2017 年度 大問 5

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 6 月 14 日

1 問題

ラプラシアン行列

(1)

経路数

(2)

ケーリーハミルトンの定理より、背理法

(3)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} 0 = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{j=1}^{n} 0u_j = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} L_{ij} \right) u_j = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} L_{ij} u_j = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} (Lu)_i = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} \lambda u_i = 0 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} u_i = 0
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T L\boldsymbol{x} &= \sum_{i,j} x_i L_{ij} x_j \\
&= \sum_{i,j} x_i (D_{ij} - A_{ij}) x_j \\
&= \sum_i x_i^2 D_{ii} - \sum_{i<j} x_i x_j A_{ij} - \sum_{i>j} x_i x_j A_{ij} \\
&= \sum_i \left(x_i^2 \sum_j A_{ij} \right) - \sum_{i<j} x_i x_j A_{ij} - \sum_{i<j} x_j x_i A_{ji} \\
&= \sum_{i<j} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) A_{ij} \\
&= \sum_{i<j} a_{ij} (x_i - x_j)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

(5)

$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = -L\boldsymbol{x}$ より、$\boldsymbol{x}(t) = e^{-Lt}\boldsymbol{x}(0)$ となる。
L の固有値が全て非負実数の為、$\overline{\boldsymbol{x}} = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ となる。
また、収束の速さは L の固有値に依存する。