バタワースフィルタの時間応答

たたみ込み積分

任意の回路に単位インパルスを入力した時の出力をインパルス応答と呼ぶ．これを$h(t)$とする．また，任意の入力信号$f(t)$をこの回路に入力した時の出力を$g(t)$とする．なお，$f(t), g(t), h(t) = 0$，$t < 0$である．

この時，

$$g(t) = \int_0^\infty h(t) f(t-\tau) d\tau = \int_0^\infty h(t-\tau) f(t) d\tau$$

である．これをたたみ込み積分という．

ここで，$h(t)$，$f(t)$，$g(t)$のラプラス変換をそれぞれ$H(s)$，$F(s)$，$G(s)$とおくと，たたみ込み積分の式をラプラス変換することにより

$$G(s) = H(s)F(s)$$

を得る．すなわち，インパルス応答のラプラス変換$H(s)$と任意の入力のラプラス変換$F(s)$がわかっていれば，これらをかけあわせて$G(s)$を求め，これを逆ラプラス変換することにより，任意の入力信号$f(t)$についての出力信号$g(t)$を得る．

伝達関数と時間応答

伝達関数は

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

で与えられる．ここで，$X(s)$，$Y(s)$はそれぞれ入力信号$x(t)$，出力信号$y(t)$のラプラス変換である．したがって，$Y(s) = H(s)X(s)$である．したがって，インパルス応答やステップ応答を求めるためには，たたみ込み積分を直接用いるか，ラプラス変換の関係を用いるか，いずれかの方法で良い．

ここでは，簡単に計算できる方法として，ラプラス変換の関係から時間応答を求める手法を示す．

1)インパルス応答

入力信号$x(t)$を単位インパルス$\delta(t)$とすると，ラプラス変換の性質から$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$なので，この場合$Y(s) = H(s)$である．すなわち，「インパルス応答のラプラス変換は伝達関数に等しい」と言える．これを逆ラプラス変換すれば$y(t) = h(t)$であるから，「インパルス応答は伝達関数の逆ラプラス変換に等しい」と言える．

2)ステップ応答

入力信号$x(t)$を単位ステップ関数$u(t)$とすると，ラプラス変換の性質から$\mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$なので，この場合

$Y(s)=\dfrac{H(s)}{s}$ である．すなわち，「ステップ応答のラプラス変換は伝達関数の $1/s$ に等しい」と言える．これを逆ラプラス変換すれば $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{H(s)}{s}\right]$ であるから，「$\dfrac{H(s)}{s}$ を逆ラプラス変換すれば単位ステップ応答を得る」と言える．

さらに，ラプラス変換の時間微分則，時間積分則を考慮すれば，インパルス応答とステップ応答は微分・積分の関係にあることがわかる．

n 次の原形フィルタの時間応答

n 次の原形フィルタの極を $s_1, s_2, \cdots, s_n$ とすると，伝達関数は

$$H(s)=\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

である．これを部分分数展開すると

$$H(s)=\frac{r_1}{s-s_1}+\frac{r_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{r_n}{s-s_n}$$

である．ラプラス変換公式 $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-\alpha}\right]=e^{\alpha t}$ を用いて上式を逆ラプラス変換すると

$$h(t)=r_1e^{s_1t}+r_2e^{s_2t}+\cdots r_ne^{s_nt}$$

を得る．上述した伝達関数と時間応答の関係から，この $h(t)$ はインパルス応答そのものである．

同様にして，

$$\begin{aligned}\frac{H(s)}{s}&=\frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}\\&=\frac{p_0}{s}+\frac{p_1}{s-s_1}+\frac{p_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{p_n}{s-s_n}\end{aligned}$$

であるから，これを逆ラプラス変換すれば，

$$y(t)=L^{-1}\left[\frac{H(s)}{s}\right]=p_0u(t)+p_1e^{s_1t}+p_2e^{s_2t}+\cdots+p_ne^{s_nt}$$

が得られ，これはステップ応答である．

現実問題として，ラプラス変換公式を使えば，上記のようにすべての極に分解しなくても，低次であれば簡単に時間応答を求める事ができる．以下，具体的な例を示す．

バタワース原形フィルタの時間応答

1) 1 次バタワース

$$H_1(s)=\frac{1}{s+1}$$

インパルス応答　$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+1}\right] = e^{-t}$

ステップ応答　$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}\right] = u(t) - e^{-t}$

2) ２次バタワース

$$H_2(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

インパルス応答　$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+\sqrt{2}s+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{\left(s+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right] = \sqrt{2}e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\sin\dfrac{t}{\sqrt{2}}$

ステップ応答

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s^2+\sqrt{2}s+1\right)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\sqrt{2}}{s^2+\sqrt{2}s+1}\right] \\ &= u(t) - e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

３次以上の高次についても，同様の手法で時間応答を求めていくことができる．
具体的係数をもたない，より一般化した形式については，別資料（時間応答と周波数応答のまとめ）を参照のこと．

時間応答の描画
上記で求めたバタワースフィルタの時間応答を描画すると，以下のようになる．

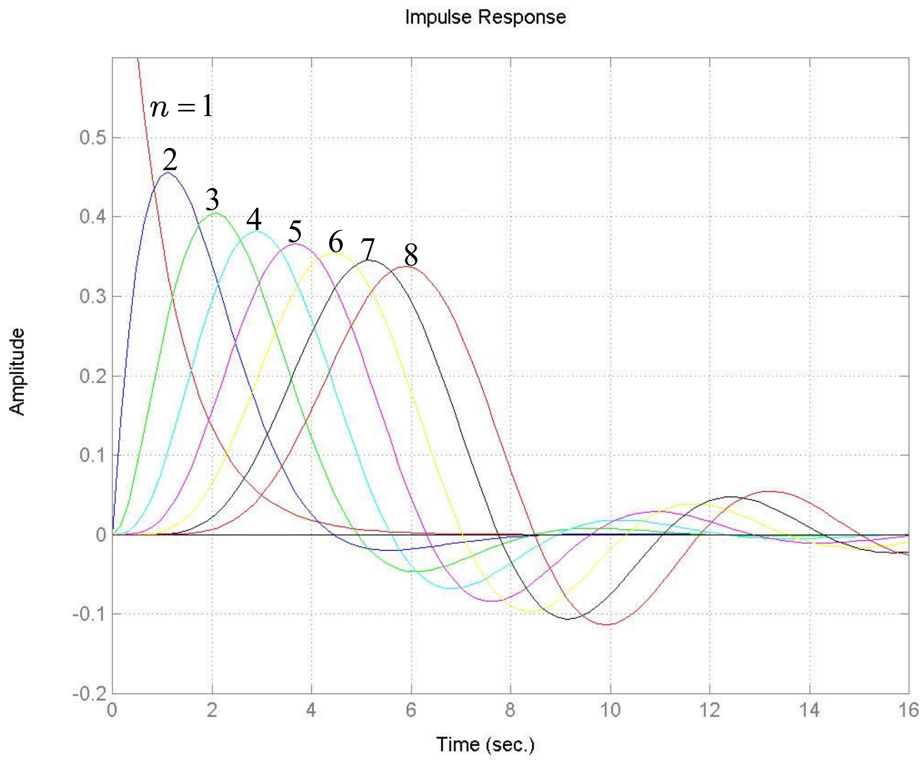

Fig. 1 バタワースフィルタのインパルス応答

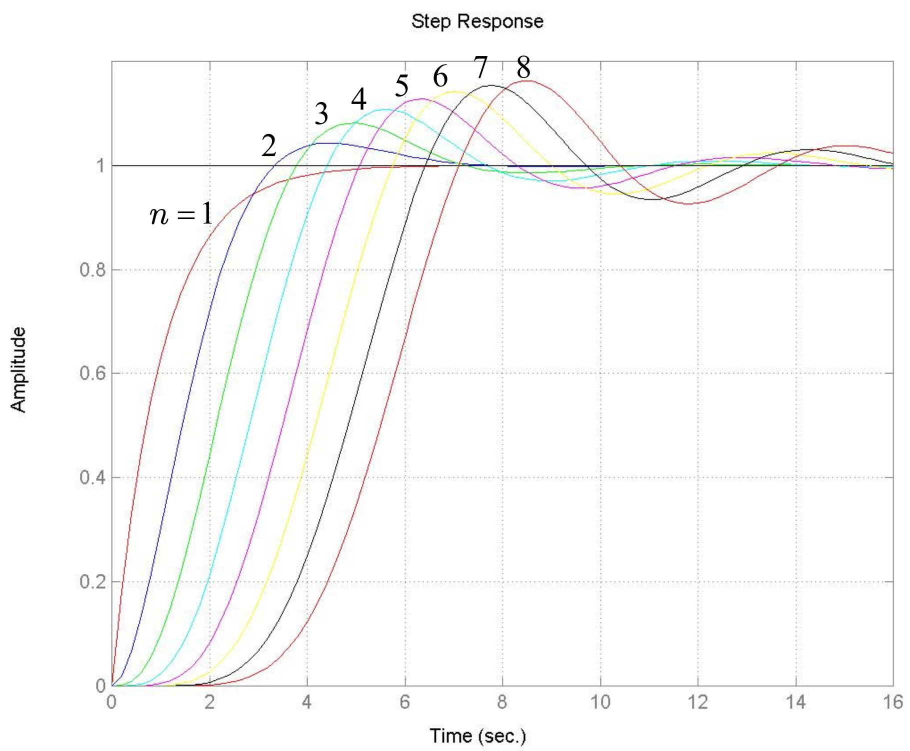

Fig. 2 バタワースフィルタのステップ応答

チェビシェフ原形フィルタの時間応答

リプルを一定にして比較するため，$\varepsilon = 0.5$ とする．

1) 1 次チェビシェフ

極は$s_1=-2$となるので,

$$H_1(s)=\frac{1}{s+2}$$

インパルス応答　$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=e^{-2t}$

ステップ応答　$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(u(t)-e^{-2t}\right)$

2) 2次チェビシェフ

$s_1=-\sin\frac{\pi}{4}\sinh a+j\cos\frac{\pi}{4}\cosh a\approx -0.5559+j0.8995$, $s_2=s_1^*$となるので,

$$H_2(s)=\frac{1}{(s-s_1)(s-s_1^*)}=\frac{1}{s^2-(s_1+s_1^*)s+s_1s_1^*}=\frac{1}{s^2-2\,\mathrm{Re}[s_1]s+|s_1|^2}$$
$$=\frac{1}{(s-\mathrm{Re}[s_1])^2+|s_1|^2-(\mathrm{Re}[s_1])^2}=\frac{1}{(s-\mathrm{Re}[s_1])^2+(\mathrm{Im}[s_1])^2}$$

ここでラプラス変換公式$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}\Leftrightarrow e^{-\alpha t}\sin\omega t$を適用すると,

インパルス応答　$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-\mathrm{Re}[s_1])^2+(\mathrm{Im}[s_1])^2}\right]=\frac{1}{\mathrm{Im}[s_1]}e^{\mathrm{Re}[s_1]t}\sin(\mathrm{Im}[s_1]t)$

ステップ応答

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\{(s-\mathrm{Re}[s_1])^2+(\mathrm{Im}[s_1])^2\}}\right]=\frac{1}{|s_1|^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s-2\,\mathrm{Re}[s_1]}{(s-\mathrm{Re}[s_1])^2+(\mathrm{Im}[s_1])^2}\right]$$
$$=\frac{1}{|s_1|^2}\left[u(t)-e^{\mathrm{Re}[s_1]t}\left(\cos(\mathrm{Im}[s_1]t)+\frac{\mathrm{Re}[s_1]}{\mathrm{Im}[s_1]}\sin(\mathrm{Im}[s_1]t)\right)\right]$$

時間応答の描画

上記で求めたチェビシェフフィルタの時間応答を描画すると，以下のようになる．ただし，チェビシェフフィルタは，定義式のままでは次数の偶奇によって直流利得が異なるので，直流利得が1となるように正規化している．逆に，直流利得を正規化することによって通過域のリプル範囲が異なるため，グラフを次数の偶奇別に描画した.

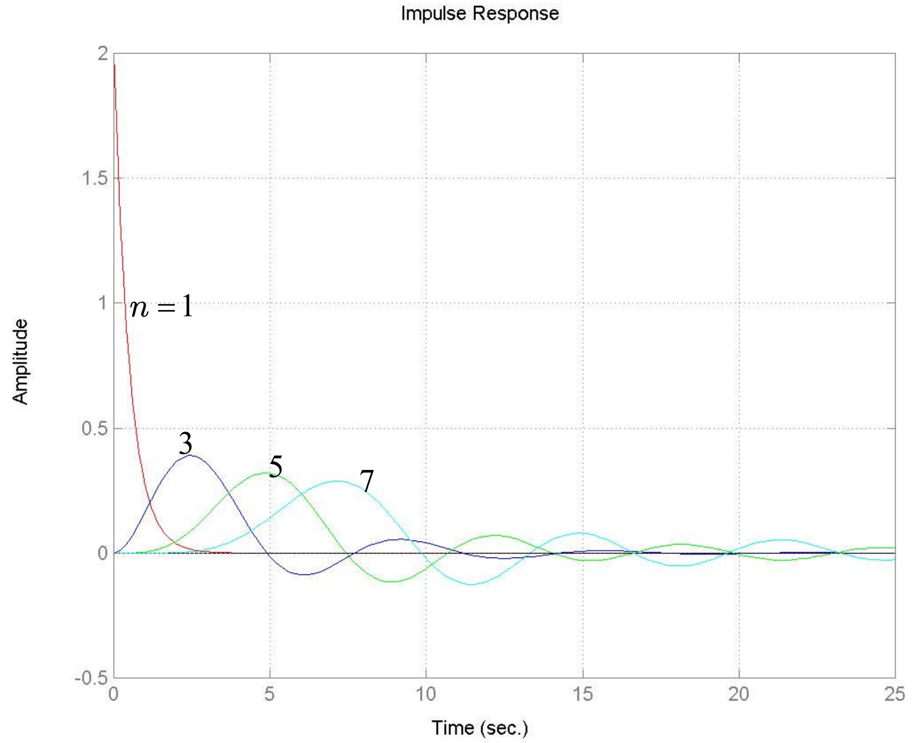

Fig. 3 チェビシェフフィルタのインパルス応答（奇数次数）

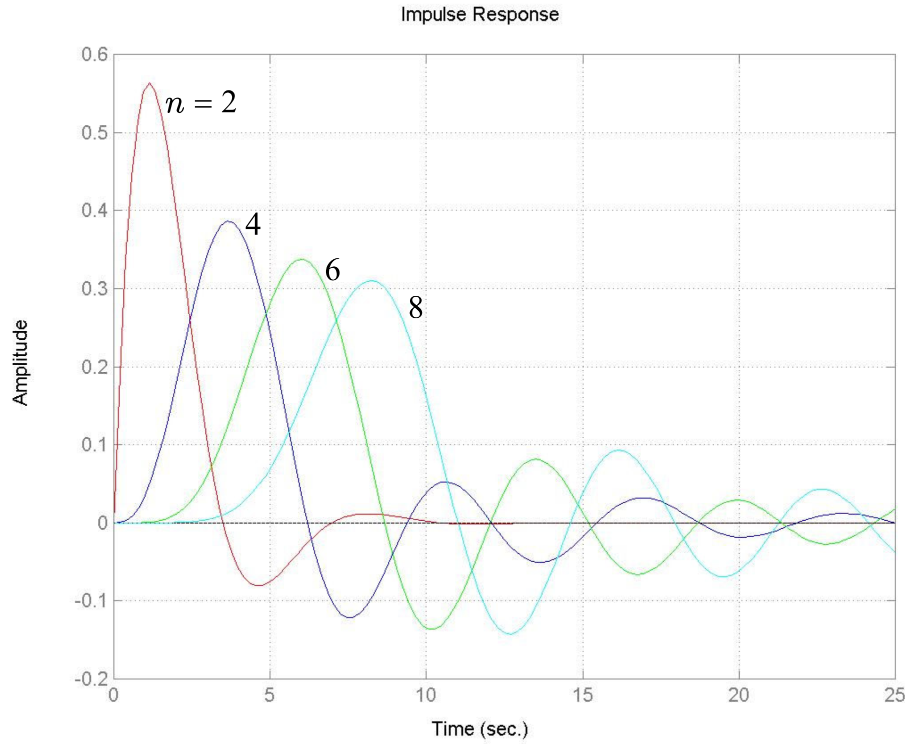

Fig. 4 チェビシェフフィルタのインパルス応答（偶数次数）

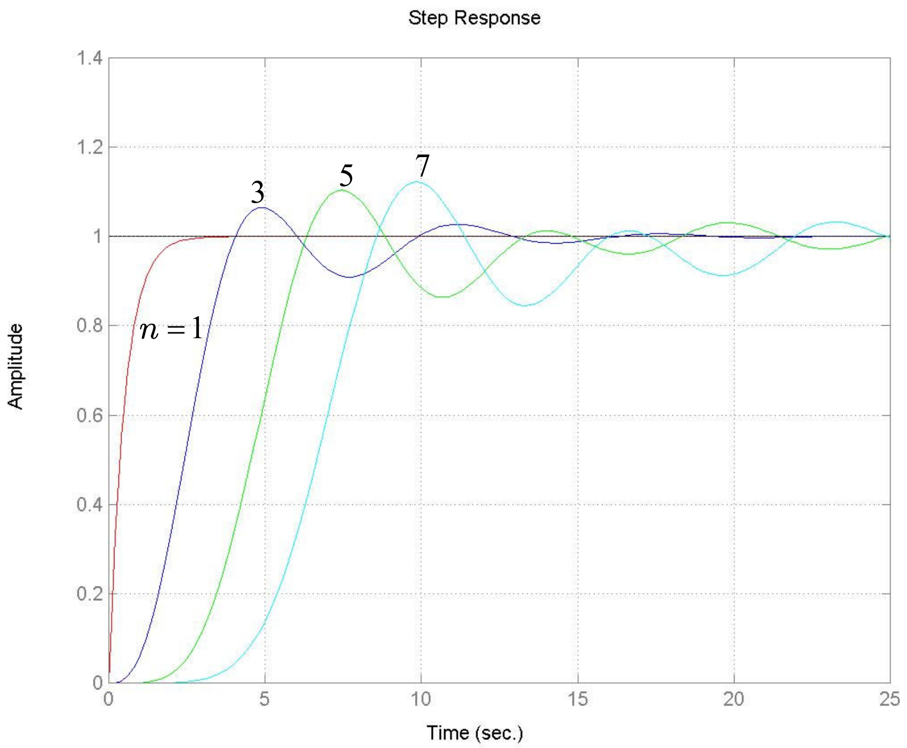

Fig. 5 チェビシェフフィルタのステップ応答（奇数次数）

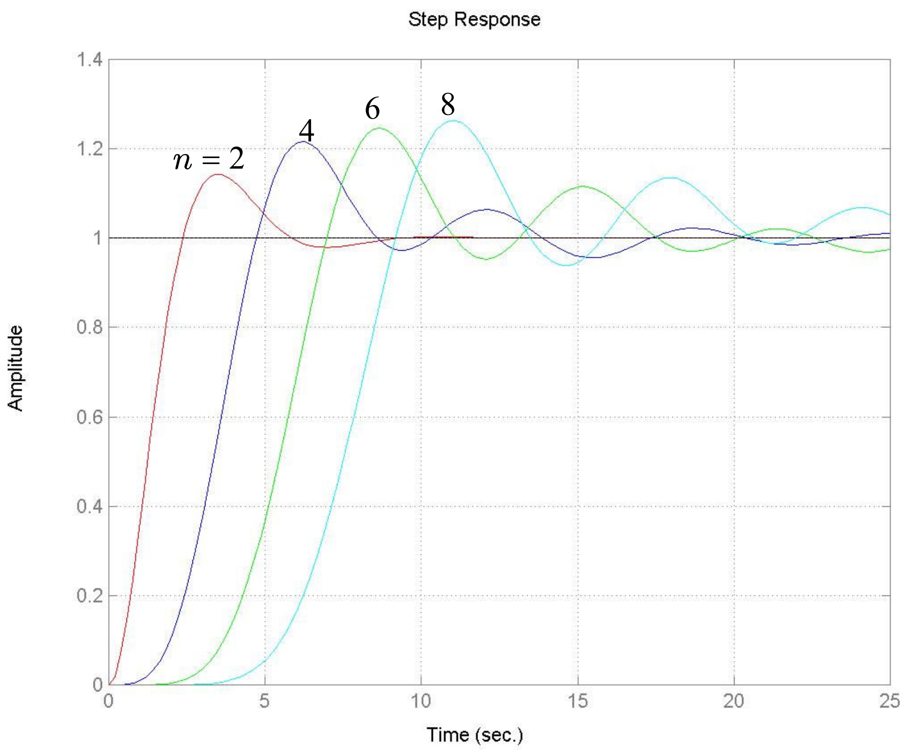

Fig. 6 チェビシェフフィルタのステップ応答（偶数次数）