

# 2010 年度 大問 3

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 1 日

## 1 問題

略

## 2 解答

(1)

$C$  の範囲内に移動させる方法が、かならず 1 通りのみである。  
これを厳密に書くのは、測度論などの都合上、かなり難しい気がする。  
todo: 追記

(2)

そうでなければ、体積が 1 より大きいということに矛盾する。

(3)

(2) から自明。

(4)

$v(\frac{1}{2}B) = \frac{1}{2^n}v(B) > 1$  より、(3) の結果から、

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \frac{1}{2}B \text{ s.t. } \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \\ \Leftrightarrow \exists 2\mathbf{x}, 2\mathbf{y} \in B \text{ s.t. } \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

$B$  の凸性と原点对称性から、 $\frac{1}{2}(2\mathbf{x} + (-2\mathbf{y})) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$  も  $B$  に含まれる。

特に、 $x \neq y$  より、 $x - y \neq 0$  である。

以上より、 $x - y$  が題意を満たす。

(5)

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \{g_j\}_{1 \leq j \leq 3} \left| \sum_{i=1}^3 \left| \sum_{j=1}^3 r_{ij} g_j \right| < \alpha \right. \right\} \\ &= \{ \{g_j\}_{1 \leq j \leq 3} \mid \|Rg\|_1 < \alpha \} \end{aligned}$$

B が原点对称な有界凸集合であることは明らか。

あとは、 $v(B) > 2^n = 2^3$  を示せば、(4) より従う。

todo : 追記

### 3 知識

### 参考文献