2017 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

累積分布関数の逆関数

2　解答

(1)

$$R[T] = \frac{(1-p)\log(1-p) + p\log p}{p-1}$$

(2)

確率密度関数を P とする。

$$\begin{aligned}
\Pr(B) &= \int_{x \in B} P(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int P(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x \notin B} P(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - \int_{x \notin B} P(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - \int_{\int_0^x P(x)\mathrm{d}x < p} P(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1 - p
\end{aligned}$$

最後に、$P(x) \geq 0$ から導かれる、範囲についての単調性を用いた (もう少し厳密なやり方があるかも)。

$$
\begin{aligned}
R[X] &= \frac{1}{1-p}\int_p^1 F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-p}\int_{u\geq p} F_X^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{1-p}\int_{F(x)\geq p} P(x)x\,\mathrm{d}x \ \left(\because F_X(x)=u, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}=P(x)\right) \\
&= \frac{1}{1-p}\int P(x)(xI_B)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$x \in B \setminus A \Rightarrow x \geq F_X^{-1}(p), x \in A \setminus B \Rightarrow x < F_X^{-1}(p)$ より、

$$
\begin{aligned}
\int_{x\in B\setminus A} xP(x)dx &\leq F_X^{-1}(p)\mathrm{Pr}(B\setminus A) \\
&= F_X^{-1}(p)\mathrm{Pr}(A\setminus B)\ (\because \mathrm{Pr}(A)=\mathrm{Pr}(B)=1-p) \\
&\leq \int_{x\in A\setminus B} xP(x)dx
\end{aligned}
$$

ただし、一つ目の不等号における等号は $\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}=0$ の時に成立する ($A=B$ とは、厳密には言えない)。

(3)

$A=\big(X+Y\geq F_{X+Y}^{-1}(p)\big), B=\big(X\geq F_X^{-1}(p)\big), C=\big(Y\geq F_Y^{-1}(p)\big)$ とする。
$\mathrm{Pr}(A)=\mathrm{Pr}(B)=1-p$ であることから、(2) 後半より、$\mathrm{E}[X\cdot I_A]\leq \mathrm{E}[X\cdot I_B]$ である。
同様に、$\mathrm{E}[Y\cdot I_A]\leq \mathrm{E}[Y\cdot I_C]$ である。
よって、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[X\cdot I_A]+\mathrm{E}[Y\cdot I_A]\leq \mathrm{E}[X\cdot I_B]+\mathrm{E}[Y\cdot I_C] \\
\Leftrightarrow &\mathrm{E}\Big[(X+Y)\cdot I_{X+Y\geq F_{X+Y}^{-1}(p)}\Big]\leq E[X\cdot I_{X\geq F_X^{-1}(p)}]+E[Y\cdot I_{Y\geq F_Y^{-1}(p)}] \\
\Leftrightarrow &\mathrm{R}[X+Y]\leq \mathrm{R}[X]+\mathrm{R}[Y]
\end{aligned}
$$