2020 年度 大問 5

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

1　問題

近似配列

$$\min_B \sum_{i=1}^{n} (A[i] - B[i])^2$$

$$B[1] \leq B[2] \leq \cdots \leq B[n]$$

2　解答

まず、これは問題に誤りがあると思われる。例えば

$$A = [0, -1, 0, 1, 0]$$
$$B_1 = [-1, -1, 0, 1, 1]$$
$$B_2 = [0, 0, 0, 0, 0]$$
$$(A' = A + [100])$$

などとすると、近似配列に一意性は無いことが分かるが、そのようなことが (1-1) では考慮されていない様に見受けられる。

以下、この議論は省略する。

(1)

(1-1)

$B'[n+1] \neq A'[n+1]$ を仮定し、大小関係で場合分けをする。

- $B'[n+1] < A'[n+1]$
  n 番目以下に関して、実行可能領域が狭まるので、解は悪化する。$n+1$ 番目に関しても悪化。よって、全体で悪化しており、これは最適解にはならない。
- $B'[n+1] > A'[n+1]$
  $B'[n+1] > B[n]$ より、$B'[n+1]$ の値を小さくすれば改善される。よって、これは最適解にはならない。

(1-2)

問題で与えられている近似配列について、$B[i] = b$ と置く。

$B'[n+1] < B[n]$ を以下では仮定する。

$B[1] = b_1$ という変数についてのみの制約付き最適化問題を考える。この時、$\min_{b_1 \le b}(A[1] - b_1)^2$ という制約付き最適化問題を考えると、近似配列において $B[1] = b$ であることから、この部分問題においても $b_1 = b$ が最適解であると分かる。特に、目的関数が凸であるため、$b_1 \le b$ 全体において、+に変化させる方が目的関数の値を減少させると分かる。

いま、$B'[1] = b'_1$ に関して、$\min_{b'_1 \le B'[2](\le b)}(A[1] - b'_1)^2$ という部分的な制約付き最適化問題を考えると、先の議論より、$b'_1 = B'[1] = B'[2]$ が最適解である。

続いて、同様に、$B[1] = B[2] = b_2$ についても、部分的な制約付き最適化問題を考える。

近似配列の形から、また、$\sum_{i=1}^{2}(A[i] - b_2)^2$ が凸であることから、同様の議論が行え、$B'[1] = B'[2] = b'_2$ に関して、$\min_{b'_2 \le B'[3](\le b)} \sum_{i=1}^{2}(A[i] - b'_2)^2$ の最適解は $b'_2 = B'[1] = B'[2] = B'[3]$ である。

以下、帰納的に考えると、$B'[1] = B'[2] = \cdots = B'[n] = B'[n+1]$ が言える。

あとは、この条件の元での最適解が以下で示す形であることから、前半の題意は直ちに従う。

$B'[i] = b\ (\forall i)$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{n}(A[i] - b)^2 = \sum_{i=1}^{n} A[i]^2 - 2b\sum_{i=1}^{n} A[i] + nb^2$$

よって、$b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A[i]$ が最適解。

(2)

dp をする。

k 番目までの近似配列がそれぞれ一つ求まっているとする。

- $A[k+1] \ge B[k]$
  (1-1) より、$B[k+1] = A[k+1]$ で最適
- $A[k+1] < B[k]$
  $B[k] - B[i]\ (\forall 1 \le i \le k)$ だけ、全体をずらすと、(1-2) に帰着される。よって、近似配列が定まる。(記述は難しい。ここがある意味本質だと思うが、図を書いた方が分かりやすい

ので、ここでは省略する)

これは明らかに多項式時間で求まる。

3 知識

特になし