

# 2019 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 2 日

## 1 問題

ファルカスの補題を分離定理と有限生成錐の閉性から示せ。  
(個人の感想だが、この問題はかなり捨て問な気がする。)

## 2 解答

### (1)

これは分離定理を示す問題である。

### (1-1)

$\mathbb{R}^n$  における有界な閉集合  $K$  はコンパクト集合であること、及び、コンパクト集合上で定義される連続関数  $f: K \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = \|x - z\|$  は、最大値と最小値を持つことから、 $\|x - y\| = \inf_{z \in K} f(z)$  を達成する  $y \in K$  が取れる。

なお、 $K$  は有界とは限らないが、本問に関しては、 $x$  からの距離で適当に区切っても題意に影響がない為、有界な閉集合に限定出来る。

### (1-2)

凸性より明らか。省略する。

### (1-3)

$d = 0$  として良い。

イメージとしては、 $x$  と  $y$  の間の垂直二等分線 (分離超平面) で、 $x$  と  $y$  が別々の領域に分かれる為、内積の正負が反転するという感じである。

しかし、厳密にこれを記述することはかなり難しいと思われる。

ここでは省略する。

(「分離超平面定理」を参照)

## (2)

### (2-1)

$C(\mathcal{A}) \supseteq \bigcup_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B})$  は明らか。

$C(\mathcal{A}) \subseteq \bigcup_{\mathcal{B}} C(\mathcal{B})$  を示す。

$C(\mathcal{A})$  の元  $x$  を取る。

$x = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$  に関して、 $a_m = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{m-1} a_{m-1}$  と書けたと仮定する。

全ての  $1 \leq i < m$  に対して、 $\lambda_i + \lambda_m \mu_i \geq 0$  が成立すれば、 $x \in C(\{a_i | 1 \leq i < m\})$  となる。

そうでない場合、 $\lambda_i + k\mu_i$  が最小の  $k$  で 0 になるようなインデックスを  $i$  に取ると、 $\lambda_m = \lambda'_m + k$  として、

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i + \cdots + \lambda_m a_m \\ &= \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i + \cdots + (\lambda'_m + k) a_m \\ &= \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_i a_i + \cdots + \lambda'_m a_m + k(\mu_1 a_1 + \cdots + \mu_{m-1} a_{m-1}) \\ &= (k\mu_1 + \lambda_1) a_1 + \cdots + (k\mu_i + \lambda_i) a_i + \cdots + (k\mu_{m-1} + \lambda_{m-1}) a_{m-1} + \lambda'_m a_m \\ &= (k\mu_1 + \lambda_1) a_1 + \cdots + 0 + \cdots + (k\mu_{m-1} + \lambda_{m-1}) a_{m-1} + \lambda'_m a_m \\ &\in C(\{a_j | 1 \leq j \leq m, j \neq i\}) \end{aligned}$$

となり、要素数を減らすことが出来る。

以下、帰納的に一次独立になるまで、この議論を繰り返せばよい。

よって、示された。

### (2-2)

$C(\mathcal{B})$  が閉集合であることが言えれば、有限個の閉集合の和集合は閉集合であることから、 $C(\mathcal{A})$  も閉集合であると言える。

$C(\mathcal{B})$  が閉集合であることを示す。

これは、有限生成錐の閉性を示せば良い。

これもかなり記述は難しい気がする。

ここでは省略する。

(「有限生成錐が閉集合になることについて」を参照)

## (3)

以上を基に、ファルカスの補題を示す。

(3-1)

$$(P) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } A\lambda = x, \lambda \geq 0$$

この時、 $c^T A \leq 0 \Rightarrow c^T A\lambda = c^T x \leq 0$

となり、 $(P) \Rightarrow \overline{(Q)}$  が示された。

(3-2)

$A$  の各列ベクトルが生成する有限生成錐  $C(A = \{a_i\}_{1 \leq i \leq m})$  は非空な凸閉集合である。

$\overline{(P)}$  ならば、 $x \notin C(A)$  であり、分離定理より、 $\langle c, x \rangle > 0$  かつ、 $\langle c, a_i \rangle \leq 0$  となる  $c$  が存在する。  
これは  $(Q)$  に他ならない。

よって、 $\overline{(P)} \Rightarrow (Q)$  が示された。

### 3 知識

ファルカスの補題は、弱双対定理からも示せる。

$$\min_x c^T x \text{ s.t. } Ax = b, x \geq \mathbf{0}$$

$$\max_y b^T y \text{ s.t. } A^T y \leq c$$

記号を入れ替えて、

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda} \mathbf{0}^T \lambda \text{ s.t. } A\lambda = x, \lambda \geq \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \min_{\lambda} 0 \text{ s.t. } A\lambda = x, \lambda \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_c x^T c \text{ s.t. } A^T c \leq \mathbf{0} \\ \Rightarrow & \max_c c^T x \text{ s.t. } c^T A \leq \mathbf{0} \end{aligned}$$

となる。

$\overline{(Q)}$  ならば、弱双対定理より、 $(P)$  となる。

## 参考文献

- [1] "コンパクト集合上の連続関数".<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-kisosuri/contfncompactset070914.pdf>
- [2] Wikipedia."分離超平面定理".2022年3月16日.<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E5%88%86%E9%9B%A2%E8%B6%85%E5%B9%B3%E9%9D%A2%E5%AE%9A%E7%90%86>
- [3] WIIS."凸集合どうしのミンコフスキー和（ミンコフスキー差）".2022年2月21日.<https://wiis.info/math/convex-analysis/convex-set/sum-of-set/>
- [4] "Farkas の補題と線形計画法の双対定理".<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-surikeikakuhou/farkas031025.pdf>
- [5] 関口 良行（東京海洋大学）."有限生成錐が閉集合になることについて".<https://www2.kaiyodai.ac.jp/~yoshi-s/Notes/FiniteCone.pdf>