2023 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 8 月 20 日

1 問題

$$f(A,B) = \log \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(-|a_i - b_j|)}$$

2 解答

(1)

$$\begin{aligned}
&-|a_i - b_j| \leq 0 \\
\Rightarrow &\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(-|a_i - b_j|) \leq 1 \\
\Rightarrow &\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(-|a_i - b_j|)} \geq 1 \\
\Rightarrow &f(A,B) \geq 0
\end{aligned}$$

等号成立条件は、上の式変形より、$\forall\, i,j,\ a_i = b_j$ である。

(2)

定義に従って示せばよい (変則的だが、分かりやすさの為、左向きの矢印を使用する)。

$$\begin{aligned}
&f(A,C) \leq f(A,B) + f(B,C) \\
\Leftarrow &\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} \exp(-|a_i - c_k|)} \leq \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(-|a_i - b_j|)}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{l} \exp(-|b_j - c_k|)}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftarrow \sum_{k=1}^{l} \exp(-|a_i - c_k|) \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \exp(-|a_i - b_j|)}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sum_{k=1}^{l} \exp(-|b_j - c_k|)}} \\
&\Leftarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{l} \exp(-|a_i - c_k|)}{\sum_{k=1}^{l} \exp(-|b_j - c_k|)} \geq \sum_{j=1}^{n} \exp(-|a_i - b_j|) \\
&\Leftarrow \sum_{k=1}^{l} \exp(-|a_i - c_k|) \geq \exp(-|a_i - b_j|) \left(\sum_{k=1}^{l} \exp(-|b_j - c_k|) \right) \\
&\Leftarrow \exp(-|a_i - c_k|) \geq \exp(-|a_i - b_j|) \exp(-|b_j - c_k|) \\
&\Leftarrow |a_i - c_k| \leq |a_i - b_j| + |b_j - c_k|
\end{aligned}
$$

最後の不等式は、三角不等式より成立する。

以上より、$f(A, C) \leq f(A, B) + f(B, C)$ が示された。

(3)

区分求積法そのままなので、

$$
h(z) = \int_0^1 \exp(-|z - x|) \, \mathrm{d}x
$$

である。

よって、

$$
h(z) = \begin{cases} e^{-z}(e-1) \ (1 \leq z) \\ 2 - e^{-z} + e^{z-1} \ (0 < z < 1) \\ e^{z}(1 - e^{-1}) \ (z \leq 0) \end{cases}
$$

となる。

(4)

$h(z)$ は 1/2 を中心とする対称関数であり、微分などを計算すると、図 1 のようになる。

よって、あまり厳密な議論ではないが、区間幅 1 の $h(z)$ の最も大きな部分は $s = 0$ の時に成立する。(しかし、これは厳密に行う事も出来るはず)

以上より、$s = 0$ が答え。

実際、これが正しいことは、図 2 より分かる。

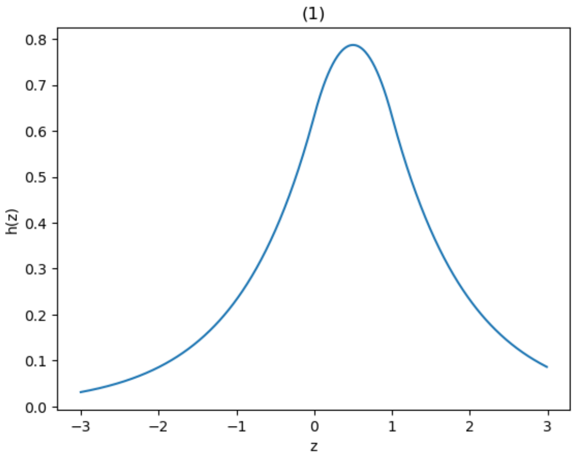

図 1　$h(z)$ **のグラフ**

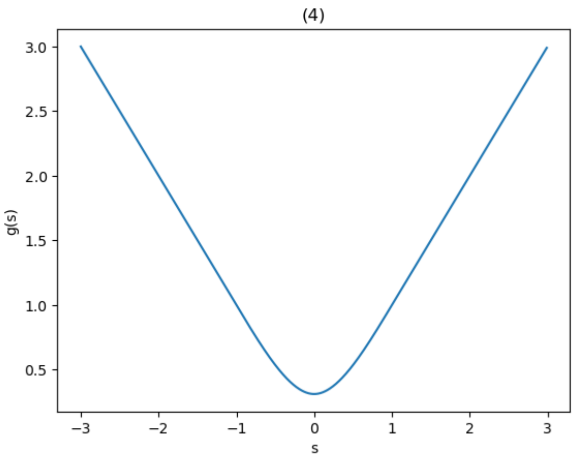

図 2　$g(s)$ **のグラフ**

おまけ

Listing 1　1

```
import math
import os
from typing import List

import matplotlib.pyplot as plt
from numba import njit
from tqdm import tqdm


@njit
def f(A: List[int], B: List[int]):
    m = len(A)
    n = len(B)
    total = 0.0
    for i in range(m):
        sub = 0.0
        for j in range(n):
            sub += math.exp(-abs(A[i] - B[j]))
        total += 1 / (sub / n)
    return math.log(total / m)


@njit
def g(s):
    m = int(2e3)
    n = int(2e3)
    A = [s + (i / m) for i in range(m)]
    B = [j / n for j in range(n)]
    return f(A, B)


def h(z):
    ret = 0
    cnt = int(1e4)
    for i in range(cnt):
        x = i / cnt
        ret += math.exp(-abs(z - x))
    return ret / cnt


def main():
    Z = [(i - 300) / 100 for i in range(600)]
```

```python
    hZ = []
    for z in tqdm(Z):
        hZ.append(h(z))
    plt.plot(Z, hZ)
    plt.xlabel("z")
    plt.ylabel("h(z)")
    plt.title("(1)")
    # plt.show()
    plt.savefig(os.path.join(os.path.dirname(__file__), "1.png"),
        bbox_inches="tight")
    plt.clf()

    S = [(i - 300) / 100 for i in range(600)]
    gS = []
    for s in tqdm(S):
        gS.append(g(s))
    plt.plot(S, gS)
    plt.xlabel("s")
    plt.ylabel("g(s)")
    plt.title("(4)")
    # plt.show()
    plt.savefig(os.path.join(os.path.dirname(__file__), "4.png"),
        bbox_inches="tight")
    plt.clf()


if __name__ == "__main__":
    main()
```