2010 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 3 日

1　問題

略 難問だと思う

2　解答

(1)

A は正定値対称行列なので、$A = Q^T D Q$ と書ける。ただし、Q は直交行列、D は要素が全て正の対角行列である。
D はその平方根 $\sqrt{D}$ が取れることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
(Q^T \sqrt{D} Q)^2 &= (Q^T \sqrt{D} Q)(Q^T \sqrt{D} Q) \\
&= Q^T D Q \\
&= A
\end{aligned}
$$

となり、$B = Q^T \sqrt{D} Q$ である。
一意性を示す。$B^2 = C^2 = A$ とする。
$||x||_2 = 1$ を満たす全ての x に対して、B, C の正定値性に注意すると、

$$
\begin{aligned}
x^T B x &= \sqrt{(x^T B x)^2} \\
&= \sqrt{x^T B^2 x} \\
&= \sqrt{x^T C^2 x} \\
&= \sqrt{(x^T C x)^2} \\
&= x^T C x
\end{aligned}
$$

しかし、$||x||_2 = 1$ を満たす全ての x に対して、

$$x^T(B-C)x = 0$$

であると、これは $B-C=O \Leftrightarrow B=C$ を意味する。

(ここの部分の証明は、対称性などを使えば決して難しい訳ではない。しかし、簡潔な証明はよく分からなかった)

よって、B は一意である。

(2)

特異値分解より、$F = R'\Sigma S$ と分解できる。ただし、R', S は直交行列、Σ は全ての要素が正の対角行列である。F が正則な為、フルランクであり、Σ の対角成分に 0 はない。

よって、$F = R'(SS^T)\Sigma S = (R'S)(S^T\Sigma S)$ と書けて、$R'S^T$ は R' と S がそれぞれ直交行列な為、直交行列である。

以上より、$R = R'S^T, U = S^T\Sigma S$ とすれば良い。

一意性については、$F^TF = U^TR^TRU = U^TU = U^2 = W$ とすると、W は正定値対称行列だが、(1) より、U は一意と分かる。よって、R も一意である。

全体で一意。

(3)

$$\begin{aligned} FR^T &= RUR^T \\ &= RQ'D'Q^TR^T \end{aligned}$$

より、$V = FR^T$ は正定値対称行列。よって、$F = VR$ となる。一意性は自明。

3　知識

2020 年度問 1 をまず参照のこと。

(1) について

$$\begin{aligned} &B^2 = C^2 \\ \Leftrightarrow &B^2 - C^2 = O \\ \Leftrightarrow &(B-C)(B+C) = CB - BC \end{aligned}$$

となり、また、$B+C$ は対角成分が正なので、$BC=CB \Rightarrow B=C$ が言える。

これは、B と C の可換性、つまり、同次対角化可能性と同値であり、その方針でも示せるはずである。

同時対角化可能⇔交換可能の意味と証明 [1]

A と B が同時対角化可能なとき，ある正則行列 P が存在して $P^{-1}AP$ と $P^{-1}BP$ がともに対角行列となる。
対角行列どうしは交換可能なので,

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$$

整理する:

$$P^{-1}ABP = P^{-1}BAP$$
$$AB = BA$$

しかし、自分には分からなかった。(もしこれを誰かが読んでいるのであれば教えて欲しい……)

計数の人のブログらしきものもあった。[2]

(2)

直交行列と直交行列の積は直交行列であることは、簡単に示せる。

$$(RS)^T(RS) = S^T R^T RS = I$$

特異値分解についてまとめる。

特異値分解の定義，性質，具体例 [3]

特異値分解とは、$m \times n$ 行列 A を $A = U\Sigma V$ と分解することです。ただし、

- U は $m \times m$ の直交行列（各列が互いに直交する行列）
- V は $n \times n$ の直交行列
- Σ は ... 非対角成分は 0、対角成分は非負で大きさの順に並んだ行列

です。任意の行列はこのように分解できます。また，Σ の対角成分で 0 でないもの（0 を含めることもある）を特異値と言います。

なお、行列の (0 でない) 特異値の数は、その行列のランクと一致する。

以下に、参考文献の続きを載せると、

特異値分解の定義，性質，具体例 [3]

A が対称行列のとき、A の固有値と特異値は一致します。対称行列は直交行列で対角化できるからです。
$A^T A$ の 0 でない固有値の正の平方根は A の特異値です。理由は、$A = U\Sigma V$ と特異値分解できるとき $A^T A = V^T(\Sigma^T\Sigma)V$ と固有値分解できるからです。同様に AA^T の 0 でない固有値の正の平方根も A の特異値です。

となっている。

行列分解

本問を解く際に、特異値分解以外の分解に関しても考慮したが、知識が足りず苦労した。それを以下に簡単にまとめる。

QR 分解を用いて解くことも出来るのだろうか?

LU 分解

以下、参考文献 [4] より引用。

正方行列 A を下三角行列 L と上三角行列 U との積によって、$A = LU$ と表すことを LU 分解 (lower-upper(LU) decomposition) という。

行列が LU 分解可能であるための必要十分条件は、全ての主座小行列の行列式が 0 でないことである。

QR 分解

以下、参考文献 [5] より引用。

QR 分解（キューアールぶんかい、英: QR decomposition, QR factorization）とは、$m \times n$ 実行列 A を、m 次直交行列 Q と $m \times n$ 上三角行列 R との積への分解により表すこと、またはそう表した表現をいう。このような分解は常に存在する。

QR 分解は線型最小二乗問題を解くために使用される。また、固有値問題の数値解法の 1 つである QR 法の基礎となっている。

すべての実正方行列 A は直交行列 Q と上三角行列 (別名右三角行列)R を用いて $A = QR$ と分解できる。もし A が正則ならば、R の対角成分が正になるような因数分解は一意に定まる。

QR 分解を計算する手法として、グラム・シュミット分解、ハウスホルダー変換、ギブンス回転などがある。

コレスキー分解

以下、参考文献 [6] より引用。

行列 A を下三角行列 C とその転置行列の C^T の積に分解すること、すなわち、$A = CC^T$ と分解することを、コレスキー分解 (cholesky decomposition) という。

行列 A が正定値行列であるならば、 コレスキー分解可能である。

参考文献

[1] 高校数学の美しい物語.”同時対角化可能⇔交換可能の意味と証明”.2021 年 3 月 7 日.https://manabitimes.jp/math/1196

[2] Lilliput Steps. “半正定値行列の平方根行列の存在と一意性”.HatenaBlog.2020 年 5 月 6 日.https://kagamiz.hatenablog.com/entry/2020/05/16/212214

[3] 高校数学の美しい物語.”特異値分解の定義，性質，具体例”.2022 年 11 月 3 日.https://manabitimes.jp/math/1280

[4] 理数アラカルト.”LU 分解を解説 ～具体例と必要十分条件～”.2022 年 4 月 17 日.http://risalc.info/src/LU-decomposition.html

[5] Wikipedia.”QR 分解”.2022 年 11 月 20 日.https://ja.wikipedia.org/wiki/QR%E5%88%86%E8%A7%A3

[6] 理数アラカルト.”コレスキー分解とは?”.2023 年 4 月 2 日.http://risalc.info/src/cholesky-decomposition.html