

# 点配置同定問題における 解の一意性

浜口広樹 谷川眞一  
東京大学工学部 計数工学科

2024 年 3 月 5 日

# 点配置同定問題を何故考えるのか？

低階数半正定値行列

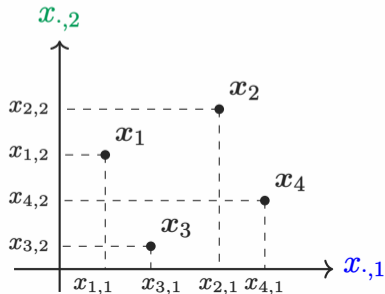
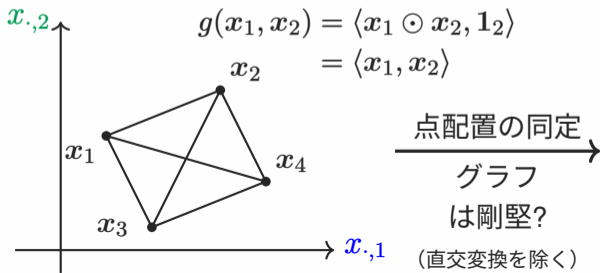
$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$(n \times d)$

行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (XX^T)$$

?			
	?		
		?	
			?



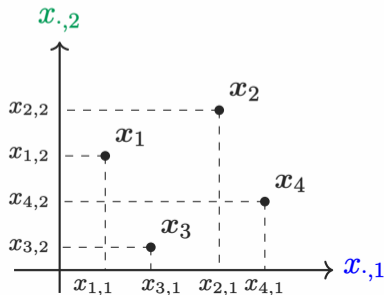
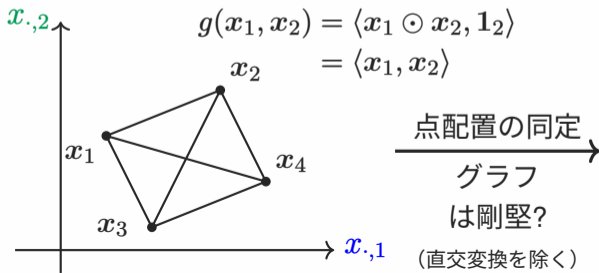
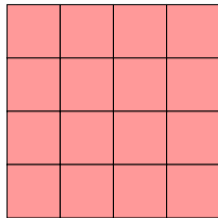
# 点配置同定問題を何故考えるのか？

グラフが剛堅  $\Rightarrow$  補完も一意

$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{matrix} \quad (n \times d)$$

行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (XX^T)$$



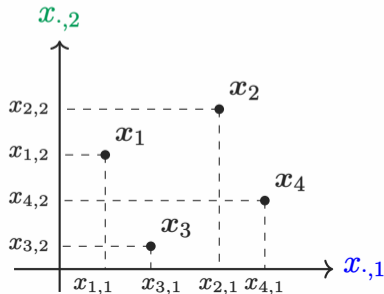
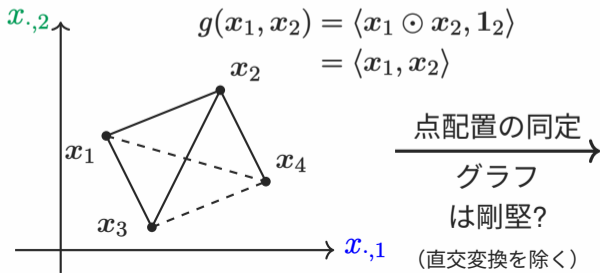
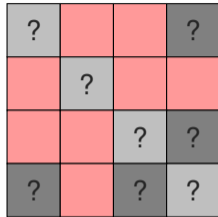
# 点配置同定問題を何故考えるのか？

計測数が不十分だと……？

$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} & \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (XX^T)$$



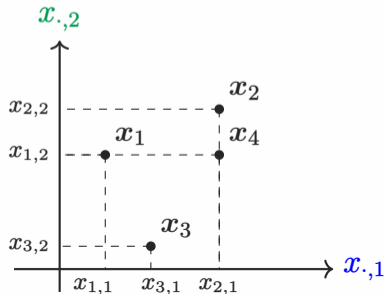
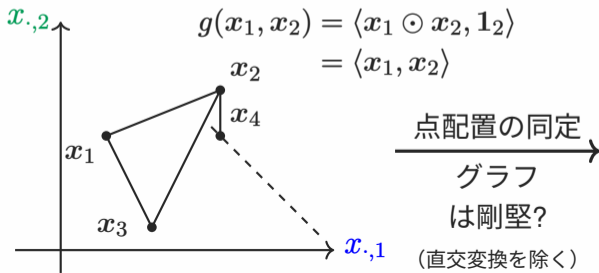
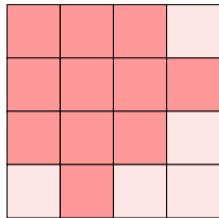
# 点配置同定問題を何故考えるのか？

一意でない補完結果

$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} & \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (XX^T)$$



# 点配置同定問題を何故考えるのか？

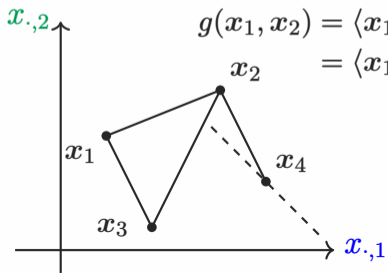
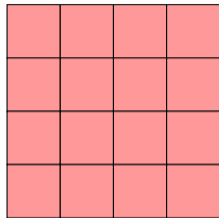
一意でない補完結果

$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} & \\ \begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$(n \times d)$

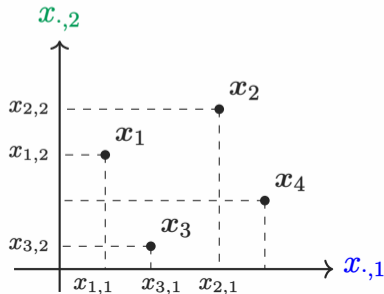
行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (\mathbf{X} \mathbf{X}^\top)$$



$$g(x_1, x_2) = \langle x_1 \odot x_2, 1_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

点配置の同定  
グラフ  
は剛堅？  
(直交変換を除く)



# 点配置同定問題を何故考えるのか？

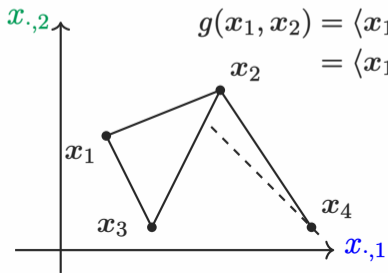
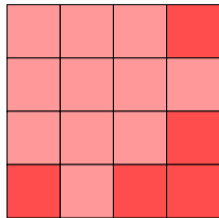
一意でない補完結果

$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{matrix} & \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \end{matrix}$$

$(n \times d)$

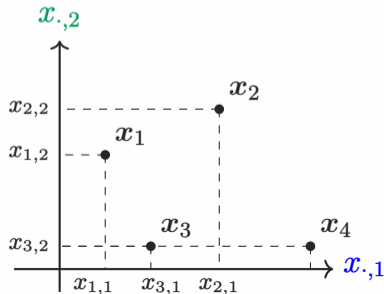
行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (\mathbf{X} \mathbf{X}^\top)$$



$$g(x_1, x_2) = \langle x_1 \odot x_2, 1_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

点配置の同定  
グラフ  
は剛堅？  
(直交変換を除く)



# 点配置同定問題を何故考えるのか？

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{y_1 \quad y_2} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x_{1,1} & x_{1,2} \\ \hline x_{2,1} & x_{2,2} \\ \hline x_{3,1} & x_{3,2} \\ \hline x_{4,1} & x_{4,2} \\ \hline \end{array} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \end{array} \quad \xrightarrow[\text{補完は一意?}]{\text{行列補完}} \quad \sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \quad (\mathbf{X} \mathbf{X}^\top)$$

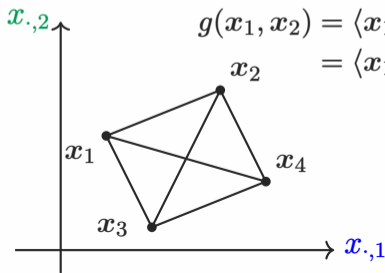
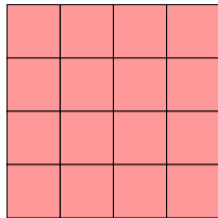
- 平均二乗誤差を指標とした行列補完を行うことを考える
- 最適化結果として誤差が0でも誤った補完である可能性  
⇒ 補完結果の解釈に多義性
- 点配置の一意性は誤差が0なら正しい補完を保証  
⇒ 各種の補完手法にメタな精度保証を与える重要な性質

# 点配置同定問題の何を考えたいのか？

$$X = \begin{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} y_1 & y_2 \end{matrix}} \\ \begin{pmatrix} n \times d \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \\ x_{4,1} & x_{4,2} \end{bmatrix} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} x_{1,1} & x_{1,2} \end{matrix} \right\} x_1 \\ \left. \begin{matrix} x_{2,1} & x_{2,2} \end{matrix} \right\} x_2 \\ \left. \begin{matrix} x_{3,1} & x_{3,2} \end{matrix} \right\} x_3 \\ \left. \begin{matrix} x_{4,1} & x_{4,2} \end{matrix} \right\} x_4 \end{matrix} \right\}$$

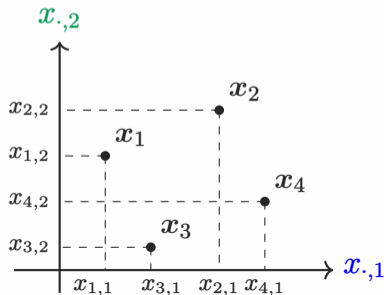
行列補完  
補完は一意？

$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 2} = (XX^T)$$



$$g(x_1, x_2) = \langle x_1 \odot x_2, 1_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$$

点配置の同定  
グラフ  
は剛堅？  
(直交変換を除く)



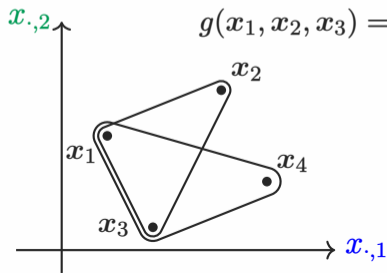
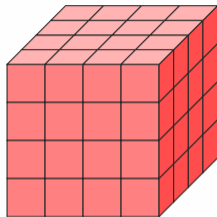
# 点配置同定問題の何を考えたいのか？

$$X = \begin{array}{cc} \overbrace{\quad y_1 \quad} & \overbrace{\quad y_2 \quad} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x_{1,1} & x_{1,2} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline x_{2,1} & x_{2,2} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x_{2,1} & x_{2,2} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline x_{3,1} & x_{3,2} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x_{3,1} & x_{3,2} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline x_{4,1} & x_{4,2} \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline x_{4,1} & x_{4,2} \\ \hline \end{array} & \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}$$

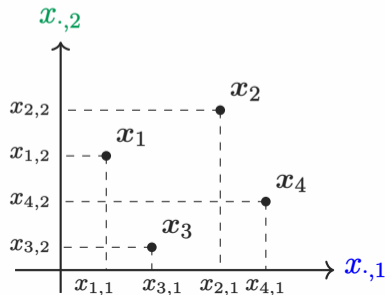
$(n \times d)$

テンソル補完  
補完は一意？

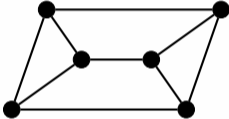
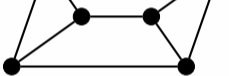
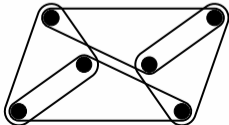
$$\sum_{i=1}^d y_i^{\otimes 3} =$$



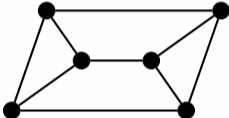
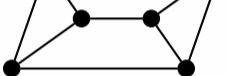
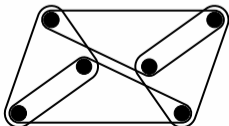

点配置の同定  
ハイパーグラフ  
は剛堅？



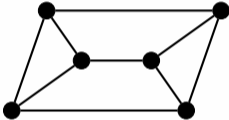
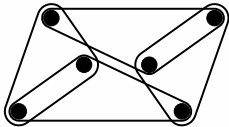
# 点配置同定問題の具体例と研究成果

問題名	計測関数 $g$	剛性理論	一意性に十分な ランダム計測数
2 点間 グラフ剛性問題 ( $k = 2$ ) (長さ)	$\ x_1 - x_2\ _2^2$	<p data-bbox="1121 277 1244 319">グラフ</p> <p data-bbox="1081 346 1284 381">(2 頂点を連結)</p> 	解決済み
低階数半正定値 行列補完	$\langle x_1, x_2 \rangle$ ( $= \langle x_1 \odot x_2, \mathbf{1}_d \rangle$ )		$\mathcal{O}(n \log n)$
3 点間 単体複体実現問題 以上 (面積・体積) ( $k \geq 3$ )	$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	<p data-bbox="1037 665 1328 706">ハイパーグラフ</p> <p data-bbox="1051 733 1314 768">(3 頂点以上を連結)</p> 	本研究の対象
低階数対称 テンソル補完	$\langle x_1 \odot \cdots \odot x_k, \mathbf{1}_d \rangle$	$\mathcal{O}(n \log n)?$	

# 点配置同定問題の具体例と研究成果

問題名	計測関数 $g$	剛性理論	一意性に十分な ランダム計測数
2 点間 グラフ剛性問題 ( $k = 2$ ) (長さ)	$\ x_1 - x_2\ _2^2$	<p data-bbox="1121 277 1244 319">グラフ</p> <p data-bbox="1081 344 1284 381">(2 頂点を連結)</p> 	解決済み
低階数半正定値 行列補完	$\langle x_1, x_2 \rangle$ ( $= \langle x_1 \odot x_2, \mathbf{1}_d \rangle$ )		$\mathcal{O}(n \log n)$
3 点間 単体複体実現問題 以上 (面積・体積) ( $k \geq 3$ )	$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	<p data-bbox="1039 664 1326 705">ハイパーグラフ</p> <p data-bbox="1051 731 1314 767">(3 頂点以上を連結)</p> 	<p data-bbox="1448 664 1699 705">本研究の対象</p> <p data-bbox="1466 736 1681 783">未解決問題</p> <p data-bbox="1434 845 1712 907"><math>\mathcal{O}(n \log n)</math>?</p>
低階数対称 テンソル補完	$\langle x_1 \odot \cdots \odot x_k, \mathbf{1}_d \rangle$		

# 点配置同定問題の具体例と研究成果

問題名	計測関数 $g$	剛性理論	一意性に十分な ランダム計測数
2 点間 グラフ剛性問題 ( $k = 2$ ) (長さ)	$\ x_1 - x_2\ _2^2$	グラフ (2 頂点を連結) 	解決済み
低階数半正定値 行列補完	$\langle x_1, x_2 \rangle$ ( $= \langle x_1 \odot x_2, \mathbf{1}_d \rangle$ )		$\mathcal{O}(n \log n)$
3 点間 単体複体実現問題 以上 (面積・体積) ( $k \geq 3$ )	$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	ハイパーグラフ (3 頂点以上を連結) 	本研究の対象 <b>我々が証明</b> $\mathcal{O}(n \log n)$
低階数対称 テンソル補完	$\langle x_1 \odot \cdots \odot x_k, \mathbf{1}_d \rangle$		

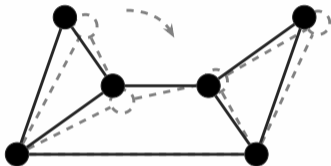
① 点配置の局所的な一意性

② 点配置の大域的な一意性

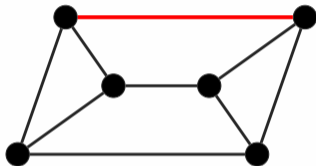
# 局所 $g$ 剛性と大域 $g$ 剛性 ( $g(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2^2$ の例)

- 局所  $g$  剛性  $\simeq$  計測関数  $g$  に関する点配置の局所的な一意性
- 前半では局所的な一意性に焦点を当てる

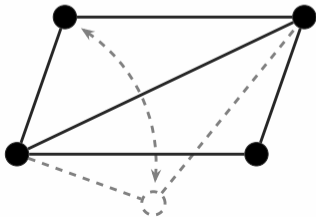
局所  $g$  剛性でない



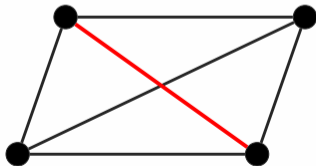
剛性である



大域  $g$  剛性でない



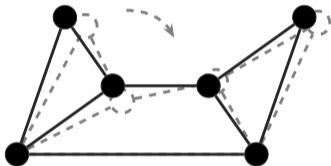
剛性である



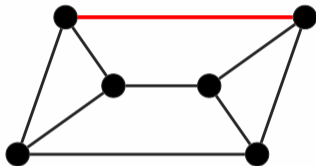
# 局所 $g$ 剛性と大域 $g$ 剛性 ( $g(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2^2$ の例)

- 局所  $g$  剛性  $\simeq$  計測関数  $g$  に関する点配置の局所的な一意性
- 前半では局所的な一意性に焦点を当てる

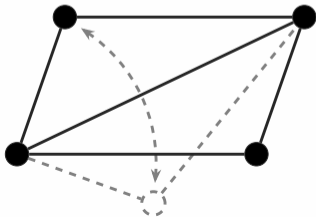
局所  $g$  剛堅でない



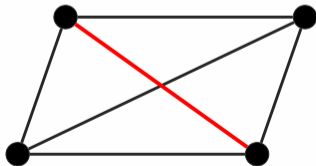
剛堅である



大域  $g$  剛堅でない



剛堅である



# 局所剛性に関する主定理

- 一様ランダムな  $k$  点間の関係の計測を、一様ランダムなハイパーグラフ [4] で定式化
- 先行研究 [8] によるグラフ剛性問題の結果を発展

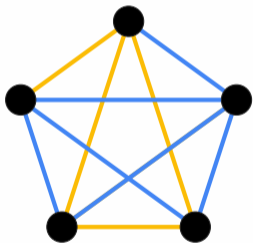
## 定理 1

(計測関数  $g$  などに対する仮定のもと)  $g$  のみに依存したある定数  $D_g$  が存在する。  
 $n$  頂点の空グラフから開始して、逐次的に一様ランダムにハイパー辺を追加して得られるハイパーグラフの列  $G_0, G_1, G_2, \dots$  を考える。この時、漸近的にほぼ確実に以下が成立:

$$\min \{i : G_i \text{ が局所 } g \text{ 剛堅}\} \leq \min \{i : G_i \text{ の最小次数が } D_g\}$$

# 剛性行列の定義

- 局所剛性は剛性行列 ( $g$  に関する  $m$  行  $dn$  列のヤコビ行列) で多くの場合に判定可能
- 剛性行列が最大ランクならば**局所剛堅**と仮定 (厳密には剛性閉包に関する仮定)
- (計測済み) + (判明済み) で完全ハイパーグラフ  $\Rightarrow$  **局所剛堅**

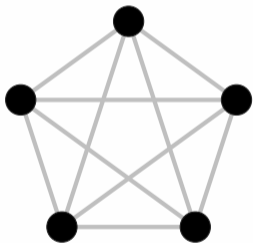


$$R(G, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{15}}{\partial p_1} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{15}}{\partial p_5} \\ \frac{\partial g_{23}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{23}}{\partial p_3} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_5} \\ \frac{\partial g_{25}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{35}}{\partial p_3} & \frac{\partial g_{35}}{\partial p_5} & \frac{\partial g_{25}}{\partial p_5} \end{pmatrix}$$




■ 計測済み    ■ 未計測だが情報は判明済み

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは**局所剛堅な部分ハイパーグラフ**の存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾

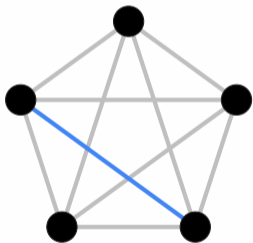


$$R(G, p) = \left( \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

 計測済み     未計測だが情報は判明済み     未計測で情報も未判明

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは**局所剛堅な部分ハイパーグラフ**の存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾



$$R(G, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} \\ \end{pmatrix}$$



計測済み



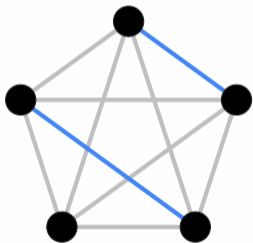
未計測だが情報は判明済み



未計測で情報も未判明

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは**局所剛堅な部分ハイパーグラフ**の存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾

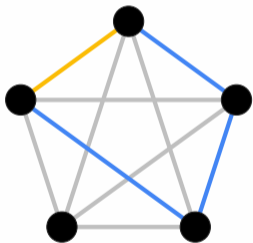


$$R(G, p) = \begin{pmatrix} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} & \\ \frac{\partial g_{15}}{\partial p_1} & & & \frac{\partial g_{15}}{\partial p_5} \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

■ 計測済み    ■ 未計測だが情報は判明済み    ■ 未計測で情報も未判明

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは**局所剛堅な部分ハイパーグラフ**の存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾

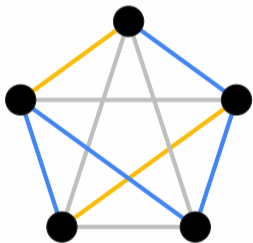


$$R(G, p) = \begin{pmatrix} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} & \\ \frac{\partial g_{15}}{\partial p_1} & & & \frac{\partial g_{15}}{\partial p_5} \\ & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_5} & \\ & & & \end{pmatrix}$$

■ 計測済み    ■ 未計測だが情報は判明済み    ■ 未計測で情報も未判明

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは**局所剛堅な部分ハイパーグラフ**の存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾

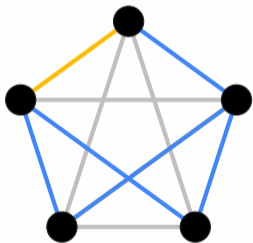


$$R(G, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{15}}{\partial p_1} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{15}}{\partial p_5} \\ & \frac{\partial g_{23}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{23}}{\partial p_3} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_5} \end{pmatrix}$$

■ 計測済み    ■ 未計測だが情報は判明済み    ■ 未計測で情報も未判明

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは**局所剛堅な部分ハイパーグラフ**の存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾

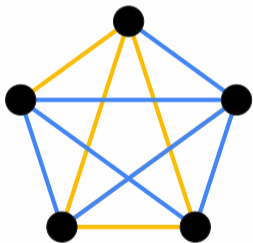


$$R(G, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{15}}{\partial p_1} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{15}}{\partial p_5} \\ & \frac{\partial g_{23}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_5} \\ & \frac{\partial g_{23}}{\partial p_3} & & \\ & \frac{\partial g_{35}}{\partial p_3} & & \frac{\partial g_{35}}{\partial p_5} \end{pmatrix}$$

■ 計測済み    ■ 未計測だが情報は判明済み    ■ 未計測で情報も未判明

# 局所剛堅な部分ハイパーグラフ

- 定理 1 の証明における本質の一つは局所剛堅な部分ハイパーグラフの存在を示すこと
- (計測済み) + (判明済み)  $\geq (1 - \epsilon) \binom{n}{k}$  を示す (+残りは本発表で省略 double counting)
- 十分な回数操作後も (未計測かつ未判明)  $> \epsilon \binom{n}{k}$  であるのは矛盾



$$R(G, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{15}}{\partial p_1} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{24}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{15}}{\partial p_5} \\ \frac{\partial g_{23}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{23}}{\partial p_3} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_4} & \frac{\partial g_{45}}{\partial p_5} \\ \frac{\partial g_{25}}{\partial p_2} & \frac{\partial g_{35}}{\partial p_3} & \frac{\partial g_{35}}{\partial p_5} & \frac{\partial g_{25}}{\partial p_5} \end{pmatrix}$$



計測済み



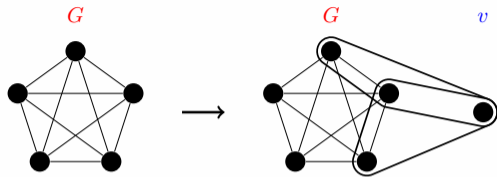
未計測だが情報は判明済み



未計測で情報も未判明

# 局所剛性の拡大

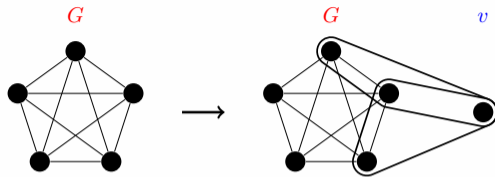
- 更に、 $G$  が局所  $g$  剛堅ならば  $D_g$  本のハイパー辺と頂点  $v$  を追加しても局所  $g$  剛堅と仮定



- 前頁の部分ハイパーグラフにおける**局所剛性**が、全体へと伝播するイメージ

# 局所剛性の拡大

- 更に、 $G$  が局所  $g$  剛堅ならば  $D_g$  本のハイパー辺と頂点  $v$  を追加しても局所  $g$  剛堅と仮定



- 前頁の部分ハイパーグラフにおける**局所剛性**が、全体へと伝播するイメージ
- ハイパー辺の観測確率を  $p_+$  として、拡大不可能な集合の数を評価（実際は更に複雑）

$$p_+ = \frac{1}{k \binom{n}{k}} n (\log n + (D_g - 1) \log \log n + \log \log \log n)$$

$$\Rightarrow \sum_{b=1}^{\gamma n} \binom{n}{b} \left( \sum_{i=0}^{D_g-1} \binom{\binom{n-b}{k-1}}{i} p_+^i (1-p_+)^{\binom{n-b}{k-1}-i} \right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

サイズ  $b$  の集合全て

$D_g$  本未満のハイパー辺しか出ない確率の総和

# 局所剛性の為のランダムな計測数

- 以上の議論を基に、次の定理が証明される

## 定理 1 (再掲)

(計測関数  $g$  などに対する仮定のもと)  $g$  のみに依存したある定数  $D_g$  が存在する。  
 $n$  頂点の空グラフから開始して、逐次的に一様ランダムにハイパー辺を追加して得られるハイパーグラフの列  $G_0, G_1, G_2, \dots$  を考える。この時、漸近的にほぼ確実に以下が成立:

$$\min \{i : G_i \text{ が局所 } g \text{ 剛堅}\} \leq \min \{i : G_i \text{ の最小次数が } D_g\}$$

- クーポンコレクター問題より辺数は  $\frac{1}{k}n(\log n + (D_g - 1) \log \log n + \mathcal{O}(1))$  本程度  
 $\Rightarrow \frac{1+o(1)}{k}n \log n$  個以上の計測で漸近的にほぼ確実に**点配置は局所的に一意**
- 最小次数は 1 以上である必要があり  $\frac{1}{k}n(\log n + \mathcal{O}(1))$  個の計測が下限  
 $\Rightarrow$  **漸近的に最適**な結果

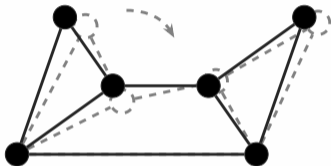
① 点配置の局所的な一意性

② 点配置の大域的な一意性

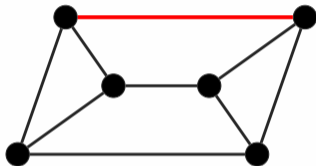
# 局所 $g$ 剛性 と 大域 $g$ 剛性 ( $g(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_2^2$ の例)

- 大域  $g$  剛性  $\simeq$  計測関数  $g$  に関する点配置の大域的な一意性
- 後半では大域的な一意性に焦点を当てる

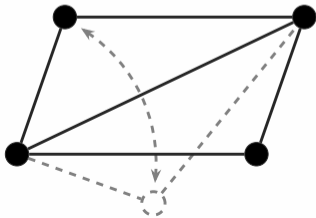
局所  $g$  剛性でない



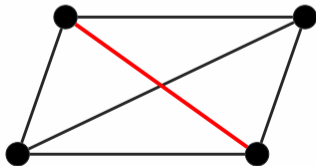
剛性である



大域  $g$  剛性でない



剛性である



# 低階数対称テンソル補完問題

- 対称テンソルとは対称行列の高次元版で、非常に多くの補完方法が提案 [1, 2, 5, 6, 7, 9]
- しかし、一意な補完が  $\mathcal{O}(n \log n)$  個のランダムな計測で定まるかどうかは未解決問題
- 大域的な補完一意性が言えれば応用上も特に有用 → これを証明したい
- 以下では本問題に対応する計測関数を  $g_d = \langle x_1 \odot \cdots \odot x_k, 1_d \rangle$  と置く

The diagram illustrates the decomposition of a symmetric tensor  $T$  into a sum of rank-1 tensors. On the left, a red 3D cube represents the tensor  $T$ . This is followed by an equals sign and a blue 3D structure representing the first rank-1 tensor, labeled  $y_1^{\otimes k}$ . This structure consists of a vertical column of four blocks and a horizontal row of four blocks, with one block at the intersection. To the right of this is a plus sign and a green 3D structure representing the second rank-1 tensor, labeled  $y_2^{\otimes k}$ . This structure also consists of a vertical column of four blocks and a horizontal row of four blocks, with one block at the intersection. A final plus sign is shown to the right of the green structure.

# 低階数対称テンソル補完問題における大域剛性

- 大域剛性を証明する難度  $\gg$  局所剛性を証明する難度
- 計測関数  $g_d$  では大域剛性を局所剛性  $+\alpha$  で表せると先行研究 [3] が発見

## 定理 2

計測関数  $g_d$  での点配置同定問題について、置換行列などによる作用を除き点配置が大域的に一意である為の十分条件は、次の三条件である。

**条件 A**  $G$  が局所  $g_{d+1}$  剛堅 (定理 1 で証明済み)

**条件 B**  $G$  が大域  $g_1$  剛堅

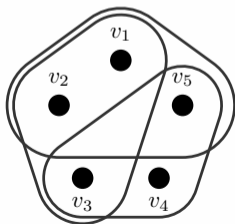
**条件 C**  $G$  の接続行列  $I_G$  と隣接行列  $A_\omega$  について  $\dim \bigcap_{\omega \in \text{Ker}(I_G)} \text{Ker}(A_\omega) = 1$

- ここで、 $g_d = \langle x_1 \odot \cdots \odot x_k, 1_d \rangle$  であり、特に  $g_1 = \prod_{i=1}^k x_i$  となる

# 条件 B について

条件 B  $G$  が大域  $g_1$  剛堅

- 大域  $g_1$  剛性  $\iff$  方程式系  $\prod_{v \in e} x_v = \prod_{v \in e} y_v \quad (e \in E)$  の解一意性
- $\log$  を取ると接続行列  $I_G$  に対し  $I_G^\top (\log r_x - \log r_y) = 0_m$  および  $I_G^\top (\theta_x - \theta_y) \in (2\pi\mathbb{Z})^m$
- $\mathbb{R}$  上と  $\mathbb{F}_2$  上 ( $\mathbb{F}_p$  上) における接続行列  $I_G$  の階数に議論が帰着
- 局所  $g$  剛性に関する定理 1 と数論的議論によって証明可能

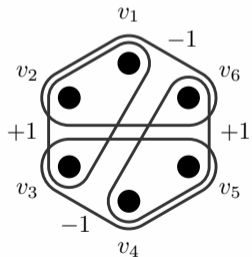


$$I_G = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

# 条件 C について

**条件 C**  $G$  の接続行列  $I_G$  と隣接行列  $A_\omega$  について  $\dim \bigcap_{\omega \in \text{Ker}(I_G)} \text{Ker}(A_\omega) = 1$

- 考察を経ると  $2(k-1)$  一様ハイパーグラフの接続行列の階数に帰着
- 局所  $g$  剛性の証明手法を拡張して適用
- カップリングと呼ばれる操作で確率分布を結びつける



$$A_\omega = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & -1 & 0 & +1 & +1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix}$$

# 低階数対称テンソル補完問題の解決

- 最終的に次の定理が証明される

## 定理 3

低階数対称テンソル補完問題について、要素が一般的であるという仮定の下、 $(2 + o(1))n \log n$  個の一樣ランダムな計測で漸近的にほぼ確実に補完は一意に定まる。

**証明.** テンソルの対称階数を  $d$ 、テンソルの次元を  $k$  とする。

- 条件 A（局所剛性）の成立は計測数  $\frac{n \log n + dn \log \log n + \mathcal{O}(n)}{k}$  以上
- 条件 B（接続行列）の成立は計測数  $\frac{n \log n + \mathcal{O}(n)}{k}$  以上
- 条件 C（隣接行列）の成立は計測数  $2k \frac{n \log n + \mathcal{O}(n)}{k}$  以上

で漸近的にほぼ確実に十分なので、定理 2 より主張は示される



- 本研究の目標の一つであった低階数対称テンソル補完問題の解決は完了した

# まとめ

## 本研究の成果

- 点配置の一意性は極めて広範な場面でメタな精度保証を与える重要な性質
- 一般の  $g$  で局所的な一意性は  $\frac{1+o(1)}{k}n \log n$  個の計測で十分
- 低階数対称テンソル補完問題で大域的な一意性は  $(2 + o(1))n \log n$  個の計測で十分

## 今後の課題

- 大域  $g$  剛性に関する定数倍の改善
- 台集合が  $k$ -partite ハイパーグラフだと一般のテンソル補完を捉える
- 台集合が完全ハイパーグラフでない場合への拡張

# Reference I

- [1] B. Barak and A. Moitra.  
Noisy tensor completion via the sum-of-squares hierarchy.  
*In Conference on Learning Theory*, pp. 417–445. Proceedings of Machine Learning Research, 2016.
- [2] S. Bhojanapalli and S. Sanghavi.  
A new sampling technique for tensors, arXiv:1502.05023, 2015.
- [3] J. Cruickshank, F. Mohammadi, A. Nixon, and S. Tanigawa.  
Identifiability of points and rigidity of hypergraphs under algebraic constraints, arXiv:2305.18990, 2023.
- [4] P. Erdős and A. Rényi.  
On random graphs I.  
*Publicationes Mathematicae Debrecen*, Vol. 6, No. 290-297, p. 18, 1959.
- [5] N. Ghadermarzy, Y. Plan, and Ö. Yilmaz.  
Near-optimal sample complexity for convex tensor completion.  
*Information and Inference*, Vol. 8, No. 3, pp. 577–619, 2019.
- [6] P. Jain and S. Oh.  
Provable tensor factorization with missing data.  
*In Advances in Neural Information Processing Systems*, 2014.

# Reference II

- [7] A. Krishnamurthy and A. Singh.  
Low-rank matrix and tensor completion via adaptive sampling.  
*In Advances in Neural Information Processing Systems*, Vol. 26, 2013.
- [8] A. Lew, E. Nevo, Y. Peled, and O. E. Raz.  
Sharp threshold for rigidity of random graphs.  
*Bulletin of the London Mathematical Society*, Vol. 55, No. 1, pp. 490–501, 2023.
- [9] M. Yuan and C. Zhang.  
Incoherent tensor norms and their applications in higher order tensor completion.  
*IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 63, No. 10, pp. 6753–6766, 2017.