# 2023 年度 大問 2

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 8 月 20 日

## 1 問題

$$
\begin{aligned}
F_i(x) &= x_i \left( v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \\
\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} &= F_i(x(t))
\end{aligned}
$$

## 2 解答

### (1)

まず、$F_i(x^*) = 0$ という条件より、また、$x^* \in \mathcal{X}_n$ より、$x_i^* \neq 0$ であることより、$v_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*$ である。

条件を整理していくと、

$$
\begin{aligned}
\dot{L(x')} = & \left. \frac{\mathrm{d}L(x(t))}{\mathrm{d}dt} \right|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left( -\frac{x_i^*}{x_i'} + 1 \right) \left. \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left( -\frac{x_i^*}{x_i'} + 1 \right) F_i(x') \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left( -\frac{x_i^*}{x_i'} + 1 \right) x_i' \left( v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (-x_i^* + x_i') \left( v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* v_i - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i' v_i + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i' \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i x_i^* a_{ij} x_j^* - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i x_i^* a_{ij} x_j' - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i x_i' a_{ij} x_j^* + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i x_i' a_{ij} x_j' \\
&= {x^*}^T C A x^* - {x^*}^T C A x' - {x'}^T C A x^* + {x'}^T C A x' \\
&= (x^* - x')^T C A (x^* - x')
\end{aligned}
$$

となる。

よって、

$$
\begin{aligned}
&(\forall x' \in \mathcal{X}_n \setminus \{x^*\}) \dot{L}(x') < 0 \\
\Leftrightarrow &(\forall x' \in \mathcal{X}_n \setminus \{x^*\}) (x^* - x')^T C A (x^* - x') < 0 \\
\Leftrightarrow &(\forall x' \in \mathcal{X}_n \setminus \{x^*\}) \big( (x^* - x')^T C A (x^* - x') < 0 \big) \wedge \big( (x^* - x')^T A^T C (x^* - x') < 0 \big) \\
\Leftrightarrow &(\forall y \in \mathbb{R}^n) y^T (CA + A^T C) y < 0 \\
\Leftrightarrow &CA + A^T C \prec 0
\end{aligned}
$$

となる。なお、$x^* - x'$ から $y$ への変換には注意が必要である。全ての $y \in \mathbb{R}^n$ に対して、$x^* - x' = y$ を満たす $x' \in \mathcal{X}_n \setminus \{x^*\}$ が存在するとは限らない。ここでは長さに関する定数倍の変換が挟まっている。

## (2)

まず、$\nabla H_w(z) = (w_1 z_1, \ldots, w_n z_n)^T$ である。

ここで、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z_i(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= F_i(x(t)) \\
&= x_i(t) \left( v_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) \right) \\
&= (x_i(t) - x_i^* + x_i^*) \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j(t) - x_j^*) \right) \\
&= (z_i(t) + x_i^*) \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j(t) \right)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} &= (Z + X^*) A z(t) \\
&= (Z + X^*) A W^{-1} W z(t)
\end{aligned}
$$

$$= (Z + X^*)AW^{-1}\nabla H_w(z(t))$$

となる。

## (3)

条件をより平易な表現で言い表すと、$\lim_{z(t)\to 0}$ において、$\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} < 0$ を満たすような $w$ を、$c$ を用いて表現せよ、ということになる。

このことを念頭に置いて式変形していくと、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} &= \sum_{i=1}^{n} w_i z_i(t)\frac{\mathrm{d}z_i(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \nabla H_w(z(t))^T G(z(t))\nabla H_w(z(t)) \\ &= \nabla H_w(z(t))^T \big((Z + X^*)AW^{-1}\big)\nabla H_w(z(t))\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}H_w(z(t))}{\mathrm{d}t} < 0 \\ \Leftrightarrow &\nabla H_w(z(t))^T \big((Z + X^*)AW^{-1}\big)\nabla H_w(z(t)) < 0 \\ \Leftrightarrow &\nabla H_w(z(t))^T \big((Z + X^*)C^{-1}(CA + A^T C)W^{-1}\big)\nabla H_w(z(t)) < 0\end{aligned}$$

となる。なお、最後の変形で、$W, X^*, Z$ が対角行列であることを用いた。

以上より、$(Z + X^*)C^{-1}(CA + A^T C)W^{-1}$ が $CA + A^T C$ に関する二次形式の形で記述出来る時、これはその負定値性より負になる。

これは、

$$\begin{aligned}&{W^{-1}}^T = (Z + X^*)C^{-1} \\ \Leftrightarrow &W = (Z + X^*)^{-1}C\end{aligned}$$

を意味し、$Z \to 0$ を考慮すると、$W = X^*C$ を満たすような $w$ であれば、題意を満たすことが分かる。