行動科学演習・数理行動科学研究演習『社会科学のためのベイズ統計モデリング』第９章

Hiroshi Hamada
Tohoku University

July, 2020
at Tohoku University

遅延価値割引

A. 今すぐ 1 万円もらえる
B. 1 年後に 1 万円もらえる

多くの人は，A を選択
心理学では遅延価値割引，
経済学では時間選好・時間割引
とよびます．

指数価値割引モデル

現在の効用が $U(A)$ であるような財 A に対して，t 時間後の効用を，

$$U(A,t) = U(A)e^{-kt}$$

で表すモデル

$k > 0$ は割引率パラメータ

e^{-kt} は割引因子 (discount factor)

割引因子は割引率 k が正の値である場合には 0 から 1 の範囲を取るため，t 時間後の財 A の効用は，現在の効用 $U(A)$ よりも小さい

双曲割引モデル

$$U(A,t) = U(A)\frac{1}{1+kt}$$

双曲割引モデルは，実験結果をうまく説明するために用意されたアドホックなモデル

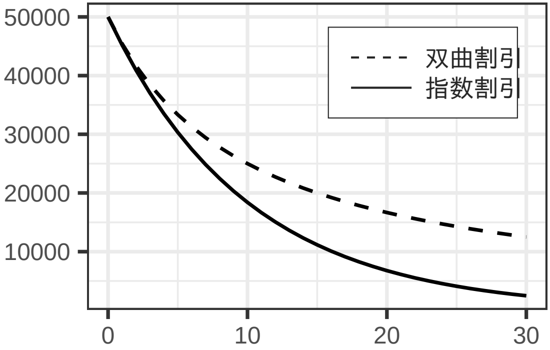

Figure: 指数割引と双曲割引 $k = 0.1$

遅延価値割引のベイズ統計モデリング

即時報酬 A^s の効用は,

$$U(A,t) = U(A,0) = U(A^s)$$

遅延報酬 A^d の効用は,

$$U(A,t) = U(A,d) = U(A^d)$$

遅延報酬 A^d が選好される確率

$$P(A^d \succeq A^s) = \theta^d$$

ソフトマックス行動戦略

$$\theta^d = \frac{\exp\left\{\beta U(A^d)\right\}}{\exp\left\{\beta U(A^s)\right\} + \exp\left\{\beta U(A^d)\right\}}$$

$\beta = 0$ ならば確率は 0.5

$\beta \to \infty$ の場合，$U(A^s)$ が少しでも $U(A^d)$ より大きければ 0，$U(A^d)$ が少しでも $U(A^s)$ より大きければ 1.

β は合理性を表す

ロジスティック回帰へ変換

$$\frac{1}{1+\exp\left\{-\beta[U(A^d)-U(A^s)]\right\}}$$

説明変数が「即時報酬 A^s と遅延報酬 A^d の効用の差」のロジスティック回帰分析と同値


以下の質問は、あなたの金額に対する好みを調べるものです。
実際にお金は得られませんが、得られるものと想像してお答えください。
左側の金額は順に変わりますが、今すぐにもらえる金額です。
右側の金額はいつも**50000**円ですが、もらえるのは**1か月後**です。

あなたは、以下の選択肢のうち、どちらを選びますか。

今すぐに50000円もらう	1カ月後に50000円もらう

あなたは、以下の選択肢のうち、どちらを選びますか。

今すぐに45000円もらう	1カ月後に50000円もらう

Figure: データ取得のための調査画面

データとの対応

- 即時報酬の大きさ A_i は選択肢 $i \in \{1, 2 \ldots, 50\}$ で変化
- 遅延報酬の大きさ A は常に 5 万円
- 選好 P_i（0 と 1 でコード）はパラメータ θ^d のベルヌーイ分布に従う
- θ^d は，効用 $U(A_i^s)$ と $U(A^d)$ の差で決まるロジスティックリンク関数
- 遅延報酬の効用 $U(A^d)$ が指数割引，あるいは双曲割引モデルで計算

統計モデル

$$
\begin{aligned}
P_i &\sim \text{Bernoulli}(\theta_i^d) \\
\theta_i^d &= \text{logistic}(\ \beta\{U(A^d) - U(A_i^s)\}\ ) \\
U(A_i^s) &= U(A,t) = U(A_i,0) = A_i \\
U(A^d) &= U(A,t) = U(50000,d) = 50000e^{-kd} \\
k &\sim \text{half\_Cauchy}(0,5) \\
\beta &\sim \text{half\_Cauchy}(0,5)
\end{aligned}
$$

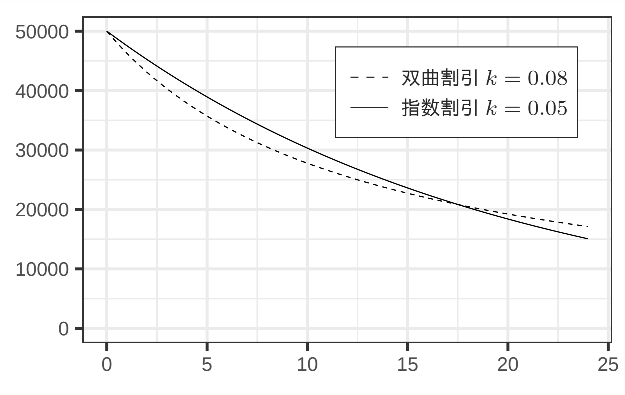

Figure: 推定された割引率による指数割引と双曲割引の曲線

推定した結果，指数割引モデルの割引率は $k = 0.05$，双曲割引モデルの割引率は $k = 0.08$

指数割引モデルの自由エネルギーは 712.95, 双曲割引モデルの自由エネルギーは 700.34

個人差の推定

個人 $j \in \{1, 2, \ldots n\}$ についての確率モデル

$$
\begin{aligned}
P_{j(i)} &\sim \text{Bernoulli}(\theta^d_{j(i)}) \\
\theta^d_{j(i)} &= \text{logistic}(\ \beta\{U_j(A^d) - U(A^s_i)\}\ ) \\
U(A^s_i) &= A_i, \quad U_j(A^d) = 50000 \cdot e^{-k_j d} \\
k_j &\sim \text{half\_Cauchy}(0, 5) \\
\beta &\sim \text{half\_Cauchy}(0, 5)
\end{aligned}
$$

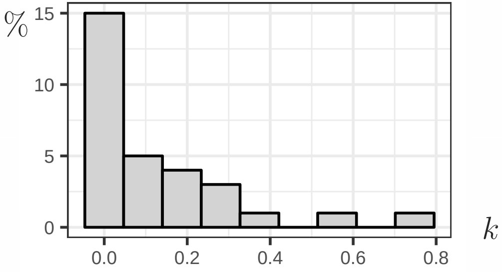

Figure: 割引率 k の個人差

自由エネルギー
指数割引モデルが 441.30,
双曲割引モデルでは 397.14
割引率共通モデルよりは大幅に改善．割引率は全員で一定ではなく，個人差を考慮するほうがよい

階層モデル

個人ごとに割引率を推定するため，たくさんサンプルを集めても，そのたびに推定するべきパラメータが増えるため，効率がよくない

$\longrightarrow$ 割引率の個人差を認めつつ，割引率が一定の確率分布に従う階層モデル

階層モデル

$$
\begin{aligned}
P_{j(i)} &\sim \mathsf{Bernoulli}(\theta^d_{j(i)}) \\
\theta^d_{j(i)} &= \mathsf{logistic}(\ \beta\{U_j(A^d) - U(A^s_i)\}\ ) \\
U(A^s_i) &= A_i \quad U_j(A^d) = 50000e^{-k_j d} \quad \beta \sim \mathsf{half\_Cauchy}(0, 5 \\
k_j &\sim \mathsf{Lognormal}(\mu_k, \sigma_k) \\
\mu_k &\sim \mathsf{Normal}(0, 10^2) \qquad \sigma_k \sim \mathsf{half\_Cauchy}(0, 5)
\end{aligned}
$$

μ_k と σ_k は割引率 k の平均と標準偏差を表すハイパーパラメータ
このハイパーパラメータを未知として割引率 k を推定

階層モデルの推定の結果

自由エネルギー
指数割引モデルが 333.79,
双曲割引モデルが 303.83
さらに改善.

パラメータの個人差を推定する場合は，階層モデルのほうがデータへの説明力は高くなる.

モデルの発展

ハザード率は時間によらず一定 k
生存確率を計算するための時間 t が，主観時間 $f(t)$ に変化
生存関数

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^{f(t)} k du\right\} = \exp\{-kf(t)\} = e^{-kf(t)}$$

ほぼ指数割引モデルだが，主観時間 $f(t)$ の仮定が異なる

主観時間・指数割引モデル

主観時間として、実時間のべき関数を仮定

$$f(t) = at^s$$

生存関数は，

$$S(t) = \exp\{-kf(t)\} = \exp\{-kat^s\}$$

実際に推定する場合は，$a = 1$ として，

$$S(t) = \exp\{-kt^s\}$$

（割引率 k と主観時間パラメータ a の識別）

統計モデル

$$
\begin{aligned}
P_{j(i)} &\sim \mathsf{Bernoulli}(\theta_j(i)^d) \\
\theta^d_{j(i)} &= \mathsf{logistic}(\ \beta\{U_j(A^d) - U(A^s_i)\}\ ) \\
U(A^s_i) &= A_i \quad U_j(A^d) = 50000 \cdot \exp\{-k_j d^{s_j}\} \\
\beta &\sim \mathsf{half\_Cauchy}(0, 5) \\
k_j &\sim \mathsf{Lognormal}(\mu_k, \sigma_k) \quad \mu_k \sim \mathsf{Normal}(0, 10^2) \\
\sigma_k &\sim \mathsf{half\_Cauchy}(0, 5) \\
s_j &\sim \mathsf{Lognormal}(\mu_s, \sigma_s) \quad \mu_s \sim \mathsf{Normal}(0, 10^2) \\
\sigma_s &\sim \mathsf{half\_Cauchy}(0, 5)
\end{aligned}
$$

主観時間・指数割引モデルの自由エネルギー =290.26 （双曲割引モデルよりも小さい）

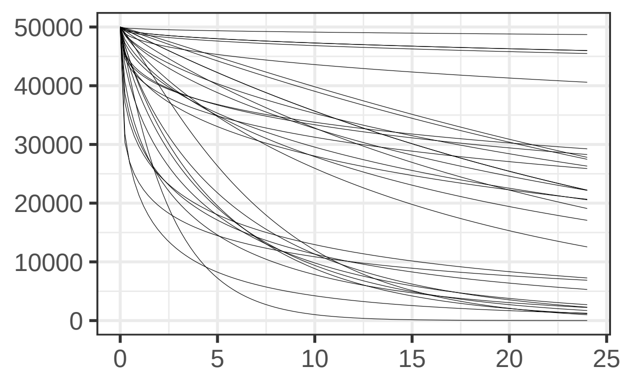

Figure: 主観時間・指数割引モデルによる回答者ごとの割引曲線

割引率が時間と共に減少する現象にも個人差がありそう