部分分数分解可能性について

講義担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

本講義資料では，有理式の部分分数分解可能性を証明する．定理の正確な主張は以下である．

定理

1 変数実係数多項式多項式 $g(x)$ が

$$g(x) = a\prod_{i=1}^{k}(x+\alpha_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{\ell}(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{n_j} \neq 0$$

と書けているとする．ただし，$k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m_i, n_j \in \mathbb{Z}_{>0}, a, \alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}, \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ $(i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, \ell)$ とし，右辺の表示に現れる各多項式は相異なっているとする．（つまり，$i_1 \neq i_2 \Rightarrow \alpha_{i_1} \neq \alpha_{i_2}$ かつ，$j_1 \neq j_2 \Rightarrow (\beta_{j_1}, \gamma_{j_1}) \neq (\beta_{j_2}, \gamma_{j_2})$．）
このとき，1 変数実係数多項式 $r(x)$ が ($r(x)$ の次数)<($g(x)$ の次数) をみたすなら，$r(x)/g(x)$ は

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{m_i}\frac{A_{i,s}}{(x+\alpha_i)^s} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{n_j}\frac{B_{j,t}x + C_{j,t}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^t} \quad (A_{i,s}, B_{j,t}, C_{j,t} \in \mathbb{R})$$

という形に書ける．

注意 1．一般に，$\prod_{i=1}^{k} a_i$ は a_1 から a_k までの積 $a_1 \cdots a_k$ を表す記号である．総和を表す記号 Σ の積バージョンである．

注意 2．$r(x)/g(x)$ を定理で述べた形に書く方法は実は 1 通りである (部分分数分解の一意性)．一意性の証明はここでは与えないが，是非各自理由を考えてもらいたい．

注意 3．この定理では $g(x)$ の形を特別なものに限定しているように見えるが，実は**任意の (0 でない)1 変数実係数多項式 $g(x)$ は定理に書いた形に書ける**ことが知られている．よって，実は $g(x)$ には特別は仮定はなく，上の定理は**分子の次数が分母の次数よりも小さいような一般の実数係数の有理式に対して適用可能**な定理である．

一般に任意の 0 でない複素数係数 1 変数 n 次多項式 $g(x)$ は，ある $a, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ を用いて，

$$g(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) \tag{$*$}$$

という形に因数分解できることが知られている ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ には重複があってもよい)．この定理は**代数学の基本定理**と呼ばれる．$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は $g(x)$ の**根 (こん)** と呼ばれる．さらに，$g(x)$ の係数が全て実数であるとすると，α が $g(x)$ の根となるとき，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $g(x)$ の根となり，しかも α の重複度 ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ の中の α の個数) は $\overline{\alpha}$ の重複度に等しい (理由を考えよ)．よって，$g(x)$ の実数でない根 α に対しては $(x-\alpha)$ と $(x-\overline{\alpha})$ をペアにして，$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2+\beta x+\gamma$ とすると，$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ であり，$\beta^2 - 4\gamma < 0$ である．よって，$g(x)$ が実数係数多項式の場合，$(*)$ から定理の形の $g(x)$ の分解が得られることがわかる．

定理の証明．一般に 0 でない多項式 $h(x)$ に対し，その次数を $\deg h(x)$ と書くことにする．定理を $N = \deg g(x)$ に関する帰納法で示す．なお仮定より，$N = \sum_{i=1}^{k} m_i + 2\sum_{j=1}^{\ell} n_j$ である．

* *e-mail*：hoya@math.titech.ac.jp

$N=1$ のとき，$g(x)$ は $a(x+\alpha)$ の形であり，$\deg r(x)<1$ なので，$r(x)$ は実数の定数 r だから，

$$\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{r}{a(x+\alpha)}=\frac{r/a}{x+\alpha}$$

となって，これは求める形である．

次に $N>1$ とし，$\deg A(x)<\deg B(x)<N$ なる任意の有理式 $C(x)=A(x)/B(x)$ に対しては既に定理の形に書けることが示されていると仮定する．

(i) $k>0$ のとき：

$$g_0(x)\coloneqq a\prod_{i=2}^{k}(x+\alpha_i)^{m_i}\prod_{j=1}^{\ell}(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{n_j}$$

とすると，$g(x)=(x+\alpha_1)^{m_1}g_0(x)$ である．このとき，$g_0(-\alpha_1)\neq 0$ に注意して，

$$A_{1,m_1}\coloneqq\frac{r(-\alpha_1)}{g_0(-\alpha_1)}$$

とする．すると，$r(-\alpha_1)-A_{1,m_1}g_0(-\alpha_1)=0$ なので，因数定理より，

$$r(x)-A_{1,m_1}g_0(x)=(x+\alpha_1)k(x)$$

と書ける．(ただし，$k(x)$ は 1 変数実係数多項式．) よって，

$$\frac{r(x)}{g(x)}-\frac{A_{1,m_1}}{(x+\alpha_1)^{m_1}}=\frac{r(x)-A_{1,m_1}g_0(x)}{g(x)}=\frac{k(x)}{(x+\alpha_1)^{m_1-1}g_0(x)}$$

を考えると，$(x+a_1)^{m_1-1}g_0(x)$ の次数は $N-1$ であり，さらに $\deg r(x)<N,\deg g_0(x)<N$ より，

$$\deg k(x)=\deg(r(x)-A_{1,m_1}g_0(x))-1<N-1.$$

よって，帰納法の仮定より，

$$\frac{k(x)}{(x+\alpha_1)^{m_1-1}g_0(x)}=\sum_{s=1}^{m_1-1}\frac{A_{1,s}}{(x+\alpha_1)^s}+\sum_{i=2}^{k}\sum_{s=1}^{m_i}\frac{A_{i,s}}{(x+\alpha_i)^s}+\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{t=1}^{n_j}\frac{B_{j,t}x+C_{j,t}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^t}\quad(A_{i,s},B_{j,t},C_{j,t}\in\mathbb{R})$$

と書けることがわかる．いま，

$$\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{A_{1,m_1}}{(x+\alpha_1)^{m_1}}+\frac{k(x)}{(x+\alpha_1)^{m_1-1}g_0(x)}$$

なので示すべきことは示された．

(ii) $k=0$ のとき：

$$g_0(x)\coloneqq a\prod_{j=2}^{\ell}(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{n_j}$$

とすると，$g(x)=(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}g_0(x)$ である．ここで，$x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$ の複素数解の一つを α とすると，もう一つの解はその共役複素数 $\overline{\alpha}$ である ($\beta_1^2-4\gamma_1<0$ より α は実数ではないことに注意)．これらを用いて，以下 $k>0$ のときと同様の議論を行う．

$g_0(\alpha)\neq 0$ に注意して，

$$e\coloneqq\frac{r(\alpha)}{g_0(\alpha)}$$

とおく (e は一般には複素数であることに注意)．このとき，$r(\alpha)-eg_0(\alpha)=0$ であり，さらに $g(x),r(x)$ が実係数多項式であることに注意すると，$r(\overline{\alpha})-\overline{e}g_0(\overline{\alpha})=\overline{r(\alpha)-eg_0(\alpha)}=0$ となる．よって，

$$r_0(x)\coloneqq r(x)-\frac{e}{\alpha-\overline{\alpha}}(x-\overline{\alpha})g_0(x)-\frac{\overline{e}}{\overline{\alpha}-\alpha}(x-\alpha)g_0(x)$$

とすると，$r_0(\alpha) = r_0(\overline{\alpha}) = 0$ である．さらに，

$$B_{1,n_1} \coloneqq \frac{e - \overline{e}}{\alpha - \overline{\alpha}}, \qquad C_{1,n_1} \coloneqq \frac{-e\overline{\alpha} + \overline{e}\alpha}{\alpha - \overline{\alpha}}$$

とすると，これらは複素共役を考えても値が不変であることからいずれも実数である．これらを用いると，

$$r_0(x) = r(x) - (B_{1,n_1}x + C_{1,n_1})g_0(x)$$

となるので，$r_0(x)$ は実係数多項式である．因数定理より，$r_0(x)$ は $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha}) = x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$ で割り切れて，

$$r_0(x) = (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)k(x)$$

と書ける．(ただし，$k(x)$ は 1 変数実係数多項式．) よって，

$$\frac{r(x)}{g(x)} - \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}} = \frac{r(x) - (B_{1,n_1}x + C_{1,n_1})g_0(x)}{g(x)} = \frac{k(x)}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1-1}g_0(x)}$$

を考えると，$(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1-1}g_0(x)$ の次数は $N-2$ であり，さらに $\deg r(x) < N, \deg g_0(x) \leq N-2$ より，

$$\deg k(x) = \deg(r_0(x)) - 2 = \deg(r(x) - (B_{1,n_1}x + C_{1,n_1})g_0(x)) - 2 < N - 2.$$

よって，帰納法の仮定より，

$$\frac{k(x)}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1-1}g_0(x)} = \sum_{t=1}^{n_1-1} \frac{B_{1,t}x + C_{1,t}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^t} + \sum_{j=2}^{\ell}\sum_{t=1}^{n_j} \frac{B_{j,t}x + C_{j,t}}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^t} \quad (B_{j,t}, C_{j,t} \in \mathbb{R})$$

と書けることがわかる．いま，

$$\frac{r(x)}{g(x)} = \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1}} + \frac{k(x)}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{n_1-1}g_0(x)}$$

なので示すべきことは示された． □