

# 2015 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 17 日

## 1 問題

$$\begin{aligned} & \text{maximize}_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} && \mathbf{a}^T (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ & \text{subject to} && \mathbf{1}^T \mathbf{u} + \mathbf{1}^T \mathbf{v} \leq 1 \\ & && \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize}_{\mathbf{x}} && \mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x} \\ & \text{subject to} && \|\mathbf{x}\|_{\infty} = 1 \end{aligned}$$

## 2 解答

(1)

(1-1)

自明

(1-2)

todo

(1-3)

自明

(2)

(2-1)

まず、 $\|x\|_2 = 1$  という制約に変更した問題を解く。

$Q = P^T D P$  と分解する。ただし、 $P$  は直交行列で、 $D$  は対角行列であり、

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

とする。

$Q^{-1} = P^T D^{-1} P$  である。なお、正定値性より、 $D^{-1}$  は定義可能である。

その上で、

$$\begin{aligned} x^T Q^{-1} x &= x^T P^T D^{-1} P x \\ &= (P x)^T D^{-1} (P x) \\ &= y^T D^{-1} y \quad (y = P x, \|y\|_2 = x^T P^T P x = 1) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{d_i} \end{aligned}$$

となるので、この制約下における解は、 $Q$  の最大固有値を  $d_{\max}$  として、 $\frac{1}{d_{\max}}$  となる。

……が、この議論は恐らく関係ない。

ラグランジュの未定乗数法の考え方をを用いる。

まず、 $x_k = 1 (1 \leq k \leq n)$  という制約に変更した問題を解く。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^T Q^{-1} x - \lambda(x_k - 1)) \\ &= 2Q^{-1} x - \lambda e_k \\ &= 0 \end{aligned}$$

より、

$$x = \frac{\lambda}{2} Q e_k$$

$$\begin{aligned}
x_k &= \frac{\lambda}{2} q_{kk} \\
&= 1 \\
\lambda &= \frac{2}{q_{kk}}
\end{aligned}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^T Q^{-1} \mathbf{x} &= \frac{1}{q_{kk}^2} \mathbf{e}_k^T Q^T Q^{-1} Q \mathbf{e}_k \\
&= \frac{1}{q_{kk}^2} \mathbf{e}_k^T Q \mathbf{e}_k \\
&= \frac{1}{q_{kk}^2} q_{kk} \\
&= \frac{1}{q_{kk}}
\end{aligned}$$

となる。よって、最小値の候補は、 $Q$  の対角成分の最大値を  $d_{\max} = d_k$  として、 $\frac{1}{d_{\max}}$  となる。特に、これより大きい解は存在しない (この議論が本来もう少しきちんとすべき) ので、もしこのような解が存在すれば、これが最適解である。

そして、このような解が、変更された制約下のみならず、元の制約下においても存在することは、

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \frac{1}{q_{kk}} Q \mathbf{e}_k \\
&= \begin{pmatrix} \frac{q_{1k}}{q_{kk}} \\ \frac{q_{2k}}{q_{kk}} \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \frac{q_{nk}}{q_{kk}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が、 $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = 1$  を満たすことから分かる。

最後の部分で、 $\mathbf{y} = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k, \mathbf{z} = -\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_k$  に対して、 $Q$  が正定値対称行列なことを用いると、

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} q_{ii} + q_{kk} + 2q_{ik} \geq 0 \\ q_{ii} + q_{kk} - 2q_{ik} \geq 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow 1 \geq \frac{q_{ii} + q_{kk}}{2} \geq q_{ik} \geq -\frac{q_{ii} + q_{kk}}{2} \geq -1
\end{aligned}$$

となることを用いた。

(2-2)

$$C = d_{\max}$$

## 3 知識

### 3.1 ラグランジュの未定乗数法

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & f(x, y) \\ \text{s.t.} \quad & g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

この問題は、以下のように解ける。

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

とおくと、 $(\alpha, \beta)$  が極値を与えるならば、 $(\alpha, \beta)$  は

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

の解、または、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

の解。[1]

## 参考文献

- [1] 高校数学の美しい物語. “ラグランジュの未定乗数法と例題”. 2021 年 3 月 7 日. [https :  
//manabitimes.jp/math/879](https://manabitimes.jp/math/879)