

2010 年度 大問 2

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 3 日

1 問題

表 1 Probabilities of X and Y

Y \ X	0(1- ϵ)	1(ϵ)
0	0.9	0.1
1	0.1	0.9

2 解答

(1)

$$P(X = 1|Y = 0) = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.1\epsilon}{0.9-0.8\epsilon}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(X = 1|Z_n = z_n) &= \frac{P(X = 1, Z_n = z_n)}{P(Z_n = z_n)} \\ &= \frac{\epsilon 0.9^{z_n} 0.1^{n-z_n} {}_n C_{z_n}}{\epsilon 0.9^{z_n} 0.1^{n-z_n} {}_n C_{z_n} + (1 - \epsilon) 0.1^{z_n} 0.9^{n-z_n} {}_n C_{z_n}} \\ &= \frac{\epsilon 0.1^{n-z_n}}{\epsilon 0.1^{n-z_n} + (1 - \epsilon) 0.9^{n-z_n}} \end{aligned}$$

(3)

確率 0.1 で+1、確率 0.9 で-1 されるランダムウォークを考える。

初めて+2 か-2 に到達するまでのステップ数の期待値が答え。

漸化式をたてて解くと、座標 0 には偶数回のみ非負の確率で存在し、 n 回目だと、確率は $0.18^{n/2}$ である。

この結果から、期待値は、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0,2|n}^{\infty} n 0.18^{\frac{n-2}{2}} (0.9^2 + 0.1^2) &= \frac{2 \times 0.82}{0.18} \sum_{n=1}^{\infty/2} n (0.18)^n \\ &= \frac{1.64}{0.18} \frac{0.18}{(1 - 0.18)^2} \\ &= 2.439024390243902 \dots\end{aligned}$$

となる。

2 ステップで終了するのが確率 0.82 で起きるので、全体で大体 2.5 ステップ程度というのは、直感にも合っている。

3 知識

似た話として、カタラン数があるが、今回は関係なかった。

4 おまけ

ソースコード 1 randomWalk

```
1 import random
2
3
4 def random_walk():
5     x = 0
6     cnt = 0
7     while True:
8         cnt += 1
9         if random.random() < 0.1:
10             x += 1
11         else:
12             x -= 1
13         if abs(x) >= 2:
14             # print(cnt)
15             return cnt
16
17
18 def main():
19     num_of_trial = 100000
```

```
20     sum = 0
21     for _ in range(num_of_trial):
22         sum += random_walk()
23     print("average:", sum / num_of_trial)
24
25
26 if __name__ == "__main__":
27     main()
```

average: 2.43544