2010 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

n 次元ユークリッド空間の有界集合について

2　解答

(1)

C の範囲内に移動させる方法が、かならず 1 通りのみである。
これを厳密に書くのは、測度論などの都合上、かなり難しい気がする。
……と思っていたが、よくよく考えると自明かも知れない。

(2)

そうでなければ、体積が 1 より大きいということに矛盾する。

(3)

(2) から自明。

(4)

$v(\frac{1}{2}B) = \frac{1}{2^n}v(B) > 1$ より、(3) の結果から、

$$
\begin{aligned}
&\exists \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \frac{1}{2}B \text{ s.t. } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n \\
\Leftrightarrow &\exists \boldsymbol{2x}, \boldsymbol{2y} \in B \text{ s.t. } \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

B の凸性と原点対称性から、$\frac{1}{2}(\boldsymbol{2x} + (-\boldsymbol{2y})) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$ も B に含まれる。
特に、$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ より、$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ である。

以上より、$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ が題意を満たす。

(5)

$$
\begin{aligned}
B &= \left\{ \{g_j\}_{1\le j\le 3} \middle| \sum_{i=1}^{3} \left| \sum_{j=1}^{3} r_{ij} g_j \right| < \alpha \right\} \\
&= \left\{ \boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^3 \middle| \left\| R\boldsymbol{g} \right\|_1 < \alpha \right\}
\end{aligned}
$$

B が原点対称な有界凸集合であることは明らか。
あとは、$v(B) > 2^n = 2^3$ を示せば、(4) より従う。
行列式の 6 倍は四面体の体積を表すことに注意すると、

$$
v(B) = 2^3 \alpha^3 \frac{1}{6 \det R} \le 2^3
$$

(ここ、もう少し説明のしようがあると思われるが、あまり良い説明が思いつかない)
よって、示された。

3　知識

行列式の 6 倍は四面体の体積を表す。[1]

参考文献

[1] 高校数学の美しい物語."四面体の体積を求める 2 つの公式 with 行列式".2021 年 3 月 7 日.https://manabitimes.jp/math/1012