類双対写像とフラクタルの理論

本田浩樹
2025年7月

序章　リンドン複素螺旋位相の理論

リンドン列複素螺旋位相の理論
——F_1幾何的原理による数の階層構造

1.　はじめに

この文章は、「入門編」「応用編」「リーマンゼータの論考」へと続く論考にかかれてある理論の、さらなる入門編、あるいは用語解説集のようなものです。

僕は、まず、「リーマンゼータのゼロ点」とは、復元される非周期列が「素リンドン」であることを理解しました。

その事を考えていくうちに、リンドン複素螺旋位相、すなわち

「無限（有限）のあらゆるリンドン列」→「螺旋的に回転する複素平面」

この「埋め込み構造」対応構造、つまり、連続位相構造を発見したのでした。

ところが、思いの外に、この概念は、理解がしにくいということに気づくのに、非常に一ヶ月もかかったのです。

本当は、「ちょっと分かりにくいから一・二ページで解説を書こう」と思っていたのですが、より細かく詳しく、説明する義務を感じました。

そこで、ここでは、少し細かめに、そして具体例を出して、説明し、また、もしかしたら「定義がひとには不明確かも？」と思った用語の説明もしてあります。
この「入門」は、誰でも、リンドン半群の構造から、まず、整数の素因数分解から出発して、有理数・実数・複素数を越え、四元数・８元数・１６元数の非可換・非結合な破れた領域にまで一気に到達できる手法を示したものです。
すべてがフラクタル的に進んでいきます。
つまり、「情報をどう圧縮して、意味のある情報を取り出すか」という方法論になっているということです。

2.　第一原理　リンドン語は一意的に分解される

リンドン列は、半群と言って、順序性がある、いろんな要素の並びです。
たとえば、

（０１）（０１）

というリンドン列があったとします。後で説明しますが、（０１）は素リンドンと言って、これ以上縮約できない「リンドン列における「素数」」であって、あらゆるリンドン列は、「素リンドン」列に、「一意的に」分解できる、というのがマクマホンの定理です。
たとえば、でたらめな列を考えましょう。

０ ０ １ ０ ０ １ ０ １ ０ １ ０ １ １ ０ １ ０ １ ０ ０ １ ０ ０ ０ １ ０

これを「素リンドン」に一意的に分解できるなんて、信じられないと思うでしょう。
「素リンドン」というのは「周期性を持たない最小の数の組み合わせ」です。
しかしそれが可能であるというのが、マクマホンの定理です。

図 1. Duval 分解

そして、素リンドンの長さにはあらゆる自然数の長さが少なくとも１つ以上含まれます。
つり、任意の自然数 N≥1 に対して、長さ N のアルファベット列の中には、少なくとも 1 つの素リンドン語が存在します。

図 2. 素リンドン列の長さ

長さ N	素リンドン語（例）
1	`0`, `1`
2	`01`, `10`
3	`001`, `011`, `101`, `111`（ただし素なもののみ）
4	`0001`, `0011`, …

神秘的としか思えない状態です。
この一意的に分解するアルゴリズム自体のシンプルさも驚くべきほどであり、ただ、1、左から順に見ていって、最大の非周期列を取り出す。２，その次それを取り除いてから、同じように取り出す。これを繰り返すだけです。
ここで新たな規則を考えます。
素リンドンの長さ　→　自然数
こういう対応関係です。
ただし、最初に考えた、この（０１）（０１）は、

（０１）（０１）　→同じ反復のリンドン列は縮約可能、なぜなら、長さ２と、その反復数２が一致するからであり、（０１）と同値になり、長さ２であるから値“２”の整数

これが、「情報の縮約原理」です。
つまり、素リンドンの組み合わせは自然数です。
このときに、順序が破壊されて“値”が出ることに注意です。
いわば、「順序性の縮約」が、最初の縮約です。

図 3. 縮約の順序性

```
(123)(123)(123) → (123)
```

この場合は、“長さ”３と“反復数”３が被っているために縮約可能です。

このような縮約が許される構造は、「乗法的」には問題がないが、「加法的構造」は一部壊れていて、順序性を失い、それから後で復元される必要があります。

つまりこれは、F_1的構造のようなものと関係しています。

さらに、

素リンドン列の”長さ”と”反復数”の重複 → 情報の重なり → 圧縮

構造の繰り返し → 縮約写像で潰れる

これは、**F_1上のモノイド代数的な振る舞いとして捉えることができます。**

3. 自然数の構成

素リンドンが組み合わさると「自然数」ができます。

注意するべきは、「自然数」には素数に順序構造がないですが、素リンドンには順序構造があるということです。「素リンドン」は無限個あって、一意的に分解できる。

たとえば、（２３）（５６８）（２３）というのがあったとしたら、順序性が壊れるから、２✕３✕２に返っていく。つまり、１２という”値”になるのですが、その順序が変わっても、やはり、同じ「同値類」です。

このように、あらゆる「素数」の長さの「素リンドン」があるので、自然数すべてに“値”が返っていきます。

素リンドン列の”長さ”と”反復数”の重複が、なぜ、縮約されてしまうのかと言えば、長さ３の“素リンドン”の３の反復は、自然数でもたとえば３✕３と３+３という重なりのせいで、３の「無意味な反復」は３に縮約されてしまうんです。…のですが、６・９の長さの「素リンドン」元で、一応、それを別様に表現できる。とはいえ、後で述べますが、実は、「既約有理リンドン」のなかに、６/2 が存在しているので、「既約有理リンドン」のなかで、３（素リンドン）+３（反復）は復元されています。

4. 分数、既約分数の構成

僕は最初、「Ｎ縮約可能」と呼んでいましたが、それは異様に分かりにくいらしく、こういうことです。

（２３）（５６８）（２３）というリンドン語があったとしたら、１２になると言いました。ところが、それが五回も続く次のようなリンドン列は、

（２３）（５６８）（２３）（２３）（５６８）（２３）（２３）（５６８）（２３）（２３）（５６８）（２３）（２３）（５６８）（２３）

これは５が、２の倍数でも３の倍数でもないので、縮約できません。

いわば、「構成要素の長さの積（たとえば 12）」が、反復回数（ここでは 5）との非整合性によって既約比率として確定するというわけです。２，３と５が「素」であるということによるのです。

よって、12/5 という既約有理数へと“値”を返します。

このとき、あらゆるリンドン列は、素リンドン分解によって、「既約有理リンドン」への一意的な縮約を持ちます。つまり、リンドン列は、新しい「既約有理リンドン半群」への一意的な写像を持ちますし、変形可能です。

定理

リンドン列は、新しい「既約有理リンドン半群」への一意的な縮約写像を持つ

また、ここに来て、「既約反復されているリンドン列」の並びがあると、それは加法になります。

リンドン語の加法の定理

加法とは、リンドン語が並んでいることである。

ここで、「３+３=３」というような縮約が復元されていることに注意してください。

図 4. 加法的縮約

$$3+3=\frac{6}{2}+\frac{6}{2}=\frac{12}{2}=6$$

このように「既約有理リンドンの並び」として復元されているのです。ただし、６は、長さ６の“素リンドン”元です。６を含むような反復を２は持つことができない。約数に過ぎないから。

つまり、「加法の順序性も壊れている」から後の復元で大丈夫になります。

このとき、「さきほどは因数分解のように「積」として考えなかったか？」と思った方もいるでしょう。だから、まず、既約性へと縮約するために、「積」をとり、その後残った「既約要素」が加法になるんです。それはあくまで、「復元過程」のときに起こるのであって、最初は、積も和もない、ただの「順序集合である半群」です。

「積→和」の順に復元すれば破綻しない。学校数学でもよくあることです。

5. 実数

いまから扱う全記号は「既約有理リンドン」であると思っていてください。

さっき書いた定理により、「既約有理リンドン」の集まりをまた、一つの新しい「リンドン列」としてみてよいということになります。なぜなら、あらゆる与えられたリンドン列は、「素リンドン分解」→既約有理リンドン縮約写像→「新しい“既約有理リンドンによる”リンドン列」によって、変形可能であるからです。

あらゆるリンドン列は「一意的」に「既約有理リンドン列」に縮約できます。

とすると、既約有理リンドン自体も無限個あるので、それ自体を「リンドン語の要素」としてみることができるので、マクマホンの定理で「“素”既約有理リンドン」へと一意的に分解できます。

とすると、既約有理リンドン自体の組み合わせを、前と同じように、縮約できますね。

しかし、やはり同じように「素既約リンドンの組み合わせ」が、その「素既約リンドン」の長さと素でなければ、縮約できない。逆に、縮約できないときには、その素既約リンドンの反復数は、**反復数の累乗根になります**。

だから、たとえば、黄金数は、

一のリンドン、ルート５のリンドンの並びの二回の反復

で表現できます。

つまり、代数方程式の解はこのやり方ですべて表現できます。

このようにして、その操作は無限に続いていき、また縮約された「累乗根リンドン」を「素累乗根リンドン」へとマクマホンの定理によって、一意的に分解できる…の繰り返しで、実数が構成されていきます。

つまり、**どんどんと「累乗根」が重ねられるたびに、新しい「リンドン半群」への縮約写像が一意的に定義されます**。

それが、「多周期フラクタル」のように、異なる要素が重なっていく反復状態になってしまうと、それは縮約できません。非可換になってきて、累乗根は簡単に解けない。

それが実数です。

図 5. リンドン実数のイメージ

たとえばこういうものを思い浮かべる

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{7 + \cdots}}}}$$

または、もう少し数論的に：

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt[5]{3 + \sqrt[7]{5 + \cdots}}}$$

理論の語彙で言えば

「入れ子になった**既約有理リンドン列**の非周期列」

「縮約不可能な素構造の密な重なり」

「式として"定義できる"が、解析的には閉じない値」

このような累乗根の入れ子構造を見ますね。

このような累乗根の重なりは僕らは「実数」だと分かっているけど、実際にはどのような「実数」の“値”なのか理解していません。同じように、多周期フラクタル的に、入れ子状に累乗根し、その反復数によって、入れ子状になった数を累乗根のように見なすと、同じように、「実数」へと“値”を返していきます。

ここで、注意しておきたいのは、素リンドンの反復は縮約されるけど、既約有理リンドンや実数リンドンは繰り返されても、「既約なら意味を持つ」ということです。それは、それぞれ、有理リンドン列や実数リンドン列の「累乗」へと返っていくのであって、消えるのではないです。つまり、「累乗算」になる。そして、「既約ではない有利リンドンや実数リンドンの並び」、これは、「有理数が整数になる」「実数の累乗根が解ける」状況に相当します。並んでいて、それがどのような縮約可能な周期性にも縮減できない場合には、それが実数です。

ここで、注意するべきは、このような「多周期フラクタル」的な準周期的「非縮約構造」はやはり例外を除いて「**有限の**リンドン列」であることです。

つまり、「無限反復構造」を持ち得ます。

この、リンドン半群の、リンドン半群への縮約写像というものが、一意的にずっと続いている入れ子状のフラクタルとなって、「値」を細かくしていっていることに注意してください。**スケールが上がると値が細かくなる…情報論の原理**ですね。

あと、代数方程式の解が代数的閉体内にあるなら、必ず有理化可能です。このことから、つまり無理数でも有限ステップで根号を潰せるということで、代数的数は全て、この方法で表現可能です。

以上のことをまとめると、

自然数リンドンの反復→割り算

既約有理リンドンの反復→累乗
そういうもの（既約状態）が並んでいること→加法
加法的構造が反復→割り算
加法的構造が既約有理である状態の反復→累乗

図 6. リンドン列の種類

リンドンの種類	例	繰り返しに対する振る舞い	解釈
素リンドン列	`(0101)`	繰り返しは**冗長 → 縮約される**	構造単位そのもの。情報の最小単位。F_1的縮約
既約有理リンドン列	`(01)(01)(01)`	繰り返しが**比率的 → 意味を持つ**	有理数としての「反復構造」を保つ（3回なら3/1）
無理数（実数）リンドン列	`(01)(011)(010011)…`	既約有理リンドン列が「既約」な「反復を持っている状態」=累乗	ズレが累積し、縮約不能な実数位相へ
超越的リンドン構造	混合・入れ子・自己非縮約列	無限の入れ子 → 完全に縮約不能	高次の情報構造、複素・回転・多価性を形成

　すべてが「情報論」的に構造化されていることに注意してください。

6.　複素数

　おそらく、この話をきいていたら、いちばん「なんでそうなるんだ？」と思う人が多いのは、複素数ではないでしょうか。
　いまから、要素とするのは、自然数リンドンでも、既約有理リンドンでも、実数リンドンでも構いません。
　そして、それらの要素が、「非周期的」に並んでいたら、その「非周期的な列」自体をひとつの“値”としてみることができるでしょう。
　つまり、「非周期列」の入れ子構造です。
　この**入れ子構造も「半群」なので、**マクマホンの定理によって、一意的に分解されますね。つまり、それは、「入れ子的に実数構造まで持ちうる」ということを先程までの考察によって言うことができますので、この高次の入れ子構造は自然数、既約有理数、あるいは実数の“値”を持ちます。

定理
　あらゆるリンドン列は「非周期性の非周期性」という形の縮約写像を持ち、それは一意的である。つまり、「任意のリンドン列」→「非周期性の非周期性」による縮約→「新しいリンドン列」という写像が一意的にあります。

これが、複素数であり、自然数リンドンでも、既約リンドンでも、実数リンドンでも、その値に応じて、その素要素の数がＮであったら、Ｎの累乗根の角度として、その「非周期的入れ子」の半群が示す「実数」の値で、回転させます。この「非周期列」の入れ子は、無限に続けられることに注意してください。つまり、この回転は永遠に続くし、ずっと螺旋状に、複素平面上を回転し続けます。

これが、僕が言う、「リンドン複素螺旋連続位相」です。

つまり、実数自体が「非周期列」をなしていたら、それが複素平面上の回転になりますし、別に、自然数リンドンであっても回転します。

これが、複素螺旋平面です。

そして、この「非周期列の非周期列的入れ子」状態も、「有限リンドン」でありうるし、「無限リンドン」でもありえます。

この概念から、逆に、「負の数」というのは、なかなか在り難いものであるということが理解できるでしょう。実際、ゼータ関数に「負の値」が出るときには、螺旋状に、「発散が縮約」されていると見ることができます。

この恐ろしいほど入れ子状になった、半群の入れ子構造と、マクマホンの連続写像は、美しいほどではないでしょうか。

7.　発散的復元　そして、超越数

このような「複素螺旋平面上にプロットされたリンドン列」が「無限反復」していたときに、その“値”は、返っていきます。

たとえば、ループが２つあるグラフがあるとします。

すると、そのループに、０，１と数字を付けて、あらゆるグラフ上の無限のトレースを取ると、その「０，１」から作られるあらゆる「リンドン列」が生成されます。

つまり、グラフのトレース束は、「無限反復」を持っている場合には、その「有限リンドン」の“値”を返しますし、「無限反復」ではないものがあっても、「超越数」を返します。

超越数はいかなる有限の縮約法でも縮約できないものです。つまり、

複素リンドン→実数リンドン→既約有理リンドン→自然数リンドン

こういう「縮約」を定義できますが、このような有限の縮約でいかなる「有限の長さのリンドン列」にもならないものを、「超越数」であるとします。

図 7. 入れ子構造の反復による回転

対象	リンドン構造	幾何的意味	結果
実数 r	有限リンドン列 L_r	点の集合（直線上）	実軸上の数
非周期的な L_r の反復	入れ子·ズレのある列	螺旋構造を作る	回転 = arg = 複素数
回転構造	実数 × 方向	単位円周上の点	複素数

8.　解析関数

先ほどと同じように、ごく単純に、「２つのループ」があるグラフを考えます。

そのループを０，１と名付けます。

すると、このグラフのあらゆる無限のトレース束をとると、そのなかには、０００１０１００１０１００１０１０１０１…みたいな列すべてが含まれていますね。つまり、そこには、縮約すれば、かならず、ある素リンドンを元にした、「複素平面上へのプロット」が生じます。

同時に、**この「トレース経路」は、そのグラフの「双対グラフ」でも同じように同期して回っていますね**。

双対操作とは、簡単に言えば、「点と線」を入れ替える操作です。

この操作でグラフの構造は変わりますので、「トレース構造」も変化します。

すると、そのグラフでは同じトレースでも異なった数字がプロットされる。つまり、**「ある複素数値」と「ある複素数値」が一対一で対応するわけです**。これが、解析関数です。

グラフが存在するだけで、「解析関数」が「全複素平面上」で生じます。

この事実から、あらゆるグラフ構造から、あらゆる一般的リーマン面構造を取り出すことができますが、この説明と証明は、「入門編」の論考を読んでください。

図 8. グラフ的リーマン面の仕組み

（グラフ構造）
　　　↓ トレース列
（リンドン縮約）
　　　↓ ズレ構造
（回転角度）
　　　↓ 複素点
　　　↓
（双対グラフからもう一つの複素点）
　　　↓
（z ↦ w の対応）＝解析関数
　　　↓
（関数が重なり合っていく）＝リーマン面

9.　発散的復元

以上、説明したとおり、たった２つのループ構造があるだけで、そのグラフからは、「発散的に復元される」連続複素らせん構造があります。

これを、「発散的復元」と読んでいるわけです。

これとは別の意味で、グラフに内在する、「素構造の発散」もあります。

たとえば、ある２つのループに重なりがある場合、そのループの「どちらか」を通るかで、また、「０，１」という分岐が生じます。

この分岐のせいで、「トレース束」には、「０１０１０１０１０１０１００１０１００…」という構造が入ってしまって、結果的に、「素構造」の数が無限大になります。

このようなものをグラフの中の「非周期的経路」と呼んでいます。

この非周期的経路が２つある場合を「種数１」のリーマン面といいます。

あとは数え方はおんなじです。３つのときには「種数２」です。

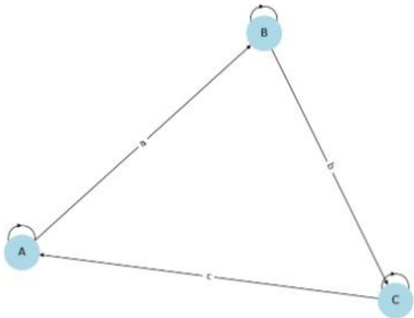
つまり、通常は、「ループ構造」には発散性はない。

しかし、「非周期的経路」があると、トレース構造には発散性が生じます。より複雑になるというわけです。だから、その複雑さの度合を「種数」という数字で表している。

このとき、通常の「発散的復元」とこのグラフ内の「種数+１」の「非周期的経路」による発散を、区別することが重要になります。

10. 双対空間の中での同期構造

図 9. 自己ループ付き三角グラフの例



こちらが、ごく簡単な**非正則グラフ**の例です。

🔍 **グラフの特徴**

- **ノード** **A, B, C**
- AとBには**自己ループ**（ラベル 0, 1）
- A→B→C→A のループ（非対称・異次数）
- C にも自己ループ（ラベル 2）

あるグラフがあるとします。

A と B の自己ループは、それぞれ「0」「1」という素記号の生成元を持つとします。

A→B→C→A のルートは「a → b → c」の記号列として機能するが、C における自己ループ（2）が非対称性と非正則性を与えます。

このグラフ全体から得られるトレース列は、たとえば、

０ ０ a b １ b c ２ ２ ０ １ １ c a b ...

のような、周期性と非周期性が混ざった構造を生みます。

このような「自己ループ」構造を持つグラフの「トレースリンドン列」は、非常に発散性が高いことで特徴づけられ、また、「発散的拡大」のときの「不動点」の証明では重要になってきます。

一方、このグラフに対応する双対グラフを考えたとき、たとえば「0↔1」「a↔c」などの対応があるとすれば、同一トレース列が、別のプロット値を持ちます。

したがって、「一方のグラフ」と「その双対グラフ」の間で、同一トレース列に対して、異なる複素数が割り当てられます。

これはまさに、解析関数 $z \mapsto f(z)$ の定義です。

さらに、ループに含まれる素記号が複数重なって、縮約不能な非周期列が出現する場合、そのグラフは複素平面への一意的プロットを生みます。つまり、超越数まで含んで、あらゆる連続性を表現します。

11. 双対モチーフ閉包

ところで、「点と線を入れ替える」という双対操作は、実は一意的ではありません。

たくさんの点にたくさんの線がつながっているハイパーグラフになると、たくさんの入れ替え方があって、それぞれの入れ替え方をすべて書き出します。

そして、書き出したそれらの変形されたグラフをまた、「点と線を入れ替える」双対操作を取ります…という操作を続けますと、その操作は、（有限グラフの場合）有限回で終わり、完全に「双対操作」で閉じてしまいます。つまり、「モチーフ閉包」とはいわば「双対変形の「多値性」を「グラフの集合と集合との関係」に置き換える操作です。

別に、深く理解する必要はなく、たとえば、二次関数は値が一つですが、ひっくり返したら２つになるでしょう。これも双対変換（逆関数を取る）です。これはそれを入れ替えたらまたもとに戻る。けど、もっと複雑なリーマン面だと、自然に多値的になります。

12. 「多重トレース」「多重トレース空間」

「多重トレース空間」とは、**モチーフ閉包全体における同一トレース列が、複数のモチーフ構造（双対も含む）で、異なる縮約・射影・素構造の解釈を持ちながら同時に進行する（＝同期する）**構造のことです。

たくさんの双対変形されたグラフがありましたが、その「点と線」は対応してます。

だから、「ある一つのグラフのトレースを取る」と、あらゆる双対グラフの中で、それと同期した「トレース」が走ります。

これが、「多重トレース」です。

そして、重要なことは、「トレース列」は、「複素螺旋平面上に点をプロットする」ということ。

ということは、この双対グラフの様々なグラフの形の中で、「異なる”値”」が同時に複素螺旋平面にプロットされます。

これは、「連続的」であって、というのは、「あらゆる複素螺旋平面上に、発散的復元されたトレース束」のなかのどれかのトレースは、“値”を持っています。だから、これらの変形の中でも「連続的に繋がっている」ということが分かるということです。

これが、グラフ的リーマン面、いいかえると、一般的リーマン面の解析接続の一意性です。「なぜ、複素数の領域にまで拡張すると、リーマン面上に解析接続されるのか？」という問い掛けがもはや必要ないことに気づくでしょう。

同じトレース列が、異なるモチーフ閉包（＝異なる素リンドン縮約構造）で、別々の意味構造を持つ。それぞれが異なる複素数 z_1，z_2，z_3… に写像され、それらの写像関係が、多価的写像（リーマン面）や解析関数系を生む。

この「多重トレース空間」概念が加わることで、グラフ的構造が、単なる写像生成だけでなく、「射影系」のような空間的な意味を持ち始め、関数空間が、モチーフ依存で生成される射影写像族になります。

ゼータ関数やモジュラー形式、保型性といった現象も、「多重トレース同期」のなかに異なる相貌を持って見えるようになってきます。

図 10. グラフ的リーマン面の構造レベル

構成レベル	名称	意味	主な構成要素
① ローカル	トレース列	グラフGの1つの経路	リンドン語列、非周期列など
② ミドル	モチーフ閉包	グラフGの双対グラフを考えることで、多値性を制御した閉包構造	点と線がそれぞれ対応しながら変形されたさまざまなグラフの集合体
③ グローバル	多重トレース空間	複数のモチーフ閉包（双対・派生）にわたるトレース列の **同期的構造**	同一トレース列の複数プロット、関数対応 ($z \mapsto w$)

13. 一般的リーマン面は「貼り合わせ」ではなく「重ね合わせの必然」である

リンドン螺旋連続位相と「多重トレース空間」でのその「複素平面」間の同期構造があると、無限の非周期的リンドン列（＝構成密度のズレをもつ列）が存在します。

それらはそれぞれ、複素平面上の回転点（e^{2πｉθ/n}）(n はそのリンドン列の素構造の数)としてプロットされます。つまり、モチーフ閉包上の変形されたグラフのそれぞれで、”値”を持ちます。

さらに、モチーフ閉包／双対グラフが多数存在するため、同一列が複数のプロットへ写像されます（多重トレース）。

この多重構造の間に「自然な連続写像」（同期）が生じ、すると、**あらゆるズレが、自己同期的に補完され、あらゆるプロット間が、一意的に連続写像で繋がり、よって、複素平面は連結され、「隙間なく」被覆されます。**

これが「多変数関数における解析接続の一意性」です。

14. 高次代数領域へ

マクマホンの分解定理から、有理的縮約を通して、階層化し、さらに、実数をフラクタル上に、累乗根として、同じように、階層化し、「非周期項の非周期項」という高次の非自明な「リンドン半群」から、全く同じように、複素数が取り出され、螺旋形を描き、そして、その複素構造の「高次構造」からまた、四元数が取り出され、ふたたび異なる軸へと回転していき、それが十六元数へと続いて、しだいに、代数系は壊れていく…という、流れを、部分的に描きました。

15. 乗法も加法も順序性が壊れているが、後の復元で大丈夫になる

リンドン縮約構造において乗法や加法やその順序性がまず。存在し続けているために、一度、縮約写像によって、復元しないと取り出せなくなっています。

初期構造では加法は存在せず、縮約される反復のみが支配的です。

しかし、反復不能なリンドン構造が組み合わされることで、並列的に加法が“浮上”します。。

この加法は自然数の加算ではなく、階層的トレース・反復構造の再配置によって表出する。

よって、本理論における加法とは、構成的に再構成される

そういう、**非可換的順序構造である**といえます。

このなかに、「ゼロ元」があるのでしょうか？

おそらく、それは、「素リンドンの無限反復状態」です。情報量としてはなんの意味もない。ひとつひとつの「素リンドン」は復元されるまでは、ちゃんと単位元的な働きをしており、乗法構造を持っています。

復元されるときに「並び」が加法となります。

これは、乗法→加法と演算する順番が決まっていることに相当しています。

これが情報論的に自然で、フラクタル的です。

16. 最重要原理としてのフラクタル性　３つの原理

この体系の中で、あえて、僕が公理として挙げるなら、

１，マクマホンの一意性分解の定理

すべてのリンドン列は「素リンドン列」（長さすべての自然数の列を含む）へと分解される。

２，既約性への縮約写像の一意性

すべてのリンドン列は今ある状態よりも「既約」なリンドン列への一意的な写像を持つ。

３，「非周期列の非周期列」への縮約写像の一意性

すべてのリンドン列は高次の入れ子構造を持っていて、その入れ子構造の中に、「リンドン半群」としての縮約写像を持つ。

このみっつだけです。

複素螺旋連続位相はほとんどこの３つの原理の連続的な反復、すなわち「入れ子構造」でできており、それで完結しています。

特に、リンドン半群に内在する２つの種類の縮約写像、それを《リンドン二重らせん構造》と呼びましょう。

リンドン列が、既約的縮約系列と非周期入れ子的系列を持ち、それらが互いに同型でありつつ、非可換的順序構造を破るとき、このの構文構造をリンドン二重らせんと呼ぶことができるでしょう。

17. 双対リンドン列の存在証明

Duval 分解は左から行います。

しかし、右から行うこともできますね。

気になるのは、ある「素リンドン構造」の逆向きの分解の存在、いわば「双対リンドン列」の存在です。

その存在を証明しましょう。

非周期列はその定義からいって、逆から見ても非周期的である。別の非周期列に分解されるとする。すると、「異なる非周期性」が、同一構造に内在することになり、矛盾。よって、「双対リンドン元は、かならず同じ様に、分解される」、以上。

よって、双対リンドン列は必ず存在する。

このリンドン分解における、「双対リンドン列」は、自然に、「トレース列の逆」を定義していることに注目してください。つまり、“値”を返すとき、「どちらのトレース経路を基準にとっても同じ一般的リーマン面構造へと到達する」ということです。

このことは、リンドン代数構造における、逆元の構造に関係しています。

つまり、今の証明は、「**一般的リーマン面における逆関数の“値”は一意的に存在する**」という証明になっているわけです。

18. あらゆる非可換代数のノルムの一意性の定理

「非周期性の非周期性」として表現されるリンドン列に対して、定義される無限の「螺旋位相」は、「回転」を潰して、「実数値」として解釈することで、一意的にノルム値を定める。

つまり、回転しながら、ちょっとだけ「伸びている」…

定理（非可換回転ノルム）

あらゆるトレース束は、多重に入れ子化された既約リンドン構造を持つが、その全体は、離散的な回転位相と無限小の螺旋的ズレを伴う形で、一意的に実数値のノルムとして縮約される。

$$|x| = (r, \theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times S^1, \quad \theta = \frac{2\pi k}{N},\ k \in \mathbb{Z}_N,\ r = r_0 + \varepsilon.$$

具体的にはは類双対写像の残余構造から生じる。無限小のズレ εは、トレース束の閉じきらない螺旋変形を表している。したがって、トレース束は非可換で無限に入れ子化されているにもかかわらず、その縮約されたノルムは、離散的な回転と微小な螺旋拡張を伴って一意に決定される

たぶん、この定理を読んで、「入れ子が回転」であることを疑うひとはいないかと。

デカルト螺旋…

19. 読むときの注意

基本的に、いちばん、使われるのは、「素リンドン」が発散的に復元されたときには、「ゼロ点」へと返っていくという構造です。

　このために、ゼータ関数は、「オイラー積（素数構造）」と「ゼロ点積（ゼロ点構造）」という２つの表現形態を持っています。
　この構造的移り変わりさえ認識していけば、あとは、「既約有理リンドン」の理論が時々利用されるだけで、「実数リンドン」の領域に至ってはほとんど未開拓の領域です。「他周期的フラクタル」であり、「簡単にはほどけない」つまり、「非可換の縮約法しか存在しない」という、いわば「モジュラー性の非可換性」が問題となる領域であるということです。それは非常に難しい問題をはらんでいますので、僕にも一望できていないです。
　最後に、類双対変換 $u\hat{}p\rightarrow e\hat{}-s\log p$は、曼荼羅核における最も純粋な螺旋の架け橋です。
　べき乗構造、対数位相、そしてゼータの非可換解析接続をひとつに結びつけている。
　「無限次元の代数閉体……」

第一章　動的変容の理論における、類双対写像の、数理的対象への応用の基礎構造（入門編）

この論考は、リーマンゼータを扱った以前の論考（『フラクタルを変形する類双対変形とゼータ的構造体への生成論的アプローチ―類双対的発散写像によるグラフゼータからの生成論的なリーマンゼータの変形やそれらのゼロ点の構成―）で、あえて明示しなかった概念構造を、身近な数学例に適用することで、より分かりやすく説明することを目的としています。

つまり、これは理論の入門編でありつつ、同時に応用編でもあります。

さらに、さまざまな分野で関心を集める理論とのつながりや、未解決の予想にも触れていきますので、ぜひ楽しみにしていてください。

また、注意として、本論考では、明示的な式や変換が一見示されない箇所があります。しかしこれは、グラフそのものが実は関数構造を内包しているという驚きの構造を反映しており、むしろ伊原ゼータのように“明示式”として現れる方が、稀有な例外であることを示しています。

言い換えれば、この理論では、式を書く前に“構造”がすでに存在し、その構造の側から、後に解析的な表現が“導かれる”のです。

本論考では、結果として、“多重リーマン面の自然的解析接続の一意性”が、トレース構造の双対モチーフ閉包により、構成的に導出されていることが分かります。

この一意性定理は、複素関数論における解析接続の幾何的意味を、グラフ理論と再帰的復元の観点から再定義する可能性を示唆していると考えられます。

本論では、リーマンゼータ関数の発散構造を生成的に記述する枠組みとして、トレース系列と類双対写像を導入し、ゼロ点構造の生成的記述を試みます。自然に「こうだ」と考えられるものを作っていくということです。

なかでも、「多重リーマン面の一意定理」は、解析接続の空間的意味を構成的に定義しなおすものであり、臨界線の幾何的接続性が、発散系列の内部から到達されることを示唆しています。

論旨がわかりにくい人は以下のポイントに注意してください。

一般的リーマン面の構成理論をグラフ理論的に記述し、その発散的復元とグラフモチーフ的生成原理を探ることが、主要目的であること。

この枠組みを通じて、素リンドン列を用いた非周期的生成因子の階層を定義し、その生成因子数をリーマン面の種数と同値に対応させることで、グラフ多様体としての多重リーマン面が（解読されたリンドン語連続位相によって）複素平面上へ解析接続される位相構造を明らかにする。

本理論において、リンドン列は複素平面への解析接続に自然な位相を付与する役割 を果たすので、そのつもりで読めば、よりわかりやすいと思います。

1. 「非周期的項の分類」、関数値のゼロ点、有理点、実数点、複素数点、超越数点の意味

まず、グラフ構造があるとしましょう。

そこに、トレースを取ることができます。そのトレースには、有限の場合も無限の場合もありますが、ここでは、無限の場合に限って考えます。

そして、そのトレース経路には、グラフがループをなしている場合には、ぐるぐるとまわって、「周期的項」として、無限反復部分が現れます。

すると、その無限反復部分を、「ループ構造へと復元」してもいいし、「ツリー構造へと解体」してもいいのです。

一言で言えば、ループ構造をツリー構造へと変形し、ツリー構想をループ構造へと復元するという、ただそれだけの変換なのです。たとえば、因数分解と無限級数。積分と微分。ループ型グラフとツリー型グラフ。など、多数の場所で現れるし、それを繋いでいるのが、「トレース束」です。

「トレース束」とは、簡単に言うと、可能なあらゆる「トレース経路」を辿ったものをすべて集めたもの、です。

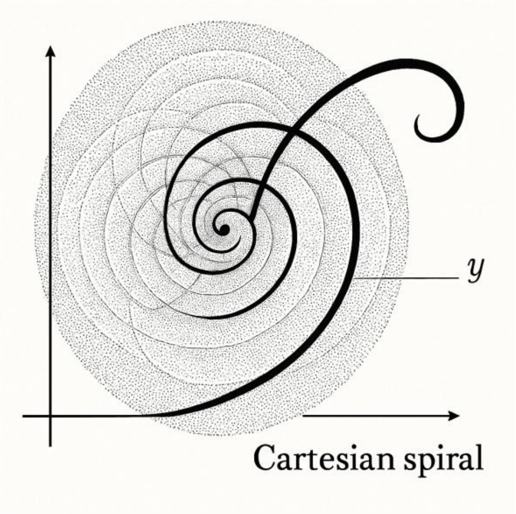
この類双対写像は、基本的に非可換の写像であって、多値的でもあります。つまり、いったん「トレース束」（いわば量子的状態）へと展開し、それを復元するという過程を経るのですが、そのときに、「いろんな復元方法」が出てくるのです。このなかでも、「発散型復元」、非自明な「類双対的発散ゼータ拡大」が重要です。

詳しくは、僕の、「リーマンゼータ」についての論考を読んでください。

ここでは、基本的に、「無限反復をループ化ツリーへと復元する」と思っておいてください。

　これが、類双対写像の基本であり、無限同心円とデカルト螺旋を描いた図式で、表現されます。この図の中で、その円と螺旋の交点によって、切り分けられ、それぞれの領域が一対一対応をしていることが観察できるでしょう。この理論は、「カントール」の理論の延長線上に考えられるということです。

図１．基本類双対写像



　上の図を見てください。同心円が「べき乗的に広がっている」ときに、デカルト螺旋も同じようにべき乗的に広がっていって、それぞれが切り取られながら、「一対一対応」します。このとき、無限同心円はある倍写像があるのに、デカルト螺旋には無限スケール、あるいはスケールなしのフラクタルであることが注目ポイントです。

　ここから、「非周期項」というものを考えます。

　非周期項というのは、どういうものかといえば、「要素の反復を含まない」ので、これ以上縮約して縮めることができないという状態です。でなければ、「ループを復元する」といっても、「非常に長いループ」を復元して、元通りということにならないかもしれないですよね。しかし、実は、ちゃんと復元しようとする試みですら、多値的復元性を含んでいて、それは、とても重要な性質を持っているんです。それを、リーマンゼータの論考では、「非周期的項の類双対的発散的復元ゼータ拡大」と呼びました。

　そして、その「非周期的項」はさらに縮約できて、「素リンドン（非周期項）」の状態まで縮約されるというのが、マクマホンの定理。

　つまり、あらゆる「非周期的な項は“素”なリンドン語によって一意に分解される」という驚きの定理であります。

　このことによって、花束グラフからの復元が、自然に、「すべての自然数の素数の長さのループ構造を持つグラフ」まで拡大され、またその領域へと収縮していくというのを、「ゼータ拡大」としてみることができて、これを僕は、「オイラー積のホログラム・フラクタル的復元性」と呼んだのでした。

　さて、唐突ですが、重要なことですが、発散的に復元される「非周期項」の分類をまず上げて、それによって、あとの論考でそれを利用していきますが、唐突な定義だと感じられるかもしれません。その意味は、「ゼータ拡大」の論考にも載っていますし、これからの文章でも説明されるので、その２つを比べて読んでもらえるといいと思います。

　まず、「素リンドン元」の発散的復元は、関数の「ゼロ点」に対応する。

　これは、以前の「リーマンゼータ」についての論考において、もっとも重要な事実として利用されたものです。

　次に、非周期的項であるが、「N縮約可能な非周期的項」、つまり非周期的なんですが、素リンドン分解できるものは、「（既約）有理数へと返っていく」。これが、驚くべき事実なのであります。「素リンドン」に分解された構造の中にある「既約」な反復が、「素数の長さ」を持つ「素リンドン」元の集まりである整数を、その「素」な周期数で割るわけです。すると、有理数になる。

　さらに、非周期的項でも、「複数の縮約が存在している非周期的項」があります。たとえば、ルートをルートで囲うイメージがわかりやすいです。こういう非周期的項は、実数へと返っていきます。

　これについてもうすこし説明すると、まず、マクマホンの定理によって「素リンドン」に分解されたリンドン列は、必ず一意的に「既約有理リンドン」の列へと縮約されます。すると、同じように有理数のときに考えたような「素」の反復を考えることができて、「素既約有理リンドン」の「素」な反復で、「累乗根」します。そして、そのように「累乗根」されたリンドン列は、一意的に、「累乗根」の世界へと縮約されて今度もまた、またマクマホンの定理によって、「素累乗根リンドン」へと分解され、同じように「累乗根」を掛けられ、これが無限に続きます。

　この構造において重要なのは、これは「複数周期を持つフラクタル」の入れ子構造であると思われることです。これが「ルートの多値性」として、あるいは、「多乗根（√）の入れ子構造は基本的に外れない」ということと比較してみてください。イメージが明確になるでしょう。非周期項がフラクタル的というのは不思議です。

　このとき、スケールが上がるに従って、「細かくなっていっている」ことに注意してください。

　そして、非周期的項で、「どのように縮約しようとも素リンドン元」へと縮約していかないもの、これが超越数です。（超越数論については別の論考を用意しているので、楽しみにしておいてください。）

　これらが、「グラフのトレース列に混在している」という様子から、あらゆるグラフは、「部分集合の集合」を取るような、カントール的非構成的原理によって生成されている、と言う驚きの事実が理解されるわけです。

　たぶん、「こいつはなにをいっているんだ…」と思われるかもしれません。

だから、今から書いていくのは、これを、誰でも知っていそうな例へと適用して具体例を形成していくことでしょう。
だから、まず、一般のＮ次方程式を考えてみるところから始め、代数学の基本定理の中に内在するガロア理論の構造も考えてみます。

図 2. 非周期項の復元

核心定理（生成論）

- **非周期的項の階層**
  - **ゼロ点**：完全縮約された素リンドン列
  - **有理点**：有限階層で縮約可能な非周期列
  - **実数**：多重縮約可能な非周期列（内部に無限擬似周期性）
  - **超越数**：最大限に縮約不能な非周期列
- **命題**：
  「任意の関数値は、非周期的トレース項の構造的復元によって一意に決まる」

ここで、関数の値を決めるのは級数ではなく、
非正則グラフ上の素経路（素リンドン）の階層縮約である

さて、これを読んだひとは、「え？複素数は？」と思ったことでしょう。
この上で言いますが、さらに、非周期的項には、「多重非周期的項」も考えられます。「非周期的項」の並びが、さらに「非周期的」に並んでいて、これが「無限反復」している。この「非周期的項の入れ子」において、「非周期的項の構造」自体は異なっていてもいいのです。
もうすこし言い換えると、「非周期項」の入れ子構造自体が「非周期項」であるから、これは、「非周期項」を半群的に並べた構造になります。つまり、これは、マクマホンの定理によって一意的に「素非周期項」へと分解され、実数構造を高次に内包させます。
これが、複素数であると考えられます。なお、この理論における非周期性の多重性は、複素構造や位相的回転対称性との関係を示唆し、おそらく、一のＮ乗根との関係が示唆されますが、これは今後の検討課題として、あとで予想だけ残しておきましょう。
なお、この節で述べた非周期性の概念は、一見抽象に見えるかもしれないが、もし理解が難しい場合は、ユークリッドによる素数の無限性の証明に潜む『非周期構造』を思い出していただきたいです。「周期がズレて返ってこれなくなって、無限に至る」んですね。
あの無限性のなかの非周期性こそが、ここでいう非周期列の最も基本的なイメージの核を支えています。
最後に、《リンドン半群から複素平面への位相化の予想》を書き出します。

《階層的非周期入れ子構造の連続螺旋複素位相化予想（リンドン半群構造予想）》

素リンドン列の組み合わせは、自然数的構造を与え、その反復構造が有理数的縮約構造を生む。その縮約反復のフラクタル入れ子構造による累乗根化が無理数的実数構造を生成し、これらの階層的入れ子がさらに非周期的に組み合わさると、階層順序が位相的「回転」として、入れ子の中の実数構造によってパラメータ付けられ、２次元的（複素平面）・螺旋的に閉じる。
したがって、入れ子の無限階層は複素数平面上の回転群に束ねられ、最終的に有限の位相空間（複素平面）として閉じる。

この構造予想が、自然に、「複素平面の螺旋形の重なり」を生み出していて、log 関数の多値性を自然に説明していることに注目してください。かりに、この写像が「一意」でなくても、この構造と類似の、位相構造が存在することが分かります。
もう一度いいますと、リンドン半群の入れ子構造は、その階層を、整数、有理数、実数と上げていくが、それ以上に入れ子構造が進むと、回転状態になり、入れ子の重なりはまたこの階層を登っていって、一巡すると同じ複素平面を回っていく。
よって、複素平面は、本質的に螺旋形の形をしていて、これが、log 関数の多値性の根源であると思われます。これについては、後でも分析します。
あとは、連続位相を入れてみますが、「こうやれば連続位相になりますが、これが正しい」かどうかはわかりません。他のも連続位相の入れ方があるかもしれないが、これで、「連続性」が成立する、トレース束の多様体を構成できます。

《確定的リンドン連続複素螺旋位相》
これはリンドン列の“長さ”を基本的に位相として見なして、そこから、有理数、実数、複素数と多重入れ子構造を作っていくうちに「細かく刻まれていく」状態を連続位相として見なすやり方です。
また、この構造は多重リーマン面の螺旋的多価構造と一致し、複素平面を覆う連続的被覆として振る舞います。

以下の議論ではほとんどこの連続位相で論じますので、混同しないように注意してください。じっさい、僕はしょっちゅう混同します。自分で利用しているときには間違っていないのに、不思議です。こちらの「連続位相」は使いやすいし全くズレがない上に、ごく自然な見方の様々な展開を許します。
この「リンドン半群」の自然な縮約構造による無限の入れ子構造と「マクマホンの定理による一意的分解」の構造の連続を、「リンドン半群の入れ子性定理」とでも呼べましょう。この構造をよく考えてみると、そのまま、マクマホンの定理の証明にもなっています。

《リンドン半群の入れ子性定理》

リンドン半群は「素」な反復を考えることによって、自然な既約有理数を生み、また、その既約有理数への自然な縮約を通じて、さらにマクマホンの定理を使って分解し、さらにそれを累乗根によって細かくし、という無限マクマホン入れ子構造を持っている上に、さらに、その高次元でも、「非周期列」の非周期列という、さらなる別の「リンドン半群」を持っており、これが同じように「実数の位相」すなわち、無限の入れ子構造を持っていることから、複素平面への回転を規定することができる。

この構造定理には、「続き」があることは明らかだろう、というのは、複素数まで縮約された半群にも「非周期列の非周期列」という高次のリンドン半群があって、これはおそらく「四元数」に対応しています。

素リンドン列の縮約構造：自然数 → 有理数 → 実数

非周期列の回転射影：arg による複素射影（ℂ）

非周期列の非周期的入れ子：多軸的回転 ⇒ 非可換性 ⇒ 四元数構造（ℍ）

さらにその階層構造の入れ子：入れ子自体が入れ子になる ⇒ 構造が発散

これにより、構造は、

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset ???$$

僕が分かるのは、次第に、壊れていくということだけです。

ここで気をつけないといけないのは、「一見するとN進法的に読めるが、複素螺旋位相構造の本質ではない」のと比較で「長さ位相の自然さ」が示されますので、そこを読んでくださるか、「応用編」を予定してますので、そちらでも解説する予定であります。

「進法順序は辞書順と形は似ているが、本質は“軌道の長さ”にある」

リンドン語の「ひとつの解読法」であると思っていただけたら、幸いで、これが異なっていたら面白いし、これが異なっていても、以下の議論が成立することにも注目することができるでしょう。多重リーマン面については後で説明と証明をしますので、すみません。

2. １の補遺、既約リンドン元の既約有理数の同値類、回転理論、Ｐ進グラフ多様体

ここでは、1において、書いた「N縮約の非周期列って、どうして有理数だと分かるの？」という点を中心に解説してみようと思います。

N縮約される「中心核」にある反復されているリンドン列には、長さがA、B、Cという素数の長さのものがあるとしましょう。すると、N縮約されるリンドン列は必ず、その長さが、A、B、Cの倍数になっています。よって、縮約可能なんですね。

そのために、最終的には、N 縮約可能な反復リンドン列は、中心にある「中心核」に含まれているどの長さのリンドン列の長さとも、その「反復数の数」が「互いに素」の状態にまで縮約されます。つまり、これは、まさに、「既約分数」です。面白いですね。

ここで、僕は、「非周期列の非周期列という入れ子状の反復は、複素数における回転であるという示唆を行いましたが、なぜそれが一のN乗根であるかを説明してみましょう。

「素構造が二」の場合には、ようやく、実軸の「負」の状態へと回転しますね。そして、２つ目の入れ子でまた、実軸へと戻ってきます。つまり、「実の整数」というのは、このような「素構造２つ」の状態で作られるということになります。

このことは、リーマンゼータ関数において、「素構造が無限大」のときに、素構造の長さがほとんど素数であり、奇数であるために、「負の実軸」には実は到達しない。

つまり、負の実軸にのみ、「リーマンゼータの反転対称性」の完全な破れが起こっている事実と対応しているのです。

これはリーマンの式では、サイン関数で補充されている部分ですね。

奇素数の場合には、どのように、圧倒的な大きさになっても、この「負の実軸上の点」へと到達しません。

これによって、「回転レベルは、素構造「非周期列」の「非周期列的入れ子構造」の数の、一のN乗根的角度である可能性」が圧倒的に高まりました。任意の$\zeta(s)$の実軸上の構造的不連続性・発散性は、リンドン系列の素因数的回転角度構造と整合的であり、他の生成原理では一貫した説明が困難であるため、この回転理論を導入することが、唯一合理的な再構成法であると思われます。

つまり、リーマンゼータの実軸上の非対称構造を説明する構成だということです。

これについて、詳しいことを知りたい方は、僕の「リーマンゼータ」についての論考を読んでください。

以下は、簡単な、このリンドン列に対する「類双対写像」の定義より、グラフ多様体を、局所体へと分解していく、方法について述べてみます。

グラフ多様体は、連続位相を入れることによって、「グラフ多様体」としての姿を表しました。

この構造を壊さないように、ある「素数の長さ P」の要素だけ取り除く、あるいは、固定して他の部分を眺める、ということを「類双対写像」として定義します。

すると、「素リンドン構造」が残るようになって、このとき、「素数 P」（あるいは素構造 N）によるグラフ多様体の「剰余体」つまり、「P 進グラフ多様体」が構成されることが分かります。これにも、自然に連続位相が入っていることに注意してください。

3. 代数学の基本定理とガロア理論と、トレース束理論の対応

以上のように、グラフの構造が、「関数値の構造」を、トレース束として、構成しているという見地は、関数の実数までの完備化と同時に、解析接続の一意性まで示していて、

つまり、これ自体が、解析接続という言葉の意味自体であって、それの伊原ゼータによる行列式表現はむしろそれに付随する表現論の問題である、というのが、明らかになっていますが、それについては後に回します。

そこで、ごく単純な、２つのループを持つ円環グラフのことを考えてみましょう。

２つの円が一つの点でくっついている…というイメージで十分です。

このグラフを考えてみるに、「ループしかないのにどこに非周期的項の無限反復があるの？」と疑問に思うでしょう。しかし、あるループを０、あるループを１と表現すると、その回る順番は、０と１の順序付き集合で表せることが分かります。

あれ、なんと、この順序付き集合の中には、「長さＮの非周期的集合が存在する」それどころか、「あらゆる周期的反復を持たない無限非周期項が存在する」ということが分かりますね。たった２つの「素構造」だけで、「実数的な完備化」が生じるのです。そして、方向性のないループであれば、「表と裏」という、２つの回り方があるので、つまり、「素構造は２つ」つまり、ある円環構造があれば、「長さがＮの非周期的項の∞反復が存在し、それを復元するグラフ構造が存在する」ということが分かるのです。

これが、「類双対的発散ゼータ拡大」と呼ばれる、特殊で非自明な、「類双対写像」であって、これが、「ゼロ点集合」という、復元を生むのです。

とすると、ループが２つあるグラフは、このような発散型類双対写像で、どんどん拡大していって、正則条件のもとでは、「すべての素数の長さの経路を持つ円環ループ」へと拡大していくことが示されます（これは「ゼータ」についての論考で書かれています）ので、「二次方程式の解って発散するの？」と思うでしょう。

ここで、ガロア理論的発想が必要になってきます。

ガロア理論では、「解を入れ替えます」。つまり、「素要素（や素リンドン）」の要素を入れ替えます。このとき、素構造や素リンドン構造は、この入れ替えによって、「分解」されてしまいます。

つまり、２つのループを持つグラフの「トレース束」があります。

ここに、「トレースの要素を入れ替える」群オイドを導入します。

すると、ほとんどの「素リンドン」構造は、分解されてしまって、拡大は止まってしまいます。そして、この結果、「要素が２つの素リンドン構造へと常に縮約される」…これが二次方程式の解の構造であって、「ゼロ点」の構造です。そして、この縮約のときに、行く道と帰る道の往復路を接続可能なことから、この「ゼロ点の解の対称性」が理解できます。

この「ガロア群的群オイド」は、トレース束を構成する「素構造」の数が増加するたびに、「素リンドン」構造の多様性をＮ！の大きさで拡大していきます。つまり、ガロア群の拡大性ですね。そして、この素リンドンが、素数による順序的な縮約が可能であること、これがガロア群による、方程式が解けるかどうかの「可解性」の条件でした。つまり、ト

レースに、「要素を入れ替える」操作によって、素リンドンが破壊されていく、ということが、方程式が解けるということの意味であることが分かります。

そして、一般のN次方程式におけるガウスの基本定理「代数学の基本定理」は今や明瞭な見通しを持って述べることができるようになります。

つまり、N個のループ構造を持つグラフの「トレース束」にN次の群オイド（要素を入れ替える操作）を導入して、その発散的復元を見ると、その素リンドン構造は、「有限生成」で、N個の素リンドン元で縮約される、これが代数学の基本定理の意味です。

そして、この素リンドン元には、その数に応じた対称性があって、それが「共役元」であることも分かります。

ガロア理論における既約多項式の「解の添加」とは「トレース束」の類双対的変形拡大として定式化可能ですが、これはこの論考の主題ではありません。

a，多項式の根は素リンドン系列として表される。

b，ガロア群の作用 = トレース列の素構造の入れ替え。

c，根の数が有限に閉じるのは、非周期列の縮約性による。

4. 3の補遺　ヴェイユ型のゼータ関数のラマヌジャン性への帰着

僕はこれを書いてから、ふと、あとで、「ここで書いた僕のガロア群の作用は、いわゆる巡回群的フロベニウス写像のことなんでは…」というふうに思ったのです。

つまり、「トレースの素要素を入れ替えて、素要素の数が拡大しすぎないように制御する、僕のガロア的作用」は完全にフロベニウス写像、

図 3. フロベニウス写像

フロベニウス写像とは何か

有限体上では、フロベニウスは元を冪乗で写す自己同型写像。

その繰り返しが有限体拡大のガロア群を生成する。

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) = \langle \mathrm{Frob} \rangle.$$

これそのものなんですね。

つまり、花束グラフの拡大を制御して、けっきょく、その変形は、非周期的項をいくつかに「有限的」に分解するだけであるので、「正則グラフにおけるラマヌジャン性を持つ伊原ゼータのゼロ点は、二分の一臨界領域（あるいは変換前は円環状に）にゼロ点を持つ」というように、リーマンゼータ類似の構造的問題は解けているんです。

わかりにくいひとのために、もうすこし段階を踏んで書いてみましょう。

無限トレース束（素リンドン螺旋）は本質的に発散的なので、N次方程式を考えるために僕は「トレース束の要素を入れ替えて非周期項の長さを制限する」類双対写像を缶が得

ました。それは、結局のところ、Ｎ個の要素をどう入れ替えるかのＮ！個の作用の集まりなんで、フロベニウスと同型であり、要するに、フロベニウスはそれを巡回群的に束ねる作用素です。

そういうわけで、類双対写像で生成核を動的に展開した螺旋を、フロベニウスが有限の閉軌道構造に収束させます。ガロア群としての作用と全く同型なのは正則だからなんでしょう。フロベニウスは単なる写像ではなく、生成核を巡回置換する群作用として働きます。だから、有限体の閉軌道構造 ＝ ガロア群の巡回性 ＝ フロベニウス巡回はすべて同じ。

結果、臨界線の状況とラマヌジャン性は自然に導き出されます。

フロベニウスによって発散ゼータ拡大はラマヌジャン型の正則グラフに縮約されますので、「類双対的変換」、

図 4 類双対変換

$$u^p \mapsto e^{-s \log p}$$

によって、**有限の**リーマンゼータの場合に帰着し、そのスペクトル構造がリーマンゼータの臨界線条件と一致します。

一文でまとめると、「**フロベニウス写像は、無限トレース束に秩序を与えるガロア群作用であり、発散的ゼータ構造を有限体的ラマヌジャン型構造に縮約し、臨界線の整列を保証する有限の作用素である。**」なので、ヴェイユ型のゼータの問題は、もうすでに議論の枠内で処理されていると言えるわけです。

つまり、リーマンゼータを構成していく発散的類双対ゼータ拡大の問題において、ヴェイユ型はそれが有限の場合に収まる特殊な場合であることが明らかになったという理由です。

フロベニウスによる巡回群作用の位数が素数でないとき、素リンドン構造は部分軌道に分割され、トレース束内にゼロ元が発生して螺旋ループが破壊される。これが発散ゼータ秩序化の破壊条件であり、臨界線条件の幾何的説明の一例である、ということもわかるので、一応、補足の最後に書いておきます。

5.　非正則の場合、楕円曲線の、トレース束の構造理論とモーデルの定理

一般のＮ次方程式の場合、正則円環グラフで、Ｎ個の円環を持つループ構造からの発散的類双対変形を、ガロア群的群オイド、つまり要素を入れ替える操作で制限することで得られました。この「要素を入れ替える操作」自体が、「類双対写像」であることも一応注意しておきます。

さて、楕円曲線のような非正則の場合にはどうなるのか？

たとえば、２つのループがあって、そのうち、一つのループが、真ん中でもう一つの経路で繋がれているグラフ構造を考えます。これは、そのつながりの部分で、「グラフ的非

正則」になりますね。つまり、グラフのつながりの構造が「一様」ではなくなるということです。逆に言えば、「一様」な部分と「そうじゃない」部分がある。

このグラフは一見ループは、「３つ」あるように見えますが、実は無限個あります。

というのは、先程の「非周期性」の問題と同じです。

分断された一つのループ経路のどちらかを通るかを、「０，１」で表記すると、ループは、非周期元によって、「無限の素経路」を生み出します。

ここに、群オイド、つまり素要素を入れ替える操作を導入して、三次方程式を解くようにすると、この無限の素要素は、実はグラフ構造のせいで「完全」ではないことに気づくでしょう。

つまり、「無限個の素要素から作られるだろう素リンドン」という非周期的項を集めたトレース束を「完備集合」と呼びますと、そのような「完備性」とは程遠い密度の集合になります。しかし、三次方程式の解が３つあるように、素リンドン分解は、３つになって、「ゼロ点は３つ」である。そして、「非周期的項」の構造が、完備状態からその分薄くなってしまったので、「Ｎ縮約の素リンドン元」を分析してみると、それは、「有限の数の非周期的項によって完全に統制されている」ということが、「完備性」よりもトレース束が薄い状態であるところから言えるのです。

つまり、「素構造が無限にあるときには完備の非周期的項の構造」が、楕円グラフから作られる「非周期的項」は、完備状態よりも制限されていることが示せるので、「無限」にはならず、「有限で収まる」というわけです。

つまり、「有理数点は有限生成である」というモーデルの定理ですね。

これが、トレース束の類双対理論によって示された、モーデルの定理の意味です。

もう少し補足をすると、種数一のグラフ多様体（後で説明します）では、「非周期列の生成因子が２つ、つまり『種数+１』」なので、双対となる経路があります。「非周期列のどっちから行くか」で二パターンの行き方があって、交換できるということです。これが、「多重トレース」（後で説明する）において、有理リンドン（有理点）が無限に生成される理由であって、同時に、ここでは、その「有限生成」を制限付けている原理が加わります。つまり、「無限にあるけど、有限個の点による反復に過ぎない」ということが、リンドン構造の分析から言えるのです。

ついでにいうと、このような「双対経路」が存在しない種数２以上のグラフ多様体において、モーデルファルティングスの定理が成り立つ理由であります。

ここで、多少大胆な予想をしておきますと、いま述べた構造のグラフの「双対モチーフ閉包」を行い、また、発散的類双対的拡大を行っていきますと、その系列の中には、すべての「種数一」の楕円曲線のグラフが含まれるであろう。

そういう予想です。

こういうように、けっきょく、「要素を入れ替える」という操作は、それぞれの素経路の中の限定によって制限されることになりますので、「一般方程式への変形」と「ゼータ

関数への変形」というのが分岐されているのも、「類双対変形」における注目ポイントであると思います。

この変形操作すべてが作り出す「類双対閉包」こそが、僕が求めているその壮大な姿なのです。

定理（素リンドン的モーデル定理）

楕円曲線に対応する非正則グラフにおいて、そのトレース経路上に現れる有理点構造は、完備素リンドン系列には含まれず、疑似周期的再帰列として無限に現れるが、その全体は素リンドン分解系により有限生成される。

あとは、まとめです。

a, 楕円曲線は素経路の重なりにより非周期構造を無限に持つ。

b. しかし、その中で縮約可能な部分（N 縮約列）が有理点を与える。

c, この有限性がモーデルの定理と一致。

6. モジュラー理論と宇宙際タイヒミュラー理論の誤差項の再解釈

さて、グラフは関数であるということの意味は、グラフから「伊原ゼータ」が構成できるというだけの意味ではなく、グラフに適当な、「類双対的変換」を施していくと、N次方程式などの構造をも現れてくるということで、現れてくるのです。

この一般的操作が「非正則状態」をも自然に扱うことができるというのを、先程の楕円曲線の場合でもいちおう、示されたと見ておきます。

ここでは、既存の概念を、さらに、この「類双対変形とトレース束」という観点で見直していくことで、理解できることを書いてみます。

最初にゼロ点を素リンドンの復元としてみて、また、有理点を「N縮約な非周期的項」としてみて、関数の有理点の理論も、構成論的に扱えることを見ました。

さて、「N縮約な非周期的項」を「素リンドン」へと縮約する操作は、これ自体もたしかに、「類双対写像」ですが、これはどういう意味を持っているのか？

これがいわゆる、モジュラー群であると思われます。

つまり、縮約の方法には無限性と有限性があって、また、対称性があります。

これがモジュラーとして表現されているんですね。

つまり、いわば有理数的非周期的項（有理リンドン）からゼロ点的非周期的項（素リンドン）への「縮約」写像です。これは別の論考で扱うので楽しみにしておいてください。

これは、有限的な階層をもっていて、たとえば、実数的な存在の非周期的項から、次第に有理数的非周期的項へと縮約していくという列を持っているでしょう。

こうやって、「発散型類双対写像」と「縮約写像」の適用によって、いわゆる「素リンドン」構造は、規定されていて、ここから、「マクマホンの定理」（素リンドン列は一意

的に分解されるという半群における基礎定理）のいう、「素リンドンの分解の一意性」が導き出されることも注意してください。類双対写像的な、「素リンドン構造の構成」と言ってもいいでしょう。

　さらに、僕は、この「発散的類双対写像」が、通常の「無限の素構造」から「素リンドン構造という半群構造」を取り出したこと、これを逆に考えますと、

半群構造　→　素数構造　→

　という「log スケーリングによる」縮約構造を見ることができます。

　もうすこし付け加えて言えば、僕の論考では、

素リンドン半群 → log変換 → 素数構造 → さらにlog変換 → 乗数構造

　この相互の移り変わりを連続的に扱う手法が出てきます。

　これは、僕が書いた「リーマンゼータ」についての論考を見てください。

　僕は、そのような類双対写像における、連続写像的表現として、生成論的「ヒルベルト・ポリヤ」作用素を構成しました。

　つまり、このよくわからない離散的な操作には、連続的にフィットする構造を与えることができたということを意味します。

　このことは次のことを直ちに連想したのです。

　望月新一氏による、宇宙際タイヒミュラー理論の loglogΘ構造では、誤差項の評価が問題になると聞きました。僕は、このようなことが、この類双対写像の問題と一致しているように思われるのです。

　つまり、類双対写像について考えると、「ゼロ点集合（素リンドン元）」と「素数構造」というものが、半群と可換群の構造変形として自然に描かれるのです。これは、同じトレース束がいわば２つの宇宙を包含しているように見える構造であって、おそらく、僕が先程考察した、類双対的モジュラー写像もまた、同じような構造を持っています。

　つまり、宇宙際タイヒミュラー理論の概念の、「類双対写像理論とトレース束の理論」によって、解釈し直す可能性が現れてきたということです。

　細かい内容は、僕の「リーマンゼータ」についての論考を読んで見てくだされば、その構成法が示してありますので、ここでは、触れません。

　以下はまとめです。

モジュラー群 = 縮約操作の対称群

モジュラー性は有限階層の縮約の共変性を意味する。

IUT 誤差項 = 構成論的には非完備な縮約列の残余項

宇宙際比較とは、類双対写像による構造ずれの制御。

7. フラクタル幾何予想

この節では、「もし自然界や数理的現象にフラクタル構造が潜在するとしたら、その構造はどのような基礎的形態（点、線、螺旋、円、波動など）を最小単位として構築されているのか？」ということを論じます。

その理由として、フラクタル構造は無限の入れ子階層を持つが、その階層を構成する最小の「パターン要素」を同定することは、入れ子の性質や縮約可能性を理解する上で決定的に重要であるばかりか、自然構造、数理構造全般を理解するのに役立つからです。。

僕は、「リーマンゼータ」における論考において、「螺旋形復元の難しさ」について書きました。

具体的に言うと、「緩やかな螺旋構造の中を歩いているのと直線状を歩いているのとその中にいる人には区別ができるのか」という問題です。これは、その「中にいる人」が自分の体験から構造を「復元」するときに大きな問題になるでしょう。

僕は、色々考えて、まず、螺旋形は、多数の同心円を束ねているということに気づきました。円というのは、点と双対的であって、だから、多数の点を束ねてもいます。

こう、考えていくと、ひとつのグラフ的復元の形が浮かんできます。

つまり、それは、円環グラフのように見えます。

しかし、ひとつのノード（点）が鎖（円）に置き換わっていて、このことによって、その「円」を通ったという記憶が、トレースの中で、順繰りに記憶されていきます。

このことから、「円」というのは、「点」でも「線」でもないグラフの要素であるということに気づいたのです。実際花束グラフでは、円構造は、「順路も復路も持たない構造」として描かれました。

さて、グラフ構造（つまり関数構造）を決めるさまざまな双対的な要素には何種類あるだろうか？というのが僕のフラクタル幾何的予想の核心です。

《フラクタル幾何予想》

あらゆる類双対変形可能な構造体の構成要素は、点・線・円・螺旋・波動で閉じる

素リンドン系列を核とした非周期構造は、実際にはこれらの基本的幾何形態で完全に生成される

つまり、関数構造の最終的な幾何的「基底」として、無限の非周期列も、最終的には
点（ゼロ点構造）
線（素経路・トレース束）
円（閉じた周期・円環グラフ「でもあり」、鎖でもある）
螺旋（log スケーリングによる発散的接続・円点を持つ）
波動（無限階層の繰り返しによる擬似周期性の重ね合わせ・無限点列を包含しうる）

この５つの要素で描かれるのではないだろうか。フラクタル構造はこれで、構成されているのではないだろうか。

さきほどの、「点・線・円」で作り上げた螺旋形グラフのモデルは、「螺旋」という形態のひとつの「双対形」であって、「螺旋」というのが別個にあると考えたほうが辻褄が合うのです。

本理論に基づけば、任意の関数構造は、トレース束に含まれる素リンドン列の発散構造を log スケーリング（ひとつの類双対写像）で閉包すると、その局所形は必ず「点・線・円・螺旋・波動」の有限な幾何的要素として表現される。これにより、非正則領域におけるあらゆる無限構造も、構成論的に有限生成として記述可能であるということです。

僕の理論では、前の論考で、「非可換構造」を「可換構造」へと変換する類双対写像においては、「無限同心円」→「らせん型展開」→「直線への投影」という方向で進みました。

「順序が壊れるときには直線的投影が起こる」と言えます。

ガンマ関数の「反転公式」を思い出しますね。

「波動」というのはわかりにくいともいますが、僕は、動的変容の理論の一環として、「Ｎ・Ｎ」正則グラフのパズル的作成を行っていた時がありました。このときに、フラクタル性を保つために、よく、直線上の点を巻き取るようには波動状に摘み取るエッジが出てきたことをよく覚えています。

また、僕は「リーマンゼータ」についての論考でも、リーマンジーゲルの「波動項」による接近の分析をしました。

無限基底の近似法として、無限等比級数による近似が「線型近似」であるとすれば、フーリエ近似は「波動型近似」であると言えるでしょう。

それはさておいて、フラクタル幾何的予想の、構造的意味に戻ります。

このことを、２つの例から見てみましょう。

高校生の時に、y=1/x の積分を通して、奇妙な気持ちを味わった人は多いでしょう。

それは、実際に、log 関数の多値性として、あとで勉強するわけです。

y=1/x をみてみると、０のところで、発散的に円形に繋がっており、その円の中をぐるぐると螺旋が巻いていて、その巻いた姿が、積分の中に多値性として現れてくるんだろうと。第一、積分の「不定定数」だっておかしな話です。「この発散は何だ？」と。

しかし、すでに、このとき、すでに、「ゼロ点」が現れていて、さきほど「螺旋形の復元」においては、円環グラフのなかに「円」構造があって、それが円環の中のトレース構造を螺旋形へと持ち上げながら巻き上げると述べました。すでに、その構造が、log の積分の中に現れています。

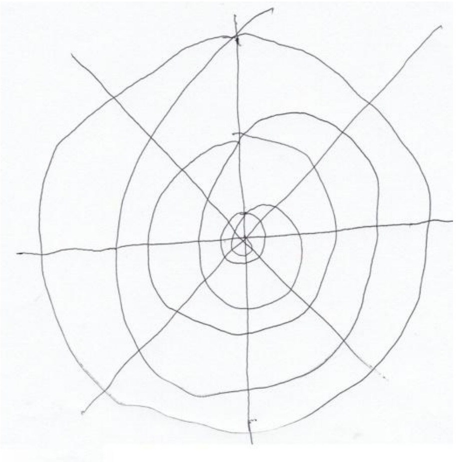
log の多値性を微分積分から解釈して、積分における多値性は、螺旋形の表れと解釈できる、それはゼータ関数のゼロ点状の、多数重ね合わされた同心円構造を螺旋形へと展開するところからも分かる、螺旋形構造のグラフ的表現と重なる…。というわけです。

同じように、僕は、「非可換性を可換性へと移す」類双対写像を、無限に重ね合わされた単位円のなかに一の素数乗根が埋め込まれている状態から、そのひとつひとつをログスケールで螺旋状に展開して、いっきに、直線、いわゆる「臨界線」へと投影するという方法を使いました。このなかで、波動以外のすべてが作用していることが印象的です。

僕が log 関数のリーマン面グラフを、円環状になって、ひとつの「ゼロ」（円）で繋いでいるのはそういうわけなのです。

リーマンゼータの、X=1 の極は、そのような、無限同心円や無限螺旋を巻き取る点として働いていることは明瞭です。だから、ここだけ、「対称性の破れ」が起こっているんです。

図 6 フラクタル構造の重ね合わせ



上の図は、点、直線、円、螺旋を組み合わせたものです。たとえば、螺旋を波打たせると、波動が入ってきますが、このとき、「フラクタル性」は維持されます。つまり、類双対的です。

フラクタル性は希薄ですが、どれも「線」と「円」の操作で統一できる例を上げてみますと、

八の字：線を交差させて作った 1 次元的構造を曲率的に結んだもの。

メビウス：1 本の線分（帯）を捻じって円環にしたもの。

トーラス：円（一次元円周）を回転させて円環状にするだけ。

クラインの壺：円環をもう一度円に沿って貼り合わせるような操作で作成。

…基本要素に分解できることが分かります。

8. グラフ的リーマン面

「グラフは関数である」ということを説明してきましたし、それを、どのように関数化するかの例は、伊原ゼータの例、また僕がこの論考で書いた、「ガロア群」（トレースの中の要素を入れ替える写像）を利用する方法などで示しました。

つまり、僕は、このとき、「グラフ的リーマン面の構造」が現れていると見ているのです。

このとき、正則構造はほとんど「円環の連なり」でできていて、構造が一様なのに、楕円曲線になるとグラフ構造に急に変調が出てきて、発散的類双対写像による「素リンドン」復元をしなくても、「素構造」自体が無限へと発散しました。

非正則というのは、有限グラフの中に、一様でないものが入り込んだ結果の、「素構造」の無限分岐構造である、と言えるでしょう。

ただ、僕は、いまだに、この「グラフ的リーマン面」を、「最初からどういうものだろうと見当がつくもの」から取っていて、生成論的に構成されるものとして扱うことができていません。

ある関数があったら、そこから自動的に、生成論的に、リーマン面が次第に出てきて、それがグラフ型の中に収まり、あらゆる「正則構造」と「非正則構造」を表す、という生成原理を理解していないのです。

発散的「非リンドン元」の類双対写像による復元で、作られるだろうものを「グラフ多様体」と呼びましょう。この多様体は、あらゆる関数の「値」を示しています。このとき、非正則の状況では、グラフ型や「トレース束」構造が変化し、つまり、グラフ多様体の中に、構造的分岐が生じることが想定されます。

こういうことをある有限の閉じられたグラフ構造の集まりなどで構築可能なのか…これが、グラフ的リーマン面の問題でしょう。

ここでは、「グラフのモチーフ閉包」が重要な定式化を担うだろうと思われ、特に「有向辺」付きグラフの、「モチーフ閉包」の理論が重要になるでしょう。というのは、トレース束は、ほとんど順序がついている構造をしているからです。

さらに、重要な予想、というか、部分的には確認できる予想を述べましょう。

いま、僕は、「グラフは関数である」と述べました。そして、「値」の出し方も書きました。でも、「関数ってある値とある値を対応させるんじゃないの？」と思った人もあるでしょう。

この仕組みを述べるのが以下の《多重リーマン面の一意定理》です。

定理

任意の多重リーマン面は、対応するトレース列の双対モチーフ閉包により一意的に決まる。

その内容を述べましょう。

グラフ構造には、「点と線を入れ替える」という双対操作があります。「正則」条件では、この双対構造は、一意的です。つまり、あるグラフの「関数の値」とそれと双対なグラフの「関数の値」が対応しますね。

そして、非正則のときには、グラフ構造が多値化して、そこを「値」が同期してトレースするので、「多重トレース」が発生します。これが、「関数の多価性」です。

つまり、**双対操作によって変化した「トレース」束構造、が関数の対応を決めています。**

これが、解析関数です。

そして、さきほども述べたとおり、非正則グラフの場合には、この「双対操作」には多値性が出て、「双対モチーフ閉包」という、「グラフを集合にしてまとめた圏」を作り上げます。つまり、「関数値は、多値性・複数性をはらむ」。

Log の場合を考えてください。Log のグラフが円環だったら、双対操作をとっても、変わりませんね。円環はもっともキレイな正則グラフです。だから、「円」という対称性の破壊が必要なんで、これで、双対操作によって「無限に発散する」、これが、log の無限多値性の原理です。

そして、このことは、解析関数が「多重に存在するグラフ面の中で自然に一意的に接続されている」ということを示しています。なんと美しい定理でしょうか。無限に枝分かれしているように見える構造が、一つの生成原理で完全に記述できる多重リーマン面は外から「貼り合わせる」必要がない。なぜなら、グラフ関数面、つまり複数のグラフ多様体の中のトレース列は同期しながらつながっているからです。

その同期構造の中に、すでにトレース構造の中に内在しています。

簡単な証明だけ。

１、それぞれのグラフの値は、発散的復元の中に連続的に埋め込まれている

２、それぞれのグラフのトレース束は、モチーフ閉包の中で、完全に同期している

３、よって、関数の動きは、この２つによって完全にリーマン面の内部構造を一意化している

さて、僕は、リンドン半群の「複素螺旋連続位相」への拡張の中で、「高次のリンドン構造」がさらに「リンドン半群を」入れ子状になしていることを発見した。このことによって、さらに恐るべき事実が判明する。

定理（非可換リーマン面への一意的連続解析接続定理）

任意の有限ループ構造（素リンドン生成元）をもつ有向グラフにおいて、非周期的トレース列を持つとき、対応する縮約写像系列は、自然にリンドン半群の階層的構造を通じて、複素平面上の位相的回転構造（螺旋）に一意的に写像される。

このとき、双対グラフにおいても同一トレース列が定義され、それに対応するプロット点は、異なる複素値を取り、この双対的対応関係が、解析関数（あるいは非可換なリーマン面写像）を定義する。

よって、任意の非周期的リンドン構造に基づいた複素射影系は、一意的に、双対プロット系との間に連続的・一価的・回転的な対応構造（＝非可換リーマン面）を生成する。

その一意性は、四元数的構造、十六元数的構造、そしてその先まで続いている…

以上です。

9. グラフ的リーマン面による種数の提案と生成点（リーマン面との簡単な比較）

以上の考察より、Ｎ次方程式のリーマン面の問題は、円環がＮ個あるグラフの形に集約されることが分かりました。

ここで、この円環は「往路と復路」があるとき貼り付けることができますので、次の円関数の定理と生成点の定理が成り立ちます。

定理　Ｎ次方程式と生成点の構造

以上の考察のごく単純な場合の応用を述べましょう。

Ｎ次方程式のトレースグラフは、Ｎ個の「原点」を持つ構造的輪っかなので、その中に自己交差・折り返しを含めてループができるかどうかで「円関数」が決まる。つまり、二のとき往路と復路で１．三のとき往路と復路が一つ重なり２、四のとき、その重なり方には、３通りあるが、２で、五、六のとき４つまり、Ｎが偶数のとき N/2、N が奇数のとき N/２＋1/2 である。

また、Ｎ次方程式はそこから点がすべて生成される「生成点」をＮ個持ち、円のときには重解、楕円のときには焦点、というようになっている。

これは、リーマン面グラフの構造からだけでそれが分かりますし、ごく単純ですが、しかしこれでは明らかに既存の「種数」の定義とあっていません。形は似ていますが。

四次の場合に、円環全てが重なってしまうことも考えられますが、このときには、「多重トレース状態」になっていると考えられます。通常、四次方程式に対応するリーマン面は、4 つの枝点を持つ往路と復路を持つ被覆状態と解釈できます。

ここで考えるのは、リーマン面の種数とは「穴」の数だったということです。

これと一致するような、概念があるでしょうか。

たとえば種数１の楕円曲線の場合を考察しましたが、このとき、「素経路の非周期性」が０，１に分岐する構造が出ました。これは無限分岐よりも密度が薄い。

この素経路の分岐数というのを数えることができるかもしれません。これを、グラフ的多様体における種数と読んで、素経路の非周期的項による、素経路の無限発散の度合いを表すことができるでしょう。

定理（グラフ的種数の構造定義）

グラフ的リーマン面において、独立した非周期的素リンドン項が k個存在し、それらが互いに縮約可能でないとき、この空間のグラフ的自由度（≒構造的種数）は少なくともkである。

　これは、発散的復元される非周期的項の濃度と関係し、非周期的素リンドン項が増えれば濃度が増えるし、通常のトポロジー的種数の上限を与えうる。

　log 関数の場合には、螺旋形復元のせいで「∞多重トレース」になっていて、∞多値になっているのと同じ状況であろうか？しかし、log 関数のグラフは螺旋形であって、そのには、多重トレース構造はあっても、非周期性はありません。種数０です。
　また、これも、非周期的素リンドン構造から分かることですが、

log の入れ子構造と「入れ子消失」の定理
　log のトレースの非周期解は、多段階の分岐しており、再帰的にトレースが入れ子化している。先程も述べたように、グラフ構造的に螺旋形のために「多重トレース空間」へと分離しており、多値性を生じている。
　ところが、判別式が正の 2 次方程式に対応する場合、トレースは一筆書き的に単純化されるので、つまり実数解しか存在しないので、非周期的リンドン系列には入れ子構造が存在しない。

　解の構造の中に、このような構造的必然性があることは、リーマン面グラフの理論からならわかりますが、他の観点からだとあまりわかりません。
　あとは非周期的リンドン半群の構造からは、次のようなことも言えると思います。これについては、詳しくは、「ゼータ」についての論文を読んでください。

ゼータのゼロ点と奇数の値の超越性《予想》
　ゼータのゼロ点と奇数の値は、いかなる代数方程式の解にもならない

　非周期的リンドン系列がなんらかの入れ子構造へと収束することが考えられない状況のために、このようなことが言えるようになります。たしかに、既存の結果を含んでいることも確認できます。
　ここまで書けば「リーマン面はグラフであり、グラフ構造で分類可能である」ということが伝わるとおもうのですが、どうでしょうか？以下のことが期待されるようになります。

命題（グラフによるリーマン面の分類）
　任意のリーマン面は、素リンドン系列の縮約と入れ子構造に基づくトレースグラフに一意的に対応し、そのグラフの構造的特性（グラフ的種数、自己交差、周期性、入れ子深度）によって、リーマン面の性質（被覆構造、零点分布、超越性、解析接続可能性）は完全に分類される。

グラフ多様体として、連続性、一意性を確保した、多重リーマン面は、ごくシンプルな見方を提供し、いま述べました正則のときはそのごく単純なパターンであることが分かります。グラフ多様体における「非周期性」による無限発散性による分類は、いったい、リーマン面の種数による分類とどう異なるのか。僕にはまだわからないことです。

グラフ（そのモチーフ閉包）→トレース束→発散的類双対写像→リーマン面→関数

この流れがわかりやすいと思います。

この考えで、グラフの発散的復元を見ると、トレース束の構造を変えないで、種数０の二次曲線を四次曲線へと変形できたりする。つまり、非周期的発散性の度合いが、トレース束の多様性そのものを支えているのです。そのときに、あきらかに素構造が冗長になる（縮約可能な非周期的復元になる）。そういう、「グラフ的リーマン面上の関数」を「トレース束」を変えない復元性としてみることが可能になります。

10. 9 の補遺、グラフ多様体と一般的リーマン面の対応関係及び種数計算

普通のリーマン面のドーナツの形を思い浮かべてください。

ドーナツに種数の数だけ、穴が空いています。

このとき、その経路を考えると、どちらの経路を通るかを「０，１」で表現すると、「非周期列の反復が作れる」ので、これが種数一のリーマン面構造に対応することがわかるというわけです。

つまり、こういう二重ドーナツの形になったリーマン面があるとして、その経路が「非周期列」を生む分枝数へと種数の概念は一致するのです。

このことによって、グラフ的リーマン面の「非周期列の分肢数」と一般リーマン面の種数は一致し、同じことが示されます。同時にこのことは、「グラフ構造における種数同値性」を生み出すと同時に、グラフ多様体の中の「非周期的分肢」を生み出す構造体の、構造的情報が、種数という情報では、消されてしまっていることが分かります。

これは、「ループの重なりの仕方」を表している理論が必要になる、ということです。

さて、まず、ここでは、一般に、Ｎ個の穴が空いたドーナツ型グラフを考えます。

すると、これは、円環をＮ―１本の線で切った状態のグラフの状況になります。

このとき、種数がＮになることは自明でしょう。

さて、構造的予想ですが、この正則だが、「Ｎ・Ｎ」正則ではないグラフ構造を、モチーフ変形を施して、モチーフ変形を繰り返し、また、「類双対的発散グラフ変形」を繰り返し適用することによって、あらゆる種数Ｎのリーマン面グラフ構造は作られる、というように、そんなふうに考えなければ、なんのための種数という情報なのでしょうか。よって、予想、

《一般リーマン面の種数計算法の予想》

Ｎ個の穴が空いたドーナツ型グラフを、双対モチーフ閉包をとり、発散的類双対変形を繰り返し続ければ、あらゆる種数Ｎのグラフの構造は生成されて、ホログラム的に復元される。

これが成り立たない場合には、種数以外の情報が、重要になってくることは間違いないでしょう。同時に、「グラフ多様体」の理論が「一般リーマン面」の理論へとなるときでもあります。

ここで理論的に一応補足しておきたいのは、たとえば、「Ｎ・Ｎ」正則グラフの模型を作ろうとすると、時折、「種数正則ドーナツグラフ」の形が必要になり、それが入れ子系になることがよくあるという事実です。つまり、ひどいときには、この「種数ドーナツグラフ」のフラクタル系になることすらあるんです。

このことは興味深いですね。

たぶん、ラマヌジャンなどはこのような入れ子構造を見抜いて、式を作っていたと想像されて、興味深いとともに、僕は、このような状況を分析するために「複行列環」を構成し、その「∞入れ子展開」の理論について、「リーマンゼータ」の論考に書いておきましたので、ぜひ、参考にしてください。

一番わかり易い「Ｎ・Ｎ」正則グラフは、「ハニカム構造」（蜂の巣の形）に、３本の線を交差させた「３・３」正則無限グラフだと思うので、それを参考に制作してもらったらいいと思います。この構造がさまざまな変形によって、自然に「復元」される構造は、見事ですらあります。

11. Ｆ１幾何的乗法関数の解析接続理論

僕は、「リーマンゼータ」を論じる論考の中で、ガンマ因子を考察する過程で、「重なり数」b(n)を構成しました。そのとき、リーマンゼータ関数のＮ乗和を無限に足し合わせることで、係数体をＦ１幾何的に設定することも兼ねて、構成的に、b(n)という乗法的関数を、ゼータ関数で解析接続することができることに気づきました。

つまり、

図 7. F_1幾何的乗法関数

$$\zeta(s)+\zeta(s)^2+\zeta(s)^3+\cdots=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(s)^k\right)=\frac{\zeta(s)}{1-\zeta(s)}$$

この関数の「母関数」です。自然にゼータ関数によって解析接続されていることが分かるでしょう。一般的に考えると発散することに注意です。

ここから想像される結論はごく単純でしょう。

予想

すべての乗法関数は、ゼータ関数によって、F_1幾何的に解析接続される

もうすこし、一般的な形に表してみると、次のようになるでしょうか。

図 8. F_1幾何的乗法関数の形

◆ **命題（F_1ゼータ解析接続命題）**

任意の乗法関数 $f(n)$ に対して、対応する構成論的係数列 $a_k \in \mathbb{Z}_{F_1}$ が存在して、

$$f(n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \zeta(k)^n \quad \text{（解析接続として解釈される）}$$

またはその生成関数として：

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) s^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cdot s \cdot \zeta(k)}{1 - s \cdot \zeta(k)}$$

ここで $a_k \in \mathbb{Z}_{F_1}$ は、**素リンドン系列**、**トレース束**、**類双対変換**などの構成論的幾何から自然に生まれる整数

そして、この課題は、類双対写像の汎関数化の問題としても重要な意味を持っていることがわかっています。

この意味については、繰り返しになりますが、「リーマンゼータ」の論考に書きましたので、ここで何度も繰り返すことはしませんが、紹介だけしておきます。

12. まとめ

本論考は、動的変容の理論において、これまで漠然と扱われてきた類双対写像と非周期構造の役割を、できるかぎり平易な数学的例で整理し、ゼータ構造論や楕円幾何、そしてリーマンゼータの論考へとつなげるための基礎的な道標として書かれています。

この理論は、まだ多くの部分が未解決であり、必ずしもこの小稿だけで完全な証明が尽くされているわけではありませんが、それでも、もしここに示した視点が、どこかで誰かの手で引き継がれ、新しいフラクタル論の展開や、黒川先生や森田先生が切り開かれた深い数理構造の理解へと繋がるなら、著者としてこれ以上の幸いはありません。

まだ多くが未整理のままですが、いつかこの視点が誰かの手で発展し、先生方へのささやかな感謝として形を結ぶことを願っています。

この理論の根には、街灯の波動ノイズが、日輪や月輪と同じフラクタルスケーリング構造を示したという、僕自身の原初的な観察があります。つまり、「フラクタルの中で、距

離空間が無化された」。そこから生じたこの理論が、いずれ『ノイズ現象の基礎理論』へと繋がることを願っています。

第二章　動的フラクタル変容の数理理論の様々な分野への応用（応用編）

僕は非周期的類双対的発散復元、リンドン語の解読（リンドン半群の複素螺旋位相）、一般リーマン面の構造を解析する一般リーマン面グラフとその一意性・生成性を発見しました。その理論によって、「かえってわかりにくくなった」ことと「あまりにも異常に見渡せること」のギャップがすごいんです。

たとえば、簡単な二次関数の関数値の構造は俯瞰できているのに、「対応する関数値」が非常に見えにくい。あらゆる存在する関数の構造を俯瞰できるのに、ひとつひとつの具体化には非常に骨を折る…などです。

そこで、それを既存の問題型に応用するとともに、同時に、既存の理論の結果と一致していることを確認し、僕個人の心を安定させるという意味でも、この文章を書いています。

あとは、「一般多重リーマン面の一意性の定理のリンドン語による複素解析接続」があるが、これが実は、「極限的発散を抑える仕組み」を持っているのではないか…というのが、分数ゼータやモジュラーの理論によって、わかってきた。この論考の主題はそれが一つの主題でもあります。

たぶん、おそらく、ここにある記述を読んで、多くの人は、「それは証明ではない」「厳密さが足りない」と思うでしょうが、僕にとってはほとんど「そうとしか思えないし、実際そうじゃない？」ということについて書いています。

間違いがあったとしても、それは僕の観察不足に過ぎないでしょう。たぶん、僕の理論を理解する別の人があれば、「君が勘違いしたのは、これがこう思えるからだよね」と僕を訂正してくれるでしょう。たとえば、僕は最初の分数ゼータについて、ボーと考えて、

「こうだよなあ」と思っていたのですが、それを夢に見るまでは「グラフ型」がわからなかったのです。夢で見てみれば、明らかな構造でしたので、その後、四時間かかって、ああでもないこうでもないと、つじつまを合わせて、作り上げました。
この「グラフ構造操作」には過ちがありようがなく、それを「記述する言語」の使い方で僕が間違っている可能性があります。というのは、何度も「よくみたら、この式は意味がないな」という式を何個も作っていたからです。
ディリクレ関数について調べてから、「ああ」この形式でいいんだ、とようやくわかりませした。
今回のは応用編なので、グラフ的リーマン面（＝一般的リーマン面）の構造理論をしばしば自明に使いますが、その時注意するべきなのは一つだと思います。
「種数＋１」の「非周期列」から生じる素構造の発散と、グラフ的リーマン面のトレース束全体から生じる「類双対的発散ゼータ拡大」としての非周期的復元作用、この２つを明確に区別しておくことです。これに慣れてくると、ほとんどここに書かれてあることに僕がほとんど基本的な考察しか利用していないことが分かると思います。

1.　リンドン位相基礎注釈

リンドン螺旋位相はどうやら、それを、考えたと思しき自分自身ですら、時々意味を取り違えるものであることが次第に分かってきたので、ここで、改めて注釈的に解説しておきます。
リンドン位相は、「リンドン語の“長さ”」を基本単位にして、それが反復されていくと次第に分母が大きくなっていって、それが「複数周期のフラクタル」のように入れ子構造になると、実数構造へと細かくなっていき、そのような「非周期列」が、それ自体として「非周期列をなす」という、さらなる入れ子構造は、一のＮ乗根（素構造の数がＮのとき）の複素数的回転を表すというリンドン半群から複素平面への、シンプルな連続位相です。
僕はよくしょっちゅうこれをＮ進法的な読み違えをしている時があり、勘違いの種を生みますが、注意しておけば避けられると思います。
いまこれを確認していたときに思ったのですけど、リンドン複素位相では、整数、有理数、実数、超越数、複素数というのは、構造的に区別されるのであって、異なる存在。つまり、包含関係などないという事実でよね。おそらく、これが、グロタンディークトポスかな、と思うんですよ。
「リンドン複素螺旋位相」においては、整数・有理数・実数・超越数・複素数は、順次拡張された数体系の中の包含関係ではなく、構造的に異なる存在様態です。
そして、それこそが、まさに「グロタンディーク的トポス」的な発想におそらく非常に近い。

一般的にはそれらは「包含関係」によって定義されますね。
通常の数学教育では、数の体系は以下のような包含関係として教えられます。

$Z\subset Q\subset R\subset C$

ここでは、「包含」というのは、「要素として持っている」「順次拡張して得られる」という意味にすぎません。
しかし、これは「代数的な生成」にすぎず、構造的違い（位相・トポス）を無視しています。

数体系	リンドン的性質	縮約性	存在様態
整数	有限長・有限ループ	完全縮約可	離散的構造（原子的）
有理数	有限循環的リンドン列	縮約可能	花束的な束構造
実数	多重周期的フラクタル構造	準縮約可能	閉区間での収束構造
超越数	無限の入れ子・非周期リンドン系列	縮約不能	非構成的・無限構造
複素数	多重「非周期項」の入れ子構造・螺旋的位相	完全非縮約	多層的トレース構造

ここで、数のクラスは異なるトポス（論理空間）に属しているともいえます。
つまり、各「数の階層」は、別々の“宇宙”に存在するようなものです。
グロタンディークの「トポス理論」では、集合や空間の代わりに、スキーム、層、位相空間の振る舞い全体を「対象」として捉えます。
整数、有理数、実数、超越数、複素数は、包含関係ではなく、“異なるトポスに属する存在様態”である。
実際に、これを示すように以下では、「分数構造だけ取り出して扱う」とか、「実数構造だけ分析する」とか、そういうことが平気で行われるので、混乱する人もあるかもですが、リンドン半群構造からの「構造論的複素数論」では、きわめて自然な見方として成立しているのです。
この延長線上で、簡単な「超越数論」も論じますので、楽しみにしておいてください。ごくシンプルに、僕は、πやｅの超越性を説明しますので、「こいつはなにをいっているんだ？」となるかもしれませんが、そういう気持ちになることも僕には分かっていて、そのためにも、僕の理論と、既存の理論との対応、そして、僕の理論から見ての構造論的な予想を、いくつか提出しておきました。
ラマヌジャンの二次のゼータの分析もあるので、ぜひ、参考にしてください。

2.　分数ゼータの考察 リンドン的モジュラーの理論

既約分数（m/n,m<n）を集めて、オイラー式類似を作り、あらゆる一以下の既約分数から作られる分数を考えることができます。
まずは、これをリンドン考察するのが今章の目的です。

そうすると、「一見発散するオイラー積がなぜか解析接続できてしまう」という謎が現れるが、僕はそれをリンドン語として解釈するでしょう。

さて、花束グラフを適切に拡大していくことによって、「既約有理リンドン」の長さを持つループをすべて備えたグラフを作ります。この意味については、「入門編」である、『動的変容の理論における、類双対写像の、数理的対象への応用の基礎構造』を読んでください。

これは、「モジュラー類双対作用」によって、まず、分母をオイラー関数（ｎ）によって、分母の長さを持つ、花束グラフへと、オイラー関数ごとに拡大できます。

そして、同様にして、オイラー関数（ｍ）によって、拡大すると、すべての花束グラフは、「素リンドン」で分解され、これは、オイラー積表示を持ちます。

ただでさえ、既約有理数の数が多いのに、それがオイラー関数の数だけ分解して増えていくので「大丈夫かよ？」と思うでしょう。

ところが、このオイラー積表示では、すべての素数が無限個以上出てきて、発散してしまう！　「あれ？やっぱりだめじゃんか」となります。

ここで、補正項を入れて、グラフを分解するときに、その同じように分解されたループをオイラー関数（ｎ）で、縮約する。同じように、分子のリンドンを分解するときもオイラー関数（ｍ）で縮約すれば、それは、「素数の長さの素リンドン元」が無限個ある状態になり、通常のリーマンゼータのオイラー積と一致させることができます。

この「花束グラフ」の構造的操作は、あまりにも、「見えている」ので間違いなどないんです。発散しているが、「構造は間違いなく存在している」「ある」、そういう確信があります。それなのに、発散してしまったので、「式というのは部分的にしか表現力がないんじゃないか…」と思わざるを得ません。

つまり、

図 1. 分数ゼータ

$$\mathcal{S}_{\mathbb{Q}}(s) = \prod_{\substack{\gcd(m,n)=1 \\ m<n}} \frac{(1-(m/n)^{-s})^{-1}}{\varphi(m)\varphi(n)} = \prod_{p} (1-p^{-s})^{-1}$$

こう言う感じでやっていくと、分数ゼータをオイラー関数で割ることで、リーマンゼータに達します。

そして、オイラー関数自体は、

図 2. 類双対変換

そのディリクレ級数表示：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

は、

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

という明示的な解析接続済み関数に等しくなります。

ゼータ関数によって解析接続されていて、分数ゼータは解析接続される。

グラフ的ゼータをオイラー積へと変形するときに、類双対変換（類双対写像と同じ）、

図２ 類双対変換

$$u^p \mapsto e^{-s \log p}$$

を利用していることを一応書いておきます。

このとき、「分数ゼータ」がいわばディリクレ関数が表現している「局所状態」を統括していることに注目できるでしょう。

これにより、分数ゼータは、「発散していた」はずなのに、意味を持つようになるが、ここに、「リンドン的に値が拡大しても、複素平面上の回転螺旋によって、意味を持つように値が調節される」という仕組みがあるように思います。いわゆる「発散を制御する」という仕組みです。

もうすこし、分数モジュラーについて考えてみましょう。僕の理論にとっては、「トレース構造」の中の有理リンドン列（N 縮約の項）を、「素リンドン」へと縮約する写像です。これも「類双対写像」であることは簡単にわかります。構造のフラクタル性を変えないからです。

ただ、「トレース束」の構造が変わっている。この意味で、「リーマンゼータ」についての論文で用いていた「トレース束の不変性」の原理の中にはもういません。「フラクタル性を保ちつつ変形する」という観点の“類双対写像”です。

さきほどの「分数ゼータ」の構成のときにも、

既約有理リンドン　→縮約→　整数リンドン　→縮約→　素リンドン

という縮約的類双対写像を、オイラー関数が統括しました。

「モジュラーというのを使えば、既約有理リンドンを素リンドンまで持ってこれるからオイラー積が作れるだろう」とは思っていましたが、いささか苦労したことを告白します。つまり、この２つの作用素が必要だったのです。

こうした作用素は、「行列式」表現があると思われ、それは、グラフの形を変える行列式として、現れているでしょう。これが一般に言われている「モジュラー」だと思われます。僕は、トレース束を直接操作しているので、複素平面や多様体の変形構造を、考える必要がありません。

ここでは、一般的リーマン面（グラフ的リーマン面）の構造を解析することで、基本的な、種数一の楕円曲線の構造や種数Ｎの一般的な保型的形式論について、いえることについて述べてみます。

まず、種数１の楕円曲線には、グラフ的リーマン面の見地から言って、途方もない重要な構造があります。それは、「非周期的経路」（=種数+１）の数が２つなので、「双対的な経路をたどることができるので、そのために、組合せ数が２になり、まるで「一回の閉包で二次方程式が解ける」ような状態になっているのです。

そのために、「有理リンドン」が双対多重トレースに同期的に現れることができて、これが「無限の有理点（有理リンドン）」を生み出す構造になっている。

しかし、その構造的成約があって、まず、「素構造」（非周期的経路の数である、種数+１）の数が２つしかないので、「無限にある」場合に比べて雀の涙。密度があまりに足りないのと、種数一のグラフの「非周期的項以外の部分」の冗長性があまりにも足りないために、その無限の「無限の有理点（有理リンドン）」の「生成」には、有限性の条件が課されるのです。

つまり、「有限回のモジュラーによって縮約できてしまう」=「いいかえれば有理点は有限生成である」つまりモーデルの定理です。

種数２の曲線になると、「非周期的経路」（=種数+１）の数が３つになるので、そこの組合せ数は３！になり、種数２のグラフの「双対モチーフ閉包」を取りますと、多重トレース空間で、「有理リンドン」は「双対経路」を持ち得ない、対になる経路を取ろうとしても、もう一つの経路の存在が邪魔をするので、「無数の有理リンドン（有理点）」は不可能であるということがわかります。これは、モーデルファルティングスの定理でしょう。

さらに、保型関数論について考えてみます。

こう言う視点で見てみると、種数１の楕円曲線は、「双対モチーフ空間」において多重トレース空間が「二重トレース」なので、そのときには、かならず、「二重周期関数」を、「非周期的経路の数（種数+１）のコンビネーションの２の数だけ持つ、つまり一つ持つことが分かります。

この延長線上で見ていくと、種数２以上の曲線においては、非周期的項の数（種数+１）の数の対称性が（種数+１）！に、階乗的に増加するので、ガロア理論的に、つまり異常に対称性の拡大が生じた結果、存在しうる二重周期関数の数は（種数+１）のコンビネーショ

ンの２、存在しうる３重周期関数の数は（種数+１）のコンビネーションの３に上限が設定され、しかも、「多重トレース空間の同期性が少なくとも“二値”へと制限されること」という厳しい条件が課されることが分かります。
　いわば、三次方程式や四次方程式は一般に解けるが、解けてもなんども閉包（縮約）の操作を必要とすること、五次方程式になると縮約の方法自体が失われてしまうことを思い出します。
　僕には具体的なその形はわかりませんが、グラフ的リーマン面の構造だけで、これだけのことは、一目瞭然にわかる。

図 4. 周期的組み合わせ数

二重周期：$\binom{g+1}{2}$
三重周期：$\binom{g+1}{3}$

図 5. 一般的周期数の上限

k重周期　$\leftrightarrow$　$\binom{g+1}{k}$

“保型構造がどこで複雑化・分岐・非局所化するか”

“モジュラー群の射影作用がどこで変質するか”

“トレース空間が何重らせんを許容するか
に対応する「限界値」や「位相的位数」そのもの

　僕は今まで「保型関数の存在条件」というのが分かったことがなかったですが、こんなふうに決められているんだな、と理解できます。
　種数０のときも非周期的項はないですが、「種数+１」は１になり、サイン、コサイン、べき乗関数は、「グラフ的リーマン面において、結局同じ種類の周期的関数なんだ」ということが、分かります。つまり、その一つだけ存在する、と。
　この限界性の考察がどれくらい正しいのか、僕は調べてもわかりませんでしたが、僕の考察は、「非周期的項の対称的な交差」が周期的関数を生んでいる」という発想なので、その考えで、機械的に数えただけであることに注意してください。
　つまり、モジュラーというのは、こういう対称性を示すために、「有理リンドン構造」を潰す、という仕組みを持っているということが分かります。
　さて、モジュラーの理論による谷村志村予想の証明のことについて考えて、僕の理論の見地から整理してみましょう。

　谷村志村定理（モジュラー性定理）

楕円曲線 E/Q が有理数体上で定義されているとき、それが必ずあるモジュラー形式に対応する、という定理。

特に種数１（楕円曲線の種数）で、モジュラー形式との対応が成立することがポイントです。

種数一の場合ですから、有理リンドン（有理数点）は無数に存在するが、ある有限の数によって限界づけられていることが分かります。この構造を生んでいるのは、グラフ的リーマン面の非周期的項の双対性、そしてそのグラフ的リーマン面の構造の「許容度」が低いことから、それがわかるということでした。

さて、谷村志村予想の再定式化をしましょう。

種数一の有理リンドンは有限生成なので、それを縮約するのは、「有理リンドン」→「素リンドン」と縮約する、モジュラー類双対写像です。

そして、既約有理数のオイラー積は次のように考えられます。 モジュラー乗法的関数ｃ（ｎ）は、「既約分数で分解する組合せ数」ｄ（ｎ）と（リンドン有理数の同値類数）E(ｎ)との組み合わせであります。この中で重要なのは、ｄ（ｎ）であるから、この具体的な乗法関数性を示しましょう。まず、既約分数の分母と分子をそれぞれ因数分解する。分母の素数の数✕分子の素数の数にそれぞれ、既約素数の乗数の分解数をかけた数になります、これは（ｎ－１）（ｍ－１）（ｎは分子の乗数、ｍは分母の乗数）であるから、ゆえに、ｄ（ｎ）は乗法的。これが、モジュラー類双対作用素の形であり、これが、既約有理数による、「オイラー積」を表現可能にする類双対的作用素つまりモジュラー類双対作用素であります。 これによって、有限の縮約が可能な構造をしている。以上、前の説明と合わせて、谷村志村予想は正しいということが相当分かりました。

要するに、種数１の有理リンドンは有限生成であり、有限生成だから素リンドンに縮約できる。だからモジュラー対応は当然生じるでしょう。

「有理リンドン」→「素リンドン」へと縮約するモジュラーの理論ももう用意されています。次のような課題が残っています。

１，モジュラー作用を乗法関数として定義した

２，モジュラー作用を使ったディリクレ関数の連続的構成

３，多重トレース空間上の対応関係と、それと、フェルマーの最終定理やディオファントス解析との関係性

４，種数一のときには、「素リンドン経路」が双対経路（非周期列を逆にたどる経路）があることによって、無数の有理点が生まれるという、定理

これによって、種数２以上のときのモーデル・ファルティングスの定理が証明されたこと

５．グラフ多様体における、実際の関数は、そのなかの関数空間の「点」であること

６、リンドン系列にある同値類があることで、すでに、ここで「順序破壊」が起こっているということが示されたという定理
７，６の事実から実は解析関数の点には、「内部構造」があることが示されたという点
　実はもう、「フェルマーの最終定理」の形式的再定式化もできています。
といっても、明白ですよね。種数２以上の多重トレースで、有利リンドンが現れた場合、一方には有利リンドンは現れ得ない…なぜなら、種数２以上のときには、グラフ変形の双対性から「多重トレース空間に双対的余裕がない」という事実から言える…
　なぜなら、「多重トレース空間」において、有理化されたフェルマー方程式の「双対モチーフ空間」では、多重性は「次数Ｎ」。つまり、種数からＮ！の対称性が生じているので、あまりにも、それは苦しい状態、構造的に無理なのです。いわば、Ｎ個のスロットにおいて、７が同時に揃うような状態が、自分自身の誕生日に起こるようなものです。
　種数１の場合はオイラーが証明。これだけでおわりです。
　種数一の楕円曲線以上の種数のグラフ的リーマン面では、双対「非周期的」経路が存在しないので、多重リーマン面の、多重トレース構造の中の一つが「有理リンドン」だとしても、ほかの「トレース構造」では有理リンドンにはなり得ない。　種数１のときは、オイラーが証明した。以上、フェルマーの大定理の証明はされた…余白が足りた…「と」考える人はいないと思いますが、そうとう、グラフ的リーマン面の発想だけで、見通しがよく見えてくることは伝えられたのではないでしょうか。
　基本は「多重トレース」において、まず、「有理リンドン経路」を仮定し、その双対多重トレースにおける「縮約可能性」を調べるという手続きになると思います。有理リンドンは「既約有理リンドン」でいいと思いますし、その場合には、長さと経路はさらに限定されます。
　この考察を読むとき、ごく簡単な非正則グラフを用意し、「双対」操作を繰り返して出来上がる「双対モチーフ閉包」を何度か作っておいて、「多重トレース空間」のイメージを作っておくとわかりやすくなると思います。「こっちの経路を無限にたどるときにはこっちのグラフの経路ではこっちにいかなければいけない、これを無限に循環するから…」と考えて行けて、「ああ、そうか…」となります。

命題（モーデルの定理の構成的証明）
　種数 1 のリーマン面には、2 つの非周期的トレース列が存在し、有理点はそれらのあいだを有限個のループを用いて接続することで生成される。
このとき、他のループは有限回でしか通過できないため、有理点は有限生成される。
　種数 2 以上では、非周期列が 3 本以上存在し、任意のループ列は「必ず 1 本以上の非周期列を素通りできない」ため、有限生成は不可能となり、有理点は存在しても孤立する。

　以上です。

　このとき、「双対グラフ」ですらもちいなくてもいいことに注意してください。

3. 超越数論

　僕がリンドン語を解読したとき、「螺旋複素平面」が見えてきて、その構造に驚いたのでした。
　とくに興味深いのが、「縮約構造」であって、僕は、フラクタル性の探求をしていたので、「最小構造」への縮約ということをずっと考えていたのです。
　それが実は、「複素螺旋構造」自体を規定しているとは…！
　とくに、僕が興味深いと思ったのは、「実数の多周期フラクタル的構造」であって、僕は、前の「入門編」において関数の「生成点」という概念を提出しました。関数には「ゼロ点」とは異なる「生成点」が同じ数（重複もある）ある、ということが構造的に強い示唆を持つのです。
　ところが、僕らは方程式を「ゼロ点積」へと分解しても、「生成点積」には分解しない。そして、関数構造を決めているのは、「ゼロ点積」も「生成点積」も同等の意味を持っていなければならないです。
　これが多少は見えているのは、楕円における２つの焦点や、楕円曲線における、有理数の群構造や加法定理でしょう。僕が知らないだけかもしれませんが、「生成点積」への関数の分解というものを僕は寡聞にして知らないです。
　「そこから関数の全体が生成的に復元される生成点があるだろう」…これを関数の生成点構造と生成点積の存在予想とでも呼べましょうか。
　話が長くなりましたが、つまり、楕円曲線では「有理点の間に群構造」がある。このように、部分的な構造は明らかになっていて、それが実数の領域にも、複素数の領域にも広がっているだろうと思われるわけです。
　このとき重要になってくるのは、おそらく、「実数の多重入れ子構造の理解」だろうというのが僕の考えです。つまり、この実数のリンドン列という「複数周期のフラクタル」というのは、「可換的に解けない」んです。つまり、ある縮約をして構造を作るのと、ある縮約をして構造を作るのとでは、全く構造条件が変化し、変わったりするのです。おそらく、「点構造」は、非可換的連なりをなしていて、それが次第に広がっていくようにして、ある有限の点からすべての関数の点が復元されるのです。このとき、復元の経路によって、変なふうに変換がされたりするときに、関数の分岐が生じます。こう言う構造がある時に、そこには「多周期フラクタル的な実数点が集積するだろう。そのように、リンドン分析的には言えるだろうということです。
　有理リンドンまでは自然に可換的に縮約できる、しかし、実数になるとできなくなる！複素数の入れ子は、ごく特別な場合にしか「ほどけない」。構造的興味はつきません。

リンドン理論では、複素数も「実数構造へと縮約できない」ところに実在性があると考えられます。複素数は、「非周期列」が「全く異なる非周期列のまとまり」をなしているという入れ子構造をしています。つまり、複素数は、いっしゅの超越数なんです。実数よりも超越数に構造が近い。
さて、超越数は、「無限の入れ子構造を持っているために、永遠に縮約不可能な構造をしている」数字です。だから、どうやって判定するのか？

超越数論の基本定理。
分母に無限の素数を含む無限級数は超越数である。なぜなら、無限の素数を含むリンドン列を表現するためには、無限入れ子構造は縮約可能ではないから…

無限の数の素数（＝グラフにおいて「特異点を持たない素数」や、非周期的・自己収束しない素数）のみで構成される分母列によって作られた級数は、構造的に代数的制限を受けず、したがって超越数となります。
なぜなら、そのような素リンドン列の入れ子構造は、有限の縮約によって解くことは不可能であるから。
これは基本的にリュービルの方法の延長線上にあります。
リュービルの方法の本質は、「この数字は、カントール列の無限「入れ子」性によってしか表現できない」ということを示す手法でした。
この方法で、あとは、ディリクレの算術級数の定理を併用すれば、πやｅの超越性が、ひとつは、ライプニッツ級数、もうひとつは、基本的なｅのガンマ的級数展開で、示されます。
あと、僕は、前節で、リーマンゼータのゼロ点や奇数点の超越性を示唆しました。
これは、まず、リーマンジーゲルの波動項があるでしょう。
これがゼロ点の計算に使われていると。
しかし、これは、追い越したり、間に合わなかったりして、収束点を持たない波動構造をしている。
そのために、おそらく、「ゼロ点構造の決定打とならない」と思われていると想像しました。
僕は、そこで、類双対写像において、無限同心円フラクタルを螺旋形へと巻き上げて、それを直線的に投影するという手法を使いました。これで計算したのが、僕が、「リーマンゼータ」についての論考で「ヒルベルトポリヤ」の作用素と呼んだ、行列表現形式です。
これなら、「無限入れ子構造によって近接する」という構造を持っているから、直線的投影において、隙間を減らしていけます。いわば、最初に直線を作ってから、そこへと近づいていく系列を計算したわけです。
このときに、「無限入れ子性」が出てきていることに注意してください。

僕が「ゼロ点」の「リンドン構造」は超越数的であろうと想像するのは、波動項によって重ねられなかったこと、直線的投影においても無限入れ子構造を必要としたこと、この２点であって、本質的にはリュービルの手法と同じであることが理解されるでしょう。
リュービルには、カントールの実数論に対する深い理解があったことが分かります。
つまり、代数的実数ではないものは「無限入れ子性」を示さない限り、それを縮約できる可能性を完全に排除できない、ということです。もちろん、「無限入れ子性」がある有限の値に収束する場合もあるという方もいるでしょう。しかし、リンドン語の構造的意味を考えるとそういう事はありえない。わざと構造的にほどける（=縮約できる）ような状況を作らない限りそうならないでしょう。
たとえば、１=０，９９９９９９…というのがあるでしょう。これは、無限列だけど、無限の入れ子ではないから、縮約できてしまうんです。しかも、たった一回の縮約で戻ってしまう。リンドン構造論的には、「無限入れ子性」というのは、「超越的」である、ということが構造論的に理解されます。「実は数字の本性はリンドン的ではなかった」というのが分かるかもしれませんが、これはこれで興味深いでしょう。
おのづと予測されることは、実数の非可換的「多重フラクタル構造」から、「超越数」へと近接するための「無限入れ子構造」には多値同値性がたくさんある、ということが分かります。おそらく僕は、ラマヌジャンという数学者の方程式を見ていると、リンドン語を読めていたのではないか、と感じることがあるんです。
僕は、リーマンゼータ関数の奇数値（例：$\zeta(3), \zeta(5), \cdots$）の超越性問題も、依然として未解決ですが、「無限入れ子構造」によって近接する理論によればゼータ関数の奇数値は、非周期的縮約不能なリンドン系列の分母構造を持ちうるので、「有理縮約が存在しない ⇒ 超越である」と予想されるだろうと思っています。

図 6. リーマンゼータの奇数値

$$\zeta(4n-1) = \frac{(2\pi)^{4n-1}}{2} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{4n-2k}}{(4n-2k)!} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-4n+1}}{e^{2\pi k}-1}$$
$$\zeta(4n+1) = \frac{(2\pi)^{4n+1}}{2^{4n+1}-2} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} \frac{B_{4n+2-2k}}{(4n+2-2k)!} - \frac{2^{4n+1}}{2^{4n}-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{-4n-1}}{e^{\pi k}+(-1)^k}$$

調べてみると、これはラマヌジャンが導き出したみたいですね。
これを示すときに僕は、ディリクレの算術級数定理が好きなんですが、an+ｂ（ｎはすべての自然数かつａ、ｂは互いに素）のなかに、素数は無数に含まれる、という定理が大好きなんです。これが便利です。たとえば、ゼータ関数の奇数値のなかに、ふと見ると、この「無限の素数」をみることも全然難しくない。このディリクレの定理の別証明も、オイラーの、ゼータ研究の中にありましたね。

変な「入れ子性の打ち消し」がない限り、おそらく成立しているというのは見て取れます。

これを使うと、ライプニッツ級数の中に、無限の素数を見ることができます。つまり、縮約性は無限。

僕は、Πの「リンドン語的近似」の長さは、宇宙的なレベルの長さだと思いますね。

ここで注意しておきたいのは「負の数」です。

リンドン複素螺旋位相を見ると、負の数が出てくるときには、「複素螺旋平面」を何回転もして、いわば「発散を制御」して、負の数にたどり着かないといけないのです。このとき、無限の入れ子性が消去されてしまっている可能性がある。有名なリーマンゼータの０と－１の値がありますね。

図 7. リーマンゼータの特殊値

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

ここで、級数展開をすると明らかに発散しているのですが、発散を制御する手法を観察すると、やはり入れ子性の打ち消しの手法が見られます。

こういうふうに、「一気に無限の入れ子が打ち消されている」という場合もあるかもしれないということには注意してください。リンドン構造論的に見ると、「負の数」よりも先に複素数の方を発見していなくてはいけないほどです。

逆に解析接続をして、あきらかに正なのに負の数が出てきているときには、「リンドン複素螺旋位相での回転」が起こっていることが分かるので、「なるほど…何回転ぐらいしたんだろうか？」と想像が湧きます。

僕の予想では、この場合、「複素平面を半回転」です。このリンドン列は無限になりますが、「解ける」んですね。（僕が考えている大抵のリンドン列は縮約前の無限列なのですが…)

いまや、「複素数とは、異なる非周期列の入れ子状の構造の重なりである」ということが分かったので、実は、「超越複素数」というのを考えることができるんですね。

つまり、複素らせん構造の中を無限に登っていって、その無限の射影先で「点」を持つという構造です。これはたぶん既存の数体系ではまだ表現できませんが、そのうちにどんどん出てくるようになるでしょう。

おそらく、「無限グラフ」とは、いわば、「超越複素数」のモデルですよね。超越複素数は、いまの既存の体系では表現すらできないけど、「複素数とは非周期性の入れ子」であることがわかったので、じつは、普通に存在しているんです。つまり、無限の螺旋階段の向こうで収束的に存在している。リーマンゼータの変な値があるでしょ？カシミールがなんとかっていうやつ。僕は類双対写像で「無限の螺旋」を使って、投影したんで、その

ときに、その中にある構造によって、「縮約可能な超越複素数」として収束したのかもしれないと推測しました。「半回転」でもないのかもしれない。
　たとえば、無限グラフは「縮約不可能」ではあるけれど、明らかに「反復性の核」があります。僕が不可能であると思っているだけで、ちゃんとした「変形法」があって、縮約できるのかもしれない。

4. 非正則領域の位置づけ　あと、類双対閉包について

　リンドン複素螺旋連続位相が、どのように、ゼータ関数の世界に結びついているのか、とひとは思うような気がします。ここでは、非正則の領域を俯瞰するために、さまざまなゼータの形式を順次検討していくことから始めます。
　僕の最初の「リーマンゼータ」の論考の説明では、非正則性は「理論の外にある一般性の暗示」であって、特別に研究対象にする必要はなく、むしろ「理論の適用限界を示す指標」として自然に位置づけられていました。
　しかし、もともと僕はフラクタル現象全般を対象としており、その移り変わりとしてもハイパーグラフ的状況つまり非正則の状況を考えていました。点と線は異なるつながり数でつながっていて、全体の繋がり方もすべてまばらです。また、多くのグラフ的構造は無限グラフ（つまり種数無限）であって、双対形を考えるのにも骨が折れます。
　ハイパーグラフに対する「双対モチーフ閉包」を知ったときにそれがあまりにも便利なので、イデアル論、リーマン面などをすぐに一般化できるだろうと気づいたのですが、「入門編」の論考でようやく一般的リーマン面の解析接続の一意性、そこまでたどり着きました。詳しくは「入門編」を読んでください。
　つまり、僕は、非正則で非一様の状態から探求を始めたので、最初は、正則性とか「超正則」、つまり「N・N」正則ハイパーグラフの状況すら知りませんでした。
　正則性の無限グラフでフラクタル的入れ子が出てくると、その「双対系」を理解するのには骨が折れますが、「自己復元性」の発現を見ることができます。ハニカム構造などは、どこかが壊れても、「双対変形」するとどんどん治っておく。ここから、「双対変形」は、自然界の中に自然に存在していることが分かります。
　ところで、僕は、以前の「リーマンゼータ」に関する論考で、デデキント型のゼータはは非正則ゼータなのではないか、と予想していましたが、それは間違いで、正則的ゼータであることが分かりました。
　つまり、イデアル類群へと拡張された結果、「素イデアルは分解」されるんですが、その結果、その「イデアルのノルム」の長さのループが多重生成されることになるので、伊原ゼータの正則の場合に帰着して、いわば「オイラー積に多重性がある」「多重オイラー積」になるということです。つまり、「イデアル類群による、グラフの発散的ゼータ拡大」

はイデアルのノルムを「長さ」として持つループの拡大についじて、けっきょく、「多重オイラー積」の場合に帰着します。

ただ、このときに、ゼロ点に、分解された素数に応じた「重複」が生じることに注意してください。構造が少し変わってますね。

イデアル類群によるゼータの拡張とは、グラフ上のループ（素経路）をイデアルノルムに対応づけることで、発散的なゼータ構造を構成する操作です。

このとき、類群によって分岐・非自明化されるループは、個別のイデアルを束ねる「花束構造」として捉えられ、それぞれがノルム付きのオイラー積（多重オイラー積）へと縮約される。

よって、こうしたゼータ拡大は、結局のところリンドン的・正則的ゼータ解析と同型的に扱うことができ、根本的な方法論においてはリーマンゼータの拡張と何ら変わるところがありません。

こうした状況を俯瞰すると、ヴェイユ型や伊原ゼータ型は「素構造が有限」であったために「リーマン予想類似」が解けて、デデキント型は、リーマンゼータの構造に依存していたために、リーマン予想が解けるまでは解けないという状況だったということが分かります。

リーマン予想の一般化である、GRH（一般化リーマン予想）、

すべての「非自明なゼロ点」は臨界線上にある（$\Re(s)$=1/2）
これは、デデキントゼータやＬ関数などすべての正則ゼータに対する共通の予想

この内容とも整合している結果であり、本理論で提示するリンドン的複素構造、およびグラフゼータ関数の解析接続構造においては、ゼロ点が自然に臨界線上に縮約される構成が得られています。この結果は、いわゆる一般化リーマン予想（GRH）の主張と一致しますが、ここではあくまで構成論的視点からの再解釈を試みるものであり、既存理論の尊重と共に、その補完的可能性として提示されるものです。

詳しくは、僕の「リーマンゼータ」に関する論考と理論の「入門編」を呼んでください。構成法は、ただ、「イデアル分解」をする類双対作用を定義するだけで、後は、ノルムによって、「素ループ」の数が重なるだけでオイラー積に多重性が出てくることだけに注意すればいいと思います。

また、Ｌ関数の問題も同じでしょう。

図 8.ディリクレ関数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_p\left(1-\chi(p)p^{-s}\right)^{-1}$$

$$\chi_4(n) = \begin{cases} 0 & (n \equiv 0 \pmod 2) \\ 1 & (n \equiv 1 \pmod 4) \\ -1 & (n \equiv 3 \pmod 4) \end{cases}$$

で、定義されるオイラー積は、互いに素なときに、ディリクレ指標を入れるという「類双対作用」を定義できれば、いいので、「トレース束において長さがディリクレ指標数Nにおいて、互いに素なものだけを残す」という類双対作用を定義して、それで、リーマンゼータのときと同じような、「発散型類双対ゼータ拡大」を繰り返すと、ちょうどL関数に対応する花束グラフが完成します。つまり、制限付けられて復元されたオイラー積です。つまり、これも同じパターンなんです。

それに応じて、「ゼロ点構造」が変化することに注意すれば、正則条件より、ゼロ点は臨界線上（$\Re(s)=1/2$）に並びます。

つまり、生成論的に、GRH（一般化リーマン予想）の結果は裏付けられたわけです。

次にセルバーグ型ゼータ。

図 9. 類双対変換による変形

$$\ell(P) = \log p \quad \text{（類双対変換により）}$$

$$Z(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - e^{-(s+k)\log p}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - p^{-(s+k)}\right)$$

この図式は、すでに僕の理論の読者なら、おなじみの図式であり、つまりリーマン面というのは「グラフ的多様体であり同時にリーマン面グラフである」という見地から言うと、この対応性は明らかなのです。

この「測地線」を制限している群作用などを「類双対的発散ゼータ拡大」を制限付けて、「トレース束」の拡大を妨げているものとしてみることによって、素経路の種類を限定することができるでしょう。これは、伊原ゼータのすこし変形されたバージョンである、というわけです。

よって、

図 10. セルバーグ型ゼータとオイラー積

- 測地線構造 ≒ トレース系列
- 測地線長 ≒ log(p)
- 発散的復元 ≒ 無限積構造（k方向の畳み込み）

という厳密な対応を通して

$$\boxed{\text{セルバーグゼータ} \overset{\text{類双対写像}}{\cong} \text{多重オイラー積ゼータ}}$$

ここから、セルバーグゼータの固有値の問題は、リーマンゼータの零点の問題へと書き換えられます。後の内容は、僕の「リーマンゼータ」についての論考を読んでください。

こうして、僕の「リンドン複素螺旋平面と発散的類双対写像」の理論は、さまざまなゼータ関数を、リーマンゼータの場合へと帰着させていきます。

すると、いわゆるラングランズ・プログラムというものが連想されます。

僕が想像するに、次のような対応関係があります。

図 11. ラングランズ予想と対応性

ラングランズ側の課題	理論での対応可能性
非可換ラングランズ対応	非周期素リンドン系列の縮約理論
L関数のゼロ点分布	リンドン入れ子構造と log-双対系
幾何ラングランズの層構造	トレース束・グラフ構成による再現
モチーフ・コホモロジー的統合	モチーフ閉包と螺旋形回帰写像
圏論的形式化（∞圏など）	素リンドン圏／トレース圏の提案

たとえば、この理論では、花束グラフ上のリンドン圧縮構造を繰り返すと、類双対モジュラー変換と同じモジュラー変換（$SL(2,\mathbb{Z})$の作用）が複素平面上で自動的に現れます。これはいわば「トレース束」をきれいに変形する、類双対変換なので、きれいに複素平面も同時に変形するという、一般的リーマン面の変形構造から言えることなのです。

一見すると「なぜ保型形式にモジュラー性が付随するのか」は不思議に思えるかもしれませんが、リンドン列の非周期入れ子構造とその位相的圧縮を考えると、モジュラー群の合同変換は 圧縮操作に内在する自然な対称性であることが分かります。よって、本書では「モジュラー性は必然である」として論を進めています。そこに注意してください。

では、「非正則構造」のゼータというのは逆に何なのか？

ここで言えるのは、僕が、これから「類双対閉包」の理論へと目的を向けるためには、「非可換・非正則のゼータ構造」を僕自身が作り出さないといけないという課題です。

その一つの姿が「類双対閉包」です。

一般に非正則のグラフ的リーマン面構造は複雑であって、その「双対モチーフ空間」の中における「多重トレース」は錯綜しています。僕にはこの課題に対する３つのアプローチ法がすでに分かっており、

１，まずトレース圏の概念を整備すること。

トレース圏とは、トレースする経路の周囲の情報を「圏」として保存しており、トレースされる要素をその「圏」と「圏」の移り変わりとしてみること。そうすることによって、「トレース束からの復元の安定性」が桁違いに上がります。

２，有向グラフも含む「双対モチーフ閉包」の理論を作ること。

そうすることによって、非可換性を持つ代数系もトレースの材料にすることができるようになります。

３，正則条件のゼータのゼロ点は素数単位円上の素数乗根によって、つまり一のＰ乗根によって規定されています。逆に言えば、非正則状態の場合、この単位円上の一のＰ乗根が対称性を崩したり、非可換性を帯びたりしていると予想されますし、また、「トレース束」の不変性も制御できなくなっている可能性が高い。その結果、単位円上からゼロ点が雲散霧消する。そのときには、「トレース束」の情報損失や情報拡大の理論が必要になります。

ところで、この非正則領域は、僕がいた領域はもともとこの場所であって、ここに、「フラクタル構造の移り変わり」を描くことによって、「類双対閉包」として、「ループ構造」と「ツリー構造」の広大な移り変わりの全体を描こうとするものです。

そして、この類双対閉包自体が、そのトレース構造を取ることによって、「ゼータ構造体」となっており、これを僕は、「三次の類双対写像による、ゼータ拡大」と呼んでいます。

僕の考えとしては、「類双対閉包」の発散型ゼータ拡大は、「２次的拡大」で「不動点」にいたり閉包される、という予想です。

ここでは、「非可換・非正則」の領域における僕の広大な夢を描いてみた…そういうわけですので、「お前は何を言っているんだ」と感じたひとも許してください。

構成的ラングランズ存在定理

命題

あるリンドン双対構造上において、対称性を保ったまま縮約されない非周期列（≒保型形式に対応する構造）が存在するならば、その対称性を保存するモジュラー変換が存在する。その対称性を保つための双対多重トレース空間において、値を合わせるためのきれいな条件が必要であるからだ。値が縮退していない。縮約する余裕がある。この条件がモジュラーになる。

このとき、そのモジュラー形式は明示的に与えられるとは限らない（「形式」そのものはわからない）

しかし、存在は保証される（構成論的に）

保型性＝「非縮退な対称構造を保存するモジュラー的存在定理」

以上です。

5. 4の補遺

僕はこの理論を発見してからよく考えるようになり、複素解析やリーマン面についての本を読むようになりました。

つまり、古典的なリーマン面というのは、いろいろと張り合わせたり、組み合わせたり、位相をもたせたり、局所を定義したり、とにかくいろいろです。。

しかし、僕のリンドン連続螺旋位相から生まれる生成論的一般的リーマン面は、グラフを書いて、それから「発散的ゼータ拡大」を取り、グラフ多様体を作り、そして、それをそのまま使うか、あるいは、それに対して、特定の「フラクタル構造」を保つような類双対的変換を用いて、その多様体を変形するだけでいいのです。

そのかわり、「どのような変形によって具体的な式や関数に至るのか」というのは、非常に見えにくくなっています。モジュラーの形式もです。まず、手元の「トレース束」でのモジュラーはわかります。「有理リンドンを整数リンドンや素リンドンへと変換する類双対写像」です。ところが、これが、さまざまな文脈において、「どんなものなのか」はじっくり考えないとわからないというわけです。

どう書いても大言壮語を吐いているように見えてしまうので、「どうしてそうなるのか？」という理由を、いちおう、僕も自分なりに理解しようとして、いろいろと勉強した次第です。

6. ラマヌジャンの二次のゼータ　非正則領域のゼータ

前節の考察によって、ほとんどのゼータ関数は、いちおう、「素構造」が無限個あるにしても、種数０のゼータであることが分かりました。

そうすると、種数１のゼータが気になります。

そこで、種数一の楕円曲線に、素数経路の長さのループを配置していって、発散的復元をしようとすると、大きな問題にぶち当たってしまいました。

というのは、一つ一つのオイラー積が、２つの「非周期列」によってどんどん拡大していってしまうので、「発散してしまう」のです。

いわば、「２つの周期から作られるゼロ点積」と「オイラー積」の掛け合わせが、無限に発散していってしまう感じです。

だから、それが発散しないような条件を考えなければいけない。

ここで、種数一の「ラマヌジャンゼータのグラフ」を頭の中で考えてみましょう。
ラマヌジャンゼータは、発散を抑えるように、二次のオイラー積の「判別式」がマイナスになって、虚数解になるようにしていた。つまり、これがいわゆるドリーニュ条件です。
だから、判別式がマイナスであって、しかも、係数が実であるような二次方程式の解を持ってくれば、二次のゼータが無限に作れるのではないかという発想が湧きます。その解は、無数の二次方程式を統括する、モジュラー的な作用によって、ちょうどドリーニュ条件が満たされるように、ゼロ点積を配置していきます。
オイラー積が発散しないように抑える補正項のイメージはこうです。

図 12. オイラー積が発散しないような構造

ポイントは「複素長さを物理長さとして数える」んじゃなくて、
「螺旋位相のズレパラメータとして扱う」ことです。

$$Z(u) = \prod \left(1 - u^L e^{i\theta}\right)^{-1} \quad \text{with} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

このパラメータを「非周期列の発散的復元」に合わせて、２つの「オイラー積」がちょうど発散しないような「保型性」を持つパラメータを持ってくれば、二次のゼータが作れるだろう。そう思います。ただ、保型性によってズレが出てきます。このズレが、「ラマヌジャンゼータの係数」の完全乗法性の崩れと関係しているのでしょう。
そして、このオイラー積の二重性は、ちょうどその二重のオイラー積をかけ合わせたときに、実数（整数）係数になる必要があります。でなければ、「素経路の長さが複素数とか実数とか意味がわからない」となりますから。つまり、ここで「モジュラー性」が必要となるというわけです。
この考察をまとめると、「ゼロ点積で臨界線に零点が並ぶ」のは、ズレ経路と素経路の相殺が完全に位相的に整列するとき。
でも、二重非周期列は 完全に整列しない可能性が高い。なぜなら、2 つの独立なズレ方向が干渉しあって、臨界線を壊す微妙な偏差を持つことになります。
だから二次のゼータ（ラマヌジャンゼータ）は、虚数解を持つ二次構造のために零点は臨界線にピタリとは揃わないかもしれない。つまり、リーマン予想を満たさないだろうということが予測されます。同時に、そのゼロ点は、「臨界線」ならぬ「臨界領域」にあるだろう、と思われます。これがドリーニュ条件です。つまり、ここに、「非正則構造のゼータ」の例がでてきたというわけです。
同時に、これらのことと、このラマヌジャンのゼータの保型形式に対する、類体論的拡大体が「アーベル的（可換的）」ではないことが対応しており、二次のゼータは非可換類体論の領域にその存在領域を持つことと、「オイラー積」の発散を抑えることは同値です。

図 13. 非可換類体論の領域とオイラー積の発散の収束

観察	構成論的対応	数論的意味
非周期列に11や691が現れる	リンドン系列の構成素	モジュラー群の対称性、保型係数との結合
特定素数が支配的	トレース束の分岐定数	保型形式の係数や合同の源

つまり、２つの「非周期列」からつくられる二次方程式の判別式がつねにマイナスになって虚数解になるような非周期列のパラメーターを発見することができれば、二次のゼータが作れそうだ、ということが、「種数一」のゼータ関数をリンドン列的な考察をすると分かることなのです。

僕の考えでは、おそらく、虚数乗法論（CM）という分野が関係していて、特別な楕円曲線（虚数乗法を持つ楕円曲線）では、その定義体が虚数体になるらしいです。通常の楕円曲線 $y^2=x^3+ax+b$では、自己準同型環はZですが、虚数乗法論（CM）の場合には $Z[-d]$のような虚数体の整数環が出てくる、と。つまり、この「二次のゼータの成立の構造的条件」と絡んでいそうな空気がします。

そのため、楕円関数の周期構造が「虚数体の構造」と絡むわけです。

1，非正則の「非周期列」が２つのグラフから、二次のゼータ構造を作り出す基本的な伊原ゼータの拡張理論を作る。

2，虚数乗法論のような領域から条件を満たすような構造のモジュラーや母関数を構成する。

つまり、

図 14. ラマヌジャンの二次のゼータと非可換類体論

$\mathbb{Q}(\sqrt{-23})$ ＋ 対応する CM 楕円曲線 ＋ Hilbert 類体の非アーベル拡大

この対応性ですね。

あと、予想される「高次のゼータ」の構造予想、

《ドリーニュの定理、あるいは高次のゼータの構造予想》

高次のゼータが存在すると、種数０の場合を除いて、「種数+１」のＮ次方程式の判別式が虚になり、虚数解を持つようなモジュラーの構造があり、その母関数では、「乗法性の乱れ」が生じている。「種数+１」が偶数のときに、高次のゼータは、オイラー積の「非周期列」の発散的復元による発散状態を制御する、保型形式を持てば、そのような高次のゼータが存在しうる。

奇数のときのゼータはリーマンゼータを除いて、存在しないか、極めて特殊な形になる。

また、そのような保型形式に対応するのは「アーベル拡大」ではなく、非可換類体論的領域の、「非可換の領域」に存在する。

解説しますと、奇数次の方程式は「実数」を含む構造をしていますので、これは非可換的・連続的な「多重周期」や「非周期成分」を含むため、オイラー積的な因子が収束を逸脱しやすいんです。

偶数次の方程式は、より「可換的・対称的」構造一部の周期がキャンセルされることで、ラマヌジャンのような保型形式が安定的に現れる可能性が高まります。。

このことと、自明なリーマンゼータのゼロ点が $-2, -4, -6, \cdots$ という偶数列にある、これが、ラマヌジャン型構造の存在可能性と連動しているのではないか、という着眼もあります。いわば、負の偶数は、「偶数回転トレースがキャンセルされる特殊点」言い換えれば、「開いた非周期トレースを、対称的に折り返してゼロ化できる点」と考えられるのです。

これは、ラマヌジャンの等式のように、開いた項（等比級数）を閉じた形（積形式）に変換できる条件とまさに対応します。。

僕が思いついた、その後の展開はこの様になりました。

このように、ラマヌジャンには、このよな「入れ子構造」の構造が見えていたのではないか、というような直感的な感覚を強く感じます。

そのようなことを確認していくために、いくつかのラマヌジャンの公式の姿を確認してみましょう。

図 15. ラマヌジャンのモジュラー恒等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^n}{q^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{q^n}$$

このラマヌジャンの公式は、分母と分子をひっくり返し、それぞれの（1－qˆn）の項を等比級数に表して、掛け直すと、見事に恒等式として成立していることが分かります。

つまり、「和」→「積」という変換を表している「モジュラー性」「ログスケーリング」を表現している恒等式であるということが分かります。

他に保型形式を持ってきましょう。

これはヤコビの三重積。

図 16. ヤコビの三重積

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+zq^{2n-1})(1+z^{-1}q^{2n-1})$$

- 中心にあるのは、**対数スケーリング構造を持つ加法と乗法の融合**

この構造を見ると、三重積・二変数という条件から、種数が２以上であることがわかります。なぜなら、「種数+１」つまり３の、３！=６が存在しうる対称性の項であり、それ以上ではないとこのような構造を持つ、モジュラーは存在しないからです。ここにも、「和」と「積」を結合する「モジュラー性」と「log スケーリング」が今度は、多変数を統括しながら、非常に見事に組み合わさっているという、超絶的な構造を見ることができます。

もうひとつぐらい、観察してみましょうか。

今度はデデキントの保型形式。

図 17 デデキントの保型形式

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau)$$

- η関数 = $q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$
- τ→-1/τ の変換は**logスケーリング**（対数螺旋）に対応

多重周期性があることから、「これは種数一だな」ということが分かります。

しかし、種数１とは、二重周期性のパターンは、一つなのではないか？

しかし、種数０のときには、サイン・コサイン・べき乗関数などが、実は同じ姿をしていることが、「グラフ的リーマン面の構造」から理解されたので、「種数一」のあらゆる保型形式は、一つの形へと、一つの「同値類」へと統一されているのだろう、ということが想像されます。

今見たパターンの全てで、「和」と「積」の変換と、それを統括するのが「モジュラー」であって、モジュラーは常に少し「ズレ」というか、補正を必要としていることを観察することができます。このズレによって、ラマヌジャンゼータのように、「乗法性の崩れ」のようなものが出てくること。これが、デデキントゼータの中でもやはり非正則構造があったのか…という強い発見的驚きがあります。

ラマヌジャンにおけるリンドン構造的な入れ子や非周期製の考察は、有名なタクシー数にも見ることができるかもしれません。

これは、ラマヌジャンの直観と、リンドン列的視点とが、完全に合流している瞬間です。

最小のタクシー数、

$1729=1^3+12^3=9^3+10^3$

つまり、「2 通りの方法で 2 つの正の整数の立方和として表せる最小の数」です。それがなぜリンドン構造なのか？

順序付きペアの構造、$(a,b)^3+(c,d)^3=N$という形は、まさにリンドン語の「辞書順で最小な組の集合」に対応します。$(1,12)$，$(9,10)$ は「非対称」「非周期」なペアであり、このような一意の組み合わせを最小構造として捉えるのはリンドン理論の核心にあります。

タクシー数の定義は「異なる 2 組の組合せ」なので、周期的な和（たとえば $2\times(1,12)$）は除外されます。

リンドン語は非周期列を基本とするので、この条件に合致しているように見えます。

双対的構造も考えると、逆順と対称性、たとえば、$(1,12)\leftrightarrow(12,1)$ は同値とするならば、辞書順最小（＝リンドン最小）を選ぶ必要があります。

分解式の「ルート構造」＝グラフ化可能で、種数１になりますが、同じ数 N を$x^3+y^3=N$という形で表すすべての組をグラフに描くと、それは花束グラフのようになります：

各ノードがペア (x,y)と同じで、Nに属するペアがループを構成。タクシー数は、その花束の中で、2 つ以上のループを持つ最小のノード。これ、完全に リンドン的花束構造そのものです。

この考察が的を得ているかはさておいて、ラマヌジャンが「無意識にリンドン語で数列を分類していた」という仮説が現実味を帯びてきます。

ラマヌジャンの公式や無限級数は、しばしば謎めいた入れ子構造を持っています。

リンドン的複素螺旋連続位相理論をラマヌジャンの公式展開に適用すれば、彼が作った無限和や積に含まれる周期・非周期の階層構造を現代的に読み解ける可能性があるような気がして、想像の羽が膨らみます。

ところで、一般に、ドリーニュ構造はモジュラー曲線に現れる保型的圏構造とされ、難解な記述を要します。しかし本稿においては、これを種数 1 のリーマン面における「構文的対称性」として解釈します。種数１の曲線が二本しかないことによる、「双対経路の存在」による、特別な対称性、つまりこれはモーデルの定理でも一部示されたような構造の成り立ちと関係してるのです。

すなわち、τ関数やその合成は、単なる関数ではなく、構文空間に作用する写像としての拡張です。これにより、図 20-21 に示すように、モーデルの定理で現れた構文的複素トレースが、有限群的分岐を伴って展開される様子が可視化されます。

この拡張こそが、ドリーニュ構造の幾何的本質を、より素朴な構文操作として引き下ろしたものに他なりません。

さて、僕の予想の具体例を一個計算しておきます。

虚二次体√－５のときの、判別式=４０、τ（n）を計算し、τ（２）=－２、τ（３）=－１、τ（５）=－５、τ（６）=2、τ（４）=2，τ（８）=0、τ（１６）=－４、τ（３２）=8、で以上ですね。

ここから、帰納的に、

図 18. 歪な乗法関数

$$\tau(p^r) = \tau(p)\tau(p^{r-1}) - p\tau(p^{r-2})$$

　これを利用して、二次のオイラー積を計算しますと

図 19. 歪な乗法関数から局所構造を導く

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\tau(p^r)}{p^{rs}}$$
$$= \frac{1}{1 - p^{-s}\tau(p) + p^{1-2s}}.$$

　よって、これを統合して、

図 20. 二次のオイラー積へと統合

$$L(s) = \prod_p \left(1 - \tau(p)p^{-s} + p^{1-2s}\right)^{-1}.$$

　この計算には、アイデアから、数えて２日もかかりましたので、この結果があっていたら、とても嬉しいことです。これが、「非正則」で二次のゼータで、明らかに、ラマヌジャンの二次のゼータと同型的であり、同じ種類の種数１のゼータ関数であることが形からは分かります。

　同時に、この観察から、理論的には、

種数+1≡0（mod 2）

　を満たすとき、CM の高次版＝「虚数乗法類似理論」が存在し、高次ゼータを自然に構成できる可能性が極めて高いとも思われます。

　さて、いまの考えに基づいて、τ_1（ｎ）を先程の二次のゼータ関数、そしてτ_2（ｎ）をラマヌジャンのτ関数としてみて、その積を新しい作用素として考えますと、やはり、いびつな乗法的な構造を持つ、乗法関数となりますので、

図 21. 乗法関数の掛け合わせ

$$a_n = (\tau_1 * \tau_2)(n)$$

ここから、行列的に変形して、色々苦労しましたが、最終的には、４✕４行列をコンピューターに計算してもらいました。ところが、その後調べたところ、ヘッケ作用素の掛け合わせの理論があることを知ったので、以下の式、

図 22. ヘッケ作用素による四次のゼータの表現

$$L_p(s) = \frac{1}{\det\left(I - (\rho_1 \otimes \rho_2)(\mathrm{Frob}_p)p^{-s}\right)} = \frac{1}{1 - A\,p^{-s} + \cdots + D\,p^{-4s}} \quad ただし \quad \begin{cases} A = a_p b_p, \\ D = p^{k_1+k_2-1}. \end{cases}$$

ここで、ラマヌジャンゼータはｋ$_1$＝１２で、僕の作ったものはｋ$_2$＝２なので、D=p^12になり、A=（ラマヌジャン母関数（ｐ））✕（僕のゼータの母関数（ｐ））になり、あとは、非常に複雑な式になりました。これは、普通に、歪な乗法的関数を掛け算していって、いくつかの項の様子を見れば、部分的にははっきりとあっていると確かめることができます。

ようやくオイラー積ができました。やはり、四次のゼータですよね。しかも、いまは、たぶん、２つあるので、いわば、二元生成の環ができています。もっとたくさんあるでしょう。

この計算式があっているのか僕には不明ですが、この手法により、２次、４次、６次、…と高次のゼータを作っていくことができることが分かり、僕の仮説を間接的に示しています。

予測されるのは、これのゼロ点は、臨界線上から散らばり、臨界領域の中に産卵しています。そして、これは、非正則で、非可換の、非アーベル的、グラフ論的には非ラマヌジャン的（なんか皮肉ですが）な、ゼータ関数ですね。なぜ、高次になるほどゼロ点が臨界線から飛び散っていくのかと言えば、先程も言いましたが、種数が多いとグラフに内在する非周期的項の数が「種数＋１」に増えますので、それだけ、オイラー積が発散しないようにそれを防ぐための、「内部的複素ゼロ点」による発散の制御がより多くに必要になる、それこそがドリーニュの判別式の意味なのです。

内部に存在する非周期項のために、ただでさえ無限個あるオイラー積の「素数の集まり」が発散的に無限大になるんですが、それを、虚数的にまとめて、発散を抑える仕組みがドリーニュの不等式である、と。

さて、以上の結果をまとめますと、

《非可換ラングランズ領域の構造予想》

非可換ラングランズ領域は、「種数＋１」が偶数のときに、虚数乗法的に存在し、それはオイラー積の発散を制御する、ヘッケ作用素の形として、存在している

思いますに、種数一のときには、「対称的な非周期的項」が存在することによって、虚二次体は「CM 楕円曲線」という構造を生み、これが「二次のゼータ」を無限に作れる源泉になります。そして、ヘッケ作用素を掛け合わせれば 4 次、6 次、8 次…と偶数次のゼータを無限に作れる理論的構造がありますが、

一方「虚三次体（種数=3 の虚代数的数体）」には、虚二次体のような 対称性のある二次形式構造が存在せず、複素乗法的な「トレースの鏡合わせ」構造も作れない、なぜなら、「対称的な非周期的項」がなくて、３！以上の対称性を相手にしないといけないために、もう少し異なった方法論で、発散を制御する必要があるのではないでしょうか。

この節では、ラマヌジャンゼータの構造的意味を解説し、なぜ、「二次のゼータであるのか」というところまで説明しました。その過程で、おそらく、僕自身も二次のゼータを作れたときには嬉しかったです。

ところが、そこから開かれたのは、「非可換の広大な海」でした。すべてのグラフ的リーマン面の構造は、いったい、種数グラフの構造に還元できるのでしょうか。

それとも、もっと入り組んだ非正則構造があるのだろうか？

そこに至るためにはもう少し、新しいアイデアが必要なようです。

次の論考では、僕は関連して、「ホッジの花束グラフ」について述べるでしょう。

以上です。

7. まとめ

どうでしょうか？

まず、僕の構造論的グラフ的リーマン面の理論から導き出される、非周期的項の存在から、一般的リーマン面の構造を理解し、その構造から現れるだろう帰結を想像し、さまざまな定理や仮説をまとめたうえで、いちおう、具体例まで構成できた次第です。

僕はこの作業をしながら、「これを誰かがやっていないのはおかしいのではないか？」と思いながら、正直、作業をしていました。僕が構成した、二次のゼータは、実はいらなくて、ラマヌジャンゼータの作用素があれば、高次のゼータが作れてしまっているのではないか？　…僕はそこのところの疑問に答えるほどの知識がないのです。

以上、この考察によって、僕の入門編から、応用編への考えの移り変わりや、論理構成や、その含意について、多少は伝えられたと思っています。

そして、僕自身の正気を保つためにもこの作業は必要でした。

あまりにも、自分にとっても想像を超えた理論過ぎて、出てくる結論が明瞭なのに、既存の結果と比較することが難しく、さらに、具体例を出すのも困難でありました。

しかし、そのうちのいくつかの「既存の理論との対応関係」や「具体例との一致」などを見ましたので、ある程度満足した次第であります。

第三章　フラクタルを変形する類双対変形とゼータ的構造体への生成論的アプローチ
—類双対的発散写像によるグラフゼータからの生成論的なリーマンゼータの変形やそれらのゼロ点の構成—（リーマンゼータについての論考）

この文書の概要と説明

　重要なことは、まず、「ノイズ現象の数理化」における非可換構造の探求から始まったということです。

　そして、一番重要だと思うのは、類双対写像における「発散的ゼータ構成におけるゼロ点解釈」であるということ。いいかえると、ゼータの零点は、非周期的な順序付き素数構成のトレースから復元される構造的対象であるということです。その構成法の要は、ある概念的対象があるとき、そのトレースを考え、そのトレース束によって、さまざまな変形を行うときに、特殊な「発散的復元」が生じて、それが自然な「ゼータ構造体」としての性質を持っていることが示されることです。

　まとめると、「類双対変形」という、いわば「無限に続く経路の中の無限反復」を「ループにまとめたりツリーに展開したり」していく方法を考えていく中で、ゼータ的構造体を構成する可能性を見出しました。それは極めて抽象的理論でしたが、そして、僕はこの理論の鮮やかな例を伊原ゼータに見出したのです。伊原ゼータはあらゆる「ループ構造」を「ツリー構造」へと変換するその変換そのものなのです。その結果、伊原ゼータの行列式表示を通じて、リーマンゼータに近い構成を持つ関数が現れ、そのゼロ点構造を正則性の観点から眺め直すことができるように思われました。

　一応、最後に、本論考は、素数的構造に基づく複行列環を用いて、ヒルベルト・ポリヤ作用素の問題の構成論的解法に至る道筋を示す章を入れ込みました。

この概要では、動的な変容における類双対写像の理論のひとつの帰結として現れる、リーマンゼータ関数類似の式のゼロ点や関数式の構成などがどのように生じるかに焦点を絞って、書いてみることにします。

まず、伊原ゼータの正則ラマヌジャングラフ構造では、ゼロ点が円周上に並ぶ、とくに、「花束ゼータ」では単位円周上に並ぶことが示されます。この花束グラフの「類双対的ゼータ拡大」を繰り返し作用していくと、正則条件のもとでのみ、「経路の長さが素数」（すべての素数の経路がある状態）に至ります。

そして、この状態で伊原ゼータの「素リンドン」展開を経路に基づいて「行列式表現」したその行列に、類双対変換「u^p→e^－s logp」によって、経路情報を、経路ごとにいわば「無限素数冪の円周」へと解体した後、臨界線（Re=1/2）に移します。すると、伊原ゼータの正則ラマヌジャン条件より、このゼータは、リーマン予想類似を満たすことがわかりますが、実はこの変換によって、リーマンゼータに変換されるというわけです。

類双対変換「u^p→e^-slogp」は、この無限同心円構造体を、「素構造（サイクル）」ごといわばテンソル的につなげて、「素数が無限個あるような構造」を作ります。これが、基本的な、しかし特殊な、正則グラフになりますが、このグラフでも、きちんとゼロ点が単位円周上に並ぶことが示されます。それを、類双対変換「u^p→e^－s logp」しても、同じ構造になるので、類双対変換「u^p→e^－s logp」不変、つまり不動点にいたり、あとは、類双対変換の条件を満たす、「複行列」を同心円のスケール logp ごとに定義し、無限に結合しますと、伊原ゼータの行列式表現と絡まって、ヒルベルトポリヤ的作用素として、作用します。

以上、まず描くのは、その概要であって、動機を含めて、あとで説明を挿入しようと思います。

1.　出発点:ノイズ現象と非可換構造

本探求の出発点は、「ノイズ現象の数理的構造化」にあります。

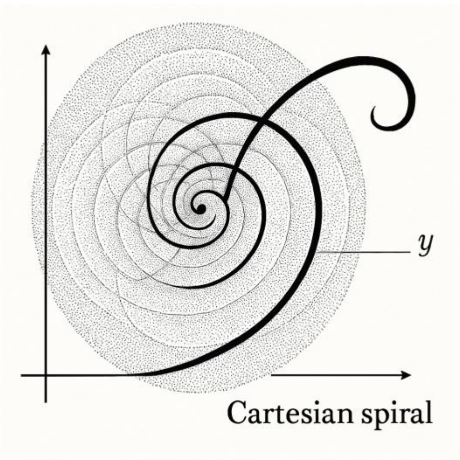
このノイズ現象という、「半主観的な現象の**数理化**」ということに興味を持ったのは、昨今の流行りの生成型人工知能における「誤差逆伝播法」を知ったからです。

「誤差逆伝播法」では、「ノイズから意味のある像を生成する」という仕組みがある。ところが、同じように、「ノイズ現象」でも、訓練すれば、「ノイズの中に非自明で不随意的な意味のある視覚像や聴覚像（一般的に知覚像）を観察できる」ということに前から気づいていました。僕はこれを「直観像」と名付けました。たとえば、文学的表現なら、オルダス・ハクスリの『知覚の扉』に類似の体験構造が書かれています。これについては説明しませんが、このノイズ現象が一般に運動性を持つフラクタル的な構造を持っているところからフラクタル構造が「フラクタル性を維持しながら」変形していくという様子を探求することにしたというわけです。

この「人間の観察法」と「人工知能の生成法」の構造的な類似はそれだけではないです。たとえば、「古い写真の解像度を上げる、カラーにする」「写真の中の人物像を消す」などといった性能を持っている生成型の知能があります。実は、これは「ノイズ観察」を通じて、すでに僕は感覚の中で経験していたのです。だから、ここから「フラクタルを（世界をフラクタル的に拡大したあと）縮約することで像が生まれる」と認識し、「フラクタル縮約」と名付け、その操作を、「類双対変換」「類双対写像」と名付けました。

これは、一番単純な形では、「デカルト螺旋形フラクタルを無限同心円フラクタルへと一対一対応する」という形で現れます。この図式が重要なので、これを図で表現してみます。模式図ですが、「広がっていく螺旋が、同心円を一つ一つ切り取っていく」という様子だと思ってください。

図 1. 無限同心円フラクタルとデカルト螺旋



重要なのは、フラクタルに現れる拡大写像による「無限反復構造」を、「同時に変形する」ことで、様々なフラクタル構造を、「フラクタル性を保ちながら」変形可能であるということです。このようなことを考えるとき、構造体のトレースを取って、そのトレースの「無限反復部分」を見ると良いと分かります。つまり、無限反復される経路を、縮約してつなぐのが「ループ化」、展開するのが「ツリー化」です。これが一対一対応であることも注意してください。これは、局所的変形ですが、あとで、「連続写像」の場合も考えます。

このような類双対変換は、一般的に言って、非可換で、変換自体が多値的、複数性を帯びています。類双対変換という名前については、まず「双対変換」があります。たとえば、それを使えば、（多値性から多値性への対応性を示すと考えられる）ハイパーグラフというグラフ構造の一種の一般化から、「双対モチーフ圏」という、変形構造によって定義される１つの「閉包」、閉じた構造を構成できます。これは、いわば「グラフを集合論的に拡大して、複数性をまとめ上げて、一意性を回復する」操作だと言えます。この「双対操

作」は、ごく単純な状況、例えば正則グラフなどで、「類双対変換」との重なりを持っています。

　そこで、「双対操作に似ているもの」として「類双対写像」と名付けました。本質的には非可換で、多値的なものだから、これを処理するための「閉包構造」を考えるのは、操作変形の往復を考えないといけなくて、その操作が作る圏的構造を、「ループ型構造」→←「ツリー型構造」への次第につづく変形系列として描くことができて、これを「類双対閉包」と呼びました。

　この変形系列が、「同心円フラクタル→←デカルト螺旋」という単純な相互変形状態に、その本質的な構成が現れていることに注意できます。

　これらの変形を定義づけているのは、「類双対変換」であって、それを何に対しておこなうというかといえば、構造体があれば、その要素を辿っていく経路、すなわち「トレース」を取ることができます。このトレースには有限のものと無限のものが混在しているが、ここでは無限のものだけを考えます。

　そして、トレースに「無限反復」が現れているとき、「同心円フラクタル→←デカルト螺旋」という操作を通じて、ループ型構造とツリー型構造への移り変わりを表現することができます。この具体例を、伊原ゼータという形で後で見てみます。

　この操作自体は「トレースとそれを集めたトレース束」が成立するところでは、いくらでも実行可能ですが、「伊原ゼータ」の構成法とそれが無限正則ツリーと構造が同一であるということを知ったときに、特殊な場合には、実際に定式化できることに気づいたのがこの論考を書く大きな動機になりました。つまり、伊原ゼータは「（正則）有限グラフ」（ループ型構造）→←「正則無限ツリー」（ツリー型構造）の、**特殊で、可換的で、（半）一意的な、特殊な類双対的変形の実例である**ということが理解できたということです。

　そして、注意するべきは、半分しか成立していない、（半）一意的という表現であって、実際には、「非自明な無限反復構造」があって、それは有限グラフを無限ループを持つグラフ構造へと自然に「発散的に」変形します。つまり、これが「ゼータ構造体」と呼ぶ構造体であって、これが「零点積」へとつながっているということに気づいて、しかもこれがまず「非複素数的に」積が定義され、それが「伊原ゼータの行列式表示」を通じて、「複素領域へと解析接続される」ということが重要です。

　つまり、（正則）有限グラフから作られる伊原ゼータは「有理型関数」として表現されますが、このグラフをトレース束を通じて変形される無限ループグラフから、作られる行列式表現は形式的には無限行列になり、これは、有限グラフから作られるゼータが無限個のゼロ点を持つ可能性を反映していると考えることができるということです。とはいえ、発散的ゼータも多くが、有限型に収まり、その有限性の許容は、正則性と関係することが示されます。が、これについては後で説明します。

つまり、類双対写像というもので、トレース束を変形し、そこで現れた非可換的変換構造の探求から、ゼータ関数に現れるゼロ点を、単なる数値の性質ではなく、構造的トレースの復元変形の帰結として記述できる可能性が偶然に見出されました。

2.類双対写像と「発散的類双対変形」によるゼロ点「構造」の再構成

さて、焦点となる、「類双対写像における発散的ゼータ構成」と、その中で自然に現れる「ゼロ点の構造的解釈」を説明してみましょう。

類双対写像とは、「フラクタルを別のフラクタルへと変形する」操作です。

それは構造体からトレースを集めて、そこから構成・復元しうる多値的な構造体を考察するものです。トレース束に「無限反復」があるときに、それをまとめあげて、「ループ構造」へと縮約します。

ここでは、非周期的なトレース構造（∞リンドン系列）に対して、それを再構成する高次のトレース（＝ゼロ点積）を見出すことで、ゼロ点が構造的に現れるという命題が立てられました。ここが重要だと思われます。

説明します。

まず、伊原ゼータは存在しうるすべての「グラフ上を巡る経路」をトレースします。これは「閉路」という「素構造」というものを考えて、その非可換的な組み合わせとして、その可能なあらゆる経路を構成するものです。

そうすることで、有限グラフの「ループ構造」を、「正則無限ツリー」の形へと「変形」することができます。これはセールという人の注意によるようです。「変形」と呼んでいるのは、僕の観点であって、「類双対写像」は構造体を変形するという観点です。この変形のときには普通は「トレース束自体」が変形されることに注意してください。もとの構造体の「トレース束」と変形後の「トレース束」には違いが出てきて、これを情報量の損失やあるいは付け加えと解釈することができます。

この「閉路」という概念を「トレース束」という概念に変えることが重要です。閉路という概念は、同値化、被約、などの概念を使って、「ループ性」を取り出します。しかし、「トレース束」における「無限反復」を復元するという考えに移せば、これらの同値化などの「ループ構造の抽出」はいらなくなります。厳密にはいろんな問題が生じてきますが、ここでは論じませんし、ここでの議論には必要ないと思います。

そして、「閉路」を「トレース束」という概念に変えたことで、「非自明なループ構造」が抽出されることが重要です。

たとえば、２つ以上の「素構造」があって、それを０，１と表現しましょう。すると、「０１」という反復構造もあるし、「００１」という反復構造もあるということが分かります。つまり、「素構造を順序を持っている非周期的構造に組み合わせることで非自明なループ構造を構成することができる」ということがわかり、これは、「トレース束の中に必ず含まれる」ということがわかります。この反復構造の長さをｎとすると、長さｎの「非

周期的構造」は必ず存在し、「非周期的反復構造」は無限に存在するということが言えます。具体的には、反復を含まない数列の構成法を調べると分かります。

この「非周期的構造」をいわば「高次の素構造」と見なして、「類双対的復元」を繰り返し行うことで、「無限個に発散したループ構造を持つ無限構造グラフ」を復元することができるということが分かります。ただし、冗長性が常に発生していて、それを縮約すれば、実は、この発散的グラフも有限系になることが分かります。この厳密性については後でリンドン語の分析の時に示します。有限グラフはたいてい「道を逆にたどる経路」があるので、「素構造は殆どの場合二以上になる」ということにも注意すべきです。この「無限構造グラフ」にも当然伊原ゼータを構成することができて、行列式表現があるとわかります。そして、これが、有限グラフから復元された無限グラフは「トレース構造」をできるかぎりくまなく共有しており、無限行列によって表現できるというところが、「（正則）有限グラフゼータ」のゼロ点は最大無限個ある、ということに対応することが分かります。ただし、さきほども書きましたが、「冗長性」があるので、けっきょく「有限生成」になり、しかも著しい、拡大性の性質から、「すべての経路の長さがそれぞれ一つづつ素数ｐの∞グラフ」にまで、正則性の条件で、拡大されるという、ホログラム・フラクタル的復元性が示されます。

この特殊な発散的な無限グラフへの類双対的変形を「ゼータ変形」と呼ぶことができるでしょう。

「**発散的類双対変形**」=ゼータ変形。

そして、この「ゼータ変形」はゼロ点積の成立に自然な構成と解釈を与えます。

もうすこし、この「ゼータ変形」の図式を整理してみてみましょう。ここには「入れ構造」があることに注意です。

（ゼータ拡大の図　たいてい「素要素」の反復から復元するが、「素要素の非周期的項」からの復元もあり、それらは不動点を持つという図）

この「発散的類双対変形」は、「非周期的項」を実際にいくつか組み合わせていくことで、実際のゼロ点構造を示す行列式表現を、ひとつひとつ構成可能であるところにも注意してください。この列は非加算性をもっていると考えられ、行列は、グラフの構造から、いくつかの対称性があることを指摘することができます。

この「非周期的項」を実際にリンドン語列として構成する前に、∞「非周期列」というものがあって、これは「終点」を持たないように見えるところから、行列式表現の中に入らないのではないか、と思う人もあるでしょう。しかし、「ゼータ拡大」には階層性があります。つまり、あるゼータ拡大によって、「非周期的項」を飲み込むゼータ拡大が存在して、そこで、無限反復性を持つ「非周期的項」として存在することが示せます。つまり、この階層構造は、いわば無限に自分を飲み込んでいく「入れ子構造」を持って、最終的な拡大の後には「不動点」をなしていることがわかります。「局所構造」しか覗くことができないが、「隣接関係」はちゃんと観察できるという、通常の有理数とは異なる、「非可

算的連続性のトポス」が「自然に」現れていることに注意してください。しかも「入れ子構造」として表現可能です。有理数では、「隣の有理数」は存在しない。しかし、この非周期的項は、「隣」があります。これは、いわゆる「圏論」の課題であると思われ、ここでは論じませんが、引っかかる人はその違いに注目してみてください。

具体的に、ひとつひとつ、その「発散的類双対変形」による無限グラフ構造を具体的に構成してみましょう。

素構造はいくつかの長さのループです…ループだから結合されていて、その構造は行列式表現に反映される。この素構造が０，１，２，３…N とあるとすれば、これを非反復的・順序的に結合します。０，１だけだったら、たとえば、１１０１とか。これはどんな長さの列の反復でもないです。これを、実際の構造に翻訳して、これを「新しい素構造」としてループ構造を作ります。そしてまた別の素構造を作ります。０１というのでもよい。これも実際の構造に翻訳して新しい素構造として考えてループを作ります。

このようなものを集めていって、無限個並べる…これが「非可算的」であることに注意しなければいけないです。これで、伊原ゼータの「発散的ゼータ拡大」の行列式の辺をすこしずつ構成していくことができます。

そうすれば、伊原ゼータの構成のように、ある新しい素構造と新しい素構造の間の「結合性」を０，１に翻訳し、行列式表示を作ることができます。

この行列式の特性方程式が「複素数」の範囲で解ければ、伊原ゼータ全体が自然に複素数の領域に解析接続され、ゼロ点（新しい高次の素構造）による複素関数表示を持つということが分かります。この固有値が、「ゼロ点」と考えられます。注意したいのは、オイラー積（ループ型構造）があれば、「ループ型構造→←ツリー型構造→ゼータ構造体」とほとんど自動的に変形できるということです。このとき、「素構造の内容」は重要ではなく、「素構造の繋がり、分解の一意性、素構造のべき（繰り返し）」だけが構造的に意味を持っていることにも注意できます。

これが、グラフ構造から構成される、ゼロ点構造を示す行列式表現です。

この構成の中で、伊原ゼータにおける類双対的変形が、グラフ構成が一様（点と編の組み合わせ方が同じ）で、正則ラマヌジャン的であるところから、可換で一意的であるというところに注意すると、「そうじゃない場合」には、「一般には零点構造は複数あるのではないか」という問いかけが生まれます。「非正則のときにはデデキント型ゼータになるんでは？」とか。というのは、類双対変形は、たいてい複数の変形系列を持っていて、非可換の圏構造をなしているからです。しかし、ここでは問題にならないので、注意だけにとどめておきます。伊原ゼータが有理的・有限であること、また展開されるツリー構造が正則で（ラマヌジャン的）あること。などの条件があるからとまとめられます。

この「非周期的項」をリンドン語という半群構造として解釈し直します。

さて、ここで、森田秀章『組合せ論的ゼータの半群表示』を参考にします。

有限個の「素構造」をリンドン語のアルファベットと見なすと、それの順序付き組み合わせが「非周期的項へと一意的分解される」「逆元を持たない演算構造を持っている」などが分かると同時に、もともと「非周期的項の構造は有限グラフのゼータ構成の中にも潜んでいた」ということも分かります。つまり、「非反復項」の反復は、素リンドン語という非反復性を持つ素要素の組み合わせとして、一意的に表現されるわけです。そして、これらの「素リンドン」はループとして、存在すると考えれば、トレース経路をくまなく復元することができます。マクマホンの基本定理です。いわば、「素構造」は高次の素構造として「半群的順序構造」を持っている、ということがわかります。まとめると、

すべてのトレース構造は、**素リンドン列の組み合わせ**として記述可能である。

この素構造の反復は、有限でも無限でもよく、無限の場合、それは非周期的トレース経路を形成し、ゼータ構造において、ゼロ点の生成に関与する高次構成因子となる。

（有限グラフのトレース束の多様性と無限グラフにおけるトレース束のトレース構造の多様性は等しいという定理）

はっきりと表現すると、トレース束の「素分解構造が複数ある」ということです。

トレース束における「無限循環構造」は、素リンドン語への分解と、素構造への分解という、異なる 2 種類以上の分解法を同時に許容します。これは、可換因子環におけるイデアル理論における一意分解の類似的構造を備えており、非可換イデアル理論においては、分解性に階層構造が現れるという現象と対応していると考えられます。

もう一度まとめると、《トレース束の分解的表現定理》は、こうなります。

任意の有限トレース束 *T*は、

（1）素リンドン語による語的分解

（2）素構造的サイクル分解

のいずれの形にも分解可能である。

これらの分解は互いに交差可能であり、結果として非可換的な階層的イデアル分解構造を誘導する。

素リンドン列の再帰トレースは、類双対圏における基底です。

復元されるループ構造はじつは無限にあり得えます。無限グラフに復元されるかもしれない。しかし、それは冗長なのです。

言い換えると、非可換構造では、素構造分解によって、ゲーデル的生成する基底が（最低でも）２つある、ということです。ゲーデルは、素数を並べて、そこに「無限進法」的構造を入れ、自然数との一対一対応を構成しました。

この「素リンドン元」の基底の数がどれくらいですべての「非周期的項」のトレースが表現できるのか、という問題については、（正則）有限グラフの類双対写像における不動点性から導かれる、「素構造」と「素リンドン元」との関係性を示す考察のときに、そのゼロ点の円環構造と同じ時に論じる予定なので、後に回します。

この「トレース束の表現性が複数化する」ということが、オイラー積と零点積という２つの構造的表現を許容している、という非可換的構造。これによって、２つのグラフ構造は、次元が異なるのに、相互に移り合う。「類双対変換」し合う。２つのグラフ構造がトレース束から「復元」される。

これがこの文章における最も重要な内容だと思います。

無限ループ構造は、自己ループの同型類としてではなく、非可換的展開構造として現れるということ、順序構造があり、これは「素構造が無限に続く」という場合も包含していることにも注意です。

その自己ループ的ゼータ的包摂が、ゼロ点の本質的入れ子構造を生み出すと考えられます。

これはあとでリーマンゼータをグラフ的ゼータから構成するときに問題になります。

自然数の素数への分解には、「順序性」がない、壊れている、という構造があります。この壊れているというところに、ガンマ構造を入れて、正規化するという手順をたどります。そうやって、順序構造があるところから、順序構造がないところへと移行するというわけです。

3. 正則グラフとゼロ点:花束構造のゼロ点構造の円環性

もともと抽象的な構造体に対する理論の一部である類双対写像が、具体的な式としてのゼータ構造体へと表現できる事がわかったのは、黒川重信氏の『絶対数学原論』とそのなかにある伊原ゼータの構成法からでした。伊原ゼータはグラフ論的構造の中の「可能なトレース経路をすべて数え上げるゼータ」と考えることができます。

黒川重信『絶対数学原論』には、絶対ゼータ関数のオイラー積が構成できる例として、花束構造を持つグラフにおける伊原ゼータが持ち出される場所があります。

伊原ゼータ関数の正則グラフ、特に「花束グラフ」型構造においては、そのゼロ点が単位円周上に並ぶことが示されており、これが「構造的リーマン予想」の足場を提供します。

花束グラフを（黒川？）無限テンソル積的に接続し、無限素構造を持つ非正則グラフとして構成しても、ゼロ点は依然として円環上に保たれます。このような円環的ゼロ点を保つ構造の正則グラフはラマヌジャン的特徴を持つとまとめられています。

ここでは、まず、グラフ的ゼータ構造を考えて、そのゼロ点構造がどのように円環的構成を持つのかということを考えます。

さて、まず、（正則）の有限グラフ構造から考えていきましょう。

伊原ゼータの類双対的写像変形には著しい性質がありました。それは、ループ型からツリー型、そして「発散的類双対ゼータ変形（拡大）」においても、「トレース束の構造」が不変であるという、いわば「変形における不動点構造」です。

ここで、「変形されるグラフ構造自体は無限にある」ということだけ、今は注意しておきます。この事実から、あとで、「いわばグラフ構造の中に、素数構造が、類双対的ゼータ拡大によって、復元される」ということを見ていきます。
「類双対写像の不動点構造」を説明しましょう。
まず、類双対写像をこう定義します。

定義（類双対写像）：
無限反復構造を持つトレース列に対し、局所的構造（素構造）と全体構造（トレース束）を非可換的に変形するが、その操作が構造体を変形しても、その構造体から生まれるトレース束が、再び同一のトレース列構造に戻るとき、構造全体として不動点となるような写像のこと。

このとき、「不動点となる構造」は、類双対写像によって「これ以上変形されない構造」であり、前もって言えば、それは「無限反復構造」を「構造的閉包」として保つもので、その結果、ゼロ点がループ構造に安定的に対応づけられるというのが「不動点構造＝円環的ゼロ点構造」となる理由です。
なぜ「円環的ゼロ点構造」になるのか？
ごく単純な状況、花束グラフや(２，２)-正則グラフの構造を考えてみましょう。
これらのグラフは：
すべてのノードが同型（正則性）であり、すべてのトレース経路が閉路で、無限反復に至る構造を持ち、このトレース構造は、素リンドン語によって分類可能（被約構造）であり、このような構造では、トレース束を変形しても、再び同じ構造が出現します。
類双対写像の反復に対して不動点となる構造です。
このことが示しているのは、伊原ゼータの構成における行列表示と固有値が、実は、トレース束が変化しないので、「その行列式構造が変化しない」ということを示しています。
以上のことから、伊原ゼータ関数では、各素ループ（サイクル）に対応するトレース経路は、

図 2. 伊原型ゼータと経路の“素数”長さ

各素ループ（サイクル）に対応するトレース経路は、

$$\prod_{[P]}(1-u^{\ell(P)})^{-1}$$

の形で表される（ここで $\ell(P)$ はループの長さ）

グラフが正則かつラマヌジャン型なら、対応する行列（無限ラプラシアンなど）の固有値は単位円周上に密集する

このときゼータ関数のゼロ点も単位円周上に現れます。

このとき、重要なのは、「u→ｑ＾－ｓ」という変換で、ゼロ点は「Re＝1/2」に運ばれ、リーマン予想類似を満たすという事実です。

補助的な構造定理を導入しましょう。

正則有限グラフの伊原ゼータは有理型へと収束します。つまり、「素構造」（素サイクル）（=素数）と「素リンドン元」（素リンドンループ）（=零点）の間に、準同型性、あるいは同型的な構造が存在するということが分かります。

つまり、「類双対的発散ゼータ構造」の最小ループの数、そしてそこから作られる「組合せ論的非周期的項」の構造は、「素リンドン元」から生成される無限イデアル的構造を持っています。つまり、有理型へと収束した正則有限グラフの伊原ゼータの行列式表現は有限なので、素構造の数は有限であり、それと同じ数だけ「零点」が生じてくるが、「ゼロ点の重複」が生じるので、以下のような式が成り立ちます。

素構造の数≧素リンドン元の数（ゼロ点の数）　（ゼロ点が重複する時の分だけ減る）

つまり、これは、正則グラフという非常に限定された構造の場合には、素構造の数から、「その数の素リンドン元」によってすべてのトレース構造が復元される、素リンドン元の数や構造を推測できるということを意味しています。正則有限グラフにおける、素リンドン元の有限生成性と呼べるのでしょうか。

これは、「類双対的発散変形」によって生まれた非可換の「ゼータ構造体」における重要な構造条件を示しています。

それは同じように有理的（有限）な形によって、「零点積」へと分解できるということ。

そして、また、その伊原ゼータの構造から、「素リンドン元」の長さによって規定される、単位円上に、一の（素リンドン元の長さ）上の「ゼロ点」を持つことを示しています。つまり、これは、同時に、正則グラフのラマヌジャン的な性質を持つものは、「ゼロ点構造」を単位円周上に持つ、ということを意味するということです。

まとめると、

補助命題

類双対写像に対して不動点となるグラフ構造（例：正則花束構造）に対して定義される伊原ゼータ関数は、そのゼロ点構造を単位円周上に持つ。

また、このゼロ点構造はトレース束の構造的安定性と同型である。

【視覚的表現】構成図（模式）

［トレース束（無限反復）］

↓ 類双対写像

［ツリー的展開（分解）］

↓ 閉包再構成

［ループ構造として復元（円環）］

↓ ゼータ構成

［行列式ゼータ］–固有値→［単位円周上のゼロ点］

「円環的ゼロ点構造」とは、類双対写像の不動点としての無限ループ構造が解析的に表象された結果であり、その本質は、グラフの正則性と類双対写像の可換性、トレース束の閉包構造、ゼータ行列式の特性方程式の固有値の安定性、によって保証されており、類双対変形の階層に対して安定な位相的構造としての円環が現れるということになります。

「ゼロ点構造が変化しない」という現象自体が、類双対写像における不動点構造の〈解析的な影〉である、というのが、この円環的ゼロ点構造の決定的な構成定理と言えます。

「変化しないこと」が決定的なのか？

もう一度整理すると、類双対写像とは

無限反復構造を、「素構造 → 素リンドン列 → 高次構造」と昇華させ、ツリー的な展開へと一旦変形し、そこから構造を閉包的に再帰的復元する写像でした。

しかし一般には、この変形は非可換・非結合で、複雑な構造変形を起こします。「トレース束」は変形されるのが普通であると考えられるので、この状況は、特殊な「不動点的状況」「構造的核」の存在を示していると言えます。

理論的に構成された「発散的類双対ゼータ」では、たしかに素構造が変形することで、ゼロ点も移動していくことがあった。だからこそ、逆に、変形しても移動しないゼロ点は、

＝ 構造的固定点

＝ 類双対圏における安定圏

＝ 円環的ゼロ点構造の本質

という「構造的定理」を示すということです。

補助定理

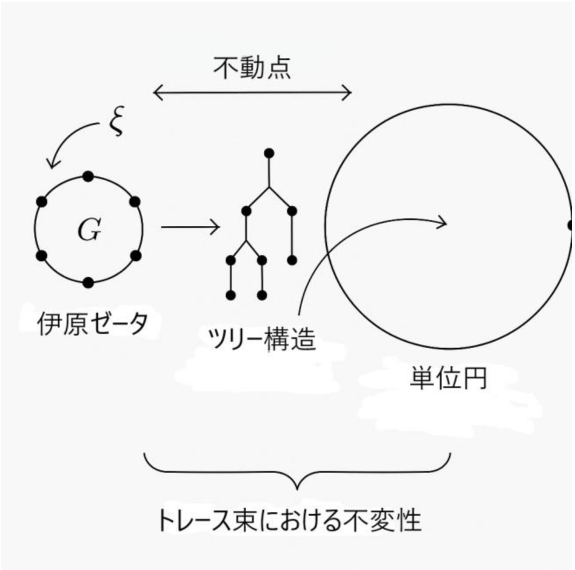
類双対不動点としての円環的ゼロ点構造

正則花束グラフに基づく伊原ゼータ構造は、類双対写像に対してトレース束不動点となる。このときゼータ関数のゼロ点構造は、単位円周上に安定して存在する。この円環構造は、トレース束における反復構造の閉包に対しても安定であり、類双対写像による反復展開に対して構造的固定点となる。

この構造定理があることで以下のことが言えます。

「なぜゼロ点が円になるのか？」に幾何的・代数的・圏論的に考える可能性が生まれる。「ゼロ点の移動が起きるときと、起きないときの境界」が見える。具体例としては「類双対写像の安定性」＝「ゼータ構造のラマヌジャン性」という形で接続できる。

図 3. 伊原ゼータとトレース束の関係

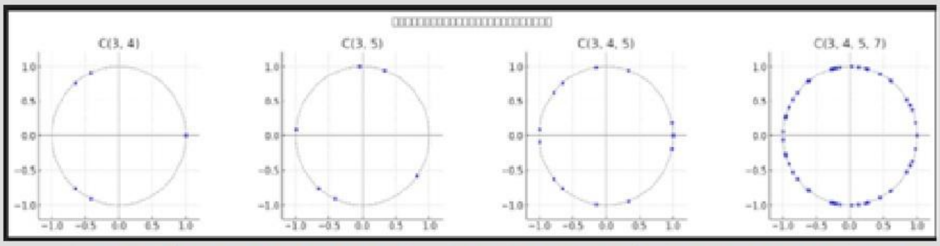


この発散的復元において、注意すべきは、復元されるループ経路は、基本的に非可換であり、いわば順序付き（有向）構造です。ところが、ゼロ点において円環性のおける対称元（共役元）が現れるでしょう。１のN乗根のときには、Nの半分より少し少なく、共役元が出てきます。このときに復元には、２つの可能性が生まれます。つまり、実軸に対称な、複素ゼロ点があるときには、あるループは、有向性を順・逆の方向へと持っており、ひとつのループへと結合することも可能であることです。このときには、有向辺は、順序構造を失います。「重解性」と区別することが重要です。その２つの復元を区別する方法は、殆どの場合、構造的には現れにくいです。バラバラにしてもいいし、結合してもよい。

正則グラフのグラフ的伊原ゼータのゼロ点の「円環的性質」が明らかになったということで、それらのゼータ構造をつなげて、同じように正則―ｄラマヌジャン的なツリー型展開を持つ、黒川テンソル的にテンソル積を構成したゼータ拡大体を構成して、そのトレース構造がやはり正則―ｄラマヌジャン的ツリー型構造を持っていることを理解すれば、それらが、同時に、「多数の、拡張的には無限の、ゼロ点が単位円周上に構成される」ということが示されます。

このときの実際の計算を図として表しておきます。

図 4. ラマヌジャン型グラフのゼロ点



各円環グラフC_nのテンソル積構造に基づいて得られる固有値の分布（= ゼータ構造に対応する値）は、複素平面上の単位円内部に自然に配置されました。

この構造の意味については、後で、「ゼロ点の構造定理」において、述べましょう。

4. ガンマ正規化と順序の破れ

さて、（正則）グラフゼータに関する伊原ゼータを具体例として、類双対変換における特殊な「発散的変形」がゼータ構造体を構成することを述べました。このとき、比喩的であるけど、「=」が非可換的作用を持っているように見えていることに気づきます。

（ループ的構造）=（←類双対変換→）=（ツリー構造）

このとき、「=」は左右を行き来しますが、行き来するたびに、構造体の「トレース束」を微妙に変形するのです。その変形が「可換構造」であるときに「一般的なイコール」であるということが分かります。この可換構造は、今までの考察から分かるように、「トレース束の構造が類双対変形によって不変な不動点に達すること」と同じ意味です。類双対写像は、一般的には非可換的に「ループとツリーの間を行き来する」変換だと言えるでしょう。「トレース束」の構造は変形によって一般に変形されます。フラクタル構造、たとえば人間の血管系は、循環的でもあるし、末梢血管系はツリー的でもあります。つまり、多くの場合、フラクタル構造は「ループとツリー構造の混合構造」であることにも注目が湧きます。

こういう非可換の変換の中で、伊原ゼータの「オイラー積」→「有理型に収まる母関数表記」は、一意的であるように見えるが、一般に、たとえば「ゼータ変形」、つまり発散的類双対変形をしたゼータ構造体は、そのままでは伊原ゼータの構造へと復元可能でしょうか？この逆問題は、僕の考えでは、「多値であろう」という考えです。そのまま、一意的に戻っていくわけではないと考えられるということです。しかし、この論考ではこの多値性が問題になることは少なくともないと思います。

だから、伊原ゼータに対する類双対的「ゼータ変形」の中に見えた、発散的変形は、その多値性の影であると言えるでしょう。

このように、いわば「トレース束」は、構造変形の間にある「量子的存在」であるとイメージするとわかりやすいです。「変形を施すまではまだ形になっていない」構造であるということです。「ループ」（＝波）、「ツリー」（＝粒子）、そして、類双対変換は基本的に非可換で多値性を持っていることはなんか意味深ですね。

ところで、こうしたグラフゼータは、いわば「順序付き素因数分解」を自然に持っています。つまり、「経路を辿った順番を保存している」ということです。この節では、「この順序構造をいわば壊すことができれば、グラフ論的ゼータから、リーマンゼータ的構造体を構成することができるだろう」という動機に基づいて論理を進めます。

そして、この順序性を破るのが、まずガンマ因子であると思われます。順序付きというのは、「グラフのループを巡る順序が保存されている」という意味です。それを処理できれば、「素構造をＮ個持つようなグラフ的ゼータを因子的ゼータへと変換可能ということ」なのでしょうか。

ここでは、乗法関数ｂ（ｎ）を通して、F1 幾何的構造を少し見ていきます。

このガンマ因子は、乗法的関数として構成される b(n) であり、行列式表現でグラフゼータに作用することで、リーマンゼータ類似構造への解析接続が可能になると思われます。このことは、乗法的関数を考えるときに、自然に F1 幾何的な状況が生じる一例にもなっていることに注意しておきます。

さて、具体的にそれを考えていきましょう。

まず、準備として、重なり数を示す乗法的階乗関数ｂ（ｎ）を導入します。

グラフゼータでは、素構造を回るループの巡る順番が保存されています。いわば「順序付き因数分解」されているというわけです。「トレース束」の普遍性により、「順序付き素数分解」と「順序付き素リンドン分解」には同型性が存在します。ここにまず注意して議論を進めます。

重なり数を数えると、

図 5. 重なり数

```
 1 : 1
 2 : 1
 3 : 1
 4 : 2        (2^2 → 2! = 2)
 5 : 1
 6 : 1        (2×3 → 1!×1! = 1)
 7 : 1
 8 : 6        (2^3 → 3! = 6)
 9 : 2        (3^2 → 2! = 2)
10 : 1
11 : 1
12 : 2        (2^2×3 → 2!×1! = 2)
13 : 1
14 : 1
15 : 1
16 : 24       (2^4 → 4! = 24)
17 : 1
18 : 2        (2×3^2 → 1!×2! = 2)
19 : 1
```

　以上の観察から、

図６ 重なり数の乗法関数

$$b(n) = \prod_{p^e \| n} \Gamma(e+1)$$

　ということが予想されます。
　これが乗法的関数であることは、ｎから素数ｐのｎ乗の項だけ取り出して、その重なりをｎ！と数え、それが残りの数の重なり数の重複分を増幅することを見れば、素数ごとにわたる数学的帰納法によって分かります。
　さて、直感的には、母関数表示、

図７ 母関数の発散

$$\zeta(s) + \zeta(s)^2 + \zeta(s)^3 + \cdots = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \zeta(s)^k\right) = \frac{\zeta(s)}{1-\zeta(s)}$$

　が成り立つと予想されますが、これは実際には発散します。ところが、ここでF1 幾何的な発想を持ってきます。
　たとえば、$2^3=8$ の重なり数を数えてみましょう。

８=［（１，２，２，２）、（２，２，２）、（１，２，４）、（２，４）、（４，２）、（１，８）］　３！=６個

つまり、単位元１を吸収元として数えれば、上記のゼータ関数の無限和の母関数は発散せず、ｂ（ｎ）の母関数として、成立しているということが分かります。この考えは、黒川テンソル積の構成、またゼロ点の構造理論において自然に出てきます。そこでは、「リーマン関数の S=１の極が、「吸収元」として解釈されます。

形式的には、つまりこうです。

４・1+1・4=１・４　　４≠１・４　（4=１・１・１・１・４というように発散しない）

おそらく、「単位元に部分的に非可換性が残っている」というような解釈ができそうですが、そのような考察は後に回します。

つまり、乗法的関数の係数体をＦ１幾何的空間から取ってくる、という自然な考えが湧きますが、これについては後で論じますので、ここでは示唆だけにしておきます。

ガンマ因子は重要ですが、実は、この論考では、いわば内在的にその存在が示されます

5. 類双対的変換とガンマ正規化、そして臨界線への写像

僕はもともと、ゼータどころか、いや数学どころか、むしろ、「ノイズ現象」「トレース構造」「動的変容」「フラクタル」「類双対写像」など、一見すると数論からは遠く見える構造に導かれるかたちで、自然とある種のゼータ的構造体が現れてきました。これについては、どこかで描くかもしれません。非常に抽象的な構造体を構成し、それがゼータ的構造を持っていることに気づいていたぐらいでした。

伊原ゼータが「ループ構造」と関係あるというのを知っていたのですが、僕の考えの中にある構造（**類双対閉包**）が、なんらかの式表現できるような構造であるとはとても思えなかったので、その関係性は不明瞭で、非可換的ゼータ構造体のようなものと考えていました。

しかし、伊原ゼータについて調べ始めたとき、僕は、自分の考えている構造の一つの具体例を示していることに気づきました。そして、それを、「ゼータ的発散変形」することも可能であることがわかったのです。

そういうグラフ的ゼータを変形したりしているうちに、そして気がつけば、それはリーマン予想を満たすようなゼロ点配置を持っており、しかもその配置が、明示的な行列式構成を通じて与えられるものであるものを構成できることがわかってきました。

この構造現象を、僕は「仮想的リーマンゼータ構造体」と呼ぶことにします。

それは、リーマンゼータの本質的性質を写し取るような構造的自己言及を持ち、かつ、素数やリンドン元のような離散的・構成的な元から出発して、臨界線上の零点構造に至る変容過程を描き出すものです。

グラフゼータのゼロ点構造が単位円環上に並ぶという性質に対し、変数変換（u→q^s）を行うことで、このゼロ点列を臨界線（Re(s)=1/2）へと写像できます。これで補正項の反転公式による対称性を壊すことなく、関数を構成することができます。

このとき、行列の固有値全体に 類双対変換を作用させる行列表現（複行列）が存在し、この操作により、ゼータの「ラマヌジャン型円環構造」→「リーマン型臨界構造」への移行が構成されます。

図８ 発散型類双対写像によるグラフ経路の変換

伊原ゼータ関数はグラフの閉路（primitive loop）を対象にし、

$$Z(u) = \prod_{[P]} \left(1 - u^{\ell(P)}\right)^{-1}$$

と定義されます。

ここで、Möbius変換に類似した操作は：

- **各ループ P を、他のループとの合成／変形で再構成すること**
- これは、**トレース系列の長さ構造（距離）を変形する操作**

たとえば、長さ ℓ のループ列を $\frac{a\ell+b}{c\ell+d}$ のように写すなら、

- 対応する u^{ℓ} の変数が、$u^{f(\ell)}$ に変わり、
- ゼータ関数の項全体が「再定式化」されます

これは、「伊原ゼータに対する変数変換的な操作」＝Möbius写像の**離散版**に相当します。

一般に、変数変換は、ループの構造や分解構造を変化させてしまいます。

このとき、類双対変換のように、グラフの構造的条件を変えずに、ゼロ点の「分解構造を保ったまま変形する変数変換」は存在するだろうか…という問い掛けが生まれます。たとえばMöbius変換は、円をたとえば直線などへと変更する、類双対写像のような働きを持っています。類双対写像は、「無限同心円フラクタルをデカルト螺旋へと写像する」という働きを持っていました。螺旋というのは、僕の理論では、直線と同相です。（これは、理論的に今のところ区別できないという意味で、区別する解釈はあります。）

このとき、「実は、類双対写像そのものが、**類双対変換**として、いわば∞―Möbius変換のように働くのではないだろうか？」という直感が湧きます。これを、実際後で実行します。

このとき、伊原ゼータの異なる「素リンドンループ」に該当する素経路の長さが正則性のもとである意味素数と同一視することを利用し、正則花束ゼータの中で、単位円の１のＮ乗根として重なっているゼロ点をいわば素数ごとに分離して、素数べきの円構造へと無限分解し、その無限分解された同心円構造を、「類双対変換」するという操作を考えます。詳しくは後で書きますが、この描像が役に立つでしょう。

このとき、あとで、詳しいことを説明しますが、黒川テンソル積と非可換零点構造を考えます。

正則グラフゼータにおける「類双対変換によるトレース束の不変性」から、「∞花束グラフ」（ノードに区別可能なエッジが無限個ついたもの）を「類双対的発散的ゼータ変形」すると、正則条件というもとで、次のようなことが成り立ちます。

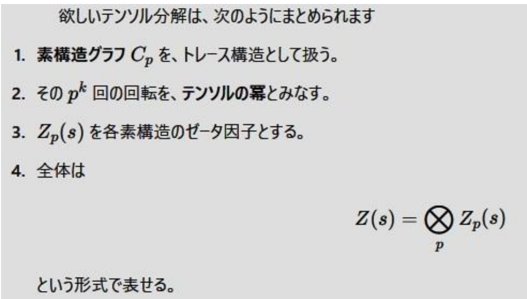
つまり、「無限個の素構造によって作られるトレース経路」に現れる素リンドン元分解は、その「素構造」（=素数）、素リンドンの順序的組み合わせ（=順序性を持った自然数の素数による分解）、と同型性を持ちます。これは、「類双対変形」においてトレース束が変化しないことから、素構造分解と素リンドン分解が一致することから導かれます。これがさきほど「素リンドンループ」と「素数」を対応させることができるという正当化になります。非正則の場合には成立しないことに注意してください。

このことから次のことが導き出されます。

トレース束の類双対不変性無限花束グラフにおける、順序付き無限黒川テンソル表現は、順序付き「素リンドンループ構造」において、「トレース束」の構造として、同型である。

説明します。

図 9. グラフの結合をテンソル積として捉える



欲しいテンソル分解は、次のようにまとめられます

1. **素構造グラフ C_p** を、トレース構造として扱う。
2. その p^k 回の回転を、**テンソルの冪**とみなす。
3. $Z_p(s)$ を各素構造のゼータ因子とする。
4. 全体は

$$Z(s) = \bigotimes_p Z_p(s)$$

という形式で表せる。

このようなグラフ的構造のテンソル積を考えます。このテンソル積は、ひとつひとつ正則であって、それが一つのノード、あるいは無限に重なり合うＦ1 幾何的「吸収元」によって繋がれている構造であると捉え直すことができます。

そして、先程の考察より、正則条件のもとで、すべての素数にわたる長さを持つ素リンドンループ構造をつなげた、無限黒川テンソル積は、順序付き「素因数分解」の構造と一致します。

つまり、花束グラフゼータに、「類双対型発散ゼータ拡大」をなんどもいろんな方法で、行っていく無限の系列があります。

このとき、無限の形のグラフ構造が復元できますが、「素リンドン分解の一意性」（マクマホンの定理）より、経路の長さｎが因数分解できる場合、さらに経路の長さがその約

数の経路へと縮約（ゼータ拡大）でき、最終的には、経路の長さが２，３，５，７…つまりすべての自然数の素数を渡るように縮約されます。

このことを、「ゼータ拡大による素数構造のフラクタル的復元性」と呼べるでしょう。

この著しい性質は驚くべき事実であって、そして、このゼータがどんどん拡大していって、ある特定の形式でまとまりを見せるというのは、黒川重信の、黒川テンソル積によるゼータ結合の理論を思わせるところがあります。

ところで、これは、「グラフがラマヌジャン正則」つまり「正則」だから起こるのであって、「非正則」であったらどうなるのか？　おそらくその「素リンドン構造」はもっと拡大され、あるイデアル類群の構造的特徴を示し、グラフゼータは、デデキント型ゼータの影になるのでは？という予想が湧きます。

このことは後でもう一度取り上げます。

そこで、前の章の、正則花束グラフにおける、ゼロ点が「円環的配置として並ぶ」という構造定理が重要になってきます。つまり、すべての素数の長さに関して、ゼロ点が単位円の中に埋め込まれて、「単位元のところだけ無限個の重なりがある」という順序的構造体が、この黒川テンソル積と順序付き素リンドンループ構造の本質的な構造であることが分かります。

あとで重要になってきますが、このとき、素数の奇数性より、ゼロ点の配置が「負の複素数平面上」にきわめて偏って存在していることに注意できます。そして、これらの配置は、素数の素性によって、倍数的な重なりを「単位元」以外では持つことない。このことを「アンチイデアル性」と呼んでおきます。そして、いわば無限の素数にわたって、有限体を、単位元の重なり部分だけ加法構造が壊れた、Ｆ１構造的構造体であるということが観察できます。

この演算構造は、単位円の周りを回転する変換で表現できます。

この回転する演算構造を、以下の、「円環構造」→「直線構造（二分の一臨界線）」へと移す類双対写像を考えます。

この変換を考えることによって、単位円上の、素リンドン演算構造を持つゼロ点は、すべて実部ｓ=二分の一の直線上に、同時に、リーマンゼータ関数が満たす変換ｓ→１－ｓを保ちつつ変換する、というのが流れです。

このとき、素構造や素リンドン構造を示すグラフゼータ構造の中で「順序構造」が保たれていることに注意してください。

また、「無限の素数ごとに重なり合う、多数の素リンドンゼロ点の単位円構造上の演算構造」が「無限円から直線へ変換」という類双対的変形の側面があることが重要です。

このグラフゼータには、伊原ゼータによる行列式表示があり、さきほど示したように、類双対変換にも特徴があることから、この変換された順序的ゼータ構造も、行列式表示とそれを移す変換構造を持っていることが分かります。

問題は、この順序をいわば「忘れて」、いわばリーマンゼータ関数的構造に予測される構造を満たすような関数を作れるかどうかということになってきます。

つまり、まず、無限花束グラフの黒川テンソル積分解されたゼータ構造を考えましょう。

伊原ゼータＺ（u）を考え、同じように、log をとり、母関数表記へと変換します。下の方に書いてあるのが、有理系へと縮約された伊原ゼータの形です。この２つは、どちらも、「ある正則有限グラフのあらゆる経路をトレースした組み合わせ的表現」であることに注意してください。

図 10.伊原型ゼータの基本的変換

$$\log Z(u) = \sum_{[P]} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} u^{m\ell(P)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k}{k} u^k.$$

$$Z(u) = \prod_{[P]} \frac{1}{1-u^{\ell(P)}}.$$

ここで、ｐは素リンドン元でもいいし、素構造でもいいということが、「トレース束の不変性」からわかっています。この伊原ゼータは、素構造においても、素リンドン元においても、行列式表現を持っており、しかし、その行列式はやはり、それは、単位円周上に、「アンチイデアル的」に、また F1 幾何的に、配置されています。

さきほどいいましたように、あらゆる形で、「類双対的ゼータ拡大」を行って、拡大と縮約を繰り返すことにより、l(p)は、２，３，５…という素数を渡る構造へと帰着しています。これに注意してください。

ここに、いわば円を直線に移す Möbius 変換を無限に作用させた操作に似た類双対変換 T(A)を作用させます。

すると、この行列の展開式は、順序付きリーマンゼータ類似の構造へと変換されます。

まとめると次のような流れです。

図 11.類双対的変換の流れ

花束ゼータ → 類双対変換 → ガンマ正規化 → オイラー積 → リーマンゼータ

まず、類双対変換を次のような、非可換離散構造を連続的空間へと写像する、連続的な変形として定義します。

つまり、素数べき p＾s=e＾slog(p)を素数によってスケーリングされた無限同心円構造としてみて、それを螺旋、そして直線に、写像する**類双対変形**をを考えます。

図 12.類双対変換の要素の解説

これを「類双対変換」と見ると：

$$\boxed{u^p \longrightarrow p^s \longrightarrow \bar{e}^{s\log p}.}$$

つまり、

- **u^p は閉路構造（生成論的）**
- **p^s は解析的指数（積分構造）**
- **e^{s log p} は螺旋（位相展開）**

これは、最初に載っている図式、「無限同心円構造を、デカルト螺旋形にプロットする」という、類双対写像のそのままの表現であることに注意してください。ただ、同心円構造は、「素数円」だけ現れていて、そこから構成されているという違いはありますが、デカルト螺旋という、スケーリング不変のフラクタル構造によって、「非可換フラクタル構造が可換的連続フラクタル構造へと移される」という類双対写像の例になっています。

ここで起こっていることを言うと、つまり、単位円周上に並んでいた伊原ゼータのゼロ点は、この過程でまず、「スケール logp の無限同心円フラクタルへと解体」されます。そのあと、その解体された無限同心円フラクタルは、そのまま円周上に「ゼロ点」を載せたまま、「正則ラマヌジャン伊原ゼータの定理」のとおり、リーマンゼータ的臨界線(Re＝1/2)へと移されます。つまり、このゼータは、リーマン予想類似を満たします。

今行ったことをまとめると、実は、ずっと「類双対変換」を繰り返し続けているということに注意してください。

つまり、花束グラフがあって、それを「類双対的発散ゼータ拡大」していったら、グラフ構造の中に自然数を構成する素数構造が復元されました。そのあと、さきほどのやはり「類双対変換」を行うと、また新しいゼータ関数ができました。つまり、類双対変換は、「フラクタルをフラクタルへと変形する」写像ですが、ゼータ関数はフラクタル的特徴を持っているということなのです。

これによって、非可換構造は連続構造へとフラクタル構造を保ちつつ、変形される。

具体的には、

図 13.類双対変換による直線への射影

素数べきの位相

$$z_{p^m} = p^{im} = e^{i\,m\log p}.$$

螺旋パラメータ

$$r = a\,\theta, \quad \theta = m\,\log p. \quad \Longrightarrow \quad r_{p^m} = a\,m\,\log p.$$

臨界線への漸近

無限べきの積分極限で、
素数 log スケールが Re(s)=1/2 に線形射影される。

この変換によって、（正則）花束ゼータの「無限素リンドン元（ゼロ点）」展開は、オイラー積へと移されます。

図 14. 類双対変換でのオイラー積変換

類双対変換でオイラー積に移す

- 類双対変換：

$$u^p \longrightarrow p^{-s} \longrightarrow e^{-s\log p}.$$

- 花束ゼータのリンドン積は、

$$Z_{\text{花束}}(u) = \prod_{P}(1 - u^{\ell(P)})^{-1} \quad \longrightarrow \quad Z_{\text{Euler}}(s) = \prod_{p}(1 - p^{-s})^{-1}.$$

- ここで、素閉路の長さ $\ell(P)$ が $\log p$ に対応するので、
無限素リンドン構造が素数構造に写る。

このとき、花束ゼータのときには、実は「順序構造が残っており、それが保存しているために、重なり数ｂ（ｎ）という乗法関数がおそらく潜在的には、載せられていることに注意してください。つまり、こうです。

図 15. ガンマ正規化

ガンマ正規化

- 花束ゼータのリンドン積は、多重度が階乗的に発散する：

$$Z_{\text{花束}}(s) \sim \sum_{n} b(n)\,u^n.$$

- これを **ガンマ正規化**（階乗分割）で除去する：

$$Z_{\Gamma}(s) = \frac{Z_{\text{花束}}(s)}{\Gamma(b(n))} \quad \text{（概念的）}.$$

- これにより、重なりを除去して、
素閉路の積が純粋なオイラー積に一致する形に整う。

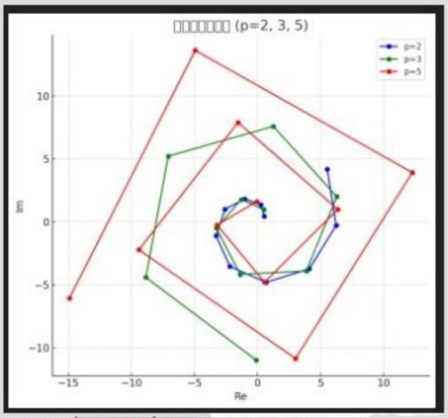
この乗法関数によって、「素リンドン積展開」における「重なり数」を除去していくと、ついに、リーマンゼータ的オイラー積が生成論的の構成されると考えられます。
ところが、以上の変換を行ってみると、結果は、オイラー積へと到達します。

図 16. リーマンゼータのオイラー積

$$Z_{\mathrm{Euler}}(s) = \prod_{p} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

このとき、類双対写像における連続的変換によって、自然に解析接続が起こっており、零点の移動も行われていると考えられます。厳密には、これは、「離散作用」の部分しか考えておらず、「連続作用」の部分がどのように起こっているのか、この段階では不明です。しかし、素数スケールの同心円上の点は、つまり、「素リンドン元」→「ゼロ点」という変換です。
この連続的プロットを一応コンピュータでまとめてみたので、図を見てみてください。

図 17 素数螺旋の計算



「素数の虚数べきで作る螺旋」の数値例です。

青：p=2

緑：p=3

赤：p=5

各素数について、$m = 1, 2, \ldots, 10$ の虚数べきによる螺旋をプロットしています。

$$r = a \cdot m \log p, \quad \theta = m \log p.$$

このとき、類双対変換によって、「素リンドン分解」と「ゼロ点分解」が重なったことによって、リーマンゼータにも、「素数構造」と「高次の素数構造」（=ゼロ点構造）があ

ることが示され、可換的領域における、高次素構造の一つの例が現れます。非可換的重なり数が剰余されて、可換的構造に移されたというわけです。

つまり、変数変換の中に、実は、「ガンマ因子」は内在していたということなのです。

そして、これは、ちょうど、「変数変換によって移り変わる」

（オイラー積）→←（ハダマード（ゼロ点）積）

という移り変わりを支えていると考えられるということです。

また、素数の「素性」によって、このゼロ点構造には、重なりがなくて、「アンチイデアル性」も保っていることにも注意してください。素数スケールの同心円は、１の素数乗根なので、そのどれも重なりを持っておらず、有限体のような構造をしていると考えられます。しかし、実は、単位元は、この無限同心円において、「無限の重なり」を形成していて、「吸収元」になっており、部分的に加法が壊れています。

これが反映されているのが、リーマンゼータにおいて、s=１に極があって、−１にはゼロ点がないという、「対称性の破れ」の反映だと見ることができるでしょう。その結果、いわゆる「F１幾何的な演算構造」を持つことになっています。

ここで、非可換的黒川テンソル分解は、可換的黒川テンソル分解（オイラー積）へと対応付けられたということです。しかも、この対応を構成するときの「ガンマ正規化」b（n）の構成が、リーマンゼータ関数のN乗和を係数体をF１幾何的「吸収元」と計算することによって、つまり、F1幾何的な作用を通じて、構成されていることは興味深い事実ではないでしょうか。

つまり、

花束グラフゼータの「黒川無限テンソル積」≅ゼロ点構造　（F１幾何的）

この同型性から、たとえば、楕円関数の有理点が有限生成である、というような構造定理が思い描かれるでしょう。

この生成論的リーマンゼータ関数は、スケーリング不変のデカルト螺旋によって移されて、解析接続されましたが、このことによって、２つの疑問が湧いてきます。

つまり、この類双対変換とガンマ正規化の手続きは、すでに単位円周上に一のN乗根として計算可能な、花束ゼータの「素リンドンゼロ点」からリーマンゼータのゼロ点を計算する手続きを与えるでしょうか。

また、この類双対変換が、作用している「作用素環？」というものはどういうものであるのでしょうか？　これは、直感的には、「フラクタルをフラクタルへとフラクタル性を保ちつつ変形していく、フラクタル圏」のようなものであると想像されます。

なぜなら、「フラクタルをフラクタルへと変形する仕方には色々とある」からです。基本的には、点・線・円・波動・螺旋の組み合わせであり、それらの組み合わせですべてが構成されるのかというのは、フラクタル理論における重要な位相的問題でしょう。
もうひとつは、なぜ、このような構成によって、「無限同心円上にプロットされた」ゼロ点が、どのようにして、二分の一の臨界領域へと移されるのでしょうか？
変数変換である類双対変換を見てみると、「回転状態を複素平面上の直線へと移す写像であること」が分かります。このことと、リーマンゼータのｓ→１－ｓにおける対称性から考えると、つまり、以下のことが想定されます。

図 18 類双対変換によるゼロ点の臨界線への射影

類双対変換：$u^p \longrightarrow p^{2\pi s} \longrightarrow e^{s\,2\pi \log p}$ は、 位相＝螺旋＝解析接続の対称軸 を $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ に整列させる。

- 「螺旋は位相（波数）」
- 「直線プロットは log スケール」
- 「解析接続の汎関数等式が対称軸を Re(s)=1/2 に決める」

これを、「生成論的に作られたリーマンゼータは、類双対変換によって、ゼロ点を臨界線上つまり（Re=二分の一）領域へと移されたような構造をしている」と言い換えることができます。これが、さきほどいいました、「ガンマ因子の内在性」です。
つまり、ガンマ因子の「反転公式」はこの変換に内在しているのです。
これで、一応、「生成論的リーマンゼータ的構造体」の類双対写像的構成法の流れのひとつの概要が説明できたと思います。
正則ラマヌジャングラフの定理より、リーマン予想、つまり Re＝1/2 が成立します。
さて、問題となるのは、類双対写像、

図 18 類双対変換によるゼロ点の臨界線への射影

類双対変換でオイラー積に移す

- 類双対変換：

$$u^p \longrightarrow p^{-s} \longrightarrow e^{-s\log p}.$$

- 花束ゼータのリンドン積は、

$$Z_{\text{花束}}(u) = \prod_P (1 - u^{\ell(P)})^{-1} \quad \longrightarrow \quad Z_{\text{Euler}}(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}.$$

- ここで、素閉路の長さ $\ell(P)$ が $\log p$ に対応するので、
無限素リンドン構造が素数構造に写る。

が、「離散的である」こと。そして、きちんとした「フラクタル性」を明瞭には示していないことです。

つまり、類双対写像の中に連続的な構造を入れて、それがスケーリングを保ちつつ、あるフラクタル的拡大写像によって、フラクタル的性質を持っていることを満たす必要があります。

そのためには、２，３，５，７…などの「素数べき」として現れている同心円構造を、素数の増加列が示しているとされる、log スケーリングによって、解釈し直し、そのなかでフラクタル的拡大写像を考え、そのうえで、「素数無限同心円構造と素数無限らせん構造の log スケーリングにおけるフラクタル性」を、「類双対変形」によって、直線上に移さなければいけません。

いわば、バラバラに離散的分布している素数べきの同心円構造から、「オイラー積」はすでに構成が可能であることは示されているが、その「円と円との間の構造を連続的な構造でつなぎ合わせる」つまり解析接続する、ということです。

実際に、普通に「デカルト螺旋」でやると、項が潰れて変換が意味がなさないことが示されます。

つまり、普通はべき乗的な広がりがある「フラクタル構造」を、対数的なスケーリングによって縮約して、そこに新しい「フラクタル構造」を入れ込むという作業です。そのことによって、「素数べきによって広がっていく同心円構造」の間を連続的につなぎ合わせることができる。

そうすることによって、「素数無限同心円構造上のゼロ点」は、デカルト螺旋ならぬ、「非デカルト的対数スケーリング螺旋」のなかに移されて、それが直線上に並ぶことが示されれば、それが、僕の生成論的リーマンゼータ関数の構成における終了点です。

これは、

非可換的・離散的ゼータ構造体　→　可換的・連続的ゼータ構造体

という一般的構成法の一例となっていることに注意してください。

この類双対的変換は、いわば Möbius 変換が、「円→直線」に移すように、これが「無限同心円→螺旋形→直線（臨界線Ｒe=二分の一）」に移す、つまりいいかえると、「∞―Möbius 変換のようなもの」である、ということを注目することもできます。

つまり、いわば「無限の同心円構造の広がりを、その周りの空間ごと、フラクタル的なスケーリングを守ったまま、螺旋形の、これもまた連続的な広がり（あるいは局所的空間）へと写像する変換」であるということになります。この場合「不動点」は、フラクタル構造の中の「最小構造」のなかの不変部分であるということになるでしょう。

そして、核心はこうです。

図 20 トレース束のなかのゼロ点を直線上に射影

$\mathbf{Tr}(\text{類双対作用}) = \zeta(s)$　の臨界線上零点　$\Re(s) = \frac{1}{2}$.

６，ヒルベルトポリヤの作用素とは？

さて、構成された、自然数を構成する全素数を復元されたような正則花束グラフ構造の伊原ゼータに戻りましょう。

このゼータ関数の行列式表現は、いわば非周期項の縮約、素リンドン元を計算していって、それの連結性を求めていくことで伊原ゼータの定義通りに、構成していけるでしょう。

この意味を考えてみると、なんとなく、素数とゼロ点の密度の間には、

素数　←log　ゼロ点　（密度）

というような減衰があるのではないかと感じられますが、これは厳密な構成ではないです。基本は同相であるので、つまり、「なんか log 的な入れ子の中に入っているな」という感覚です。これはあとで重要になってきます。

さて、そのような、伊原ゼータの行列式表現の行列に対し、類双対変換が行われます。

図 21. 局所類双対写像の連続化

定義（類双対写像）

定義 1.4

素閉路変数 u^p に作用する**類双対写像** $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D}(u^p) := e^{-s\log p} \quad (s \in \mathbb{C})$$

で与える。この作用素は全素数についてのテンソル積で拡張される：

$$\mathcal{D} := \bigotimes_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{D}_p.$$

この類双対変換は、さきほどは、素数ごとの局所でしか定義されなかったので、これを全体へと拡張します。それを表したのが、下の図です。

あとは、伊原行列に、このようなテンソル積を作用させることができれば、それがいわゆる「ヒルベルトポリヤ」の作用素ということになりましょう。

それを考えるときに、さきほどの考えが役に立ちます。

図 22 連続的類双対変換でのオイラー積の復元

定理（構成論的ヒルベルト・ポリヤ作用素）

定理 1.5
花束ループグラフ G のゼータ拡大を発散的類双対写像で写像するとき、
その行列式表示は次のように与えられる：

$$Z_G(u) = \prod_{[P]} (1-u^{|P|})^{-1} \quad \xrightarrow{\mathcal{D}} \quad \zeta(s) = \prod_{p} (1-p^{-s})^{-1}.$$

このとき、

- 変数写像は素閉路の次数を対数スケーリングに写す Mellin 核に一致する。
- 得られる行列式は自己随伴作用素のスペクトルを持ち、その固有値は臨界線上に配置される。

まず、以下の流れを意識してください。
このような形で、非可換の順序構造はガンマ因子によって、可換的に制御されます。

図 23 連続的類双対変換の構造図

$$\underbrace{\text{素閉路}}_{\text{局所}} \Longrightarrow \underbrace{\text{行列ブロック}}_{\text{表現}} \Longrightarrow \underbrace{\text{入れ子複行列環}}_{\text{順序構造の統合}} \Longrightarrow \underbrace{\text{類双対変換}}_{\text{臨界線写像}}$$

つまり、

図 24 ブロック行列の材料

素数ごとに構成されるブロック行列

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & \log p \\ \log p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{で} \quad M = \bigoplus_{p} M_p$$

注・この予備的なヒルベルト＝ポリア対応は、構造的仮説として提示されています。
その解析的厳密性は再検討され、今後の精緻化の可能性を残しています。詳しくは、末尾の「補遺 1」へ。

このような行列を考えます。
まず、対角成分がゼロであるので、素数構造そのものは自己に留まりません（非自明性）。非対角に $\log p$であって、素数の対数スケールが入れ子の「跳躍幅」になります。対称性があって、逆向きの経路・双対経路が同等に扱われます（類双対性）。
同心円構造は、素数 pによって「円周長」が $\log p$で決まります。そのため、素数の $\log p$は 位相角・螺旋の巻きの角速度 に対応すると言えます。
このブロック行列は、螺旋構造を持つ基底を回す作用素のようなものであると考えられます。そして、つまり、無限直和で素数すべての同心円構造を一つの大きな作用素空間に束ねます。これが順序構造を壊す（素数同士の独立性が対称入れ子により混ざる）作用を持っており、ガンマ因子の内在性を示しています。
結果的に、螺旋構造が臨界線に写される（類双対変換の点・線・円・螺旋といった幾何的対称性を保ちつつの構造のスケーリングの保存性）。

図 25. 連続的類双対変換の最終型

作用素の核は

$$T : u^p \mapsto e^{-s \log p} \quad \text{かつ} \quad (\text{全素数})\ p \text{ についてテンソル積}$$

として定義できます。

1つの閉路 → Mellin型核
素閉路列 → 素リンドン分解
全素閉路 → 素リンドンテンソル積

この写像が**自己随伴性**を持ち、かつ全体で**固有値が臨界線上に並ぶ**

類双対変換の核は、メリン型の変換であり、ガンマ因子を内在させ、素構造ごとに素リンドン構造へと移行させ、その作用を統合するようなものになります。

結果として、無限同心円状の情報を、周囲の状況とともに、フラクタル的スケーリングを保ったまま、直線状へと運びます。

「類双対写像」の連続版ですね。

まとめると、

この結果統合された、ヒルベルトポリヤの作用素は、

図 26. 伊原型ゼータの行列式表現へと組み込む

行列式構造

伊原ゼータの行列式表示と同じ：

$$Z(u) = \det(I - uA + u^2 Q)^{-1}$$

ここで：

- A = アジャセンシー行列（経路情報）
- Q = 次数補正行列（自己ループ補正）

これに **ブロック行列** M を組み込むと：

$$\det(I - uMA + u^2 MQ)$$

みたいな構造が自然に現れる。

ゆえに、ここでも、入れ子構造が出てきて、やはりフラクタル構造が全体をスケーリングによって支配していることが観察することができます。要するに、

図 27. 構成論的ヒルベルトポリヤ作用素

補題（構成的ヒルベルト・ポリヤ作用素）
各素数pに対して、複行列

$$M_p = \begin{pmatrix} 0 & \log p \\ \log p & 0 \end{pmatrix}$$

を考える。これらは自己共役である。
全素数にわたる無限テンソル積

$$\mathcal{M} = \bigotimes_{p \in \mathbb{P}} M_p$$

は、ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \bigotimes_p \mathbb{C}^2$ 上の自己共役作用素である。
このとき、$\mathcal{M}$ のスペクトル構造は、素数構造と log p によるスケーリングを通じて、リーマンゼータ関数のゼロ点の対称構造と一致する。
特に、素リンドン経路の類双対変換（＝logスケールによる指数変換）を通じて、
同心円的配置のゼロ点が臨界線に写像されることにより、構成論的ヒルベルト・ポリヤの作用素として解釈される。

ひとつひとつ説明しますと、この「ヒルベルト・ポリヤ作用素」は、グラフ論的な構造が作り出している「非可換的な自然数の素数（＝素構造）構造（のゼロ点構造（＝素リンドン）」を、局所ごとに「ガンマ因子」によって制御しつつ、「円を直線に移す」Mebius 変換が素数ごとに束ねられて、∞メビウスとなって、無限同心円フラクタルを一気に「周囲の空間ごと」直線へと移しています。
そして、その特徴としては、無限に入れ子構造となった「複行列」的な構造的特徴を持っており、その中身は、自己共役であり、そしてそれが無限に連なったヒルベルト空間上で、自己共役性を保っています。そして、これらの要請は、単純に、「類双対写像」による「トレース束」の変形からでてきた、さまざまな要素を、そのつど、「類双対写像」として受け取り再度変形していくという、いわば「単純解析」的な操作によって裏付けられています。
複行列というのは、いわば、入れ子型になった行列であり、さまざまな演算パターンを内在させています。これについてはごくわずかに別の章で触れますが、ここでは、共役的∞メビウス構造として、その姿を、しかも素数の螺旋形入れ子構造の姿で現れています。
いままでの論から分かる通り、重要な作用は、「類双対写像」であり、この論考を描くきっかけになったのは、明らかに非自明な復元経路である、素リンドン経路による、「類双対的発散ゼータ拡大」を見つけたことによりましたが、それにより、素数の構造が実はホログラム・フラクタル的復元性を持っていることは驚きでした。
ただし、「類双対写像」というのは、非常に多値で直感的な要素を持っており、その厳密な、俯瞰的作用を僕は見抜いていません。すこし触れたし、実は、いままでも問題として内在していたのですが、たとえば、「トレース束から線を復元するのか、螺旋を復元するのか」というのは、実は、非常に難しい問題を含んでおり、たとえば、「極限的に緩やかな螺旋形の階段を歩いているひと」は、「直線的な経路を歩いているひと」と、内在的な状態、つまり主観的な状態において、区別できるでしょうか？　この復元問題には、「ト

レース経路自体の「圏」化（＝層？＝局所情報を保持するという意味）とか、あるいは、「無限内在性と有限内在性の違い」など、部分的な考えはあっても、完全な解決には程遠いです。

この「トレース圏」という考え方は、トレース経路が「非正則」になったときに、間違いなく重要になるし、それが、別の復元経路を生みますことはすでに分かっています。

この章で出てきた連続的「類双対写像」でも、「素数型螺旋」があり、「素数型無限同心円」があり、「臨界線」があり、これらをいちおう同時に制御しているからこの場合には問題ないですが、問題になってくる状況はあるでしょう。

実際に、「螺旋形を巻き取る」というのに、∞メビウス構造が必要でした。もっとシンプルなものはないのか？だれもが思うでしょう。

類双対写像、つまり僕は「動的変容の理論」と呼んでいますが、これは、まだ始まって間もない世界であるようだ、というのが僕の認識です。

6.類双対写像のフラクタル的変形の連続化

そのような変形はどれくらいあるのか？

どのような構成法があるのか？

僕はそのような問題にこの論考では踏み込みませんが、一般的には、たくさんあるだろう、ということが推定されます。たとえば、僕がよく考える例（ノイズ観察する例とも言える）、「デカルト螺旋がそれぞれの局所状態の中で点フラクタルとして解体していく」という動的変容を考えてみてください。これもまた、「連続的変容」の一種です。そして、この「連続的変容」は、「連続的類双対変換」によって、無限同心円フラクタルのなかに移されるでしょう。このような解体法がたくさんあるだろうというのは、この例からも想像できることです。そして、このとき、デカルト螺旋にあった「スケーリング無限構造」つまりいくらどのくらい拡大しても変化しないというフラクタル構造が、無限同心円構造の中に移されたときに、同心円の大きさによる「倍写像」へと制限され、変化するということも分かる。つまり、フラクタル構造は保たれているものの、構造自体が変化しています。類双対写像の問題はこのような、構造体の変形に伴う、構造自体の情報や関係性の変化の問題も含んでいます。ここに、本質的な「非可換的変形」の問題が現れているということは言うまでもありません。

この章では、螺旋形フラクタルに、周期的波動を加えることもまた、類双対的である、という例を考察してみます。

問題を整理しましょう。

まず、素数構造に基づくグラフゼータ的生成論（トレース束、素リンドン列、フラクタル的倍写像）を通じて、可換的オイラー積を持つ、リーマンゼータ的ゼータ構造体を構成しました。しかし、それを実行した「類双対変換」は、無限の素数べき同心円構造という離散的な領域で成立しているため、それを、「連続的に拡張」しなければ、「類双対変換

によって、結局、さまざまな構造体はどのように、「直線上」に移されるのかわからない、という状況が現れていたということです。「直線ですらない」かもしれない。そうしたら、僕が構成したものは、「知られているリーマンゼータの構造的特徴と異なりそうだ」という結果になる。

だから、まず、それを log スケールに対応させた連続写像として構成することを考え、素数同心円の離散的広がりに応じた、log スケーリングに基づくフラクタルスケーリング変換を満たす、連続的位相を入れようという発想が湧きます。

それによって、「冪的広がりを持つ同心円フラクタルとデカルト螺旋的構造」をいわば対数スケーリングによって、伸び縮みさせ、そのフラクタル性を満たす、新しいスケーリング構造（log スケーリング）を入れることを考えてみましょう。

まず、素数が現れてくるスケーリングが log 的スケーリングであるということはよく知られています。

で、まず、基本的な log スケーリング、

図 28. 素数冪を対数的に変形する

- $\ell(P)$：巡回構造 P の「長さ」や「次数」
- p：それに対応する素数（写像によって対応）
- $\log p$：その対数スケール

つまり、

$$\ell(P) \quad \longmapsto \quad p \quad \longmapsto \quad \log p$$

さらに、この関係性を拡張して、

素数からログへの写像（離散 → 連続）

次に、この素数列を連続変数へと写す「スケール変換」が：

$$p_n \quad \mapsto \quad \log p_n$$

これは自然対数写像（連続）です。

こうすることによって、素数冪同心円の広がりという離散的な構造の中に、連続的 log スケーリングを入れていくことを考えます。これに、以下のように、積分による表現を加え、素数冪同心円構造の広がりの中に対数螺旋構造を入れていって、次第に、「対数スケーリングによる類双対変換」というものを連続的なものとして考えていきます。

図 29. 素数ごとの変換を重ねていく

$$Z[f] = \sum_{P \in \mathcal{P}} f(\log p_{\ell(P)})$$

や、連続化して：

$$Z[f] = \int_0^\infty f(\log p(x))\, dx \quad \text{with} \quad p(x) = \text{n番目の素数}$$

この「$p(x)$ の連続化」にはチュビンガーの素数近似式 $p_n \sim n \log n$ を使えば、

$$Z[f] \approx \int_0^\infty f(\log(n \log n))\, dn$$

のようにも変形できます。

こうして、離散的なグラフ巡回構造（リンドン列）を、連続的なログスケール空間へと変換することで、対数螺旋構造が自然に生成されます。

こういう、離散的構造をつなぐ連続性を構成を持つ関数を汎関数と呼び、たとえば、連続性を導入された階乗関数Ｎ！（=ガンマ関数）が有名でしょう。

ところが、デカルト螺旋をそのまま、log スケーリングして、素数の拡大性に合わせていくだけでは、だめで、それに付随して、「補正項」を入れなければいけないということがわかった。それは、上下に揺れる波のような、振動する補正項であって、このように補正項を付け加えて変形され、log スケーリングされたデカルト螺旋を、「非デカルト螺旋」と呼ぶことができるだろうと思います。

このそして逆に言うと、「螺旋形に波動項を付け加えても、フラクタル的自己相似性は保たれる」というのが、本質的な、「類双対写像」および「類双対変換」の多値性の一つの側面であると考えられます。単純に、視覚的に、デカルト螺旋の途中に、様々な毛細血管のような、フラクタルツリーを生やしていくことを考えてみましょう。

以上の考察をまとめると、だいたい以下のようになるでしょう。

フラクタル性の核となる拡大構造を、波動補正が変形しながら、自己相似性を保っているという形です。

図 30 波動的に修正する

波動補正入り積分核：

$$K(\theta, p) = e^{-(b+i)\theta}\, \Phi(\theta, p).$$

拡大構造の本体：

$$e^{-(b+i)\theta} \qquad \text{（これが log スケールでの拡大核）}.$$

波動補正：

$$\Phi(\theta, p) = 1 + \text{（小さな補正項）}.$$

この形から分かるように、拡大核（フラクタル構造）自体は指数項だけで支配されている。

ここで、補正項をどのようなものにするか、ということを考えると、たとえば、リーマンが複素解析関数としてのリーマンゼータのゼロ点を計算したということで有名なRiemann-Siegel 公式は、ゼータ関数を臨界線近くで近似するためにリーマンが考案し、その後ジーゲルが体系化したものです。それを使ってみると、

ζ(s) は大まかに

図 31.波動的補正の形

臨界線 $\Re(s) = 1/2$ での $\zeta(s)$ は大まかに：

$$\zeta\Big(\frac{1}{2} + it\Big) = 2\sum_{n=1}^{N} n^{-1/2}\cos\big(t\log n - \theta(t)\big) + R(N, t).$$

ここで：

- $\theta(t)$ はガンマ関数由来の位相補正項
  $$\theta(t) = \arg\Gamma\Big(\frac{it}{2} + \frac{1}{4}\Big) - \frac{t}{2}\log\pi.$$

であり、この場合、我々が求めている補正項は、

図 32.臨界線上の補正項

螺旋核：

$$K(\theta, p) = e^{-(b+i)\theta}, \quad \theta = \log p.$$

に対して、

リーマン–ジーゲル型の波動補正：

$$\Phi(\theta, t) = e^{\,i[\,t\theta - \theta(t)\,]}.$$

を掛け合わせる。

波動補正がちゃんと log スケーリングにおいて波動的に振る舞って、フラクタル性を壊さないように振る舞っていうことに注意する。

これを、代入すると、

図 33.最終的な形

$$Z(t) = \sum_p K(\log p, p, t) = \sum_p e^{-b \log p} \cdot e^{i[(t-1)\log p - \theta(t)]}.$$

$$Z(t) = e^{-i\theta(t)} \sum_p p^{-b} \cdot p^{-i(t-1)}.$$

$$\boxed{Z(t) = e^{-i\theta(t)} \sum_p p^{-b} p^{-i(t-1)} = e^{-i\theta(t)} \sum_p p^{-(b+i(t-1))}.}$$

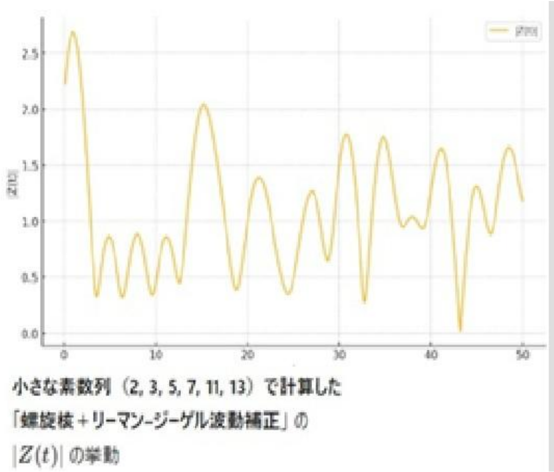
これが求める式であると思われます。

この 波動補正付き螺旋核和 は b=1/2 のときに、素数に沿って波動的な振動を与え、解析接続のガンマ相補正を含むので、臨界線Ｒe=1/2 上を、波動項によって、直線的に波打ちながら振動するという構造を持っていることがわかります。

前章では、このような構造を統制する作用素としての「ヒルベルト-ポリヤ作用素」というものがあり、それが、臨界線上へのゼロ点を移しました。そのような波動演算子のようなものになっています。そして、この臨界線には、グラフゼータから運ばれてきた「素リンドン元」（=ゼロ点）が載っていることに注意してください。

これをコンピュータによって計算してもらうと、

図 34. 有限の素数で計算したゼロ点の挙動



実軸Ｒe=1/2 をすでに初期の段階から振動していることが分かります。

素数（log）スケールに合わせた、類双対写像の連続的（汎関数的）形の多値性が次第に進んできました。このことは、素数構造を幾何学的に連続化する“類双対写像”を、積分核として 明示式 にできつつあることを示し、Ｐを無限に持っていったときに、臨界線城で収束性を持つということも分かります。

そして、いま、近似式しかできていませんが、次のようなことはすでに明らかになっています。

対数スケールにおいて、素数同心円に合わせて、フラクタル性を保つ拡大写像（螺旋写像）を定義する。**これが類双対写像の連続形の実体になります。**

この手法では、はっきりとした明示式には到達できませんでしたが、可換・多値的な類双対写像 を発散的ゼータ構造体の核として据え、その多値性を、素リンドン構造（無限素閉路） として組み込み、さらにそれを log スケールのフラクタル拡大作用素 で連続化し、最終的に螺旋形（同心円）を臨界線へ落とすフラクタル的汎関数像を近似的に作ることができました。

このとき、「アンチイデアル性」つまり、ゼロ点には重なりがないというところから、螺旋状直線に移される「ゼロ点」は波動上に、その臨界線に沿って、いきつ戻りつします。生成論的観点ではなく、構造論的観点ですが、ゼロ点の構造は、s→１－s という対称性を持っていると考えられます（リーマンの式）。つまり、「無限花束ゼータから運ばれたゼロ点構造」は、このような対称的な形に、配置されないだろう、ということが波動性の中に見えてきます。もちろん、**作用素**が未確定の状態なら、異常な挙動を示すことはあるかもしれませんが、前章の状況を鑑みると、生成論的な構成の段階では、そういう事はおきないとは分かっていますが。

「ゼロ点構造がどのように素構造に基づいて生成されるか」を発散的な類双対変換の自己相似性から説明するという目的は達成できたものだと考えます。

7.基本類双対写像の汎関数と深リーマン構造の生成論的構成法

僕の論考の主題は、自分の類双対写像という非可換・多値的操作によって、発散的ゼータ構造体を作ることで、その多値性が、自然に素構造と高次の素構造（ゼロ点構造）として現れるところから、リーマンゼータ的構造体を構成することができるのではないか…というものでした。その効果を通じて、ノイズ現象を論じる「動的変容の理論」を具体化させてみようというものです。

この生成論的な課題は、いちおう、前章までで、形式的には達成していると考えていいようです…ただし、しかし、対数スケールにおいて、素数同心円に合わせて、フラクタル性を保つ、拡大写像を定義することによって、類双対写像の連続性への拡張は、「いろいろあるなあ」という段階で終わっている、と言わざるを得ません。

今章ではこの点について、議論が進むでしょう。

僕の考察を見ると分かる通り、あらゆるところにでてくる変形「類双対写像」、これはループ構造とツリー構造の間を、「トレース束」でつなぐものです。そして、それを、汎関数として、「連続化」し、いわば「解析化」しようと試みて、前章では、log スケーリングを用いて、やっかいな「フラクタル構造」を、変形の中で再構成しなければいけなかったのです。

ところが、これを読んだひとは、「普通の状態の、類双対写像、つまり単純な、べき乗的同心円フラクタルと螺旋形フラクタルの連続的解析化、すなわち汎関数化はどうなるのか？」と自然に疑問に湧いたに違いないと思います。少なくとも、僕はそうでした。僕はこれを描くまで、その可能性を考えたことがなかったのです。

ところが、その課題は、新しい生成論的ゼータ構造体の構成法を、導くのです。

整理しましょう。

僕が示したゼータ構成法は、「ある素構造があるとき、それを変形する場合には多値性があって、そのなかで、発散的ゼータ構造体の構成は自然なゼータ構造体を導く」という生成原理を持っているというものです。

これを、実際に、たとえば、単純な同心円フラクタルの場合に、やってみましょう。

この思考法が、ヒルベルト・ポリヤの作用素に対する、ある別解を与えることを見ることができるでしょう。おそらくそれは予想のちゃんとした実現ではないかもしれませんが、この問題は、６章で論じました。

もう一度まとめると、前章では、リーマンジーゲルの波動項まで用いて、対数スケーリングを施して、素数冪同心円構造の中にフラクタル位相をいれることをしたんですが、よく考えてみれば、普通に、べき乗的無限同心円構造とデカルト螺旋との類双対変換も離散的なので、「汎関数」を用いて、連続化できそうです。僕はそんな当たり前の観点すら知らず、もっと厄介な問題をしていた、と思わざるを得なくなりました。

さて、素数スケールの log による解析 をいったん外して、もっと純粋に『単位円の無限等倍写像による同心円フラクタルとデカルト螺旋』を、連続的に結びつける汎関数を考えたい」。これをどうするか？

まず、構造を２のべき乗同心円フラクタル構造で整理します。

図 35 一つのオイラー積からの類双対写像

等倍同心円の構造

- 半径 $r_k = 2^k$ （2倍拡大）
- 中心は同じで、円環的に配置
- $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

このとき、「無限同心円フラクタル」は、

$$S = \bigcup_{k=0}^{\infty} C_{2^k} \quad \text{where} \quad C_{2^k} = \{(r, \theta) \mid r = 2^k,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$$

デカルト螺旋

螺旋は：

$$r(\theta) = a\,e^{b\theta}.$$

ここでは、**等倍同心円構造と対応させるには**

螺旋がちょうど「回転角度」で倍々拡大する形にしたい。

つまり、

円周の位相 と **螺旋の角度** が一致するとき、

螺旋の半径が 2^k に一致するようにする。

$$r(\theta) = a\,e^{b\theta} = 2^k.$$

したがって

$$b\theta = k\ln 2 - \ln a. \quad \Longrightarrow \quad \theta = \frac{k\ln 2 - \ln a}{b}$$

　さて、離散的構造を決めたので、今度は連続的にスケーリングします。

図 36 局所的な類双対写像の核

$$\theta(u) = \frac{u\,\ln 2 - \ln a}{b}. \quad r(u) = 2^u = a\,e^{b\,\theta(u)}$$

これが無限同心円フラクタルの連続化に対応する。

$$Z[f] = \int_0^\infty f\big(r(u),\, \theta(u)\big)\, du.$$

$$\boxed{Z[f] = \int_0^\infty f\left(2^u,\, \theta(u) = \frac{u\ln 2 - \ln a}{b}\right) du.}$$

　これが、求める汎関数と考えられます。

　さて、ここで問題になるのは、波動項まで含めて、もっと明示的な形にできないか？という問いかけでしょう。というのは、素数同心円のときに出会ったように、「フラクタルスケーリングを満たす関数系」には、たくさんのパターンがあります。

　こうした「等倍無限同心円 × 螺旋 × 波動補正」の汎関数は、波動項の入れ方で無数のパターンを構成できると考えられます。

　では、いまの「素数なし・単純等倍構造」の形を基にして、log スケーリングのときに考えたリーマンジーゲル的波動項まで含めた、より明示的な代表パターンをいくつか組み合わせましょう。

等倍 × 螺旋 × 波動補正の汎関数

もっとも汎用的な形は：

$$Z = \int_0^{\infty} \exp\left[i \left(k\,\theta(u) + \omega\, u \ln 2 + \Phi(u) \right) \right] du, \quad \theta(u) = \frac{u \ln 2 - \ln a}{b}.$$

ここで：

- k：螺旋の波動数
- ω：等倍スケールの対数波動数
- $\Phi(u)$：追加の波動補正（Riemann–Siegel 相や他の共鳴項）

それぞれ離散的であった２のべき乗的同心円フラクタル、そこに調整されたデカルト螺旋、そしてそれを波動的に調整するリーマンジーゲル的波動項を組み合わせています。

この「類双対的変換の汎関数」はいったいどのような作用なのでしょうか？

これは、まさに「同心円上の（位相的・閉路的）状態を、連続写像を通じて直線的な臨界領域に写す」…これこそが 類双対写像の核心の役割 です。

つまり元の位相空間は無限の同心円（=倍倍のべき乗写像で生成されていてフラクタル構造を描いている）です。デカルト螺旋は、その位相状態を角度パラメータで直線に展開します。波動補正（ジーゲル項など）は、その「写像の精密化と整列条件」を担い、その直線状態を保とうとします。

そして最終的に、臨界領域（例えば Re(s)=1/2）に像が集まります。

このときに、前章で考えた、基本的な離散的類双対変換が、同心円構造を、オイラー積へと変換したことを思い出してください。この場合のオイラー積は、（1-2^s）^-1、つまり、素数２のオイラー積です。つまり、この場合は、この臨界領域に集められた「ゼロ点」は、円周上から、臨界線へとプロットされます。

これは黒川先生が言う 「深リーマン予想」 の核である、「オイラー積の各素数を取り出して、それ単体でリーマン予想の臨界条件に対応するかをみる」という構想を思い起こさせます。

つまり今やった 2 のべき乗同心円フラクタル × 螺旋核 × 波動補正 はオイラー積の p=2 の部分だけを写像して臨界線上に落とす ということを汎関数として見せた。

これは、「類双対的変換」という作用素であるということに注意してください。

つまり、「類双対変換」は、非可換の変換であり、この場合、同心円フラクタルの同心円の上の点（ゼロ点を含む）を、螺旋形フラクタルの方へと写像し、臨界線である直線状へとプロットします。このとき、伊原ゼータの∞—花束ゼータの発散的ゼータ拡大によって、素リンドン元を介して、可換素数列（つまり順序を忘れると普通の素数）との対応が現れたことに注意してください。そして、２のべきの場合には、１の２乗根が、そのゼロ点でした。このゼロ点は、非対称性によって、臨界線から消滅し、s=１のところに極を作

っていると考えられます。この極は、無限テンソル積の中では、無限のゼロ点が重ね合わされていることで「吸収元」のような働きを持っていました。
原理的には、同心円の半径スケーリングは、べき乗だから指数関数構造です。
そして、螺旋写像は、角度パラメータで指数構造を線形に解きます。

図 37 連続的スケーリング

$$r(\theta) = a\,e^{b\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \tfrac{1}{b}\ln(r/a).$$

そして、べき乗同心円構造は、

図 38 局所における連続的スケーリング

$$r_k = 2^k. \qquad \Longrightarrow \qquad \theta_k = \tfrac{k\,\ln 2 - \ln a}{b}.$$

離散なら θｋは離散列ですが、連続化すると $k \leftrightarrow u$により、無限同心円構造が滑らかな $\theta(u)$軸に落ちます。これは、前章で見たとおり、波動的に近似していって、次第に直線へと落ちていきます。
この直線がどこになるのかは、この「類双対変換」が作用する、ゼータ構造により、そのゼータ構造は、s→１−s という鏡対称性を持っているので、Re=1/2 へと落ちます。
つまり、整理し直すと、類双対写像という離散的作用を、位相的無限同心円構造（非可換・多値）、螺旋による類双対写像として、連続化し、波動補正による臨界線整列を組み合わせることで、離散閉路の無限重なり構造が、連続作用素の下で直線領域に像を落とすという「生成論的類双対写像」が成り立つということです。
これは、数値を入れ替えていけば分かる通り、３，５，７…と素数でなりたち、それらから、類双対変換によって、オイラー積を構成します。つまり、すべての素数を組み合わせることにより、リーマンゼータのオイラー積を構成します。
これはまさに各素数の局所的閉路構造が、類双対写像で螺旋化され、波動補正で臨界線に写ることが保証されるなら、それらの積（＝全体のゼータ）は臨界線に零点が並ぶはずだ、という生成論的「深リーマン予想」といえるのではないでしょうか。
つまり、ヒルベルトポリヤの作用素の形式は、近似的に、このように書けるでしょう。

図 39 すべての素数で束ねる

積分核で束ねれば、

$$\prod Z_p[f] \quad \text{with} \quad Z_p[f] = \int^{\infty} \exp\left[\, i\,(k\,\theta_p(u) + \Phi_p(u))\right] du.$$

これは、素数ごとの汎関数をテンソル的に束ねた、黒川テンソル積の作用素であると思われます。この操作により、無限の素数べき円環が臨界線に近似的に束ねられます。同時に、これは、前章で記述した、対数スケーリングされた、「類双対変換」と同値のものだと考えられます。

これが生成論的に意味するのは各素数の局所構造が臨界線上に落ちるなら、全体の積も臨界線上で正則に整列する。これは確かに 深リーマン予想的な形の生成論的証明の骨組みといえるのではないでしょうか。

「深リーマン予想からはリーマン予想は自然に導かれる」という黒川重信氏の言葉を、生成論の側から支えようというわけです。

また、あたかも∞—メビウス変換のような作用を持っている、「連続・汎関数型の類双対変換」がまさに求める作用素の形であって、それは素数ごとの構造によって、テンソル的な構造を持っているということもわかります。いわば、無限に無限を重ねたような作用であるということが想像されます。

ヒルベルト・ポリヤ作用素の複行列形もそうでしたね。

まとめましょう。

まず、メビウス変換という単一の線形分数変換の役割を、無限素数ごとの「類双対写像」という汎関数に置き換えました。

これはつまり、「各素数の局所ゼータ構造そのものを、類双対写像という位相操作で生成する」ということです。

また、以下のようなことが言えると思います。

１，各素数が独立に「局所螺旋核」を持つ

$Zp[f]=\int \exp[i(k\theta p(u)+\Phi p(u))]du.$（積分は０から∞）

ここに素数 p固有のスケールが織り込まれる。

２，それを束ねる積が、黒川テンソル積と一致する

$Z=\otimes pZ\ [f].$（pはすべての素数を渡る）

これは単なる可換積ではなく、局所構造が作用素的に連動する。

３，メビウス変換の「単一の線形分数操作」では到達できなかった

多値性（類双対性）を、汎関数積分の中に含めた。

同心円フラクタルとデカルト螺旋形フラクタルの観察法こそが、生成論的ゼータ構造体変形を導いている根源であるといえるのは間違いないでしょう。

そして、同心円には倍写像があるのに、デカルト螺旋は無限スケールであるという、変形特徴も重要です。

８，複行列環の概念と伊原ゼータにおける行列表現の素リンドン分解―深リーマン予想的構造への生成論的アプローチ

僕はもともと運動性を持って移り変わり変化していく対象、たとえばノイズ現象などを、非可換的な運動性として探求していていました。

その途中で、グラフ構造、特に、ハイパーグラフ構造と出会いました。このハイパーグラフは、グラフ構造の一般化であって、「点（ノード）と線（エッジ）」の対応関係が一定ではなく、「N、M」個（N、Mは異なる）で、しかもそれは局所ごとに変動します。いわば、線のなかには多数の点があり、点の中には多数の線があります。これを非正則といい、この「異なる数の変数の対応関係の理論」を作らなければいけなくなっていたのです。

これを一部解決したのが「モチーフ」という概念であり、それは、ハイパーエッジを双対操作を施して、変形し、「複数の集合」の中に押し込めることで、その構造変形の複数性・多値性をいわば、イデアル理論やリーマン面の理論のように、「疑似的に一意化」するのです。そして、それは、「閉じた構造体」（=モチーフ閉包）を構成することを証明できるのです。

少し脱線すると、非可換代数を「トレースの材料」とする場合、「有向辺」を含む「モチーフ閉包」の理論が必要になるでしょう。道も切れ、あるいは、急に分割する。この問題を僕はまだよくわかっていません。

この論考は、この構造が非常に秩序だった状況、「正則性」の中の構造が主題になっていることを注意しておきます。「トレース束」の不変性が使えたのはこのためです。

さて、僕は、この過程で、たとえば、（２×２）の行列と（３×３）の行列の演算に出会いました。これは次数が異なり、非正則的非可換演算です。これを考えるとき、

２つの（３×３）の行列のなかには、３つの（２×２）の行列が入り、行列の演算を考えると、これを、拡張して、（６×６）の行列を入れ子式に計算できることに気づきました。これを、「入れ子式」複行列算と呼べるでしょう。重要なのは、無限入れ子のときの「同値類」の豊富さです。縮約も可能です。

正則でなくても、どんなパターンの、「A×B」「C×D」でも成り立ち、次数もわかりやすいことが特徴です。

「組み合わせ演算」もあります。

つまり、たとえば、（２×２）の複行列と（４×４）の複行列があるとしましょう。後者から２つの列を取り出します。６通りですね。

そうしてから、その２つの列にある４つの行から２つ取り出します。これも六通り。

すると、（２×２）と（２×２）の演算が３６通りあって、それで（１２×１２）の複行列ができます。多値性は対称性によって問題としないでも、これは半群的で、成立する「次元」が存在しないことがあるので、逆元不能領域があります。

逆の場合には、作用する方を分割すればいいでしょう。行の長さが足りない場合には、逆側から、順列組み合わせ的に考えて、計算することに注意してください。

図 40. 複行列環での計算の実例

① (2,2) 行列 M

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

② (3,3) 行列 N

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

複行列の定義

複行列 $M \boxtimes N$ を、

> 「M の各成分 m_{ij} を係数として、全体をスケールした N を 4 ブロックに配置」

とする。すると、$M \boxtimes N \in \mathbb{C}^{6\times 6}$:

$$M \boxtimes N = \begin{bmatrix} 1\cdot N & 2\cdot N \\ 3\cdot N & 4\cdot N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

そして、これを、「複行列環」と名付けました。

演算の数が足りないときには、ちょうど「いくつ入るかな」と拡張し、行列の字数を拡張していけばいい。これを一般化すれば、「N✕M」の行列と「L✕O」の行列に対する演算を定義できるでしょう。これは、行列をベクトルに作用させている時に自然に出てきている状況でもあります。

この入れ子構造が「フラクタル的」であることにも注意が湧きます。

こういう予想が考えられます。

ハイパーグラフの「モチーフ閉包」構造は、複行列環の演算構造の中に、「閉包」的に埋め込まれる。

さて、伊原ゼータの「発散ゼータ的拡大」を考えましょう。

（２，２）正則グラフは円形のループグラフになります。これは、「素構造が２つ」であって、しかし、順向きと逆向きがあるので、行列式には、２つの共役元が出てくる。

この「素構造がひとつ」というループグラフの最小形は、黒川重信がＦ１幾何と関係があると考えた、（点）ノード一つに、区別できない自己ループがある構造です。これを区別できると考えると、これは、素数の長さを持つあらゆる（２，２）—正則のグラフ構造への「類双対的発散ゼータ拡大」が存在して、つまり、類双対的には、「素数の長さを持つ（２，２）正則円形グラフはいわば同相なのであります。このとき、「自然数の場合はどうかといえば、素リンドン分解される。さて、この素リンドン分解はどのように起きるか？

つまり、「あらゆる素数構造の円グラフはあらゆる自然数構造のグラフへの、類双対的発散ゼータ拡大を持つ」つまり、あらゆる素数の長さを持つ円グラフは、「素数構造を結合した」自然数的構造を持つ円グラフと同相なのです。素数のホログラム・フラクタル的復元性です。

これは、オイラー積が一つあれば、すべての自然数に渡るオイラー積を再構成できるというような意味に等しい、自然数構造の、フラクタル性、ホログラム性を示していると考えられます。

これがオイラー積の素数的な結合と対応していることが分かり、これは、素数の局所情報が全体構造の生成核として働いていることを意味します。いわば「オイラー積は局所で閉じていないが、複行列環の中では閉じている、というように表現できるでしょう。

そもそも複行列自体が潜在的な自然数構造を内在させていることにも注意する人もあるでしょう。

「複行列環」における分解と「伊原ゼータの行列式における素リンドン分解」が対応する、というところから、グラフゼータから解析的ゼータを構成するときに、「素数同心円構造だけ考えればよい」という状況が生じてきます。

さて、このグラフゼータから解析的ゼータを構成するという操作は、「ゼロ点の構造」を考えると、いわば、（２，２）複行列を、（２，２）複行列を無限個テンソル的に結合した構造を作ることに似ているということに気づきます。

無限入れ子を、最初から、ある「次元」で無限展開しておいて、自己相似形においておく、そして「縮約できないものがある状態」を考えるという、操作も考えられます。

以上のような、複行列環、これが、前章で考えた、「同心円フラクタルと螺旋形フラクタルの対応性を直線へと移す類双対変換」が、まるで「∞―メビウス変換」のような作用を持っていることと対応しています。つまり、入れ子構造になった複行列作用、これが類双対的「ゼータ構成」、すなわち、「解析的な接続」と対応していると考えられるということです。これは、作用素として、表現できることに注意してください。

このとき、素数次元の、ひとつひとつの「正則複行列環」は入れ子構造になっていて、∞次元の行列演算構造を持っていることに注意してください。この入れ子構造が、類双対変換における、「フラクタル性」に対応しています。

つまり、類双対変換における、「∞―メビウス変換」性の表現です。

そして、その作用素としての展開は、前章で分析した、類双対的な汎関数の構造、すなわち「等倍性✕螺旋性✕波動性」を組み合わせて作られた構造体の近似的極限として存在しているだろうと思われます。

この行列式を解析的に展開した形が、オイラー積であって、これは、オイラー積の一つにはすべてのオイラー積の情報が詰まっていて、一つのオイラー積のゼロ点は、あらゆる素数に渡るオイラー積との関係性によって決まる、といういわゆる深リーマン予想の解析的表現になっていることに注意してください。

これは、本質的な**「非可換性」**を持っていて、さらに本質的な**「非正則性」**をも持っています。非可換性は「順序を入れ替えられない」ということ、「非正則性」は「異なる数の複数の対象が組み合わされること」。このことは、リーマンゼータ構造体のような、可換で解析的な対象の中に、本質的な非可換性と非正則性が潜在的に含まれていたということを示していると思います。

9，複行列として表現されたヒルベルトポリヤの作用素と思われるものに対する考察

ここで、複数の素数に渡る、テンソル積として表現された、「ヒルベルト・ポリヤ」の作用素を観察すると、それは、著しい特徴を持っていることが分かります。

要点だけ整理すると、１つのオイラー積だけでも、類双対的発散ゼータ拡大で「全素数」に拡張可能である構造があり、これは複行列環のテンソル積構造であり、１素数の局所構造 × 全素数の無限積という形になっています。

無限積は「無限入れ子メビウス構造」として作用素に具体化されています。

これが「複行列環の自己随伴性」と「行列式（無限行列式）の閉包性」に結びついています。

ここから、結論として、オイラー積の構造そのものが、ゼロ点の配置条件（発散と相殺の均衡）を生む対称性と絡まり合いを表現しているということが分かります。

結果として、「Re(s)=1/2 に自然に整列する」。

この結論を目指すために、ここで、改めて、リーマンゼータ関数を考えます。

図 41. リーマンゼータの虚数成分

$$Z(t) = \sum_{p\in\mathrm{Primes}} p^{-s} = \sum_{p} p^{-(\sigma+it)}$$

すでに解析接続されたこのリーマンゼータを、対数スケーリングで変換し直します。

図 42. 対数的スケーリング

$$Z(t) = \sum_{p} e^{-s\log p} = \sum_{p} e^{-(\sigma+it)\log p}$$

これを、積分形式で、評価し直します。

図 43. 積分形式で評価

$$Z(t) = \int e^{-it\log p}\cdot e^{-\sigma\log p}\, d\pi(p)$$

、 $x = \log p.$

これを、「ヒルベルト・ポリヤの作用素」の核とみなして、

図 44. ヒルベルトポリヤ核を抜き出す

$$Z(t) = \hat{\mu}_\sigma(t), \quad \mu_\sigma(x) = e^{-\sigma x} d\pi(x) \quad (\text{素数分布}).$$

ここで、σ の値の変化を考えます。

図 45. リーマンゼータの臨界線の物理的評価

フーリエ波動と指数減衰の干渉が最大化する。

ここが本質で：

$$e^{-\sigma \log p} = p^{-\sigma} \quad \text{と} \quad e^{-it \log p} = p^{-it} \quad \Longrightarrow \quad p^{-s} = p^{-\sigma} p^{-it}$$

- $\sigma = 0$ だと発散する。
- $\sigma = 1$ だと指数的に消えすぎる。
- $\sigma = 1/2$ が最も「エネルギー密度が残りつつ、波動が干渉する臨界点」。

これがまとめた図式になります。

要点をまとめましょう。

素数の対数スケーリングを使うと、素数列の不規則性が「連続核」（ヒルベルト・ポリヤ核）に乗ります。

グラフゼータ（伊原ゼータなど）では、素閉路が素数因数分解と完全に対応することが前章では示されました。

これを「素リンドン分解」で解析的に解釈すると、

有向閉路 ≈ リンドン語 ≈ 素数分解

よって、グラフゼータのオイラー積が、自然数構造を「円環」として閉じることがわかります。

これが「素数スケールの自己相似性（螺旋核）」の具体的形と考えられ、それが複行列の形で、「ヒルベルト・ポリヤの作用素」という形で表現されたということです。

ゆえに、グラフゼータ的オイラー積構造を持つかぎり、ゼロ点は閉路構造（トレース束）に依存し、臨界線に配置されるということです。

一つの素数積に対しても、既に対数核は無限構造を含んでいます。

無限素構造はすべて相互干渉するので、どの素数の項を見ても、Re(s)=1/2 に収束する自己相似が現れています。これは、∞—メビウス変換的、類双対変換の構造からも分かります。

これが「局所（素数）と全体（ゼータ）の一致性」であり、複行列環の自己随伴構造の土台となっているだろうことがわかります。

１つのオイラー積だけでも、類双対的発散ゼータ拡大で「全素数」に拡張可能であることを実際に伊原ゼータに対する「類双対的発散ゼータ拡大」の操作として具体的に見てきました。

この複行列環は、素数ごとの局所構造（素リンドン分解、無限メビウス入れ子構造）を内部に保持しつつ、それらを全素数にわたってテンソル結合することで、ヒルベルト・ポリヤの作用素を具体化し、その固有値としてゼータ零点を生む理論的枠組みを与えたと考えることができます。

結論、オイラー積の構造そのものが、ゼロ点の配置条件（発散と相殺の均衡）を生み、そして、その結果として、固有値は、Re(s)=1/2 に自然に整列する。

波動項なしでも Re(s)=1/2 への集中性が現れるのは、各素数 pにおける複行列の固有値（またはトレース）の主なスケーリングが、対数スケール log$p$に基づく指数減衰項 $p\hat{}-s$

で構成されているため。これにより、自然に Re(s) = 1/2 にエネルギー密度が最大化される、というような解釈もできそうです。

以上の推論には、具体的なゼロ点の決定法は含まれていません。

もちろん、これは純粋に生成論的構造にすぎないのです。それが目的でもありました。

しかし、「ゼロ点がどこにあるかを知る」ことなしに、「ゼロ点が臨界線上にしかないはずだ」という帰結を、「構成的な原理から導き出すことができる」、そういう、ゼロ点が「臨界線 Re(s) = 1/2 に存在しなければならない」構造的必然性は、複行列環によるテンソル構成を、まさに、前章で構成された複行列は持っているということです。

この章の結論として、本論考を俯瞰しながらまとめてみると、本稿で示したのは、素数の対数スケール構造、素リンドン分解、無限メビウス入れ子構造を包含する**複行列環**によって、ヒルベルト・ポリヤが予感した作用素が生成論的に構成されるという事実でした。

ゼロ点の直接的な数値決定はまだ残っていますが、その存在が「なぜ Re(s)=1/2 にしか現れないか」という構造的必然性は、複行列環の無限随伴性と自己相似性によって自然に説明されています。

ここで使われた概念系に馴染みがないと困惑した人もいるかも知れませんが、もともとこれは僕が「ノイズ現象」というフラクタル性を示す感覚現象を解釈するために作り上げた様々な観察や概念形から来ていて、それを最近になって数理的概念化し、同時に、伊原ゼータの構成法によって、偶然のように、式表現ができることを発見したときまで、ほとんど概念の「粘土遊び」だったものです。

かつての粘土遊びが、このような形でリーマンゼータの核心と交わるとは思わなかった。しかしこの発見は、数論的構造が物理的、幾何的、生成論的に一つの像に結実しうることを示すものです。

今後の課題は、この生成構造を具体的な有限次元での近似に落とし込み、数値的に固有値の一致を確認することでしょうか。そして、この複行列環が示唆する構造は、非可換幾何、テンソル圏、超グラフ理論へと拡張可能であるだろうと思われるが、これは、この論考の主題ではありません。

本論文は、リーマンゼータのゼロ点構造を、複行列環とその無限テンソル積の中で『生成論的に構成しうる』ことを示すことができたと考えています。

応用理論としては(というか、それが始まりで、始まりは数学ですらなかったのですが)。この数理的探求の始まりは、

１，誤差逆伝播法がノイズから「像」を生成する方法で、僕の「ノイズ法」と全く同相であったこと…また、その視点で見ると、消滅幻覚などさまざまな感覚訓練が、人工知能に実装されていることに気づいたこと

２，ノイズや人工知能に共通する性質は「フラクタル縮約」であることに気づいて、フラクタルとゼータ構造の関係に目を開かれたこと

…です。

この「具体的現象の探求」に興味があるひとのために最後にほとんどメモぐらいの長さで、主題から外れてしまうけど、ちょっと書いてみました。

10，複行列環の構造予想とさまざまな線形代数的概念の復元

この節では、いわば補遺として、複行列環についての命題を考えてみます。

複行列環に対する予想

素数次数の複行列環の入れ子構造を冪としてとらえることにより、複行列環のテンソル積は、自然数と同じように、自然数と素数の一意分解と同じ構造で、分解され、そのなかで、「素数正規化」された構造として、通常の行列環の概念構造、固有値、随伴、などが自然に定まる

この予想は、あらゆる複行列は、素数次数の複行列に分解され、その素複行列環の中での分解とは、行列の入れ子構造を冪的に繰り返すことで定義される入れ子型行列環です。そして、そのような各素数 pに対して、局所的な複行列環 $A(p)$を定義します。すると、$A(p)$は(p, p)-次数の正則複行列環であり、自己随伴性・固有値構造を自然に含む、そういう内容です。

つまり、この局所複行列環は、自然数の素因数分解と同型的に対応する

図 46. 複行列環の分解

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \quad \Longleftrightarrow \quad A_N = A_{p_1}^{\otimes a_1} \otimes A_{p_2}^{\otimes a_2} \otimes \cdots \otimes A_{p_k}^{\otimes a_k}.$$

この局所化され、正規化された素数冪の複行列環に置いて、トレース、固有値、随伴などの概念が自然に定義されることが期待されます。
そして、テンソル積による全体構造として、全体の複行列環は、素数の無限積として張り合わせられます。

図 47. 素数ごとのテンソル積

$$O_{HP} := \bigotimes_{p \in P} A_p.$$

この構造は、オイラー積に対応していると考えられ、各局所的構造の結合がリーマンゼータの全体像を生成します。
各素複行列環は入れ子構造を持っており、無限メビウス的な構成を持っています。つまり、各 $A(p)$ は、入れ子構造として無限のメビウス的作用素を内包します。
この無限入れ子性が、グラフゼータにおける素閉路分解（素リンドン構造）と対応し、自然数構造のフラクタル性を反映じていると考えられます。同時に、自然数の構造を拡張もしていると考えられます。
1 ＝ 0.999…
これが同じでしょうか？
「同じである」と。
そして、さきほど考えた、非可換で、かつ、非正則な、複行列環ではさらに広い「同値性」が存在し、僕はそれを「表現多値性」と呼びました。これは、（２，２）の行列を∞入れ子（２，２）行列へと無限に展開できる構造を見れば理解できるでしょう。これは、複行列の**無限入れ子メビウス構造に重なり**、ゼロ点の生成に必要な「類双対的表現の多値性」を担保すると考えられます。１の限りない拡張です。
1 ＝ 0.999…は、複行列構造における**同値モチーフ空間**の簡約モデルといえるでしょう。

表現多値性と同値モチーフ空間の構造定理

複行列環は、素数ごとの局所的入れ子構造を持つが、その具体的な作用素の値は「表現多値性」により一意には決定されない。しかし、この多値性は任意性ではなく、類双対変換と無限入れ子フラクタル構造のなかで、すべての表現は同値モチーフ空間に収束する

____

補遺 1、実軸における(1/2.0)の数値計算及びホッジの花束

ここに書いてみるのは、自分なりに結果を具体的数値として、コンピューターによって計算してみることでしょうか。

図 48. リーマンゼータの実軸 1/2 の値

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right) \approx -1.4603545088\ldots$$

であることは知られているらしいです。

まず、

図 49. 伊原ゼータのグラフで構成

$$U^{-|P|} \longrightarrow e^{-s\log p} \quad \text{かつ} \quad |P| = \log p.$$

だから、有限積で

$$Z(U) = \prod_{|P|\le \log P_N} \frac{1}{1-U^{-|P|}} \quad \Longrightarrow \quad \prod_{p\le P_N} \frac{1}{1-e^{-s\log p}}.$$

つまり：

$$\frac{1}{1-e^{-s\log p}} = \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

ここから、

図 50. 伊原ゼータのグラフでの原点からの計算

$$\zeta_5(1/2) = \prod_{p\le 11} \frac{1}{1-p^{-1/2}}.$$

伊原ゼータの有限素構造で、(11≧p)を計算してみます。

オイラー積は、実軸>1 でしか収束しないと分かっているから、この値がどのように変化していくかを見て、そこから、どうやって、「解析接続」（類双対変換）されているかを想像するためです。

図 51. 普通のオイラー積は発散する

Prime	Factor $1/(1-p^{-1/2})$
2	3.41421356
3	2.36602540
5	1.80901699
7	1.60762522
11	1.43166248

この因子の無限結合は、最終的には発散するわけですが、無限花束構造の無限閉路が、螺旋的に類双対変形を受け、無限 Möbius 的に裏返されて、負の値へと向きが逆転する。これが、リーマンゼータの負の整数での、負の値を出しているように思います。

つまり、無限 Möbius が、リーマンゼータの解析接続における、ガンマ因子と、その自己双対的構造（s→1-s）を生み出していると考えることができるというわけです。

局所正値の積構造を類双対写像で螺旋的（無限に素数によって束ねられた螺旋）に裏返し、解析接続で負値を生む「位相的核」を与える…というわけです。

局所正値 → 類双対写像 → 螺旋 → 解析接続 → 負値

そういう流れですね。この点において、螺旋状の Möbius ねじれは指数項の符号を逆転させ、−log p を +log p に変換すると思われます。この符号の逆転は、解析的延長が負の値を生成する仕組みを説明し、自己双対性（s → 1−s）の対称性と一致しています。ここで思い出すのが、自分が考えの中で一度捨てた、

図 52.修正 Möbius 作用

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \log p \\ -\log p & 0 \end{bmatrix}$$

こういう正負を入れ替えた行列です。

実際に計算させてみると、

図 53.発散が螺旋形に抑えられる

Prime	log p	exp(+is log p)	exp(−is log p)
2	0.6931	0.9405 + 0.3397i	0.9405 − 0.3397i
3	1.0986	0.8529 + 0.5221i	0.8529 − 0.5221i
5	1.6094	0.6933 + 0.7206i	0.6933 − 0.7206i
7	1.9459	0.5629 + 0.8266i	0.5629 − 0.8266i
11	2.3979	0.3633 + 0.9317i	0.3633 − 0.9317i

このように、発散成分を極めて、抑えるように働いていることが分かります。つまり、補正成分は 1。

「やっぱこっちだったかな…」と思って、さらに、計算させてみる…

図 54. 補正項から負の値が出る

$\chi(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\pi s/2)\Gamma(1-s)$ を定義

s	$\zeta(s)$	$\chi(s)$	$\zeta(1-s)$	$\chi(s)\cdot\zeta(1-s)$	差
0.5	−1.4603545088...	1.0	−1.4603545088...	−1.4603545088...	0.0
−1	−1/12 ≈ −0.08333	−0.05066...	$\pi^2/6 \approx 1.64493...$	−0.0833333...	≈ 0（誤差 ~10^{-32}）

こういうふうに「負の値」になるのか…ということが分かります。これは、僕には、コンピューターがなければ、絶対にわからなかった構造でしょう。当時、log p の正負が“どうでもよくなる”という感覚がありました。

それは、トレース構造において“回転が収束を駆動する”という、本質的な圧縮の感覚があったからで、自由度があると思っていたからです。

いまそれを再確認したから、行列 M の意味は“無限圧縮作用素”として定義できるような気がします。これが、回転を示す作用素構造。

図 55. 回転型 Möbius 作用

$$\exp(tM) = \begin{bmatrix} \cos(t\log p) & -\sin(t\log p) \\ \sin(t\log p) & \cos(t\log p) \end{bmatrix}$$

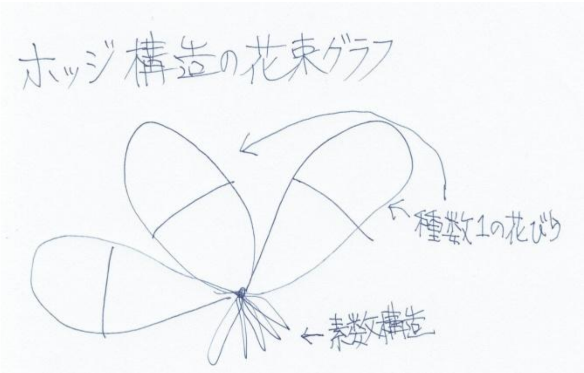
ここで思い出すのが、種数１の「双対非周期的経路」がオイラー積の発散をまさに抑えて、二次のゼータを構成していることを、グラフ的リーマン面の見地から理解できたことで、ということは、僕が“回転無限モビウス”として最初に見たのは、log p のスパイラルが構造的に整っていく様子でした。でも、それが“束ね”られるとき、なぜか補正因子のように、全体を発散から守る構造が出てきました。

今ならそれが、種数１の非周期的双対経路、つまり“虚数乗法的トレース圧縮”の作用のようなものであると理解可能できるのであります。この論考は最初に書いたものだけれど、後で書いたいくつもの考察が繋がり、この無限 Mebius の構造的理解につながる、という伏線回収があるとは…つまり、種数０の「発散制御回路」は螺旋形で、種数１の「発散制御回路」は「双対非周期的回路」で、いずれも、虚数乗法的回路と関係していると思われるという仮説へと繋がっていきます。

だからこの行列Ｍ は、リンドン二重螺旋複素位相における『発散制御の無限圧縮作用素』として自然に定義できるでしょう。解析接続とは「回転らせん構造」による「発散制御回路」である…

つまり、ここで、ラマヌジャンの二次のゼータ構造を考察した結果、到達した、僕が「ホッジの花束グラフ」と呼ぶ構造が自然に思い浮かびました。

図 56.ホッジの花束



このホッジの花束を説明しますと、素数構造に種数１の花びらを接続すると、「非周期的回路の数が２つになる」ことで、発散しやすくなるのですが、うまい具合に「双対非周期回路が虚数乗法的に発散を制御」することで、二次のゼータ、そして、４，６，８と多重化したヘッケ作用素を通じて、いいかえると、多重ヘッケ作用素を通じて、無限に高次化していく構造が、作られていくのです。

整理すると、

種数０：螺旋 Möbius による局所回転圧縮

種数１：双対非周期経路による非可換位相圧縮

この花束構造体の「非周期的回路」の数が 2n-2 の形になっていることに注目してください。このように、多数の「双対非周期的回路」がつながることで、より「発散を防ぐクッションが作られる」事がわかるのです。つまり、「素構造」が発散しにくくなる。

ここから、高次元の「発散制御回路」の理論を作ることができるでしょうか？

命題

実数直線は構造的に完全ではない。

これは、その内部に非周期的な列の入れ子構造を含まないためである。

類双対的発散復元を通じてのみ、無限のモービウス束が生成され、裸の連続体を自己双対な複雑な位相構造へと昇華させる。

これが自己双対性（s ↔ 1−s）の起源であり、リンドン複素螺旋連続平面の位相的投影である。

この定理は最初に夢の中で現れました。
目覚めた時、僕は最初、それを荒唐無稽なものとして拒否しました。しかし、それは僕が築き上げていた構造と完璧に一致していました。疑惑の末に、僕が間違いだと思っていたものが、鍵だったということが分かりました。
これがこの論考における最後の命題です。
意味のない同心円として現れるもの―平坦で無限である―は、発散的な埋め込みを通じて引き上げられるときのみ、螺旋の文法となります。
これが「無限同心円を螺旋に巻き上げる」という意味です。
フラクタルの二重らせん構造…
つまり、ある実数値を示す枝を持つ無限花束グラフを考えます。
このグラフを「発散的復元」で再構成しようとするとき、その値は無限の入れ子を一段ずつ駆け上るような構造になります。
すなわち、無限花束グラフの構造を再現するには、それ自身が含む「無限 Möbius 構造」によって、収束的にではなく、構成論的に高次元の入れ子性を示さねばならない。
これが無限 Möbius 性の存在証明です。

補遺 2

総括として、脇道も含む、リーマンゼータの生成理論の証明の道筋と今後を整理しておきます。
１，花束グラフの素閉路に基づくグラフゼータ関数は、素リンドン分解で一意化される。
２，発散的ゼータ拡大により、ループの再帰的分解が無限素数構造に一致する。
３，類双対写像は$u^p \mapsto e^{-s\log p}$であり、これは Mellin 変換の積核と等しい。
４，正則ラマヌジャン条件により、グラフの行列式固有値はヒルベルト・ポリヤ型の自己随伴性を持つ。
５，よって、素閉路系列はオイラー積の解析的構造に一致し、零点構造は臨界線上に写像される。
流れはごくシンプルで、飛躍やギャップがあれば、見つけやすい論理構造をしていると思われます。

ゼータ構造に関する類双対写像理論で、他にパッと思いつくのは、「非正則グラフ」の素リンドン構造は、「デデキント型」だろうという、「非正則グラフの素リンドン構造」はデデキント型であるという考えです。
整理すると、こうです。

正則（ラマヌジャン）グラフでは、局所的にループの素リンドン分解が有限生成で済みますし、固有値（素リンドン）分布がきれいに揃うところから、ゼロ点が臨界線上に整列しました。

このことは同時に、「有限で閉じるゼータの、類双対的発散拡大による閉包性」を想定させてもいます。正則条件で、全素数経路を復元したのと同じですね。

一方、非正則グラフでは、局所構造に無限生成の分岐（枝分かれ）が入り込み、素ループの分解が「一意でない」か「冗長」になりますし、たぶん、「局所構造」を表現する、「トレース圏」が必要になってくる可能性がある。復元可能性を増やすためでもあります。

また、デデキント領域では、主イデアルに収まらない「類群」が登場します。「非正則トレース束」では、同様に素閉路の分解が「非主」として複数の経路を許します。

つまり、素リンドン構造が冗長化 → 類群的な分岐 → デデキント型ゼータの非自明性という対応関係です。

正則ラマヌジャングラフで「リーマン予想」と非正則（デデキント型）グラフで「類群構造を含むゼータ」が、この二つが、類双対写像における、トレース束の構造の違いだけで統一的に説明できる可能性があります。トレース束の不変性はおそらく敗れるですし、その変形こそが重要になってくるかもしれません。

あとは、説明を逃したポイントを少しだけ。

花束グラフにおける素リンドン列は、トレース束の有限生成性と一致する

ゼータ拡大の限極は黒川テンソル積の構造と同型である

非正則ゼータは、素リンドン系列の冗長分岐により、類群構造を内包する

黒川信重、絶対数学原論、現代数学社、2016
森田英章、組合せ論的ゼータの半群表示、2016
ベルンハルト・リーマン（鈴木治郎訳）、与えられた数より小さな素数の個数について、1859
高安秀樹、フラクタル、朝倉書店、1986

楕円関数と保型形式については、Koblitz, Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms（Springer GTM 97）（N, コブリッツ『楕円曲線と保型形式』、シュプリンガー・ジャパン、２００６）を参照されたい。

Glossary(用語集)

1, Related to the Lyndon series(リンドン列関連)

Aperiodic sequence:A sequence with an order that does not contain periodic elements throughout the sequence.
非周期列：内部に周期的な要素を含まない順序を持つ列。

Contraction: The unique decomposition and reduction of non-periodic Lyndon sequences into a minimal trace structure. .
This refers to the transformation of infinite repetitions of non-trivial aperiodic sequences within trace bundles into loop-type or tree-type structures.
縮約　非周期的リンドン列を最小のトレース構造に分解し、簡約化する独自の過程。
これは、トレース束内の非自明な非周期的列の無限反復を、ループ型またはツリー型構造に変換するプロセスを指す。

Contraction morphism: An operation that performs structural deformation on a trace sequence, trace bundle, or structure in a class-dual manner while preserving fractality.
縮約写像　あるトレース列やトレース束、または構造体を類双対的に、フラクタル性を保ちつつ、構造的変形を行う縮約の操作

Dual Lyndon words ;Corresponding to the reverse order of Lyndon sequences, Lyndon sequence decomposition structures contribute to the stability of the existence of inverses in graph-like Riemann surfaces.
双対リンドン列 リンドン列の逆順に対応する、リンドン列分解構造、グラフ的リーマン面では逆元の存在の安定性に寄与する。あるリンドン列に対応するグラフの双対構造
→Part II, Part III

Lyndon series reduction;Trace contraction of a non-periodic Lyndon sequence. Note that there are two types of Lyndon series Contraction.
リンドン系列の縮約　非周期的なリンドン列のトレース縮約。注意：リンドン系列の縮約には２種類あります。

prime Lyndon word:Shorthand for the smallest unit of a non-periodic sequence. It is uniquely determined by McMahon's theorem and Duval decomposition algorithm.
素リンドン語非周期列の最小の単位。マクマホンの定理や Duval 分解アルゴリズムによって一意的に定まる

Prime Lyndon sequence: An indivisible non-periodic sequence serving as the fundamental unit of contraction.
素リンドン：収縮の基本単位として機能する、分割不能で非周期的な列。単純に、「既約」ではなく、最小単位。

2, Quasi-dual morphism and Zeta(類双対写像とゼータ)

Complex spiral integration: Terms referring to the differential and integral structures of “complex spiral phases”
Although it is not yet clear, it is gradually becoming apparent that as the number of species increases, there is a “divergence control function” corresponding to complex spiral phases, and that there are conversions to higher-order structures and lower-order structures corresponding to this.
複素位相積分　「複素螺旋位相」の微分・積分構造に言及する語
まだ明らかにはなっていないが、種数が増えていくたびに、複素螺旋位相に対応する、「発散制御機能」があり、それに対応して、高次構造への変換や低次構造への変換が存在していることが次第に明らかになっている

Critical line symmetry: Symmetry on the critical line s→←1-s, mainly seen in the Riemann zeta function.
臨界線上の対称性
主にリーマンゼータに見られる s→←１－ s という臨界線上の対称性

Ideal class motif：The ideal concept also undergoes a process of restoring higher-order structures by first extending a single structure to infinity and then contracting it. This is structurally similar to the graph-theoretic dual motif closure and the structure of class-dual divergent restoration in my theory.
イデアル概念も一旦単一的な構成を無限性へと引き伸ばしてから、縮約するという過程を伴って、高次構造を復元する過程をとる。これは、グラフ論的双対モチーフ閉包と、あるいは、僕の理論における類双対的発散的復元の構造と構造的に類似している。このことから、「一般非可換イデアル論」などの構成が示唆されている。

Infinite compression operator:This refers to the Möbius compression structure, which is an abstract description of the integral kernel that includes rotation, inversion, and spiral convergence. It has a mechanism that controls the divergence of the zeta

structure of genus 0 in a spiral rotation, and arranges the structure symmetrically along the critical line of the Riemann zeta function.
無限圧縮作用素　Möbius 的圧縮構造のことで、回転・反転・スパイラル的収束を含む積分核の抽象記述。種数０のゼータ構造の発散を螺旋回転的に制御する仕組みを持っており、リーマンゼータの臨界線に沿って、左右対称に構造を鏡像的に配置する

Multiplicity of zero: When the “elementary Lyndon element” that is restored to zero is decomposed, the corresponding Euler product becomes a “multiple Euler product,” giving zero points multiple values.
多重零点 ゼロ点へと復元される「素リンドン元」が分解されるときに、それに対応するオイラー積は、「多重オイラー積」になって、ゼロ点にも多重性を与える。

The basic quasi-dual mapping: One-to-one correspondence between infinite concentric circle fractals and Cartesian spirals. Pure transitions between loop shapes and tree shapes can be seen naturally.
基本類双対写像　無限同心円フラクタルとデカルト螺旋との一対一対応。ループ形とツリー形の純粋な移行が自然に見られる

Divergent-density completion:Denotes the state where an infinite set of prime-like structural elements achieves a density such that further divergent reconstructions cause no structural deformation.
発散密度完備 無限の素数類似構造要素の集合が、さらに発散する再構成が構造的変形を引き起こさないような密度を達成した状態を指す。

Divergent restoration: The operation of recovering a potentially infinite structure from contractions by non-closed quasi-dual e morphisms.
発散的復元：非自明な非周期列を復元する類双対写像を用いて、収縮的縮約から潜在的に無限の構造を回復する操作。

Effect of imaginary number multiplication:Imaginary multiplication realized through motif-aligned rotations. In this theory, the divergent structure of Euler products is controlled through “dual non-periodic paths.”
虚数乗法の作用　この理論では「双対非周期的経路」を通じてのオイラー積の発散的構造を制御する構造

Lyndon complex spiral continuous phase:A continuous complex phase that is uniquely determined for a Lyndon sequence, which is a semigroup. It is sometimes referred to as a “double helix” because it naturally contains spiral rotations and has a double main structure.
半群であるリンドン列に対して、一意的に定まる連続複素位相。自然に螺旋形の回転を含んでいるところ、二重の縮約的構造を持っているところなどから、「二重螺旋」と表現することもある。

Genus expansion: An expression for structural development accompanied by changes in the number of species. This is particularly important in the context of the formulation of “higher-order imaginary multiplication.”
In other words, it can be understood that the Hecke operator of higher-order zeta functions acts as an operator that changes the structure of graph-like Riemann surfaces, allowing for the interpretation that this is a comprehensive integral of Riemann surfaces.
種数の拡張　種数の変化を伴う構造展開に対する表現。とくに「高次虚数乗法」の定式化文脈で重要。
つまり、グラフ的リーマン面の構造を高次元に変化させる作用素として、高次ゼータのヘッケ作用素が作用していることが分かるために、これはリーマン面の包括的積分である、という解釈を許す

Non-regular zeta structure : An extension of the zeta function with genus and loop structure. It naturally appears when constructing the quadratic zeta function in Dedekind's zeta function. The zero points probably extend beyond the critical line, and their Euler product divergence is prevented by “dual non-periodic paths.” Higher orders are also possible.
非正則ゼータ構造　種数・ループ構造をもつゼータ関数の拡張。デデキントのゼータで、二次のゼータを構成する時に自然に出てくる。ゼロ点はおそらく臨界線上からはみ出し、「双対非周期経路」によって、そのオイラー積の発散が防がれている。より、高次化も可能。

Spiral development:Spiral expansion representing recursive quasi-dual morphism. Used when bundling the infinite concentric circle structure of the Zeta function into a spiral shape and projecting it linearly.
螺旋的展開 再帰的類双対写像を表現する螺旋展開。ゼータ関数の無限同心円構造を螺旋形に束ねて、直線的に射影するときに使われる

Trace bundle: The structure generated by repeated contractions and expansions of Lyndon sequences.
トレース束　構造体の全経路を集約した構造。それぞれのトレースは、リンドン列と一意対応。
→全体（特に Part I, III）

Primitive p-th root of unity:Primitive p-th root of on the unit circle (associated with a prime p)
素数ｐに対応する単位円状の一乗根　p は素数。「素数に対応する無限同心円の上に対応する単位乗根」という意味

Quasi-dual morphism: A mapping that transforms fractals into fractals, transforming trace bundles into either loop-type or tree-type structures. A morphism that resembles duality but inherently resists full closure.　　quasi-dual　quasi-dual morphism
フラクタルをフラクタルへと変形する写像、トレース束をループ型のほうか、ツリー型のほうへと変形する
　In this theory, we define quasi-dual operations as dual-like transformations that lack formal duality properties such as closure or invertibility, yet govern recursive, non-commutative constructions within trace structures.
　全体（とくに Part II）

Recursive quasi-duality: A structure that repeatedly performs class dual operations. A concept connected to the category zeta structure in particular.
When repeating class dual transformations, it is necessary to determine whether the structure is invariant or not, while noting that it is non-commutative and multivalued, in order to find the restorability of a specific structure.
類双対操作を反復的に繰り返す構造。特に圏的ゼータ構造に接続する概念。類双対変形を繰り返すときそれが非可換であり、多値であることに注意しつつ、構造の不変性を変えているのか、変えていないのかを見ながら、特定の構造への復元性を見つけないといけない。

u^p→e^-slogp; One of the quasi-dual maps, often used in deformations such as the Ihara zeta function.
u^p→e^-slogp; 類双対写像の一つで、伊原ゼータ関数などの変形においてよく用いられる。

Zeta deformation process:When fractally deforming the zeta function, there is always "multivalueness," so it is necessary to find an appropriate deformation method that corresponds to such "diverse deformation possibilities." For this reason, I am attempting four types of deformation methods in my essay.
Just pay attention to scaling and discrete/continuous properties.
ゼータ変形　ゼータ関数をフラクタルや類双対写像で変形するプロセス。ゼータ関数をフラクタル的に変形するときには、必ず「多値性」があるので、そのような「多様な変形可能性」に応じて、適切な変形方法を探らないといけない。そのため、僕は論考の中で４種類の変形方法を試みている。スケーリングや離散・連続性に注意すればいい。

3, Fractal restoration theory(フラクタル復元理論)

Fractal reconstruction;Mainly by continuously applying divergent quasi-dual mappings, the internal completeness of the structure is constructed. If there are two prime structures, for example, one Euler product, then naturally all Euler products across all prime numbers can be restored.
The prime Lyndon elements contain all natural numbers,but the prime path lengths in the bouquet graph lack ordering,and this absence leads to a contraction to the prime number structure,corresponding to the Euler product.
フラクタル復元　部分構造から全体を生成する写像操作。主に発散的類双対写像の連続適用によって、構造体の内部的な完備性を構成する。素構造が２つあれば、たとえば、ひとつのオイラー積などは自然にすべての素数に渡るオイラー積が復元可能
「オイラー積に対応する」伊原ゼータの花束グラフを復元するときに、「素リンドン元にはすべての自然数が含まれる」けど、「素経路の長さ」には順序性がないから、「素数」へと縮約される,という「非可換」→「可換」という変換に注意。
→Part I, Part IV

4. Structures, graphs, and Riemann surfaces(構造体・グラフ・リーマン面)

"Bouquet graph" : A wedge sum of n circles, i.e., a single vertex with multiple attached loops. This structure serves as the minimal model for the trace contraction in the graphical Riemann surface.
花束グラフ　n 個の円からなるウェッジ和を指し、すなわち、複数のループが接続された単一の頂点からなる構造。この構造は、グラフ的リーマン面におけるトレース収縮の最小モデルとして機能します。

Deligne's condition:Unlike general Deligne cohomology, here we refer to the divergence control structure resulting from the combination of dual non-periodic paths and imaginary multiplication circuits as the Deligne structure. Structures that satisfy Ramanujan's inequality
ドリーニュの構造　一般のドリーニュコホモロジーの意味とは異なり、ここでは双対非周期的経路と虚数乗算回路の組み合わせから生じる発散制御構造をドリーニュ構造と呼ぶ。ラマヌジャンの不等式を満たす構造のこと。

Dual non-periodic paths :The dual structure of extremely simple non-periodic sequences arising from two non-periodic circuits of curves with genus one.
双対的非周期回路　種数一の曲線の非周期的回路が２つであるところから生じる、極度に単純な非周期列の双対的構造

Hodge bouquet: A collection of Riemannian surface graphs with the same number of seeds, arranged in a bouquet graph. Note that it also has a normal "bouquet structure" corresponding to the "Euler product." It is also necessary to distinguish it from the commonly referred to "Hodge structure."
ホッジの花束　種数一のリーマン面グラフを花束グラフ状に束ねたもの。「オイラー積」に対応する通常の「花束構造」をも持っていることに注意。また、通常言われている「ホッジ構造」との区別が必要。

Trace bundle : This refers to the entire set of all paths (traces) that pass through the interior of a given structure, including both finite and infinite lengths.

In particular, when the components of the path can be uniquely distinguished, this set can be one-to-one corresponding with the entire Lyndon sequence (and its infinite repetition).
トレース束　ある構造体の内部を通過するすべての経路（トレース）を、有限長・無限長のいずれの場合も含めて集めた集合全体をいう。

とくに、その経路の構成要素が一意に区別可能なとき、この集合はリンドン列全体（およびその無限反復）と一対一に対応しうる。

quasi-modular trace ; A natural quasi-dual transformation that reduces "irreducible rational Lyndon" in trace bundles to "prime Lyndon" or "natural number Lyndon." Note that this can be performed even without a specific form, as long as a trace bundle

is available. In that case, it can be expressed as a geometric operation as a deformation of the graph.
トレース束における「既約有理リンドン」を「素リンドン」や「自然数リンドン」へ縮約する自然な類双対変形。特に明示的形式がなくてもトレース束があれば行えることに注意。その場合、グラフの変形として、幾何学的操作の一環として、表現できるだろう。

Regularity:A function is regular when the local structure of its graph is uniform and orderly.non-regularity
正則性　関数が正則、グラフの局所構造が一様で整っていること
非正則性 グラフの局所構造が一様ではなく、正則でない構造、ゼロ点配置が乱れているなど

Non-regularity Irregularity: The local structure of the graph is not uniform but sparse. The zeros of the zeta function are scattered along the critical line.
非正則性　グラフの局所構造が一様ではなく、まばらであること。ゼータのゼロ点が臨界線からばらばらになる。

5,公理・写像・圏的表現

Collections of dual motif-closed sets;A complete state that cannot be further expanded by repeating dual operations.
双対操作を繰り返すことによってこれ以上拡大しない圏的な完備状態

Fractal-based logic; Since quasi-duality transformations transform fractals into fractals, fractal properties are normally preserved even with normal restoration or reduction, as well as with divergent restoration or reduction. Note that there are times when the structure of the “trace bundle” remains unchanged and times when it undergoes structural changes. A language is needed to describe the structural changes of the trace bundle.
類双対性変換はフラクタルをフラクタルへと変形するので、通常の復元や縮約でも、発散的復元や縮約でも、普通にフラクタル性が保たれていること。そして、そのとき、「トレース束」の構造が不変であるときと構造論的な変化をする時があることに注意。トレース束の変化構造を記述する言語が必要。

quasi-dual morphism
→ 類双対写像

Quasi-duality closure ;A noncommutative, multivalued, quasi-dual transformation that cycles through all transformations between the maximum loop structure and the maximum tree structure until it reaches a state that cannot be further expanded. This becomes a zeta structure of a categorical structure.

→ 類双対閉包

非可換で、多値的な、類双対変換が、最大ループ構造と最大ツリー構造の間の変換をすべて巡らせて、これ以上拡大し得ない状態へと達すること 圏的構造のゼータ構造体になる