

# 2017 年度 大問 4

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 26 日

## 1 問題

歪対称行列など

## 2 解答

(1)

$$\begin{aligned} [(M, X), X] &= (M, X)X - X(M, X) \\ &= MX^2 + XMX - XMX - X^2M \\ &= MX^2 - X^2M \\ [(M, X), X]^T &= (MX^2 - X^2M)^T \\ &= MX^2 - X^2M \end{aligned}$$

よって、

$$\frac{d(X - X^T)}{dt} = 0$$

これは、初期状態が対称行列であることと合わせると、常に  $X = X^T$  であることを示す。

(2)

$$(M, X)^T = M^T X^T + X^T M^T$$

$$\begin{aligned}
&= -MX - XM \\
&= -(M, X)
\end{aligned}$$

より、 $(M, X)$  は歪対称行列である。  
 よって、

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= \frac{dQ}{dt} X_0 Q^T + Q X_0 \frac{dQ^T}{dt} \\
&= (M, X) Q X_0 Q^T + Q X_0 Q^T (M, X)^T \\
&= (M, X) X + X (M, X)^T \\
&= (M, X) X - X (M, X) \\
&= [(M, X), X]
\end{aligned}$$

となり、示される。

### (3)

$Q$  が直交行列であれば、同じ固有値を持つ。

$$\begin{aligned}
\frac{dQ^T Q}{dt} &= Q^T (M, X)^T Q + Q^T (M, X) Q \\
&= -Q^T (M, X) Q + Q^T (M, X) Q \\
&= 0
\end{aligned}$$

これは、初期状態が単位行列であることと合わせると、常に  $Q^T Q = I$  であることを示す。  
 (何故か  $\frac{dQ Q^T}{dt} = 0$  を示す方針は、未だ不明)

### (4)