2020 年度 大問 4

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}x(n,t) &= x(n-1,t)+x(n+1,t)-2x(n,t) \\
x(n+N,t) &= x(n,t) \\
e(m,n) &= \exp\left(i\frac{2\pi mn}{N}\right)
\end{aligned}$$

2　解答

(1)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}x(n,t) = x(n-1,t)+x(n+1,t)-2x(n,t) \\
\Leftrightarrow &e(m,n)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_m(t) = e(m,n-1)f_m(t)+e(m,n+1)f_m(t)-2e(m,n)f_m(t) \\
\Leftrightarrow &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f_m(t) = \left(\exp\left(-i\frac{2\pi m}{N}\right)+\exp\left(i\frac{2\pi m}{N}\right)-2\right)f_m(t) \\
\Leftrightarrow &f_m(t) = c_m e^{\left(\exp\left(-i\frac{2\pi m}{N}\right)+\exp\left(i\frac{2\pi m}{N}\right)-2\right)t}
\end{aligned}$$

そして、これは $e(m,n+N)=e(m,n)$ より、条件 (**) を満たす。

(2)

(1) の形で書けるとまず仮定して、与えられた初期条件を適用すると、$c_m=\frac{g_n}{e(m,n)}$ となる。

しかし、これでは c_m が n に依存してしまうので、条件に反してしまう。なので、c_m を n に依存しないように定めたい。

ここで、$g_n = \sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)c'_m$ という形で書けることを利用する。
ただし、$c'_m = \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1} e(-m,n')g_{n'}$ である。これは離散フーリエ変換に相当する。
なお、このような形で書けることは、以下で確認することが出来る。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)c'_m \\
&= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)\sum_{n'=0}^{N-1} e(-m,n')g_{n'} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)e(-m,n')g_{n'} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} e(m,n-n')g_{n'} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1} N\delta_{n,n'}g_{n'} \\
&= \frac{1}{N}Ng_n \\
&= g_n
\end{aligned}
$$

この事を利用すると、

$$x(n,t) = \sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)f_m(t) \quad (c_m = c'_m)$$

とすれば、

$$x(n,0) = \sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)c_m = g_n$$

となり、特に、(1) より、これは条件 (*),(**) を共に満たす。
よって、

$$
\begin{aligned}
x(n,t) &= \sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)f_m(t) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} e(m,n)\left(\frac{1}{N}\sum_{n'=0}^{N-1} e(-m,n')g_{n'}\right)e^{\left(\exp\left(-i\frac{2\pi m}{N}\right)+\exp\left(i\frac{2\pi m}{N}\right)-2\right)t}
\end{aligned}
$$

が解となる。

(3)

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x(n,t) &= \lim_{t\to\infty} \sum_{m=0}^{N-1} e(m,n) c_m e^{\left(\exp\left(-i\frac{2\pi m}{N}\right)+\exp\left(i\frac{2\pi m}{N}\right)-2\right)t} \\
&= c_0 \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e(0,n) g_n \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g_n
\end{aligned}
$$

3 知識

離散フーリエ変換

参考文献

[1] 金沢大学."離散フーリエ変換の計算法".http://leo.ec.t.kanazawa-u.ac.jp/~nakayama/edu/file/signal_proc_ch4.pdf

[2] Wikipedia."離散フーリエ変換".2022 年 12 月 28 日.https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%A2%E6%95%A3%E3%83%95%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%82%A8%E5%A4%89%E6%8F%9B