

2012 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 17 日

1 問題

ポアソン過程 計算問題

(注意力が無い人間には捨て問だと思う。私は注意力が無さ過ぎて三日掛かった)

2 解答

(1)

$$a(P(t, n-1) - P(t, n)) + b((n+1)P(t, n+1) - nP(t, n))$$

(2)

$$M(t) = \frac{a}{b} \left(\lambda - \frac{a}{b} \right) e^{-bt}$$

(3)

$$\frac{\partial G(t, s)}{\partial s} = (s-1) \left(aG(t, s) - b \frac{\partial G(t, s)}{\partial s} \right)$$

$\bar{G}(s) = 1$ より、

$$\bar{G}(s) = e^{\frac{a}{b}(s-1)}$$

(4)

$G(0, s) = e^{\lambda(s-1)}$ より、

$$K(s-1) = e^{(\lambda - \frac{a}{b})(s-1)}$$

$$K(x) = e^{(\lambda - \frac{a}{b})x}$$

$$\begin{aligned} P(t, n) &= \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial s^n} G(t, s) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{1}{n!} M(t)^n e^{-M(t)} \end{aligned}$$

図 1 は、シミュレーション値と理論値が一致しすぎて、青と赤が重なり紫になっている。

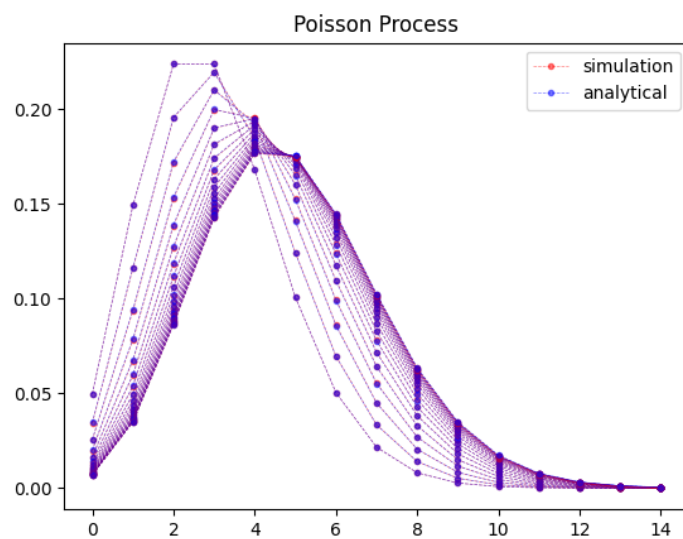


図 1 simulation

3 知識

なし

4 おまけ

ソースコード 1 simulation

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 LAMBDA = 3
5 A = 10.0
6 B = 2.0
7 maxN = 15
8 timeStep = 100
9 timeLen = 2
10 dt = 1 / timeStep
11
12 N = np.arange(0, maxN, 1, dtype=np.int64)
13 P = (
14     np.exp(-LAMBDA)
15     * np.power(LAMBDA, N)
16     / np.array([np.math.factorial(i) for i in range(maxN)])
17 ).tolist()
18 Ps = [P]
19
20 for t in range(timeLen * timeStep):
21     newP = [0 for _ in range(maxN)]
22     for n in range(maxN):
23         if n + 1 < maxN:
24             newP[n + 1] += P[n] * A * dt
25         if n - 1 >= 0:
26             newP[n - 1] += P[n] * n * B * dt
27         newP[n] += (1 - A * dt - n * B * dt) * P[n]
28     Ps.append(newP)
29     P = newP
30 Ps = np.array(Ps)
31
32 for t in range(0, timeLen * timeStep, timeLen * timeStep // 20):
33     Mt = A / B + (LAMBDA - A / B) * np.exp(-B * (t / timeStep))
34     analysis = [Mt**n / np.math.factorial(n) * np.exp(-Mt) for n
35                 in range(maxN)]
36     plt.plot(
37         N,
38         Ps[t],
39         label="simulation",
40         linestyle="dashed",
41         marker="o",
42         markersize=3,
43         linewidth=0.5,
44         alpha=0.5,
45         color="red",
46     )

```

```

46     plt.plot(
47         N,
48         analysis,
49         label="analytical",
50         linestyle="dashed",
51         marker="o",
52         markersize=3,
53         linewidth=0.5,
54         alpha=0.5,
55         color="blue",
56     )
57
58 handles, labels = plt.gca().get_legend_handles_labels()
59 by_label = dict(zip(labels, handles))
60 plt.legend(by_label.values(), by_label.keys())
61 plt.title("Poisson Process")
62 plt.savefig("3.png")

```