2016 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 7 日

1　問題

正定値対称行列の tr について

$$
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{B^T B}^{-1} B^T = B^T \sqrt{B^T B}^{-1} \\
g(L) &= \mathrm{tr}\{(I-L)G(I-L)^T\}
\end{aligned}
$$

2　解答

(1)

既出 (2010 年大問 1(1))

(2)

$B^T B$ は n 次の正定値対称行列なので、$B^T B = A = R^2$ と置くと、

$$
QB = \sqrt{B^T B}^{-1} B^T B = R^{-1} R^2 = R
$$

となる。直交行列の積は直交行列になることに注意すると、$\mathrm{tr}(Q'R)$ を最大にする直交行列 Q' を求める問題に、本問は帰着される。もし $Q' = I$ であるならば、この Q が確かに $\mathrm{tr}(QB) = \mathrm{tr}(R)$ を最大化している。

ここで、

$$
\mathrm{tr}(Q'R) = \mathrm{tr}\bigl(Q' P^T D P\bigr) \quad (R = P^T D P)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{tr}\left(PQ'P^TD\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (PQ'P^T)_{ii} D_{ii}
\end{aligned}
$$

である。ただし、P は直交行列、D は対角行列である。これは、R が正定値対称行列であることから従う分解である。

直交行列の対角成分は、必ず 1 以下。気付くのが難しいが、証明は容易で、各行ベクトルのノルムが定義より 1 になることから従う。

D の対角成分も R の正定値性より正であるため、この式は $(PQ'P^T)_{ii} = 1$ で最大となる。

そして、そのような直交行列として $Q' = I$ を取れば、その上界は達成される。よって、題意は示された。

(3)

$$
\begin{aligned}
g(L) &= \mathrm{tr}\{(I-L)G(I-L)^T\} \\
&= \mathrm{tr}\{G - GL^T - LG + LGL^T\} \\
&= \mathrm{tr}(G+H) - \mathrm{tr}\left(GL^T + LG\right) \\
&= \mathrm{tr}(G+H) - 2\,\mathrm{tr}(LG)
\end{aligned}
$$

よって、$g(L)$ の最大化は、$\mathrm{tr}(LG)$ の最小化と等価。

(以下不明。答えはどうせ $\sqrt{H}\sqrt{G}^{-1}$ だと思う)

3　知識

todo

問題

$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(CAB) = \mathrm{tr}(BCA)$ は成立しますが、$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$ などは成立するとは限りません。https://manabitimes.jp/math/1135

参考文献