

## 2020 年度 大問 2

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

### 1 問題

$$f(x; \mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}$$

$$Y_i = \begin{cases} a & (X_i \leq a) \\ X_i & (X_i > a) \end{cases}$$

### 2 解答

(1)

$Y_1$  の期待値は

$$\int_0^a af(x; \mu)dx + \int_a^\infty xf(x; \mu)dx = a + \mu e^{-\frac{a}{\mu}}$$

(2)

$g(\hat{\mu}) - a = \hat{\mu} e^{-\frac{a}{\hat{\mu}}}$  を考える。

存在は、連続性と  $\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\mu} e^{-\frac{a}{\hat{\mu}}} \rightarrow \infty$  より明らか。

一意性は、微分すると狭義単調と分かるので明らか。

(3)

自信なし。

まず、 $P(M = m)$  を求める。

$P(Y_1 = a) = \int_0^a f(x; \mu) dx = 1 - e^{-\frac{a}{\mu}}$  より、 $P(M = m) = {}_N C_m (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m}$   
次に、 $P(\bar{Y} \leq b | M = m)$  を求める。

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \leq b | M = m) &= P\left(\sum_{i=1}^N Y_i \leq Nb \mid M = m\right) \\ &= P\left(am + \sum_{i=1}^{N-m} (Y_i + a) \leq Nb\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{N-m} Y_i \leq N(b-a)\right) \\ &= \int_0^{N(b-a)} f_{N-m}(y) dy \\ &= \int_a^b N f_{N-m}(Ny - a) dy \end{aligned}$$

ただし、一行目から二行目の変形で、指数分布の無記憶性を用いた。  
また、 $f_{N-m}$  で、指数分布を  $N - m$  個重ね合わせた分布を示している。  
これは、ガンマ分布に従うことが一般に知られている。(後述)  
以上より、

$$\begin{aligned} P(M = m, \bar{Y} \leq b) &= P(M = m) P(\bar{Y} \leq b | M = m) \\ &= {}_N C_m (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m} \int_a^b N f_{N-m}(Ny - a) dy \\ &= {}_N C_m (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m} \int_a^b \frac{N}{(N-m-1)! \mu^{N-m}} (Ny - a)^{N-m-1} e^{-\frac{Ny-a}{\mu}} dy \end{aligned}$$

**(4)**

$\mu$  に関連する部分だけ取り出すと、

$$M(\mu) = (1 - e^{-\frac{a}{\mu}})^m (e^{-\frac{a}{\mu}})^{N-m} \frac{1}{\mu^{N-m}} e^{-\frac{Ny-a}{\mu}}$$

となるが、これを微分するのは大変な困難を伴うように思われる。  
なので、別の方針を考える。

$$h(m, y; \mu) = \frac{d}{dy} \left( \int_a^y h(m, y'; \mu) dy' \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dy} (P(M = m, \bar{Y} \leq y)) \\
&= P(M = m, \bar{Y} = y)
\end{aligned}$$

ただし、最後の変形で、累積分布関数の微分が確率密度関数になることを用いた。

細かい議論は (2) などと同様になるので省くが、無記憶性を用いた議論や適切な変形を経ると、結局のところ、指数分布の確率密度関数  $f(x; \mu)$  について、ある値  $Y$  を取る確率が最大になるような  $\mu$  が、ただ一つ存在することを示す問題に帰着されると思われる。(厳密にはガンマ分布に対して言うべきか?)

これは、(2) の議論とほぼ同様である。

以下では、おまけ程度に、上で示した問題の解を与える。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mu} f(Y; \mu) &= -\frac{1}{\mu^2} e^{-\frac{Y}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \frac{Y}{\mu^2} e^{-\frac{Y}{\mu}} \\
&= \frac{-Y + Y}{\mu^3} e^{-\frac{Y}{\mu}}
\end{aligned}$$

よって、 $\frac{\partial}{\partial \mu} f(Y; \mu) = 0$  となる  $\mu$  は、 $Y = \mu$  の時、これのみである。

以上で、大まかには題意が示された。

より詳細な議論を、本来は行うべきであろう。

### 3 知識

指数分布は再生性を持たない。つまり、 $X_1, X_2, \dots$  が独立に指数分布に従うとしても、 $X_1 + X_2 + \dots$  は指数分布に従わない。これは一般にはアーラン分布に従う。特に、今回はガンマ分布に従う。これは以下の畳み込みの式と帰納法で示せる。

$$f_{Y(=X_1+X_2)}(y) = \int_0^y f_{X_1}(x) f_{X_2}(y-x) dx$$

同じ指数分布の重ね合わせがガンマ分布になることを示す。

$$\begin{aligned}
f_1(x; \mu) &= \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \\
f_2(x; \mu) &= \int_0^x f_1(y; \mu) f_1(x-y; \mu) dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{\mu} e^{-\frac{y}{\mu}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x-y}{\mu}} dy \\
&= \frac{1}{\mu^2} \int_0^x e^{-\frac{x}{\mu}} dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu^2} x e^{-\frac{x}{\mu}} \\
f_3(x; \mu) &= \int_0^x f_2(y; \mu) f_1(x-y; \mu) dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{\mu^2} y e^{-\frac{y}{\mu}} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x-y}{\mu}} dy \\
&= \frac{1}{\mu^3} \int_0^x y e^{-\frac{x}{\mu}} dy \\
&= \frac{1}{2\mu^3} x^2 e^{-\frac{x}{\mu}} \\
f_n(x; \mu) &= \int_0^x f_{n-1}(y; \mu) f_1(x-y; \mu) dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!\mu^n} x^{n-1} e^{-\frac{x}{\mu}}
\end{aligned}$$

頑張れば、ガンマ分布の形を覚えていなくても、畳み込み計算から示すことが出来る。  
指数分布の無記憶性を示す。

$$\begin{aligned}
P(X > s+t | X > s) &= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} \\
&= \frac{\int_{s+t}^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx}{\int_s^{\infty} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx} \\
&= \frac{e^{-\frac{s+t}{\mu}}}{e^{-\frac{s}{\mu}}} \\
&= e^{-\frac{t}{\mu}} \\
&= P(X > t)
\end{aligned}$$

#### 指数分布の無記憶性とその証明

指数分布とは、「コールセンターに次に電話がかかってくるまでにかかる時間」や「電化製品が次に壊れるまでの時間」などに用いられます。「昨日コールセンターに電話がかかってきたから、今日のはかかってこないだろう」とか「昨日電化製品が壊れなかったから、今日は壊れないだろう」とか、そういうことはないわけですから、この事象には、無記憶性があるといえるわけですね。

そして、最後の (4) などは、図 1 が念頭にあると、より分かりやすいと思われる。

とある  $x$  でこのグラフを切った時に、最大の値を取るような  $\lambda$  は、ただ一つだけというのが、この問題の視覚的な理解であると思われる。

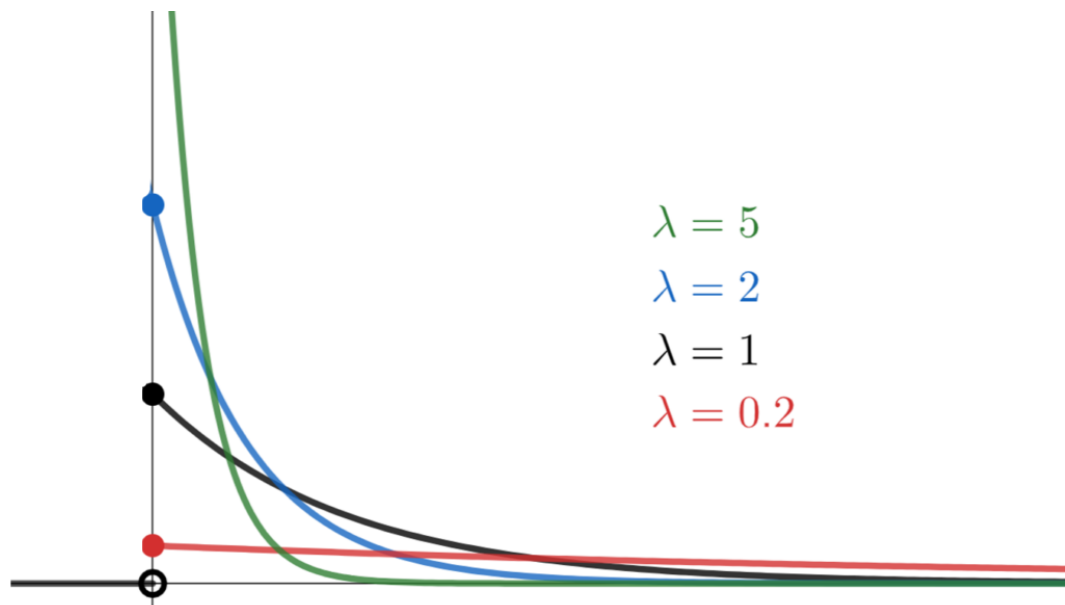


図1 パラメータ毎の指数分布 [1]

## 参考文献

- [1] 数学の景色. “指数分布の定義と例と性質まとめ”. 2022 年 3 月 6 日. <https://mathlandscape.com/exp-distrib/>
- [2] 数学の景色. “指数分布の無記憶性とその証明”. 2021 年 9 月 23 日. <https://mathlandscape.com/exp-distrib-memoryless/>