \hat{\mu}e^{-\frac{a}{\hat{\mu}}}$ を考える。
存在は、連続性と $\lim_{x\to\infty} \hat{\mu}e^{-\frac{a}{\hat{\mu}}} \to \infty$ より明らか。
一意性は、微分すると狭義単調と分かるので明らか。

(3)

自信なし。
まず、$P(M = m)$ を求める。

$P(Y_1 = a) = \int_0^a f(x;\mu)dx = 1 - e^{-\frac{a}{\mu}}$ より、$P(M = m) = {}_N C_m (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m}$
次に、$P(\overline{Y} \leq b|M = m)$ を求める。

$$\begin{aligned}
P(\overline{Y} \leq b|M = m) &= P\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i \leq Nb \middle| M = m\right) \\
&= P\left(am + \sum_{i=1}^{N-m} (Y_i + a) \leq Nb\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{N-m} Y_i \leq N(b - a)\right) \\
&= \int_0^{N(b-a)} f_{N-m}(y)dy \\
&= \int_a^b N f_{N-m}(Ny - a)dy
\end{aligned}$$

ただし、一行目から二行目の変形で、指数分布の無記憶性を用いた。
また、f_{N-m} で、指数分布を $N - m$ 個重ね合わせた分布を示している。
これは、ガンマ分布に従うことが一般に知られている。(後述)
以上より、

$$\begin{aligned}
P(M = m, \overline{Y} \leq b) &= P(M = m)P(\overline{Y} \leq b|M = m) \\
&= {}_N C_m (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m} \int_a^b N f_{N-m}(Ny - a)dy \\
&= {}_N C_m (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m} \int_a^b \frac{N}{(N - m - 1)!\mu^{N-m}} (Ny - a)^{N-m-1} e^{-\frac{Ny-a}{\mu}} dy
\end{aligned}$$

(4)

μ に関連する部分だけ取り出すと、

$$M(\mu) = (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m} \frac{1}{\mu^{N-m}} e^{-\frac{Ny-a}{\mu}}$$

以下不明。

3　知識

指数分布は再生性を持たない。つまり、$X_1, X_2, \cdots$ が独立に指数分布に従うとしても、$X_1 + X_2 + \cdots$ は指数分布に従わない。これは一般にはアーラン分布に従う。特に、今回はガンマ分布に従う。これは以下の畳み込みの式と帰納法で示せる。

$$f_{Y(=X_1+X_2)}(y) = \int_0^y f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x)dx$$

なので、(3) で期待値も同じ指数分布に従うと考えることは誤り。

同じ指数分布の重ね合わせがガンマ分布になることを示す。

$$\begin{aligned}
f_1(x;\mu) &= \frac{1}{\mu}e^{-\frac{x}{\mu}} \\
f_2(x;\mu) &= \int_0^x f_1(y;\mu) f_1(x-y;\mu)dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{\mu}e^{-\frac{y}{\mu}}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x-y}{\mu}}dy \\
&= \frac{1}{\mu^2}\int_0^x e^{-\frac{x}{\mu}}dy \\
&= \frac{1}{\mu^2}xe^{-\frac{x}{\mu}} \\
f_3(x;\mu) &= \int_0^x f_2(y;\mu) f_1(x-y;\mu)dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{\mu^2}ye^{-\frac{y}{\mu}}\frac{1}{\mu}e^{-\frac{x-y}{\mu}}dy \\
&= \frac{1}{\mu^3}\int_0^x ye^{-\frac{x}{\mu}}dy \\
&= \frac{1}{2\mu^3}x^2e^{-\frac{x}{\mu}} \\
f_n(x;\mu) &= \int_0^x f_{n-1}(y;\mu) f_1(x-y;\mu)dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!\mu^n}x^{n-1}e^{-\frac{x}{\mu}}
\end{aligned}$$

頑張れば、ガンマ分布の形を覚えていなくても、畳み込み計算から示すことが出来る。

指数分布の無記憶性を示す。

$$P(X > s+t | X > s) = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\int_{s+t}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx}{\int_{s}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx} \\
&= \frac{e^{-\frac{s+t}{\mu}}}{e^{-\frac{s}{\mu}}} \\
&= e^{-\frac{t}{\mu}} \\
&= P(X > t)
\end{aligned}
$$

https://mathlandscape.com/exp-distrib-memoryless/

指数分布とは,「コールセンターに次に電話がかかってくるまでにかかる時間」や「電化製品が次に壊れるまでの時間」などに用いられます。「昨日コールセンターに電話がかかってきたから,今日はかかってこないだろう」とか「昨日電化製品が壊れなかったから,今日は壊れないだろう」とか,そういうことはないわけですから,この事象には,無記憶性があるといえるわけですね。

参考文献

[1] 数学の景色. “指数分布の定義と例と性質まとめ”.2022 年 3 月 6 日.https://mathlandscape.com/exp-distrib/

[2] 数学の景色.”指数分布の無記憶性とその証明”.2021 年 9 月 23 日.https://mathlandscape.com/exp-distrib-memoryless/