共通数学 2023 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 8 月 23 日

1　解答

(1)

$M=1$ の場合、四角い石が出た時点で操作は停止される。
よって、状態 C_0 から n 個石を並べたときに初めて停止条件を満たす確率 a_{0n} は、

$$a_{0n} = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ (1-q)^{n-1}q & (n \geq 1) \end{cases}$$

となる。
よって、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L] &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_{0n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(1-q)^{n-1}q \\ &= q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)_{t=1-q} \\ &= q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{1-t}\right)_{t=1-q} \\ &= q\frac{1}{(1-(1-q))^2} \\ &= \frac{1}{q} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}[L] &= \mathbb{E}[L^2] - \mathbb{E}[L]^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_{0n} - \frac{1}{q^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-q)^{n-1} q - \frac{1}{q^2} \\
&= \frac{2-q}{q^2} - \frac{1}{q^2} \\
&= \frac{1-q}{q^2}
\end{aligned}
$$

となる。

(参考: これは幾何分布と呼ばれる分布である [1])

(2)

まず、状態 $C_k (k > M)$ は定義されない事に注意する。(あるいは、定義されても $A_k(t) = 0$)

また、状態 $C_k (k = M)$ の場合、既に操作は停止しているので、$a_{k0} = 1$ より、$A_k(t) = 1$ となる。

$k < M$ の場合を考える。この時、状態遷移図は図 1 のようになる。

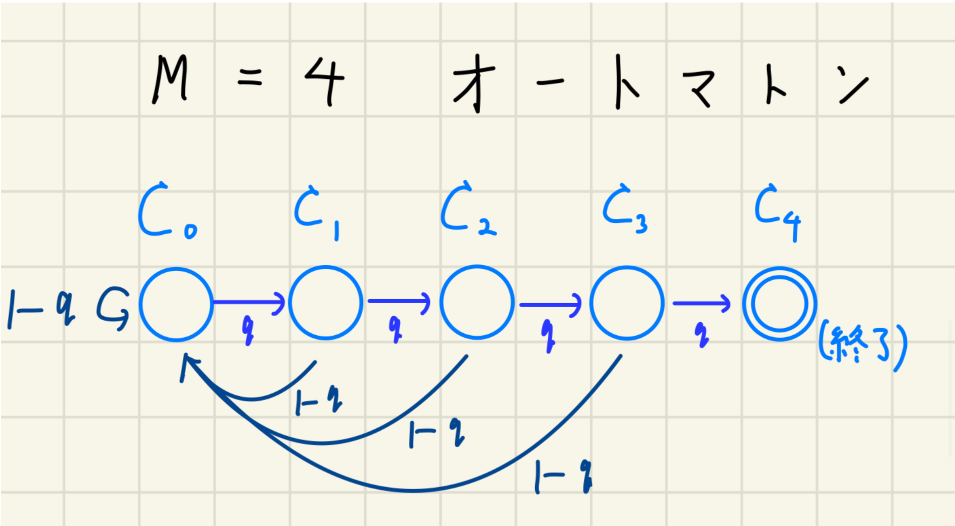

図 1 automaton

この図に示した通り、

- 確率 q で四角い石が出る時、1 個石を並べた上で、状態 C_{k+1} に遷移する。
- 確率 $1-q$ で丸石が出る時、1 個石を並べた上で、状態 C_0 に遷移する。

という関係性があるので、

$$A_k(t) = qtA_{k+1}(t) + (1-q)tA_0(t) \quad (0 \leq k < M)$$

となる。あるいは、同じことだが、

$$A_{M-i}(t) = qtA_{M-i+1}(t) + (1-q)tA_0(t) \quad (0 < i \leq M)$$

となる。
(なお、答えの書き方は色々あると思うが、恐らく上式のいずれかだけで十分だと思う。)

(3)

(2) の結果より、

$$\begin{aligned}
A_{M-1}(t) &= qtA_M(t) + (1-q)tA_0(t) \\
&= qt + (1-q)tA_0(t) \\
A_{M-2}(t) &= qtA_{M-1}(t) + (1-q)tA_0(t) \\
&= qt(qt + (1-q)tA_0(t)) + (1-q)tA_0(t) \\
&= q^2t^2 + (1-q)qt^2A_0(t) + (1-q)tA_0(t) \\
&= q^2t^2 + \big((1-q)qt^2 + (1-q)t\big)A_0(t) \\
A_{M-3}(t) &= qtA_{M-2}(t) + (1-q)tA_0(t) \\
&= qt\big(q^2t^2 + \big((1-q)qt^2 + (1-q)t\big)A_0(t)\big) + (1-q)tA_0(t) \\
&= q^3t^3 + \big((1-q)q^2t^3 + (1-q)qt^2 + (1-q)t\big)A_0(t)
\end{aligned}$$

となっていく。
つまり、

$$\begin{aligned}
A_{M-i}(t) &= q^it^i + \left(\sum_{j=0}^{i-1}(1-q)q^jt^{j+1}\right)A_0(t) \\
&= (qt)^i + (1-q)t\left(\sum_{j=0}^{i-1}(qt)^j\right)A_0(t) \\
&= (qt)^i + (1-q)t\left(\frac{1-(qt)^i}{1-qt}\right)A_0(t) \quad (0 < i \leq M)
\end{aligned}$$

となる。

特に、$i = M$ の場合を考えると、

$$A_0(t) = (qt)^M + (1-q)t\left(\frac{1-(qt)^M}{1-qt}\right)A_0(t)$$

整理して、

$$\begin{aligned}
A_0(t) &= \frac{(qt)^M}{1-(1-q)t\left(\frac{1-(qt)^M}{1-qt}\right)} = \frac{(1-qt)(qt)^M}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \\
A_{M-i}(t) &= (qt)^i + (1-q)t\left(\frac{1-(qt)^i}{1-qt}\right)\frac{(1-qt)(qt)^M}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \quad (0 < i \leq M) \\
&= (qt)^i \frac{1-t+t(1-q)(qt)^{M-i}}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \quad (0 < i \leq M) \\
A_k(t) &= (qt)^{M-k}\frac{1-t+t(1-q)(qt)^k}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \quad (0 \leq k < M)
\end{aligned}$$

となる。

(4)

(3) の結果より、

$$A_0(t) = \frac{(1-qt)(qt)^M}{1-t+t(1-q)(qt)^M}$$

である。

(1) と同様の考え方から、答えは $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A_0(t)\right)_{t=1}$ である。
よって、これを微分して、代入整理すると、

$$\frac{1-q^M}{(1-q)q^M}$$

となる。
(なお、$M = 1$ を代入すると、これは $\frac{1}{q}$ となり、(1) の結果に一致する)

2　おまけ

コードによって、正当性を検証する。

Listing 1　実験コード

```python
import random

```

```python
import matplotlib.pyplot as plt


def trial(M: int, q: float):
    cnt = 0
    ans = 0
    while cnt < M:
        x = random.random()
        ans += 1
        if x < q:
            cnt += 1
        else:
            cnt = 0
    return ans


def main():
    for M in [1, 2, 3]:
        for q in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]:
            answers = []
            for _ in range(10000):
                answers.append(trial(M, q))
            avg = sum(answers) / len(answers)
            # plt.title()
            # plt.hist(answers)
            # plt.show()
            print("=" * 10)
            print(f"{M=}, {q=}")
            print(f"{avg=}")
            print(f"{(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=}")


if __name__ == "__main__":
    main()
```

以下に、実験結果を示す。

Listing 2　実験結果

```
M=1, q=0.1
avg=10.0076
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=9.999999999999998
==========
M=1, q=0.2
avg=4.9994
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=4.999999999999999
==========
M=1, q=0.3
avg=3.3353
```

```
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=3.3333333333333333
==========
M=1, q=0.4
avg=2.4801
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=2.5
==========
M=1, q=0.5
avg=2.0025
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=2.0
==========
M=2, q=0.1
avg=110.8138
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=109.99999999999997
==========
M=2, q=0.2
avg=30.3796
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=29.999999999999993
==========
M=2, q=0.3
avg=14.6192
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=14.444444444444445
==========
M=2, q=0.4
avg=8.626
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=8.749999999999998
==========
M=2, q=0.5
avg=5.9403
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=6.0
==========
M=3, q=0.1
avg=1106.5573
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=1109.9999999999998
==========
M=3, q=0.2
avg=153.216
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=154.99999999999994
==========
M=3, q=0.3
avg=50.901
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=51.48148148148149
==========
M=3, q=0.4
avg=24.4842
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=24.374999999999993
==========
M=3, q=0.5
```

```
avg=13.7934
(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=14.0
```

確かに、大まかに一致しているため、正しいと考えられる。

参考文献

[1] 数学の景色. “幾何分布の期待値 (平均)・分散・標準偏差とその導出証明”.2021 年 9 月 13 日.https://mathlandscape.com/geometric-distrib-ev/