2015 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 4 日

1　問題

$$\begin{aligned} \text{maximize}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} \quad & \boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{1}^T\boldsymbol{u}+\mathbf{1}^T\boldsymbol{v} \le 1 \\ & \boldsymbol{u} \ge \mathbf{0}, \boldsymbol{v} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize}_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{x}^T Q^{-1}\boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & ||\boldsymbol{x}||_\infty = 1 \end{aligned}$$

2　解答

(1)

(1-1)

自明

(1-2)

todo

(1-3)

自明

(2)

(2-1)

まず、$||\boldsymbol{x}||_2 = 1$ という制約に変更した問題を解く。

$Q = P^T DP$ と分解する。ただし、P は直交行列で、D は対角行列であり、

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$$

とする。

$Q^{-1} = P^T D^{-1} P$ である。なお、正定値性より、D^{-1} は定義可能である。

その上で、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^T Q^{-1} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x}^T P^T D^{-1} P \boldsymbol{x} \\
&= (P\boldsymbol{x})^T D^{-1} (P\boldsymbol{x}) \\
&= \boldsymbol{y}^T D^{-1} \boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{x}, ||\boldsymbol{y}||_2 = \boldsymbol{x}^T P^T P \boldsymbol{x} = 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{d_i}
\end{aligned}$$

となるので、この制約下における解は、Q の最大固有値を $d_{\max}$ として、$\frac{1}{d_{\max}}$ となる。

???

(2-2)

todo