2019 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

1　問題

ファルカスの補題を分離定理と有限生成錐の閉性から示せ。
(個人の感想だが、この問題はかなり捨て問な気がする。)

2　解答

(1)

これは分離定理を示す問題である。

(1-1)

$\mathbb{R}^n$ における有界な閉集合 K はコンパクト集合であること、及び、コンパクト集合上で定義される連続関数 $f : K \to \mathbb{R}, f(z) = ||x - z||$ は、最大値と最小値を持つことから、$||x - y|| = \inf_{z \in K} f(z)$ を達成する $y \in K$ が取れる。

なお、K は有界とは限らないが、本問に関しては、x からの距離で適当に区切っても題意に影響がない為、有界な閉集合に限定出来る。

(1-2)

凸性より明らか。省略する。

(1-3)

$d = 0$ として良い。

イメージとしては、x と y の間の垂直二等分線 (分離超平面) で、x と y が別々の領域に分かれる為、内積の正負が反転するという感じである。

しかし、厳密にこれを記述することはかなり難しいと思われる。

ここでは省略する。

(「分離超平面定理」を参照)

(2)

(2-1)

$C(\mathcal{A}) \supseteq \bigcup_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B})$ は明らか。

$C(\mathcal{A}) \subseteq \bigcup_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B})$ を示す。

$C(\mathcal{A})$ の元 x を取る。

$x = \lambda_1 a_1 + \cdots \lambda_m a_m$ に関して、$a_m = \mu_1 a_1 + \cdots \mu_{m-1} a_{m-1}$ と書けたと仮定する。

全ての $1 \leq i < m$ に対して、$\lambda_i + \lambda_m \mu_i \geq 0$ が成立すれば、$x \in C(\{a_i | 1 \leq i < m\})$ となる。

そうでない場合、$\lambda_i + k\mu_i$ が最小の k で 0 になるようなインデックスを i に取ると、$\lambda_m = \lambda'_m + k$ として、

$$
\begin{aligned}
x &= \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i + \cdots + \lambda_m a_m \\
&= \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i + \cdots + (\lambda'_m + k) a_m \\
&= \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i + \cdots + \lambda'_m a_m + k(\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{m-1} a_{m-1}) \\
&= (k\mu_1 + \lambda_1) a_1 + \cdots + (k\mu_i + \lambda_i) a_i + \cdots + (k\mu_{m-1} + \lambda_{m-1}) a_{m-1} + \lambda'_m a_m \\
&= (k\mu_1 + \lambda_1) a_1 + \cdots + 0 + \cdots + (k\mu_{m-1} + \lambda_{m-1}) a_{m-1} + \lambda'_m a_m \\
&\in C(\{a_j | 1 \leq j \leq m, j \neq i\})
\end{aligned}
$$

となり、要素数を減らすことが出来る。

以下、帰納的に一次独立になるまで、この議論を繰り返せばよい。

よって、示された。

(2-2)

$C(\mathcal{B})$ が閉集合であることが言えれば、有限個の閉集合の和集合は閉集合であることから、$C(\mathcal{A})$ も閉集合であると言える。

$C(\mathcal{B})$ が閉集合であることを示す。

これは、有限生成錐の閉性を示せば良い。

これもかなり記述は難しい気がする。

ここでは省略する。

(「有限生成錐が閉集合になることについて」を参照)

(3)

以上を基に、ファルカスの補題を示す。

(3-1)

$$(P) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } A\lambda = x, \lambda \geq 0$$

この時、$c^T A \leq 0 \Rightarrow c^T A\lambda = c^T x \leq 0$
となり、$(P) \Rightarrow \overline{(Q)}$ が示された。

(3-2)

A の各列ベクトルが生成する有限生成錐 $C(\mathcal{A} = \{a_i\}_{1 \leq i \leq m})$ は非空な凸閉集合である。
$\overline{(P)}$ ならば、$x \notin C(\mathcal{A})$ であり、分離定理より、$\langle c, x \rangle > 0$ かつ、$\langle c, a_i \rangle \leq 0$ となる c が存在する。これは (Q) に他ならない。
よって、$\overline{(P)} \Rightarrow (Q)$ が示された。

3 知識

ファルカスの補題は、弱双対定理からも示せる。

$$\min_x c^T x \text{ s.t. } Ax = b, x \geq \mathbf{0}$$

$$\max_y b^T y \text{ s.t. } A^T y \leq c$$

記号を入れ替えて、

$$\min_\lambda \mathbf{0}^T \lambda \text{ s.t. } A\lambda = x, \lambda \geq \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \min_\lambda 0 \text{ s.t. } A\lambda = x, \lambda \geq \mathbf{0}$$

$$\max_c x^T c \text{ s.t. } A^T c \leq \mathbf{0}$$
$$\Rightarrow \max_c c^T x \text{ s.t. } c^T A \leq \mathbf{0}$$

となる。
$\overline{(Q)}$ ならば、弱双対定理より、(P) となる。

参考文献

[1] ”コンパクト集合上の連続関数”.http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-kisosuri/contfncompactset070914.pdf

[2] Wikipedia.”分離超平面定理”.2022 年 3 月 16 日.https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%88%86%E9%9B%A2%E8%B6%85%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%AE%9A%E7%90%86

[3] WIIS.”凸集合どうしのミンコフスキー和（ミンコフスキー差）”.2022 年 2 月 21 日.https://wiis.info/math/convex-analysis/convex-set/sum-of-set/

[4] ”Farkas の補題と線形計画法の双対定理”http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-surikeikakuhou/farkas031025.pdf

[5] 関口 良行（東京海洋大学）.”有限生成錐が閉集合になることについて”.https://www2.kaiyodai.ac.jp/~yoshi-s/Notes/FiniteCone.pdf