2020 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1　問題

$$
\begin{aligned}
L &= K[x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1^{-1}, x_2^{-1}, \cdots, x_n^{-1}] \\
R &= K[x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n]
\end{aligned}
$$

2　解答

(1)

以下の二つを言えばよい。

- $\varphi^{-1}(J)$ は加法について部分群である
  J も加法について L の部分群であるので明らか。
- $r \in \varphi^{-1}(J), x \in R \Rightarrow rx \in \varphi^{-1}(J)$
  $\varphi(rx) = \varphi(r)\varphi(x) \in J \quad (\because \varphi(r) \in J, \varphi(x) \in L)$ より従う。

(2)

自明

(3)

$I \subset \mathrm{Ker}\varphi$ は代入すれば明らか。
$\mathrm{Ker}\varphi \subset I$ は、(2) より $r \neq 0$ ならば $\varphi(p) \neq 0$ が言えればよい。
説明が難しいが、x_i と x_j, y_j が無関係だということを言えば ok? (自信なし)
後半は準同型定理より、

$$R/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi$$
$$\Rightarrow R/I \cong L$$

3 知識

斜体ならば可換性を課さないが、体ならば可換性がある。
体の定義は以下の通り。

定義（体）

空でない集合 K が体 (field) であるとは,
1. K が単位元を持つ可換環
2. K の 0 でない任意の元が乗法逆元を持つ, すなわち,$a \neq 0$ に対し，$aa^{-1} = 1$ となるものが存在する。言い換えると $K^{\times} = K \setminus \{0\}$ である
の 2 つが成り立つことをいう。ただし,$K^{\times}$ とは K の乗法群を指す。

この時、右イデアルと左イデアルは同じになる。
イデアルの定義は以下の通り。

定義（イデアル）

R を環とし，$I \subset R$ とする。I について,
1. I は加法について部分群である
2. $r \in R, x \in I \Rightarrow rx \in I$
3. $r \in R, x \in I \Rightarrow xr \in I$
...(中略)...,1,2,3 が成り立つとき, 両側イデアル (two-sided ideal) という。

$S(\subset R)$ から生成された有限生成イデアルの一般形は以下の通り。

$$(S) = \{r_1 s_1 + \cdots r_n s_n | r_k \in R, s_k \in S, n \geq 1\}$$

群の準同型定理の主張は以下の通り。
群準同型 $f\colon G_1 \to G_2$ に対して、写像 $F\colon G_1/\mathrm{Ker}f \to \mathrm{Im}f$ は群準同型であり、特に、$G_1/\mathrm{Ker}f \cong \mathrm{Im}f$ である。

参考文献

[1] 数学の景色."体の定義と具体例 4 つ".2022 年 6 月 13 日.https://mathlandscape.com/field/

[2] 数学の景色."イデアル (環論) とは〜定義・具体例・基本的性質の証明〜".2022 年 6 月 19 日.https://mathlandscape.com/ideal/