

共通数学 2023 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2025 年 4 月 23 日

1 解答

(1)

$M = 1$ の場合、四角い石が出た時点で操作は停止される。

よって、状態 C_0 から n 個石を並べたときに初めて停止条件を満たす確率 a_{0n} は、

$$a_{0n} = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ (1 - q)^{n-1}q & (n \geq 1) \end{cases}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L] &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_{0n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n (1 - q)^{n-1} q \\ &= q \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n \right)_{t=1-q} \\ &= q \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right)_{t=1-q} \\ &= q \frac{1}{(1 - (1 - q))^2} \\ &= \frac{1}{q} \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}[L] = \mathbb{E}[L^2] - \mathbb{E}[L]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_{0n} - \frac{1}{q^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (1-q)^{n-1} q - \frac{1}{q^2} \\
&= \frac{2-q}{q^2} - \frac{1}{q^2} \\
&= \frac{1-q}{q^2}
\end{aligned}$$

となる。

(参考: これは幾何分布と呼ばれる分布である [1])

(2)

まず、状態 $C_k (k > M)$ は定義されない事に注意する。(あるいは、定義されても $A_k(t) = 0$)

また、状態 $C_k (k = M)$ の場合、既に操作は停止しているので、 $a_{k0} = 1$ より、 $A_k(t) = 1$ となる。

$k < M$ の場合を考える。この時、状態遷移図は図 1 のようになる。

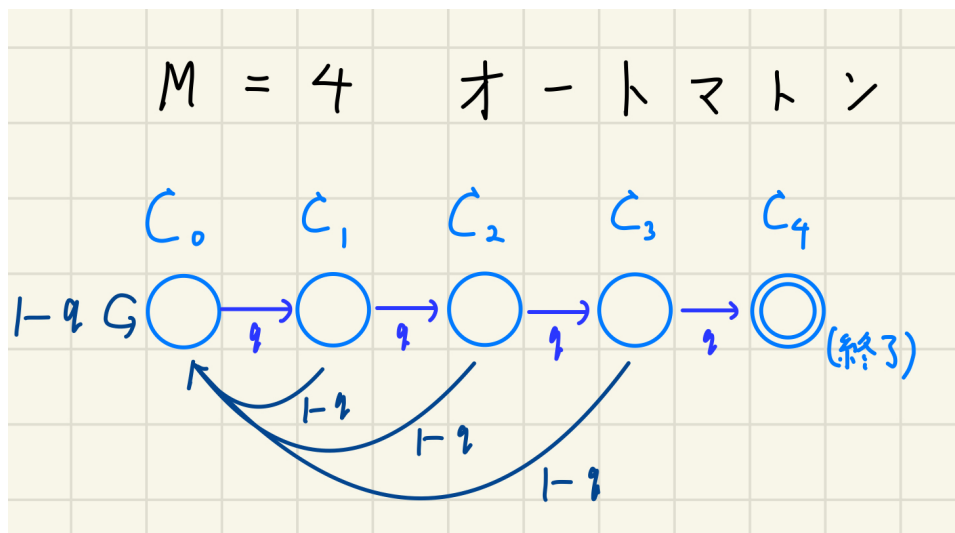


図 1 automaton

この図に示した通り、

- 確率 q で四角い石が出る時、1 個石を並べた上で、状態 C_{k+1} に遷移する。
- 確率 $1 - q$ で丸石が出る時、1 個石を並べた上で、状態 C_0 に遷移する。

という関係性があるので、

$$A_k(t) = qtA_{k+1}(t) + (1-q)tA_0(t) \quad (0 \leq k < M)$$

となる。あるいは、同じことだが、

$$A_{M-i}(t) = qtA_{M-i+1}(t) + (1-q)tA_0(t) \quad (0 < i \leq M)$$

となる。

(なお、答えの書き方は色々あると思うが、恐らく上式のいずれかだけで十分だと思う。)

(3)

(2) の結果より、

$$\begin{aligned} A_{M-1}(t) &= qtA_M(t) + (1-q)tA_0(t) \\ &= qt + (1-q)tA_0(t) \\ A_{M-2}(t) &= qtA_{M-1}(t) + (1-q)tA_0(t) \\ &= qt(qt + (1-q)tA_0(t)) + (1-q)tA_0(t) \\ &= q^2t^2 + (1-q)qt^2A_0(t) + (1-q)tA_0(t) \\ &= q^2t^2 + ((1-q)qt^2 + (1-q)t)A_0(t) \\ A_{M-3}(t) &= qtA_{M-2}(t) + (1-q)tA_0(t) \\ &= qt(q^2t^2 + ((1-q)qt^2 + (1-q)t)A_0(t)) + (1-q)tA_0(t) \\ &= q^3t^3 + ((1-q)q^2t^3 + (1-q)qt^2 + (1-q)t)A_0(t) \end{aligned}$$

となっていく。

つまり、

$$\begin{aligned} A_{M-i}(t) &= q^i t^i + \left(\sum_{j=0}^{i-1} (1-q)q^j t^{j+1} \right) A_0(t) \\ &= (qt)^i + (1-q)t \left(\sum_{j=0}^{i-1} (qt)^j \right) A_0(t) \\ &= (qt)^i + (1-q)t \left(\frac{1 - (qt)^i}{1 - qt} \right) A_0(t) \quad (0 < i \leq M) \end{aligned}$$

となる。

特に、 $i = M$ の場合を考えると、

$$A_0(t) = (qt)^M + (1-q)t \left(\frac{1 - (qt)^M}{1 - qt} \right) A_0(t)$$

整理して、

$$\begin{aligned}
A_0(t) &= \frac{(qt)^M}{1 - (1-q)t\left(\frac{1-(qt)^M}{1-qt}\right)} = \frac{(1-qt)(qt)^M}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \\
A_{M-i}(t) &= (qt)^i + (1-q)t\left(\frac{1-(qt)^i}{1-qt}\right) \frac{(1-qt)(qt)^M}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \quad (0 < i \leq M) \\
&= (qt)^i \frac{1-t+t(1-q)(qt)^{M-i}}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \quad (0 < i \leq M) \\
A_k(t) &= (qt)^{M-k} \frac{1-t+t(1-q)(qt)^k}{1-t+t(1-q)(qt)^M} \quad (0 \leq k < M)
\end{aligned}$$

となる。

(4)

(3) の結果より、

$$A_0(t) = \frac{(1-qt)(qt)^M}{1-t+t(1-q)(qt)^M}$$

である。

(1) と同様の考え方から、答えは $\left(\frac{d}{dt}A_0(t)\right)_{t=1}$ である。

よって、これを微分して、代入整理すると、

$$\frac{1-q^M}{(1-q)q^M}$$

となる。

(なお、 $M=1$ を代入すると、これは $\frac{1}{q}$ となり、(1) の結果に一致する)

2 おまけ

コードによって、正当性を検証する。

Listing 1 実験コード

```

1 import random
2
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5
6 def trial(M: int, q: float):
7     cnt = 0
8     ans = 0
9     while cnt < M:
10         x = random.random()
11         ans += 1
12         if x < q:

```

```

13         cnt += 1
14     else:
15         cnt = 0
16     return ans
17
18
19 def main():
20     for M in [1, 2, 3]:
21         for q in [0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]:
22             answers = []
23             for _ in range(10000):
24                 answers.append(trial(M, q))
25             avg = sum(answers) / len(answers)
26             # plt.title()
27             # plt.hist(answers)
28             # plt.show()
29             print("=" * 10)
30             print(f"{M=}, {q=}")
31             print(f"{avg=}")
32             print(f"{(1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=}")
33
34
35 if __name__ == "__main__":
36     main()

```

以下に、実験結果を示す。

Listing 2 実験結果

```

1 M=1, q=0.1
2 avg=10.0076
3 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=9.999999999999998
4 =====
5 M=1, q=0.2
6 avg=4.9994
7 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=4.999999999999999
8 =====
9 M=1, q=0.3
10 avg=3.3353
11 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=3.333333333333333
12 =====
13 M=1, q=0.4
14 avg=2.4801
15 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=2.5
16 =====
17 M=1, q=0.5
18 avg=2.0025
19 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=2.0
20 =====

```

```

21 M=2, q=0.1
22 avg=110.8138
23 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=109.99999999999997
24 =====
25 M=2, q=0.2
26 avg=30.3796
27 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=29.999999999999993
28 =====
29 M=2, q=0.3
30 avg=14.6192
31 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=14.444444444444445
32 =====
33 M=2, q=0.4
34 avg=8.626
35 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=8.749999999999998
36 =====
37 M=2, q=0.5
38 avg=5.9403
39 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=6.0
40 =====
41 M=3, q=0.1
42 avg=1106.5573
43 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=1109.9999999999998
44 =====
45 M=3, q=0.2
46 avg=153.216
47 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=154.99999999999994
48 =====
49 M=3, q=0.3
50 avg=50.901
51 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=51.48148148148149
52 =====
53 M=3, q=0.4
54 avg=24.4842
55 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=24.374999999999993
56 =====
57 M=3, q=0.5
58 avg=13.7934
59 (1 - q**M) / ((1 - q) * (q**M))=14.0

```

確かに、大まかに一致しているため、正しいと考えられる。

参考文献

- [1] 数学の景色“幾何分布の期待値 (平均)・分散・標準偏差とその導出証明”.2021 年 9 月 13 日.<https://mathlandscape.com/geometric-distrib-ev/>