

2017 年度 大問 4

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1 問題

歪対称行列など

2 解答

(1)

$$\begin{aligned} [(M, X), X] &= (M, X)X - X(M, X) \\ &= MX^2 + XMX - XMX - X^2M \\ &= MX^2 - X^2M \\ [(M, X), X]^\top &= (MX^2 - X^2M)^\top \\ &= MX^2 - X^2M \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{d(X - X^\top)}{dt} = 0$$

これは、初期状態が対称行列であることと合わせると、常に $X = X^\top$ であることを示す。

(2)

$$\begin{aligned} (M, X)^\top &= M^\top X^\top + X^\top M^\top \\ &= -MX - XM \\ &= -(M, X) \end{aligned}$$

より、 (M, X) は歪対称行列である。

よって、

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \frac{dQ}{dt} X_0 Q^\top + Q X_0 \frac{dQ^\top}{dt} \\ &= (M, X) Q X_0 Q^\top + Q X_0 Q^\top (M, X)^\top \\ &= (M, X) X + X (M, X)^\top \\ &= (M, X) X - X (M, X) \\ &= [(M, X), X]\end{aligned}$$

となり、示される。

(3)

Q が直交行列であれば、同じ固有値を持つ。

$$\begin{aligned}\frac{dQ^\top Q}{dt} &= Q^\top (M, X)^\top Q + Q^\top (M, X) Q \\ &= -Q^\top (M, X) Q + Q^\top (M, X) Q \\ &= 0\end{aligned}$$

これは、初期状態が単位行列であることと合わせると、常に $Q^\top Q = I$ であることを示す。

(何故か $\frac{dQ Q^\top}{dt} = 0$ を示す方針は、未だ不明)

(4)