

2015 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 4 日

1 問題

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) - y(t) - x(t)(x(t)^2 + y(t)^2) + \frac{x(t)y(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \\ \frac{dy}{dt} = x(t) + y(t) - y(t)(x(t)^2 + y(t)^2) - \frac{x(t)^2}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}} \end{cases}$$

2 解答

(1)

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 - \cos \theta \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{dr}{dt} = r - r^3 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 - \cos \theta \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} \int \frac{1}{r-r^3} dr = \int dt \\ \int \frac{1}{1-\cos \theta} \frac{d\theta}{dt} = \int dt \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} r = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{r_0^2} - 1\right)e^{-2t} + 1}} \\ \theta = 2 \arctan \frac{1}{-t + \frac{1}{\tan \frac{\theta_0}{2}}} \end{cases} \end{aligned}$$

前者は部分分数分解、後者は三角関数の半角公式を用いて解いた。

見えやすいのでこのままにしたが、もう少し簡略化すべき。

(3),(4)

Problem 3

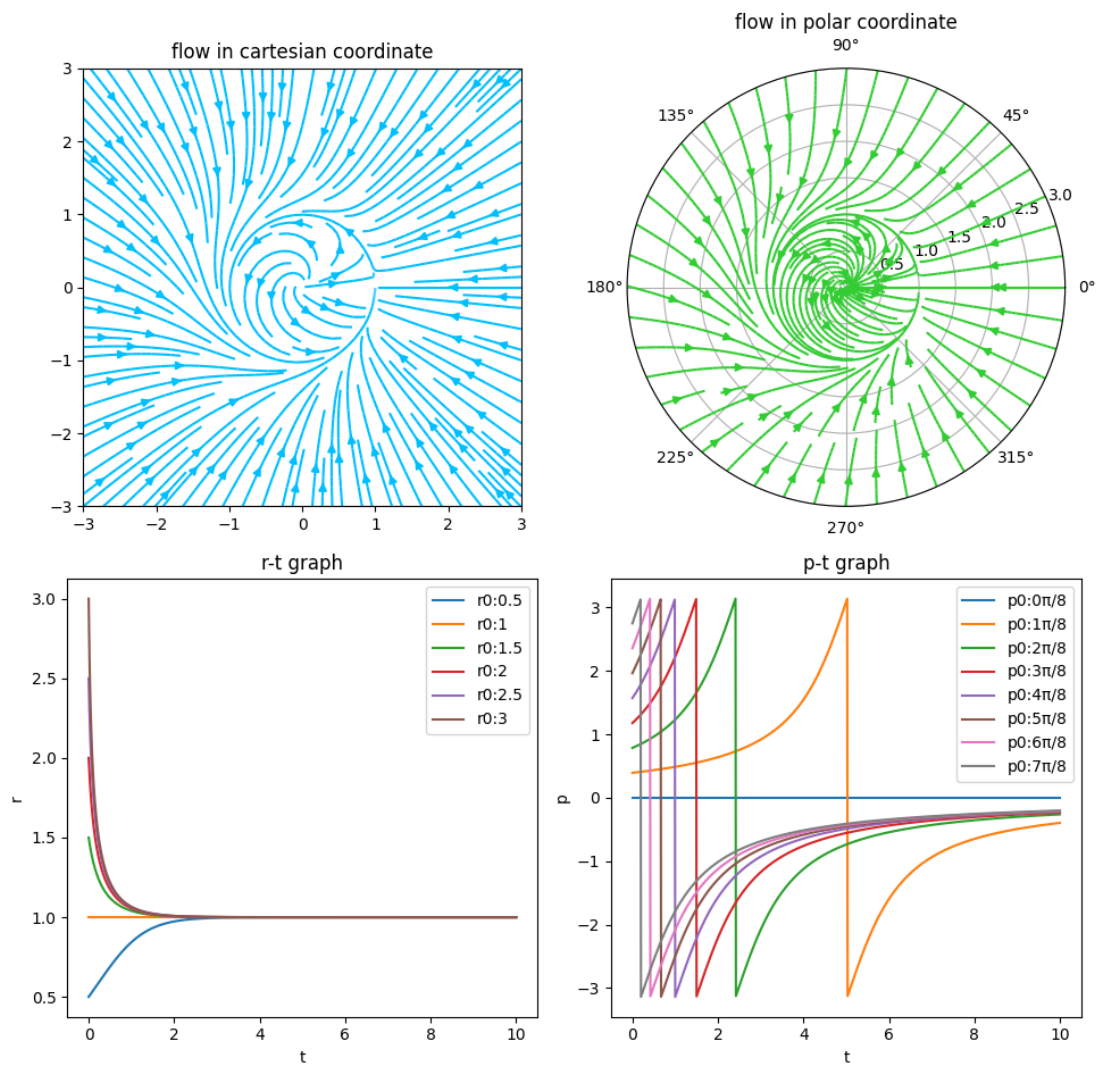


図 1 visualizations

p は θ を意味する。角度のグラフに関しては、Python の \arctan の仕様のため不連続点が生じているが、本来はシグモイド的なグラフを描くべきだろう。

特に、 $r_0 = 1.0, \theta_0 = 0.0$ のとき、これは安定固定点となる。

3 知識

忘れている公式類があまりに多いので、全て記しておく。

3.1 三角関数

3.1.1 二倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \\ \tan 2x &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}\end{aligned}$$

3.1.2 二倍角の公式の逆

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}\end{aligned}$$

3.1.3 三倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x\end{aligned}$$

3.1.4 三倍角の公式の逆

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \\ \cos^3 x &= \frac{3 \cos x + \cos 3x}{4}\end{aligned}$$

3.1.5 和積の公式

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

3.1.6 積和の逆

$$\begin{aligned}\sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)) \\ \cos x \sin y &= \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)) \\ \sin x \sin y &= -\frac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))\end{aligned}$$

3.2 積分

3.2.1 $1 \pm \cos x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx \\ &= \tan \frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

3.2.2 $1 \pm \sin x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int \frac{1}{1 + \cos(\frac{\pi}{2} - x)} dx \\ &= \int \frac{1}{2 \cos^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} dx \\ &= -\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

これらは、分母分子に $1 \mp \cos x$ や $1 \mp \sin x$ をかける事でも求められる。

また、最悪の場合、 $\tan \frac{x}{2}$ を t と置くと、

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

となって、助かることがある。

3.2.3 $x^2 + a^2$

本題とは関連がないが、忘れていたので書いておく。

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{a^2} \cos^2 \theta \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \quad (x = a \tan \theta)$$

$$= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

3.2.4 $\sqrt{x^2 + a^2}$

本題とは関連がないが、忘れていたので書いておく。

受験の月で最高難度とされているやつ。

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int \frac{1}{t} dt \quad (t = x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

4 おまけ

[3.py](#) がビジュアライズ用のコードである。

ソースコード 1 visualizer

```
1 import math
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 MAX_R = 3
6 fig = plt.figure(figsize=(10, 10))
7 fig.suptitle("Problem 3", fontsize=20)
8
9
```

```

10 # 直交座標表示
11 ax1 = plt.subplot(221)
12 ax1.set_aspect("equal")
13 raw_x = np.linspace(-MAX_R, MAX_R, 500 + 1)
14 raw_y = np.linspace(-MAX_R, MAX_R, 500 + 1)
15 x, y = np.meshgrid(raw_x, raw_y)
16 dxdt = x - y - x * (x**2 + y**2) + (x * y) / (np.sqrt(x**2 + y
    **2))
17 dydt = x + y - y * (x**2 + y**2) - (x * x) / (np.sqrt(x**2 + y
    **2))
18 ax1.streamplot(x=x, y=y, u=dxdt, v=dydt, color="deepskyblue",
    density=1.5)
19 ax1.set_xlim(-MAX_R, MAX_R)
20 ax1.set_ylim(-MAX_R, MAX_R)
21 ax1.set_title("flow in cartesian coordinate")
22
23 # 極座標表示
24 ax2 = plt.subplot(222, projection="polar")
25 raw_r = np.linspace(0, MAX_R, 100 + 1)
26 raw_p = np.linspace(0, 2 * math.pi, 360 * 10 + 1)
27 r, p = np.meshgrid(raw_r, raw_p)
28 drdt = r - r**3
29 dpdt = 1 - np.cos(p)
30 ax2.streamplot(x=p.T, y=r.T, u=dpdt.T, v=drdt.T, color="limegreen
    ", density=1.5)
31 ax2.set_ylim(0, MAX_R)
32 ax2.set_title("flow in polar coordinate")
33
34 # r-t graph
35 ax3 = plt.subplot(223)
36 t = np.linspace(0, 10, 1000)
37 for r0 in [0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3]:
38     r = np.sqrt(1 / ((1 / (r0**2) - 1) * np.exp(-2 * t) + 1))
39     ax3.plot(t, r, label=f"r0:{r0}")
40 ax3.set_xlabel("t")
41 ax3.set_ylabel("r")
42 ax3.legend()
43 ax3.set_title("r-t graph")
44
45 # p-t graph
46 ax4 = plt.subplot(224)
47 t = np.linspace(0, 10, 1000)
48 for _p0 in range(8):
49     p0 = math.pi / 8 * _p0
50     p = 2 * np.arctan(1 / (-t + 1 / np.tan(p0 / 2)))
51     ax4.plot(t, p, label=f"p0:{_p0} π/8")
52 ax4.set_xlabel("t")

```

```
53 ax4.set_ylabel("p")
54 ax4.legend()
55 ax4.set_title("p-t_graph")
56
57 plt.tight_layout()
58
59 # plt.show()
60 plt.savefig("情報理工/2015/3.png")
```

参考文献

- [1] matplotlib. “matplotlib.pyplot.streamplot”. 2020 年 1 月 5 日.https://matplotlib.org/3.1.1/api/_as_gen/matplotlib.pyplot.streamplot.html
- [2] 受験の月.”高校数学 3 積分法（基本計算パターン）”.<https://examist.jp/category/mathematics/integration/>