2023 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$I(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta, \quad I_N(f) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} f(e^{\frac{2\pi i k}{N}})$$

2　解答

(1)

$e^{i\theta} = z$ とおくと、$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = ie^{i\theta} = iz$ であるので、

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\Gamma(1)} f(z)\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_{\Gamma(1)} \frac{-i}{z} f(z)\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

(2)

極は、$z^N - 1 = 0$ より、$z = \zeta_N^k\ (\forall k \in [1, N])$ となる。ただし、$\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ である。

よって、留数はロピタルの定理を用いると、

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=\zeta_N^k} g_N[f](z) &= \lim_{z\to\zeta_N^k} (z-\zeta_N^k)\frac{-iz^{N-1}}{z^N-1} f(z) \\ &= \lim_{z\to\zeta_N^k} \frac{-iz^{N-1}}{Nz^{N-1}} f(z) \\ &= \frac{-i}{N} f(\zeta_N^k) \end{aligned}$$

となる。

(3)

(2) の結果と留数定理より、

$$
\begin{aligned}
\oint_{\Gamma(r')} g_N[f](z)\,\mathrm{d}z &= \oint_{\Gamma(r')} \frac{-iz^{N-1}}{z^N-1} f(z)\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z=\zeta_N^k} g_N[f](z) \\
&= \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\zeta_N^k)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$1 < r' < r$ とする。

なお、ここで r' を r としなかったのは、$f(z)$ が $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ でのみ定義されている関数であり、$\Gamma(r)$ で未定義であるからである。

これを用いて、与式を評価すると、

$$
\begin{aligned}
|I(f) - I_N(f)| &= \left| \oint_{\Gamma(1)} \frac{-i}{z} f(z)\,\mathrm{d}z - \frac{2\pi}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\zeta_N^k) \right| \\
&= \left| \oint_{\Gamma(r')} \frac{-i}{z} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{\Gamma(r')} g_N[f](z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&= \left| \oint_{\Gamma(r')} \left(\frac{-i}{z} - \frac{-iz^{N-1}}{z^N-1} \right) f(z)\,\mathrm{d}z \right| \\
&\leq \|f\| \oint_{\Gamma(r')} \left| \frac{-i}{z} - \frac{-iz^{N-1}}{z^N-1} \right| \mathrm{d}z \\
&= \|f\| \oint_{\Gamma(r')} \left| \frac{1}{z(z^N-1)} \right| \mathrm{d}z \\
&\leq \|f\| \frac{2\pi r'}{r'(r'^N-1)} \\
&= \frac{2\pi\|f\|}{(r'^N-1)}
\end{aligned}
$$

となる。

これが、任意の $1 < r' < r$ に対して成立するので、$r' \nearrow r$ の極限をとると、

$$
|I(f) - I_N(f)| \leq \frac{2\pi\|f\|}{r^N-1}
$$

となる。

(4)

まず、与式の上界が 2π であることは、(3) より明らか。

与式を下から評価して、それが 2π に収束することを示す。ここで、$f(z) = z^N$ とすると、

$$
I(f) = \int_0^{2\pi} e^{iN\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{iN}\left[e^{iN\theta}\right]_0^{2\pi} = 0
$$

$$I_N(f) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi ik} = 2\pi$$

となる。

よって、

$$\limsup_{N\to\infty}\left(r^N \sup_f \frac{|I(f) - I_N(f)|}{\|f\|}\right) \geq |0 - 2\pi| = 2\pi$$

となる。

以上より、答えは 2π である。