

2015 年度 大問 2

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 8 月 20 日

1 問題

線形単回帰

2 解答

(1) だけ難しいので (というか悪問?)、解答を記しておく。

(1)

恐らく、この問題の想定解は不等式だと思われる。 $r_{xy}r_{yz} = r_{xz}$ などは不成立。等式ではないのだろう (という話に Slack でなった)。

参考文献 [1] が本質的で、その多次元版である。参考文献 [2] も直感的な理解に役立つ。

恐らく色々な不等式が考えられると思うが、その中でも特に簡単と思われるのが、以下の等式である。 $2 \leq n \leq 10$ に関して、それぞれ 1000 ケースについて成立することを確認した。

$$\theta_{\min} = \arccos(r_{yz}) - \arccos(r_{xy})$$

$$\theta_{\max} = \arccos(r_{yz}) + \arccos(r_{xy})$$

$$\theta_{\min} \leq \arccos(r_{xz}) \leq \theta_{\max}$$

これは、相関係数を角度と見なした時の、三角不等式のようなものである。

尤も、証明まではしていない。間違っている可能性も十分にある。

Listing 1 2

```
1 import numpy as np
2
3 for n in range(2, 10 + 1):
4     for seed in range(1000):
5         np.random.seed(seed)
6         print(f"{n=} {seed=}")
7
```

```

8      # random variables
9      Xs = np.random.random() * np.random.random(n) + np.random
        .random()
10     Ys = np.random.random() * np.random.random(n) + np.random
        .random()
11     Zs = np.random.random() * np.random.random(n) + np.random
        .random()
12
13     # normalization (mean=0, var=1)
14     Xs /= np.std(Xs)
15     Ys /= np.std(Ys)
16     Zs /= np.std(Zs)
17     assert np.isclose(np.var(Xs), 1)
18     assert np.isclose(np.var(Ys), 1)
19     assert np.isclose(np.var(Zs), 1)
20
21     # correlation coefficients
22     rXY = np.corrcoef(Xs, Ys)[0, 1]
23     rYZ = np.corrcoef(Ys, Zs)[0, 1]
24     rXZ = np.corrcoef(Xs, Zs)[0, 1]
25
26     print(f"{rXY=} {rYZ=} {rXZ=}")
27
28     print(f"{np.arccos(rXY)=} {np.arccos(rYZ)=} {np.arccos(
        rXZ)=}")
29
30     # the following assertion is true only when n = 2
31     if n == 2:
32         assert np.isclose(
33             rXZ, rXY * rYZ - np.sqrt(1 - rXY**2) * np.sqrt(1
34                 - rYZ**2)
35         )
36
37     # the following assertion is always true
38     EPS = 1e-6
39     thetaMin = np.arccos(rYZ) - np.arccos(rXY)
40     thetaMax = np.arccos(rYZ) + np.arccos(rXY)
41     assert thetaMin - EPS <= np.arccos(rXZ) <= thetaMax + EPS

```

参考文献

- [1] Chappers, egreif1. "Correlation between three variables question". math stack exchange. 2018/5/27.
<https://math.stackexchange.com/questions/284877/correlation-between-three-variables-question>

- [2] “相関係数を視覚化する”. 統計 web. 2017/08/14.
<https://bellcurve.jp/statistics/blog/14116.html>