2010 年度 大問 2

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

表 1　**Probabilities of X and Y**

Y \ X	0(1-ϵ)	1(ϵ)
0	0.9	0.1
1	0.1	0.9

2　解答

(1)

$P(X=1|Y=0)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)}=\frac{0.1\epsilon}{0.9-0.8\epsilon}$

(2)

$$\begin{aligned}P(X=1|Z_n=z_n)&=\frac{P(X=1,Z_n=z_n)}{P(Z_n=z_n)}\\&=\frac{\epsilon 0.9^{z_n}0.1^{n-z_n}{}_nC_{z_n}}{\epsilon 0.9^{z_n}0.1^{n-z_n}{}_nC_{z_n}+(1-\epsilon)0.1^{z_n}0.9^{n-z_n}{}_nC_{z_n}}\\&=\frac{\epsilon 0.1^{n-z_n}}{\epsilon 0.1^{n-z_n}+(1-\epsilon)0.9^{n-z_n}}\end{aligned}$$

(3)

確率 0.1 で+1、確率 0.9 で-1 されるランダムウォークを考える。
初めて+2 か-2 に到達するまでのステップ数の期待値が答え。

漸化式をたてて解くと、座標 0 には偶数回目のみ非負の確率で存在し、n 回目だと、確率は $0.18^{n/2}$ である。
この結果から、期待値は、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0,2|n}^{\infty} n0.18^{\frac{n-2}{2}}(0.9^2+0.1^2) &= \frac{2\times 0.82}{0.18}\sum_{n=1}^{\infty/2} n(0.18)^n \\ &= \frac{1.64}{0.18}\frac{0.18}{(1-0.18)^2} \\ &= 2.439024390243902\cdots\end{aligned}$$

となる。
2 ステップで終了するのが確率 0.82 で起きるので、全体で大体 2.5 ステップ程度というのは、直感にも合っている。

3 知識

似た話として、カタラン数があるが、今回は関係なかった。

4 おまけ

Listing 1 randomWalk

```
import random


def random_walk():
    x = 0
    cnt = 0
    while True:
        cnt += 1
        if random.random() < 0.1:
            x += 1
        else:
            x -= 1
        if abs(x) >= 2:
            # print(cnt)
            return cnt


def main():
    num_of_trial = 100000
    sum = 0
```

```
    for _ in range(num_of_trial):
        sum += random_walk()
    print("average:", sum / num_of_trial)


if __name__ == "__main__":
    main()
```

average: 2.43544