2019 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$a_{ij} \geq 0 \ (i, j = 1, 2, \cdots, n), \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \ (j = 1, 2, \cdots, n), \quad B = \alpha A + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \ (0 < \alpha < 1)$$

2　解答

(1)

一般に、転置行列の固有値は、固有方程式が同じになることから、元の行列と同じ固有値を取る。
$A^\top$ は、$\mathbf{1}$ を固有ベクトルとして、1 を固有値に持つ。

$$\begin{aligned}(A^\top \mathbf{1})_i &= \sum_{j}^{n} A^\top_{ij} \mathbf{1}_j = \sum_{j}^{n} a_{ji} = 1 \\ \Rightarrow & A^\top \mathbf{1} = 1\mathbf{1}\end{aligned}$$

そして、1 より絶対値が大きな固有値を持つことはない。
固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の、絶対値に関する最大値を x_i で取るとすると、

$$\begin{aligned}(A^\top \boldsymbol{x})_i &= \lambda x_i \\ \Leftrightarrow \sum_{j}^{n} a_{ji} x_j &= \lambda x_i\end{aligned}$$

一方、

$$\left| \sum_{j}^{n} a_{ji} x_j \right| \leq \sum_{j}^{n} |a_{ji}||x_j| \leq \sum_{j}^{n} |a_{ji}||x_i| \leq |x_i| \sum_{j}^{n} a_{ji} = |x_i| < |\lambda||x_i| = |\lambda x_i|$$

つまり、λ が 1 より大きな値を取ると、この不等式に反し矛盾。

よって、A の固有値の絶対値で最大となるものは 1 である。

(2)

関数 $f\colon S \to T$ を $f(\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x}$ で定義する。

ただし、$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_{\geq 0} | \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1\}$ である。

ここで、$S = T$ を証明する。

$$B\boldsymbol{x} = \alpha A\boldsymbol{x} + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}$$

という表式と、a_{ij}, α の値域より、$T \subset \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ は明らか。

$\mathbf{1}^\top B\boldsymbol{x} = 1$ を示す。

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}^\top B\boldsymbol{x} &= \mathbf{1}^\top \left(\alpha A\boldsymbol{x} + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x}\right) \\
&= \alpha(\mathbf{1}^\top A)\boldsymbol{x} + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}^\top\mathbf{1}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\
&= \alpha\mathbf{1}^\top\boldsymbol{x} + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} \\
&= \alpha + \frac{1-\alpha}{n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

よって、$T = S$ である。

S が $\mathbb{R}^n$ の非空なコンパクト集合であることは、S が $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合であることから、これはコンパクト。

以上より、ヒントで与えられているブラウワーの不動点定理より、

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = 1$$

の条件を満たすような $\boldsymbol{x}$ が存在する。

(3)

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^n b_{ij}q_j\right| \\
&= |(B\boldsymbol{q})_i| \\
&= \left|\left((\alpha A + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top)\boldsymbol{q}\right)_i\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |(\alpha A\boldsymbol{q})_i| \quad (\because \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} = 0) \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha a_{ij} q_j\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij}) |q_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(B - \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right)_{ij} |q_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij} - \frac{1-\alpha}{n}\right) |q_j| \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_{ij} |q_j| - \frac{1-\alpha}{n} ||\boldsymbol{q}||_1
\end{aligned}
$$

(4)

まず、$\boldsymbol{q} = \frac{\mathbf{1}}{n} - \boldsymbol{x}$ と定義される $\boldsymbol{q}$ を用いると、題意は、

$$
\begin{aligned}
&||B^N \frac{\mathbf{1}}{n} - \boldsymbol{x}||_1 \leq \alpha^N || \frac{\mathbf{1}}{n} - \boldsymbol{x}||_1 \\
\Leftrightarrow &||B^N \frac{\mathbf{1}}{n} - B^N \boldsymbol{x}||_1 \leq \alpha^N ||\boldsymbol{q}||_1 \\
\Leftrightarrow &||B^N \boldsymbol{q}||_1 \leq \alpha^N ||\boldsymbol{q}||_1
\end{aligned}
$$

になる。

特に、$\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} = \mathbf{1}^\top \frac{\mathbf{1}}{n} - \mathbf{1}^\top \boldsymbol{x} = \frac{n}{n} - 1 = 0$ であるが、この性質は、以下に示すように、B を乗じても変わらない。

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}^\top (B\boldsymbol{q}) &= \mathbf{1}^\top \left(\alpha A + \frac{1-\alpha}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^\top\right) \boldsymbol{q} \\
&= \alpha \mathbf{1}^\top A \boldsymbol{q} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}^\top \mathbf{1}\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} \\
&= \alpha \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} + \frac{1-\alpha}{n} \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} \\
&= \left(\alpha + \frac{1-\alpha}{n}\right) \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} \\
&= 0 \quad (\because \mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} = 0)
\end{aligned}
$$

よって、$\mathbf{1}^\top \boldsymbol{q} = 0$ を満たす $\boldsymbol{q}$ に関して、$||B\boldsymbol{q}||_1 \leq \alpha ||\boldsymbol{q}||_1$ であることを示せばよい。

これは、(3) で示したことから、

$$
|(B\boldsymbol{q})_i| \leq \sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij}) |q_j|
$$

$$\le \alpha \sum_{j=1}^{n} |q_j|$$
$$= \alpha ||\boldsymbol{q}||_1$$

となり、直ちに従う。

3 知識

3.1 コンパクト集合

$\mathbb{R}^n$ において、有界閉集合がコンパクト集合であって、閉集合がコンパクト集合である訳では無いことに注意。

例として、$\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ は閉集合であるが、当然コンパクト集合ではない。

3.2 ブラウワーの不動点定理

(2) のヒントは、ブラウワーの不動点定理と呼ばれている。

参考文献

[1] Mathpedia.“位相空間論 9：コンパクト性”.2021 年 3 月 31 日.https://math.jp/wiki/%E4%BD%8D%E7%9B%B8%E7%A9%BA%E9%96%93%E8%AB%969%EF%BC%9A%E3%82%B3%E3%83%B3%E3%83%91%E3%82%AF%E3%83%88%E6%80%A7#.E5.AE.9A.E7.90.86_9.20_.28.24.5Cmathbb.7BR.7D.5En.24_.E3.81.AE.E3.82.B3.E3.83.B3.E3.83.91.E3.82.AF.E3.83.88.E9.9B.86.E5.90.88.29

[2] Wikipedia.“ブラウワーの不動点定理”.2023 年 3 月 11 日.https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%96%E3%83%A9%E3%82%A6%E3%83%AF%E3%83%BC%E3%81%AE%E4%B8%8D%E5%8B%95%E7%82%B9%E5%AE%9A%E7%90%86