

2010 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 5 日

1 問題

n 次元ユークリッド空間の有界集合について

2 解答

(1)

C の範囲内に移動させる方法が、かならず 1 通りのみである。
これを厳密に書くのは、測度論などの都合上、かなり難しい気がする。
……と思っていたが、よくよく考えると自明かも知れない。

(2)

そうでなければ、体積が 1 より大きいということに矛盾する。

(3)

(2) から自明。

(4)

$v(\frac{1}{2}B) = \frac{1}{2^n}v(B) > 1$ より、(3) の結果から、

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \frac{1}{2}B \text{ s.t. } \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \\ \Leftrightarrow \exists 2\mathbf{x}, 2\mathbf{y} \in B \text{ s.t. } \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

B の凸性と原点对称性から、 $\frac{1}{2}(2\mathbf{x} + (-2\mathbf{y})) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ も B に含まれる。

特に、 $x \neq y$ より、 $x - y \neq 0$ である。

以上より、 $x - y$ が題意を満たす。

(5)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \{g_j\}_{1 \leq j \leq 3} \left| \sum_{i=1}^3 \left| \sum_{j=1}^3 r_{ij} g_j \right| < \alpha \right. \right\} \\ &= \{g \in \mathbb{R}^3 \mid \|Rg\|_1 < \alpha\} \end{aligned}$$

B が原点对称な有界凸集合であることは明らか。

あとは、 $v(B) > 2^n = 2^3$ を示せば、(4) より従う。

行列式の 6 倍は四面体の体積を表すことに注意すると、

$$v(B) = 2^3 \alpha^3 \frac{1}{6 \det R} \leq 2^3$$

(ここ、もう少し説明のしようがあると思われるが、あまり良い説明が思いつかない)
よって、示された。

3 知識

行列式の 6 倍は四面体の体積を表す。[1]

参考文献

- [1] 高校数学の美しい物語."四面体の体積を求める 2 つの公式 with 行列式".2021 年 3 月 7 日.<https://manabitimes.jp/math/1012>