

2019 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

1 問題

$$a_{ij} \geq 0 \ (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \ (j = 1, 2, \dots, n), \quad B = \alpha A + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \ (0 < \alpha < 1)$$

2 解答

(1)

一般に、転置行列の固有値は、固有方程式が同じになることから、元の行列と同じ固有値を取る。
 A^T は、 $\mathbf{1}$ を固有ベクトルとして、1 を固有値に持つ。

$$\begin{aligned} (A^T \mathbf{1})_i &= \sum_j^n A_{ij}^T \mathbf{1}_j = \sum_j^n a_{ji} = 1 \\ \Rightarrow A^T \mathbf{1} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

そして、1 より絶対値が大きな固有値を持つことはない。
固有ベクトル \mathbf{x} の、絶対値に関する最大値を x_i で取るとすると、

$$\begin{aligned} (A^T \mathbf{x})_i &= \lambda x_i \\ \Leftrightarrow \sum_j^n a_{ji} x_j &= \lambda x_i \end{aligned}$$

一方、

$$\left| \sum_j^n a_{ji} x_j \right| \leq \sum_j^n |a_{ji}| |x_j| \leq |x_i| \sum_j^n a_{ji} = |x_i| < |\lambda| |x_i| = |\lambda x_i|$$

つまり、 λ が 1 より大きな値を取ると、この不等式に反し矛盾。

よって、 A の固有値の絶対値で最大となるものは 1 である。

(2)

関数 $f: S \rightarrow T$ を $f(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ で定義する。

ただし、 $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n | \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1\}$ である。

ここで、 $S = T$ を証明する。

$$B\mathbf{x} = \alpha A\mathbf{x} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x}$$

という表式と、 a_{ij}, α の値域より、 $T \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ は明らか。

$\mathbf{1}^T B\mathbf{x} = 1$ を示す。

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^T B\mathbf{x} &= \mathbf{1}^T \left(\alpha A\mathbf{x} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x} \right) \\ &= \alpha (\mathbf{1}^T A)\mathbf{x} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{x} \\ &= \alpha \mathbf{1}^T \mathbf{x} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{x} \\ &= \alpha + \frac{1-\alpha}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって、 $T = S$ である。

S が \mathbb{R}^n の非空なコンパクト集合であることは、 S が \mathbb{R}^n の有界閉集合であることから、これはコンパクト。

以上より、ヒントで与えられているブラウワーの不動点定理より、

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, B\mathbf{x} = \mathbf{x}, \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1$$

の条件を満たすような \mathbf{x} が存在する。

(3)

$$\left| \sum_{j=1}^n b_{ij} q_j \right|$$

$$\begin{aligned}
&= |(B\mathbf{q})_i| \\
&= \left| \left(\left(\alpha A + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right) \mathbf{q} \right)_i \right| \\
&= |(\alpha A \mathbf{q})_i| \quad (\because \mathbf{1}^T \mathbf{q} = 0) \\
&= \left| \sum_{j=1}^n \alpha a_{ij} q_j \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^n (\alpha a_{ij}) |q_j| \\
&= \sum_{j=1}^n \left(B - \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right)_{ij} |q_j| \\
&= \sum_{j=1}^n \left(b_{ij} - \frac{1-\alpha}{n} \right) |q_j| \\
&= \sum_{j=1}^n b_{ij} |q_j| - \frac{1-\alpha}{n} \|\mathbf{q}\|_1
\end{aligned}$$

(4)

まず、 $\mathbf{q} = \frac{1}{n} \mathbf{1} - \mathbf{x}$ と定義される \mathbf{q} を用いると、題意は、

$$\begin{aligned}
&\|B^N \frac{1}{n} \mathbf{1} - \mathbf{x}\|_1 \leq \alpha^N \left\| \frac{1}{n} \mathbf{1} - \mathbf{x} \right\|_1 \\
&\Leftrightarrow \|B^N \frac{1}{n} \mathbf{1} - B^N \mathbf{x}\|_1 \leq \alpha^N \|\mathbf{q}\|_1 \\
&\Leftrightarrow \|B^N \mathbf{q}\|_1 \leq \alpha^N \|\mathbf{q}\|_1
\end{aligned}$$

になる。

特に、 $\mathbf{1}^T \mathbf{q} = \mathbf{1}^T \frac{1}{n} \mathbf{1} - \mathbf{1}^T \mathbf{x} = \frac{n}{n} - 1 = 0$ であるが、この性質は、以下に示すように、 B を乗じても変わらない。

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^T (B\mathbf{q}) &= \mathbf{1}^T \left(\alpha A + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T \right) \mathbf{q} \\
&= \alpha \mathbf{1}^T A \mathbf{q} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{q} \\
&= \alpha \mathbf{1}^T \mathbf{q} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}^T \mathbf{q} \\
&= \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{n} \right) \mathbf{1}^T \mathbf{q}
\end{aligned}$$

$$= 0 \quad (\because \mathbf{1}^T \mathbf{q} = 0)$$

よって、 $\mathbf{1}^T \mathbf{q} = 0$ を満たす \mathbf{q} に関して、 $\|B\mathbf{q}\|_1 \leq \alpha \|\mathbf{q}\|_1$ であることを示せばよい。
これは、(3) で示したことから、

$$\begin{aligned} |(B\mathbf{q})_i| &\leq \sum_{j=1}^n (\alpha a_{ij}) |q_j| \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^n |q_j| \\ &= \alpha \|\mathbf{q}\|_1 \end{aligned}$$

となり、直ちに従う。

3 知識

3.1 コンパクト集合

\mathbb{R}^n において、有界閉集合がコンパクト集合であって、閉集合がコンパクト集合である訳では無いことに注意。

例として、 $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ は閉集合であるが、当然コンパクト集合ではない。

3.2 ブラウワーの不動点定理

(2) のヒントは、ブラウワーの不動点定理と呼ばれている。

参考文献

- [1] Mathpedia.”位相空間論 9：コンパクト性”.2021 年 3 月 31 日.https://math.jp/wiki/%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%96%E9%BC%9A%E3%82%B3%E3%83%B3%E3%83%91%E3%82%AF%E3%83%88%E6%80%A7#.E5.AE.9A.E7.90.86_9.20_.28.24.5Cmathbb.7B.R.7D.5E.n.24_.E3.81.AE.E3.82.B3.E3.83.B3.E3.83.91.E3.82.AF.E3.83.88.E9.9B.86.E5.90.88.29
- [2] Wikipedia. “ブラウワーの不動点定理”.2023 年 3 月 11 日.<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%96%E3%83%A9%E3%82%A6%E3%83%AF%E3%83%BC%E3%81%AE%E4%B8%8D%E5%8B%95%E7%82%B9%E5%AE%9A%E7%90%86>