

# 2019 年度 大問 1

hari64boli64 (hari64boli64@gmail.com)

2023 年 5 月 6 日

## 1 問題

$$e^X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

## 2 解答

(1)

$$\begin{aligned} \|e^X\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X^k\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X\|^k \\ &= e^{\|X\|} \\ \|e^X - I\| &= \left\| X^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k - I \right\| \\ &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\| \\ &= \left\| X \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} X^k \right\| \\ &\leq \|X\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} \|X\|^k \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|X\| \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X\|^k \right) \\
&= \|X\| e^{\|X\|} \\
\|e^X - I - X\| &= \left\| X^0 + X^1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k - I - X \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \right\| \\
&= \left\| X^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} X^k \right\| \\
&\leq \|X\|^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \|X\|^k \right) \\
&\leq \|X\|^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|X\|^k \right) \\
&= \|X\| e^{\|X\|}
\end{aligned}$$

(2)

まず、一般の  $0 \leq i < m$  に対し、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
\|P^i Q^{m-1-i}\| &= \left\| e^{\frac{i(A+B)}{m}} e^{\frac{(m-1-i)A}{m}} e^{\frac{(m-1-i)B}{m}} \right\| \\
&\leq e^{\left\| \frac{i(A+B)}{m} \right\|} \left\| e^{\frac{(m-1-i)A}{m}} \right\| \left\| e^{\frac{(m-1-i)B}{m}} \right\| \\
&\leq e^{\left\| \frac{iA}{m} \right\| + \left\| \frac{iB}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&= e^{\left\| \frac{iA}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{iB}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&= e^{\left\| \frac{iA}{m} \right\| + \left\| \frac{(m-1-i)A}{m} \right\|} e^{\left\| \frac{iB}{m} \right\| + \left\| \frac{(m-1-i)B}{m} \right\|} \\
&\leq e^{\frac{m-1}{m} \|A\|} e^{\frac{m-1}{m} \|B\|} \\
&= e^{\frac{m-1}{m} (\|A\| + \|B\|)}
\end{aligned}$$

ただし、途中で  $e$  の単調性つまり、 $x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y$  を用いた。

なお、 $P \neq Q$  という事には十分に注意する必要がある。安易な指数法則は適用出来ない。

以上より、

$$\|P^m - Q^m\| = \left\| \sum_{i=0}^{m-1} P^i (P - Q) Q^{m-1-i} \right\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|P - Q\| \left\| \sum_{i=0}^{m-1} P^i Q^{m-1-i} \right\| \\
&\leq \|P - Q\| m e^{\frac{m-1}{m}(\|A\| + \|B\|)}
\end{aligned}$$

となる。

(3)

$f(X) := e^X - I, g(X) := e^X - I - X$  である。

よって、

$$\begin{aligned}
&g\left(\frac{A+B}{m}\right) - g\left(\frac{A}{m}\right) - g\left(\frac{B}{m}\right) - f\left(\frac{A}{m}\right)f\left(\frac{B}{m}\right) \\
&= \left(e^{\frac{A+B}{m}} - I - \frac{A+B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}} - I - \frac{A}{m}\right) - \left(e^{\frac{B}{m}} - I - \frac{B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}} - I\right)\left(e^{\frac{B}{m}} - I\right) \\
&= \left(e^{\frac{A+B}{m}} - \frac{A+B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}} - \frac{A}{m}\right) - \left(e^{\frac{B}{m}} - \frac{B}{m}\right) - \left(e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}} - e^{\frac{A}{m}} - e^{\frac{B}{m}}\right) \\
&= e^{\frac{A+B}{m}} - e^{\frac{A}{m}}e^{\frac{B}{m}} \\
&= P - Q
\end{aligned}$$

となる。

(4)

一部緩めの不等式評価になっていることに注意する必要があるが、以下のような式が成立する。

$$\begin{aligned}
\|P - Q\| &= \left\| g\left(\frac{A+B}{m}\right) - g\left(\frac{A}{m}\right) - g\left(\frac{B}{m}\right) - f\left(\frac{A}{m}\right)f\left(\frac{B}{m}\right) \right\| \\
&\leq \left\| g\left(\frac{A+B}{m}\right) \right\| + \left\| g\left(\frac{A}{m}\right) \right\| + \left\| g\left(\frac{B}{m}\right) \right\| + \left\| f\left(\frac{A}{m}\right)f\left(\frac{B}{m}\right) \right\| \\
&\leq \left\| \frac{A+B}{m} \right\|^2 e^{\frac{\|A+B\|}{m}} + \left\| \frac{A}{m} \right\|^2 e^{\frac{\|A\|}{m}} + \left\| \frac{B}{m} \right\|^2 e^{\frac{\|B\|}{m}} + \left\| \frac{A}{m} \right\| \left\| \frac{B}{m} \right\| e^{\frac{\|A\|}{m} + \frac{\|B\|}{m}} \\
&= \frac{1}{m^2} \left( \|A+B\|^2 e^{\frac{\|A+B\|}{m}} + \|A\|^2 e^{\frac{\|A\|}{m}} + \|B\|^2 e^{\frac{\|B\|}{m}} + \|A\| \|B\| e^{\frac{\|A\|}{m} + \frac{\|B\|}{m}} \right) \\
&\leq \frac{1}{m^2} \left( \|A+B\|^2 e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} + \|A\|^2 e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} + \|B\|^2 e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} + \|A\| \|B\| e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} \right) \\
&= \frac{1}{m^2} e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} (\|A+B\|^2 + \|A\|^2 + \|B\|^2 + \|A\| \|B\|) \\
&\leq \frac{1}{m^2} e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} (\|A\|^2 + 2\|A\| \|B\| + \|B\|^2 + \|A\|^2 + \|B\|^2 + \|A\| \|B\|) \\
&= \frac{1}{m^2} e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} (2\|A\|^2 + 3\|A\| \|B\| + 2\|B\|^2) \\
&\leq \frac{1}{m^2} e^{\frac{\|A\| + \|B\|}{m}} (2\|A\|^2 + 4\|A\| \|B\| + 2\|B\|^2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{m^2} e^{\frac{\|A\|+\|B\|}{m}} (\|A\| + \|B\|)^2$$

よって、

$$\begin{aligned} \|P^m - Q^m\| &\leq \|P - Q\| m e^{\frac{m-1}{m}(\|A\|+\|B\|)} \\ &\leq \frac{2}{m^2} e^{\frac{\|A\|+\|B\|}{m}} (\|A\| + \|B\|)^2 m e^{\frac{m-1}{m}(\|A\|+\|B\|)} \\ &= \frac{2}{m} (\|A\| + \|B\|)^2 e^{\|A\|+\|B\|} \end{aligned}$$

が示される。

(4)

常微分方程式を解いて、

$$x(t) = v e^{(A+B)t}$$

を得る。

特に、

$$x(1) = v e^{A+B} = v P^m$$

である。

一方、

$$\tilde{x}^{2m} = v \left( e^{\frac{A}{m}} e^{\frac{B}{m}} \right)^m = v Q^m$$

である。

よって、

$$\begin{aligned} \|x(1) - \tilde{x}^{2m}\| &= \|v P^m - v Q^m\| \\ &\leq \|v\| \|P^m - Q^m\| \\ &\leq \|v\| \frac{2}{m} (\|A\| + \|B\|)^2 e^{\|A\|+\|B\|} \\ &= \frac{C}{m} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $C$  は  $m$  に依存しない定数である。

よって、

$$\begin{aligned}\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha \|x(1) - \tilde{x}^{2m}\| &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha \frac{C}{m} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C}{m^{1-\alpha}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha \|x(1) - \tilde{x}^{2m}\| = 0$$

が示される。

### 3 知識

連立 1 階線形常微分方程式の解は、行列の指数関数を用いて表す事が出来る。

### 参考文献

- [1] 武内修. “線形代数 II/連立線形微分方程式”. 筑波大. 2022 年 6 月 7 日. <https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E4%BB%A3%E6%95%B0II%2F%E9%80%A3%E7%AB%8B%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E5%BE%AE%E5%88%86%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F#j6598f91>
- [2] <https://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E4%BB%A3%E6%95%B0II%2F%E9%80%A3%E7%AB%8B%E7%B7%9A%E5%BD%A2%E5%BE%AE%E5%88%86%E6%96%B9%E7%A8%8B%E5%BC%8F#j6598f91>