

2020 年度 大問 4

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

1 問題

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}x(n, t) &= x(n-1, t) + x(n+1, t) - 2x(n, t) \\ x(n+N, t) &= x(n, t) \\ e(m, n) &= \exp\left(i\frac{2\pi mn}{N}\right)\end{aligned}$$

2 解答

(1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}x(n, t) &= x(n-1, t) + x(n+1, t) - 2x(n, t) \\ \Leftrightarrow e(m, n)\frac{d}{dt}f_m(t) &= e(m, n-1)f_m(t) + e(m, n+1)f_m(t) - 2e(m, n)f_m(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}f_m(t) &= \left(\exp\left(-i\frac{2\pi m}{N}\right) + \exp\left(i\frac{2\pi m}{N}\right) - 2\right)f_m(t) \\ \Leftrightarrow f_m(t) &= c_me^{(\exp(-i\frac{2\pi m}{N}) + \exp(i\frac{2\pi m}{N}) - 2)t}\end{aligned}$$

そして、これは $e(m, n+N) = e(m, n)$ より、条件 (**) を満たす。

(2)

(1) の形で書けるとまず仮定して、与えられた初期条件を適用すると、 $c_m = \frac{g_n}{e(m, n)}$ となる。

しかし、これでは c_m が n に依存してしまうので、条件に反してしまう。なので、 c_m を n に依存しないように定めたい。

ここで、 $g_n = \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) c'_m$ という形で書けることを利用する。
ただし、 $c'_m = \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} e(-m, n') g_{n'}$ である。これは離散フーリエ変換に相当する。
なお、このような形で書けることは、以下で確認することが出来る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) c'_m \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) \sum_{n'=0}^{N-1} e(-m, n') g_{n'} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) e(-m, n') g_{n'} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n - n') g_{n'} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} N \delta_{n, n'} g_{n'} \\
&= \frac{1}{N} N g_n \\
&= g_n
\end{aligned}$$

この事を利用すると、

$$x(n, t) = \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) f_m(t) \quad (c_m = c'_m)$$

とすれば、

$$x(n, 0) = \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) c_m = g_n$$

となり、特に、(1) より、これは条件 (*), (**) を共に満たす。
よって、

$$\begin{aligned}
x(n, t) &= \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) f_m(t) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) \left(\frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} e(-m, n') g_{n'} \right) e^{(\exp(-i \frac{2\pi m}{N}) + \exp(i \frac{2\pi m}{N}) - 2)t}
\end{aligned}$$

が解となる。

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} x(n, t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{N-1} e(m, n) c_m e^{(\exp(-i \frac{2\pi m}{N}) + \exp(i \frac{2\pi m}{N}) - 2)t} \\ &= c_0 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e(0, n) g_n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g_n\end{aligned}$$

3 知識

離散フーリエ変換

参考文献

- [1] 金沢大学.”離散フーリエ変換の計算法”.http://leo.ec.t.kanazawa-u.ac.jp/~nakayama/edu/file/signal_proc_ch4.pdf
- [2] Wikipedia.”離散フーリエ変換”.2022 年 12 月 28 日.<https://ja.wikipedia.org/wiki/%E9%9B%A2%E6%95%A3%E3%83%95%E3%83%BC%E3%83%AA%E3%82%A8%E5%A4%89%E6%8F%9B>