線形代数 II 第 13 回本レポート課題解答例

担当：大矢 浩徳 (OYA Hironori)*

問題 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

とし，$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の間の線形写像

$$f_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}, \qquad f_B \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{x} \mapsto B\boldsymbol{x}$$

を考える．このとき，以下の問に答えよ．

(1) f_A の核 $\operatorname{Ker} f_A$ の基底を 1 つ求めよ．

(2) f_A の像 $\operatorname{Im} f_A$ の基底を 1 つ求めよ．

(3) f_A の像と f_B の核の共通部分 $\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B$ の基底を 1 つ求めよ．
(Hint：(2) で求めた $\operatorname{Im} f_A$ の基底を用いる．)

問題 1 解答例.

(1)

$$\operatorname{Ker} f_A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

より，x_1, x_2, x_3 に関する連立一次方程式

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解くことを考える．A に行基本変形を繰り返して簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので，上の連立一次方程式の一般的な解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ c \text{ は任意パラメータ}$$

となる．これより，

$$\operatorname{Ker} f_A = \left\{ c \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}$$

* *e-mail*：hoya@shibaura-it.ac.jp

となり，$\mathrm{Ker}\, f_A$ の基底の 1 つは，$\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ である．

(2) A に列基本変形を繰り返して階段行列にすると，

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\1&0&3\\2&5&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 2,3 列に加える}]{\text{第 1 列の}-1\text{ 倍を}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\1&-1&2\\2&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第 3 列に加える}]{\text{第 2 列の 2 倍を}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&-1&0\\2&3&0\end{pmatrix}$$

となる．よって，$\mathrm{Im}\, f_A$ の基底の 1 つは

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

である．

(3) (2) より，

$$\mathrm{Im}\, f_A=\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}=\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\;\middle|\; c_1,c_2\in\mathbb{K}\right\}$$

である．ここで，

$$\mathrm{Im}\, f_A\cap\mathrm{Ker}\, f_B=\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{Im}\, f_A\mid f_B(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathrm{Im}\, f_A\mid B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

であるので，c_1,c_2 に関する方程式

$$B\left(c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

を考える．このとき左辺は

$$\begin{pmatrix}4&1&1&1\\3&1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\2c_1+c_2\\c_1-c_2\\2c_1+3c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9c_1+3c_2\\12c_1+4c_2\end{pmatrix}$$

となるので，上の方程式の一般的な解は，

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix},\ c\text{ は任意パラメータ}$$

となる．よって，

$$\mathrm{Im}\, f_A\cap\mathrm{Ker}\, f_B=\left\{c\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+(-3c)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix}\;\middle|\; c\in\mathbb{K}\right\}=\left\{c\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-7\end{pmatrix}\;\middle|\; c\in\mathbb{K}\right\}=\mathrm{span}_{\mathbb{K}}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-7\end{pmatrix}\right\}$$

となる．よって，$\mathrm{Im}\, f_A\cap\mathrm{Ker}\, f_B$ の基底の 1 つは $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-7\end{pmatrix}\right\}$ である．

(3):別解 (まず $\mathrm{Ker}\, f_B$ を求める)

$$\mathrm{Ker}\, f_B=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\mid f_B(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^4\mid B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

より，x_1, x_2, x_3, x_4 に関する連立一次方程式

$$B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1 & 1 & 1\\3 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

を解くことを考える．B に行基本変形を繰り返して簡約化すると，

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\0 & 1 & 9 & 5\end{pmatrix}$$

となるので，上の連立一次方程式の一般的な解は，

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}2\\-9\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\1\end{pmatrix},\ c_1, c_2 \text{は任意パラメータ}$$

となる．これより，

$$\operatorname{Ker} f_B = \left\{ c_1\begin{pmatrix}2\\-9\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

である．一方，(2) より，

$$\operatorname{Im} f_A = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix} \right\} = \left\{ c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, c_1, c_2 \in \mathbb{K} \right\}$$

である．$\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B$ を求めるので，c_1, c_2, c_3, c_4 に関する方程式

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix} = c_3\begin{pmatrix}2\\-9\\1\\0\end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\1\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\2 & 1 & 9 & 5\\1 & -1 & -1 & 0\\2 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

を考える．係数行列 $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\2 & 1 & 9 & 5\\1 & -1 & -1 & 0\\2 & 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$ を行基本変形で簡約化すると，

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1/7\\0 & 1 & 0 & -3/7\\0 & 0 & 1 & 4/7\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

となるので，上の方程式の一般の解は

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\-3\\4\\-7\end{pmatrix},\ c \text{ は任意パラメータ}$$

となる．これより，

$$\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B = \left\{ c\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} + (-3c)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\3\end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ 4c\begin{pmatrix}2\\-9\\1\\0\end{pmatrix} + (-7c)\begin{pmatrix}1\\-5\\0\\1\end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= \left\{ c\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-7\end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{K} \right\} = \operatorname{span}_{\mathbb{K}}\left\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-7\end{pmatrix} \right\}$$

となるので，$\operatorname{Im} f_A \cap \operatorname{Ker} f_B$ の基底の 1 つは $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$ である． □

問題 1 補足解説. A を $\mathbb{K}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列とし，$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ という線形写像を考えたとき，$\operatorname{Ker} f_A$ の基底を求める方法は第 10 回講義資料定理 10.10(例 22 も参考にすること) で，$\operatorname{Im} f_A$ の基底を求める方法は第 13 回講義資料 p.4〜p.6 で解説されている．なお，一般にベクトル空間の基底の取り方は無限にあるので必ずしもこの解答と同じ基底になっている必要は無い．

(3) の別解の方法を用いれば，一般に基底のわかっている部分空間 W_1, W_2 が与えられたとき，$W_1 \cap W_2$ の基底を求めることができる (これを繰り返せば，3 つ以上の部分空間の共通部分についてもその基底を求めることができる). □

問題 2

2 次以下の $\mathbb{C}$ 係数 1 変数多項式全体のなす $\mathbb{C}[x]$ の部分空間を $\mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ と書く．つまり，

$$\mathbb{C}[x]_{\leq 2} := \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{C}\}$$

とする．線形写像

$$F \colon \mathbb{C}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{C}[x]_{\leq 2},\ f(x) \mapsto (2x+3)f'(x) - f(x)$$

を考える．(例えば，$F(x^2+3x+1) = (2x+3)(2x+3) - (x^2+3x+1) = 3x^2+9x+8$．) このとき，$F$ に関する以下の問に答えよ．解答においては，計算過程も残すこと．：

(1) 定義域の基底を $B_1 = \{1, x, x^2\}$，終域の基底を $B_2 = \{1, x+1, x^2+x\}$ としたとき，基底 B_1, B_2 に関する F の表現行列を求めよ．

(2) 定義域，終域の基底を共に $B = \{1, 2x+3, 4x^2+12x+9\}$ としたとき，基底 B に関する F の表現行列を求めよ．

問題 2 解答例.

(1)

$$\begin{aligned}
F(1) &= (2x+3)\cdot 0 - 1 = -1 = (-1)\cdot 1 + 0\cdot(x+1) + 0\cdot(x^2+x) \\
F(x) &= (2x+3)\cdot 1 - x = x+3 = 2\cdot 1 + 1\cdot(x+1) + 0\cdot(x^2+x) \\
F(x^2) &= (2x+3)\cdot(2x) - x^2 = 3x^2+6x = (-3)\cdot 1 + 3\cdot(x+1) + 3\cdot(x^2+x)
\end{aligned}$$

より，基底 B_1, B_2 に関する F の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2)

$$\begin{aligned}
F(1) &= (2x+3)\cdot 0 - 1 = -1 = (-1)\cdot 1 + 0\cdot(2x+3) + 0\cdot(4x^2+12x+9) \\
F(2x+3) &= (2x+3)\cdot 2 - (2x+3) = 2x+3 = 0\cdot 1 + 1\cdot(2x+3) + 0\cdot(4x^2+12x+9) \\
F(4x^2+12x+9) &= (2x+3)\cdot(8x+12) - (4x^2+12x+9) = 12x^2+36x+27 \\
&= 0\cdot 1 + 0\cdot(2x+3) + 3\cdot(4x^2+12x+9)
\end{aligned}$$

より，基底 B に関する F の表現行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. □

問題 2 補足解説. 表現行列の求め方については第 13 回講義資料の p.8 を参考にすること．

(2) より，第 14 回講義資料の言葉を用いれば，1 は F の固有値 -1 の固有ベクトル，$2x+3$ は F の固有値 1 の固有ベクトル，$4x^2+12x+9$ は F の固有値 3 の固有ベクトルであることがわかる．また，これより，一般に $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，

$$\begin{aligned} F^n(ax^2+bx+c) &= F^n\left(\frac{a}{4}(4x^2+12x+9)+\frac{-3a+b}{2}(2x+3)+\frac{9a-6b+4c}{4}\cdot 1\right) \\ &= \frac{3^n a}{4}(4x^2+12x+9)+\frac{-3a+b}{2}(2x+3)+(-1)^n\frac{9a-6b+4c}{4} \end{aligned}$$

となることが計算できる． □