

# 2010 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 6 日

## 1 問題

一意な行列の分解を求めよ 難問だと思う

## 2 解答

### (1)

$A$  は正定値対称行列なので、 $A = Q^T D Q$  と書ける。ただし、 $Q$  は直交行列、 $D$  は要素が全て正の対角行列である。

$D$  はその平方根  $\sqrt{D}$  が取れることに注意すると、

$$\begin{aligned}(Q^T \sqrt{D} Q)^2 &= (Q^T \sqrt{D} Q)(Q^T \sqrt{D} Q) \\ &= Q^T D Q \\ &= A\end{aligned}$$

となり、 $B = Q^T \sqrt{D} Q$  である。

一意性を示す。 $B^2 = C^2 = A$  とする。

$\|x\|_2 = 1$  を満たす全ての  $x$  に対して、 $B, C$  の正定値性に注意すると、

$$\begin{aligned}x^T B x &= \sqrt{(x^T B x)^2} \\ &= \sqrt{x^T B^2 x} \\ &= \sqrt{x^T C^2 x} \\ &= \sqrt{(x^T C x)^2} \\ &= x^T C x\end{aligned}$$

しかし、 $\|x\|_2 = 1$  を満たす全ての  $x$  に対して、

$$x^T(B - C)x = 0$$

であると、これは  $B - C = O \Leftrightarrow B = C$  を意味する。

(ここの部分の証明は、対称性などを使えば決して難しい訳ではない。しかし、簡潔な証明はよく分からなかった)

よって、 $B$  は一意である。

## (2)

特異値分解より、 $F = R'\Sigma S$  と分解できる。ただし、 $R', S$  は直交行列、 $\Sigma$  は全ての要素が正の対角行列である。 $F$  が正則な為、フルランクであり、 $\Sigma$  の対角成分に 0 はない。

よって、 $F = R'(SS^T)\Sigma S = (R'S)(S^T\Sigma S)$  と書いて、 $R'S^T$  は  $R'$  と  $S$  がそれぞれ直交行列な為、直交行列である。

以上より、 $R = R'S^T, U = S^T\Sigma S$  とすれば良い。

一意性については、 $F^T F = U^T R^T R U = U^T U = U^2 = W$  とすると、 $W$  は正定値対称行列だが、(1) より、 $U$  は一意と分かる。よって、 $R$  も一意である。

全体で一意。

## (3)

$$\begin{aligned} FR^T &= RUR^T \\ &= RQ'D'Q^T R^T \end{aligned}$$

より、 $V = FR^T$  は正定値対称行列。よって、 $F = VR$  となる。一意性は自明。

## 3 知識

2020 年度問 1 をまず参照のこと。

### (1) について

$$\begin{aligned} B^2 &= C^2 \\ \Leftrightarrow B^2 - C^2 &= O \\ \Leftrightarrow (B - C)(B + C) &= CB - BC \end{aligned}$$

となり、また、 $B + C$  は対角成分が正なので、 $BC = CB \Rightarrow B = C$  が言える。

これは、 $B$  と  $C$  の可換性、つまり、同時対角化可能性と同値であり、その方針でも示せるはずである。

同時対角化可能 $\Leftrightarrow$ 交換可能の意味と証明 [1]

$A$  と  $B$  が同時対角化可能なとき、ある正則行列  $P$  が存在して  $P^{-1}AP$  と  $P^{-1}BP$  がともに対角行列となる。

対角行列どうしは交換可能なので、

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$$

整理する:

$$P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$$

$$AB = BA$$

しかし、自分には分からなかった。(もしこれを誰かが読んでいるのであれば教えて欲しい……) 計数の人のブログらしきものもあった。[2]

## (2)

直交行列と直交行列の積は直交行列であることは、簡単に示せる。

$$(RS)^T(RS) = S^T R^T RS = I$$

特異値分解についてまとめる。

特異値分解の定義、性質、具体例 [3]

特異値分解とは、 $m \times n$  行列  $A$  を  $A = U\Sigma V$  と分解することです。ただし、

- $U$  は  $m \times m$  の直交行列 (各列が互いに直交する行列)
- $V$  は  $n \times n$  の直交行列
- $\Sigma$  は ... 非対角成分は 0、対角成分は非負で大きさの順に並んだ行列

です。任意の行列はこのように分解できます。また、 $\Sigma$  の対角成分で 0 でないもの (0 を含むこともある) を特異値と言います。

なお、行列の (0 でない) 特異値の数は、その行列のランクと一致する。

以下に、参考文献の続きを載せると、

特異値分解の定義, 性質, 具体例 [3]

$A$  が対称行列のとき、 $A$  の固有値と特異値は一致します。対称行列は直交行列で対角化できるからです。

$A^T A$  の 0 でない固有値の正の平方根は  $A$  の特異値です。理由は、 $A = U\Sigma V$  と特異値分解できるとき  $A^T A = V^T(\Sigma^T \Sigma)V$  と固有値分解できるからです。同様に  $AA^T$  の 0 でない固有値の正の平方根も  $A$  の特異値です。

となっている。

## 行列分解

本問を解く際に、特異値分解以外の分解に関しても考慮したが、知識が足りず苦労した。それを以下に簡単にまとめる。

QR 分解を用いて解くことも出来るのだろうか?

### LU 分解

以下、参考文献 [4] より引用。

正方行列  $A$  を下三角行列  $L$  と上三角行列  $U$  との積によって、 $A = LU$  と表すことを LU 分解 (lower-upper(LU) decomposition) という。

行列が LU 分解可能であるための必要十分条件は、全ての主座小行列の行列式が 0 でないことである。

### QR 分解

以下、参考文献 [5] より引用。

QR 分解 (キューアールぶんかい、英: QR decomposition, QR factorization) とは、 $m \times n$  実行列  $A$  を、 $m$  次直交行列  $Q$  と  $m \times n$  上三角行列  $R$  との積への分解により表すこと、またはそう表した表現をいう。このような分解は常に存在する。

QR 分解は線型最小二乗問題を解くために使用される。また、固有値問題の数値解法の 1 つである QR 法の基礎となっている。

すべての実正方行列  $A$  は直交行列  $Q$  と上三角行列 (別号右三角行列)  $R$  を用いて  $A = QR$  と分解できる。もし  $A$  が正則ならば、 $R$  の対角成分が正になるような因数分解は一意に定まる。

QR 分解を計算する手法として、グラム・シュミット分解、ハウスホルダー変換、ギブンス回転などがある。

### コレスキー分解

以下、参考文献 [6] より引用。

行列  $A$  を下三角行列  $C$  とその転置行列の  $C^T$  の積に分解すること、すなわち、 $A = CC^T$  と分解することを、コレスキー分解 (cholesky decomposition) という。

行列  $A$  が正定値行列であるならば、コレスキー分解可能である。

## 参考文献

- [1] 高校数学の美しい物語.”同時対角化可能 $\Leftrightarrow$ 交換可能の意味と証明”.2021 年 3 月 7 日.<https://manabitimes.jp/math/1196>
- [2] Lilliput Steps. “半正定値行列の平方根行列の存在と一意性”.HatenaBlog.2020 年 5 月 6 日.<https://kagamiz.hatenablog.com/entry/2020/05/16/212214>
- [3] 高校数学の美しい物語.”特異値分解の定義, 性質, 具体例”.2022 年 11 月 3 日.<https://manabitimes.jp/math/1280>
- [4] 理数アラカルト.”LU 分解を解説 ～具体例と必要十分条件～”.2022 年 4 月 17 日.<http://risalc.info/src/LU-decomposition.html>
- [5] Wikipedia.”QR 分解”.2022 年 11 月 20 日.<https://ja.wikipedia.org/wiki/QR%E5%88%86%E8%A7%A3>
- [6] 理数アラカルト.”コレスキー分解とは?”.2023 年 4 月 2 日.<http://risalc.info/src/cholesky-decomposition.html>