Web 公開用表紙

数理社会学入門（仮）

――ベルヌーイ変奏曲――

浜田 宏

ご意見ご感想などございましたら
hamada@m.tohoku.ac.jp
あるいは
https://twitter.com/hamada30137146
までお願いします.

登場人物

神杉 青葉（かみすぎ　あおば）: S 大学文学部　数理行動科学研科 2 年生

花京院 佑（かきょういん　たすく）: S 大学文学部　数理行動科学科 2 年生

七北 アンリ（ななきた　あんり）: S 大学理学部　応用数学科 4 年生

美田園（みたぞの）: S 大学文学部准教授．青葉と花京院の指導教員

目次

1.　プロローグ――序奏

命題は現実の絵である．命題は，私たちがそうであると考えている現実のモデルである．

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.01

1.1.　質問

神杉青葉（かみすぎあおば）は，数学が苦手だった．

いや……，嫌い，といったほうが正確かもしれない．

文学部の入学試験を受けたときから，彼女は心理学を専攻したいと思っていた．だから，本当にショックだった．数理行動科学研究室への配属決定を知らされたときは．

（心理学に人気があるのは知ってたけど，よりによって，一番自分と相性が悪そうな研究室に回されるなんて……）

自分の運のなさを彼女は呪った．

そのせいか，入学から 1 年以上が経ったというのに，彼女は大学という場所にまだなじめない．

つまらない受験勉強に耐えたおかげで，それなりに偏差値の高い大学の入学試験に合格することができた．苦行に耐えた末，入学を許可されたのだから，大学とはさぞすばらしい場所に違いない……．そんな期待に胸を膨らませて彼女は大学の門をくぐった．

しかしそこは彼女の期待に応える場所ではなかった．

少なくとも，一人の同級生と偶然の会話を交わすまで．

きっかけはある日の授業だった．

午後のけだるい日差しが眠気を誘う 5 月．統計調査法の授業を受講している学生は教室内に 30 名ほどいた．数学に輪をかけて青葉が嫌いな教科は統計学だった．

彼女は開始早々，授業についていけなくなった．

（ダメだ……，さっきから同じ疑問が頭の中をぐるぐる回ってる……．ちょっと恥ずかしいけど，思い切って質問してみるかな……）

いつもなら授業が終わるまで我慢するところだが，あまりの陽気に眠ってしまいそうなので，彼女は意を決して手を上げた．そしてたどたどしい口調で質問すると，遠慮がちに静かに席についた．その授業で発言したのは初めてだったので，少し胸がどきどきしている．

教授はにこやかにパラメータ推定量の数学的な意味とその解釈を説明した．その説明は丁寧だし，誠実な対応だと彼女は感じた．にもかかわらず，彼女の疑問は依然として解消されなかった．

（質問のしかたがよくなかったのかな……，でも，どう表現すれば疑問が伝わるのか分かんない……）

教室に再び沈黙が訪れ，けだるい空気が漂いはじめた．

ふいに背中に視線を感じて，青葉は振り返った．同じ研究室の花京院 祐がじっと彼女を見つめていた．さっきまで，ぼんやりと黒板の上方を彷徨っていた彼の視線は，青葉の背中をまっすぐにとらえている．

（私の質問，そんなにヘンだったのかなあ）

1.1. 約束

授業を終えた青葉は，研究室に戻った．コーヒーを飲みながら，友人達と次の授業まで時間をつぶす．

数理行動科学研究室に配属されてから約 1 ヶ月が経過した．専門科目には未だに馴染めなかったが，同級生たち――特に女子たちとは――それなりにうまくやっている．

いつものように友人達と他愛もない会話を続けていると，花京院が無言で部屋に入ってきた．顔だけは知っているものの，これまでに彼と話をしたことは一度もない．

雑談の内容は昨日ニュースになった芸能人の熱愛報道から，いつしか自分たちの恋愛事情に変わっていた．青葉は恋愛に興味がないわけではなかったが，自ら進んで話すべき体験もなかった． 友人達は，大学に入ってから出会いが少ないと不満をもらしていた．この点については青葉も同意した．

青葉はモテるタイプだから，あせらなくても大丈夫だよねと，友人の一人が言った．

「そんなことないって．一度でいいからモテてみたいもんだよ」

謙遜ではない．青葉は本心から，素敵な出会いでもあれば，大学生活が充実するのかな，と思っていた．

「《モテる》っていうのは，何人から好かれればいいわけ？」

突然，青葉の背後から声が響いた．驚いて振り向くとそこには花京院が立っていた．声の音量は大きくはなかったが，落ち着いてはっきりとした口調である．

青葉だけでなく，まわりにいた友人達も少し驚いていた．しかし彼はそんな様子を気にすることなく，まっすぐに青葉だけを見つめていた．青葉には彼の質問の意図がよくわからな

かった．

「神杉さんにとって《モテる》という状態は，2 人から好かれることなのか，それとも 3 人から好かれることなのか，という意味」花京院は質問を具体的に言い直した．青葉は戸惑いながらも，質問への答えを考えた．

「そうね……，何人くらいかな，そんなこと考えたことなかったから……．じゃあ……，3 人ってことにしておく」青葉は適当な数字を選んで答えた．

「3 人だね．じゃあ大学 1 年生のあいだに出会った男性の数は？」花京院は質問を続けた．他の友人達は無言で見守っている．

「そうだな，同じ基礎ゼミの男子が 10 人くらい，バイト先に 10 人くらい，あとはサークルに 30 人くらい……．全部で 50 人くらいかな」青葉は頭の中で人数をカウントした．

「n=50 だね．なるほど」花京院はホワイトボードに数式を書きはじめた．

\$\$

君が 1 年間で n 人と出会い，n 人が独立に確率 p で君に好意を持つと仮定する．すると 1 年間で x 人以上から好かれる確率は 2 項分布の確率関数を使って

$$P(X \geq x) = 1 - \sum_{k=0}^{x-1} {}_nC_k\, p^k (1-p)^{n-k}$$

と表すことができる．だから p=0.05 のとき，君が 50 人と出会って 3 人以上から好かれる確率はおよそ 0.46 だ．n が十分に大きければ，この確率はだいたい

$$P(X \geq x) \approx 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi} np(1-p)} \exp\left\{ \frac{(t-np)}{2np(1-p)} \right\} dt$$

で近似できる．

\$\$

それが何を意味するのか，青葉にはまったく見当がつかなかった．

「3 人以上から好かれる確率が 0.46？　どうして？」青葉は彼が言った数値をただ反復することしかできなかった．

そして……，だんだんと腹が立ってきた．

「説明するには，少し時間がかかる」数式を満足げに眺めていた花京院は，計算結果を確認するためにパソコンを起動した．

青葉は，判然としない表情のまま，花京院をじっと見た．

彼女は分からないことや，理解できないことがあると，そこから先に進めないことがよく

あった．彼女自身はそれを短所だと考えていた．

花京院はそれきり黙ってしまった．

そろそろ授業がはじまるから行こうよ，と友人の一人が席を立った．

「うん……」後ろ髪を引かれる思いで研究室を後にすると，友人達と一緒に講義棟へと向かった．花京院は黙って青葉達が出て行くのを見送った．ちょうど授業前の時間帯のため，外は人であふれかえっている．

「それにしても花京院君って，ちょっとヘンだよね？」友人の一人が言った．

「彼って，謎だよねー．いつも一人でいるし」別の友人が相槌をうつ．

「もしかして青葉に気があるんじゃないのかな」

講義棟の廊下を歩きながら，友人たちは楽しそうにしゃべり続けた．青葉は，黙ってうつむいている．

「意外と青葉も，花京院君みたいな人がタイプだったりして．あの無精髭とぼさぼさの髪をなんとかすれば，見栄えはそんなに悪くないしね」横を歩く友人が青葉の肩を指でつついた．

「いや，タイプとか，そういうのじゃないから」青葉はやんわりと否定した．そんなことよりも，花京院の言った数字がどこから出てきたのか，そればかりが気になった．あの理解不能な数式はいったいなんだろう？　彼女の心に棘のような小さな疑問が刺さっている．

（……すごく気になる．私の悪い癖なんだ……このままだと，次の授業も集中できないよ……）

ついに彼女は我慢できなくなった．忘れ物を取りに戻るから先に教室に行くよう友人達に促すと，青葉は急いで研究室へ引き返した．

研究室のドアをあけると花京院がパソコンの前に座っていた．まるで彼女が戻ってくることを予期していたかのように，彼は落ち着いている．急いで引き返したため，青葉の息は少し乱れていた．

「花京院君……さっきの話がどうしても気になっちゃって……」

「理解できないことを，鵜呑みにするのは気持ちがわるい？」

「うん，そういうのって，すっごくモヤモヤする．とにかくあとで，どこからあんな数字が出てきたのか聞かせてくれる？」青葉は呼吸を整えながら言った．花京院は少しのあいだディスプレイを見つめ，黙って考えていた．

「いいよ，いつにする？」

「明日の午後なら，時間があるよ．花京院君の都合は？」

「僕なら大丈夫だよ．じゃあ，明日までに準備をしておこう．明日の3時間目のあと，ここにおいで．僕の予想では，きみは数学が嫌いだと思いこんでいるだけだ．それを証明しよ

う」そう言い残すと，花京院は研究室から出て行った．

すでに授業の開始時間は過ぎていた．

呼吸の乱れはすでに落ち着いている．その一方で，胸の鼓動は少し高まっていた．

2.　普通のサイコロ――練習曲１

私がとくに詳しく知っているとはいえぬ諸状況は，特定の出来事の出現に対して，しかじかの程度の確率を与えている．

5.155

2.1.　講義のはじまり

S 大学文学部数理行動科学研究室．それが青葉と花京院が所属する研究室の正式名称である．数学を使って人間行動や社会現象を分析する専門分野の講座だ．文学部の中では珍しく数学の知識を要求される講座だった．そのため担当教員の専門分野はいずれも数理経済学や数理社会学などの，数学を応用した社会科学系分野である．

花京院は青葉と同学年だが，年齢は彼女より二つ上だ．三年生への進級時に理学部応用数学研究室から文学部に転入してきた学生だ．他学部から移ってきたという少々変わった経歴のせいもあるのか，まわりの学生から少し浮いた存在だった．

彼は日頃から人と喋ることが少なかった．ほとんどの場合，彼は学内を一人で行動していた．食事をするのも，授業に出るのも基本的には一人きりだった．その行動パタンは青葉とは対照的である. 彼女から見て花京院は, 他の同級生にはない空気を感じさせる存在だった．

青葉は, もともと心理学研究室への所属を第一に希望していたが, 定員オーバーのために，数理行動科学研究室に配属された学生だった．このような学生と研究室の双方にとって不本意なマッチングは，毎年一定の数だけ生じていた．

（私はしかたなく所属してるけど，花京院君は，わざわざ他の学部からこの研究室にやってきたんだよね……．この研究室のどこがそんなにいいのかな……？）

青葉は機会があったら彼に直接聞いてみたいと思っていた．だから，花京院が自分に話しかけてくれたことは，彼女にとって好都合だった．

約束の時間．青葉と花京院は研究室の机に向かい合わせに座っている．聞きたいことはいろいろあったが，まずは昨日のことから話をはじめた．

「ねえ，花京院君．昨日はどうして急に話しかけてきたの？　その……，突然だったからビックリしたんだ．それからもう一つ……，私がモテる確率ってどうやって計算したのかな？」

「君がこういうことに関心があると思ったからだよ」花京院は当然のように答えた.「僕は昨日，わざと結論だけを伝えた．君がそういう論理的飛躍を見過ごせない性格だってことを知っていたから」

青葉は昨日の会話を思い出した．確かに彼の言うとおり，謎めいた数式のイメージは，まだ彼女の脳裏にやきついていた．

「統計調査法での質問，あれはいい疑問だったね」花京院は突然話題を変えた．青葉は彼がなんの話をしているのか一瞬分からなかったが，その意味を了解すると顔を赤らめた．

（そういえば，あの講義を一緒に受けてたんだ……）

「君の疑問はとても本質的だ．クロスセクショナルデータから得た統計モデルの推定量は変数間の線型的な共変関係を示しているだけで，因果的メカニズムまで示すわけじゃない．僕はあれを聞いて，君はちゃんと『自分が分からないこと』を『分かっている』人だと思ったんだ．それで，君に関心を持ったんだよ．で，もうひとつの確率にかんする質問だけど，昨日も言ったように，それに答えるには少し時間がかかる」花京院は，数式が印刷された紙を鞄から取り出すと，ホワイトボードを机の横に移動させた．

「だから少し準備をしてきた．高校生の時に確率は習った？」

彼の口調は，昨日と同様に落ち着いており，印字された数式のフォント同様になめらかだった．青葉は彼が人と会話をするところをみたことがなかったので，勝手に無口な人間だと思い込んでいた．しかし，口べたというわけではなさそうだ．

「うーん，習ったとは思うけど．ほとんど忘れちゃった．あまり使わないから」

「僕はよく使う．とても役に立つから」

「役に立つ？　嘘でしょ？　だって確率って，『壺の中に赤玉と白玉が入っています．一つ玉を取り出したとき，その玉が赤い確率は……』っていうやつでしょ．あんなのいつ使うの？　私，壺から玉をとりだしたことなんか今までに一度もないよ」

「ポリアの壺だね．確かにそういう問題もある」花京院は苦笑いした．

日常生活で四則演算以外の計算をする機会が彼女には，ほとんどなかった．自分だけでなく，世の中のほぼ全ての人がそうだと彼女は思っている．

「確率が《役に立つ》って，ぜんぜん想像できない……．そもそもどういう目的があって壺の中に玉を入れたのか，どうして壺の中から玉を取り出さなくちゃいけないのか，そういうことが気になってしょうがないの．で，そこが気になると……，そこから先の話は全然入ってこないの．私っていつもそうなんだ」

青葉は数学が苦手だ．少なくとも現在はそのように自己認識している．

しかし昔からずっと嫌いだったわけではなかった．いつのまにか，数学を嫌いになっていたのである．その理由を深く考えたことはなかった．

「たしかに壺と玉の話に興味がない人は多いだろう．そして君みたいに考えてしまって，数学が嫌いになってしまう人は多い．だからポリアには悪いけど，壺の例は使わずに，確率論の基本をおさらいすることにしよう」

こうして花京院の講義がはじまった．

2.2.　目的地からの眺め

「君が 1 年間でモテる確率は，それほど複雑ではない計算によって導出できる．まず結論をだけを確認しておこう．これは言ってみれば，すごく分かりにくい説明だ．よく聞いていて」

花京院はホワイトボードに数式を書きながら，昨日青葉に一方的に伝えた内容を再現した．

\$\$

君が n 人と出会い，各異性は独立に確率 p で君に好意を持つと仮定する．x 人以上から好かれる確率は 2 項分布の確率関数を使って

$$P(X \geq x) = 1 - \sum_{k=0}^{x-1} {}_nC_k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

と表すことができる．例えば 50 人と出会い，1 人当たり 0.05 の確率で好かれるなら，3 人以上から好かれる確率は，およそ $P(X \geq 3) = 0.45965$ だ．n が十分に大きければ，この確率はだいたい

$$P(X \geq x) \approx 1 - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{ \frac{(t-np)}{2np(1-p)} \right\} dt$$

で近似できる．

\$\$

「どう？　わかった？」花京院は悪戯っぽく笑った．青葉は唖然としていた．そしてしばらくすると，また腹立たしくなってきた．

「わかるわけじゃない」

「うん．そうだね．その反応は正しい．今僕が書いた式は，もっとも重要な定義や仮定や証明を飛ばして結果だけを示したものだ．これだけをみて内容が分かる人間はいない．でも大学で読む教科書や，論文なんかでは，こんな表現がよく使われる．理解するためには自分で調べてねって感じで，かなり戸惑うはずだ．

間違っているわけじゃないけど，あまりに不親切だ．これから僕は時間をかけて，さっき言ったことを，分かりやすく説明する．ただし，かみくだいて説明するけど難易度は下げない．難易度を下げずに分かりやすく説明するってことは，つまり時間をかけて説明するって

ことだ．この《時間をたっぷり使う》ってところがポイントだよ．あせっちゃ，いけない．僕はこれから，いろいろと回り道しながら，確率を使ったモデルの説明をする．少し時間はかかるけど，この話を聞けば，自分でも計算できるようになる」花京院は説明した．

「うん，お願い」そう答えながら青葉は，不安を感じずにはいられなかった．

（大丈夫かなあ．私にも分かる話なのかな……）

二人の対話はこうして始まった．青葉はこの対話がどれだけ長く続くのか，まったく想像できなかった．

2.3. サイコロ振り

「君は確率についてどんなことを知ってる？」花京院が聞いた．

「えーっと，コインを投げると表が 1/2 の確率で出るとか，そういう話くらいかな」

「じゃあ，サイコロを 1 回振って，1 が出る確率はいくつだと思う？」

Q: サイコロを 1 回振り，その出た目が 1 である確率はいくつか？

「そりゃあ 1/6 でしょ．そのくらいは分かるよ」青葉が即答した．

「どうしてそう思うの？」

「だって，サイコロは 1 から 6 までの目しかないないんだもの．そのうちのひとつだから 1/6 でしょ」青葉は自信を持って答えた．

「つまり，場合の数が《6》で，1 の目が出るパタンが《1 つ》だから，《1/6》と考えた．そういうことだね」

「うん，まあそういうこと」

$$

サイコロの出目は 6 パタンある．

$$\boxed{1}\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6$$

注目する $\boxed{1}$ は 6 個ある目のうちのひとつである．よって，

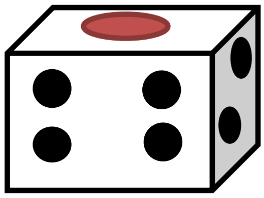
$$1\text{ の出る確率は}\quad \frac{1}{6}$$

$$

「これが神杉さんの推論だね」

「うん．まあ《推論》ってほど大げさなものじゃないけど」

「じゃあ, もしサイコロがこんな形をしていたら？」花京院は紙にサイコロの絵を描いた．



図．辺の長さが異なるサイコロ（花京院画）．

「えー，こんなのズルいよ‥‥‥．こんなおデブなサイコロ見たことない」青葉は口をとがらせた．

「でも僕はサイコロが立方体だとは一言も言っていない．こういうサイコロを振れば,《1》や《4》が高い確率で出るはずだって，図から予想できるだろう？　だから全ての目が等しい確率で出現するとはかぎらない．

でも《おデブサイコロ》も，普通の立方体であるサイコロも，出目のパタン数は同じく 6 だ．つまり 6 パタンあるうちの一つが出現する確率だから 1/6 という君の推論は，成立しない．それが正しいためには,

《1 から 6 までの目が，どれもが同じ程度の確からしさで起こる》

という仮定が必要だ」

青葉は，花京院の描いた奇妙な形のサイコロが転がる様子を想像した．そして彼の説明が論理的には正しいと思いつつ，なにか釈然としない気持ちを抱いた．

「まあ，それはそうだけど‥‥‥，普通はサイコロって言われたら，辺の長さが等しいあのサイコロを想像しない？」

「日常会話の文脈ではそうだろうね．ただし立方体のサイコロといえども，現実のサイコロは, 重心が偏っているかもしれないし, 辺の長さだって微妙に異なっているかもしれない．だから数学を使ってこの世界の経験的な現象を語る場合には，何が暗に仮定されているのかを考えることがとても大切なんだ」

「むう‥‥‥，そういうもんなの？　なんだかすごくヒネくれてる気がする」

「では，確率を考えるために必要な仮定を，もう少し厳密に表現してみよう．まず『サイコロが 1 から 6 までの目しかでない』という仮定は，こう表現できる」

$$

サイコロを 1 個振ったときに出る目は

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

という集合で表すことができる

$$

「うわあ．わたし集合って苦手」青葉は眉間にしわをよせた．

「集合を使うと，いろいろと便利だよ．直感的に定義すれば，集合とはモノの集まりだ．例えば

$$\{1,2,3\}$$

は集合．ここでいうモノってのは，数字でなくてもいい．じゃあ，なにか例をつくってみて」花京院は彼女に紙を一枚わたした．

「数字じゃない，モノの集まり……，こんなのでもいいかな？」青葉は自作の例を示した．

{ガンダム，ガンキャノン，ガンタンク}

「なにこれ？」花京院が眉間にしわをよせた．

「地球連邦軍の V 作戦を構成するモビルスーツの集合よ」青葉はすました顔で言った．

（え，花京院君，知らないの？　これって男子の常識じゃないの？）

「キャノンやタンクは分かるけどダムってなに？　ダムを武装するの？　まあ，君にとってそれが理解しやすい例ならそれでいいか——」花京院は腑に落ちない表情のまま話を続けた．

「数字じゃないモノの例えとしては，こういうものもある」花京院は数字以外の集合の例を示した．

$\{a,b,c\}$　　{表, ウラ}　　{♥,♠,♣,♦}

「へえ，こんなのでもいいんだ」

「集合 $\{a,b,c\}$ に属している《a》や《b》や《c》を集合 $\{a,b,c\}$ の要素，あるいは元という．サイコロ振りのように，定まった条件で繰り返し行うことのできる実験や観測を試行と呼ぶんだよ」

「しこう……，ああ，試行錯誤の《試行》だね．サイコロを振ったり，コインを振ることをイメージすればいいのかな．でも……」と青葉は何かを言いかけて止めた．

「でも？」

「うん，サイコロを振ったり，コインを振る例は，高校の時にも聞いたんだけど．正直言って, それがどうしたって感じなの……壺もそうだけど, サイコロやコインを振る結果に, 普通の高校生が興味を持つと思う？」

「まあ，もたない場合が多いであろうことは容易に想像できる」

「でしょ？　だから高校で習った確率の話って，ぜんぜん頭に入ってこなかったんだよね」

花京院は青葉の話を聞いてうなずいた．

「確かにサイコロやコインは，わかりやすい例だけど，興味深くはない．だから僕はモテる確率の話からはじめたんだ．その方が君の興味を引くと思ったから．でも重要なのは，その分かりやすい具体例によって理解すべき，モノの見方なんだよ．これから，サイコロやコインを例にとって説明するけど，僕らが知りたいことは，決してサイコロやコインの確率じゃない．知りたいのは，具体例の背後にある，抽象的な構造や考え方なんだ」

「抽象的な構造や考え方？　どういうこと？」

青葉には彼の言わんとすることが，まだよく理解できなかった．サイコロやコインの背後になにがあるんだろうか？　青葉は不安とほんの少しの期待が入り混ざった気持ちで花京院の説明が再開されるのを待った．

2.4.　標本空間と事象

「試行によって起こる結果を全て集めた集合を標本空間という．サイコロを 1 回振るときの標本空間は　$\{1,2,3,4,5,6\}$　だよ」

「標本空間っていうのは，さっき説明してくれた集合の一種と考えていい？」青葉が聞いた．

「そうだよ．確率を考える上で重要な役割を果たす特殊な集合なので標本空間という特別な名前が与えられている．標本空間を表す記号としてギリシア文字の Ω（オメガ）がよく使われる．そして標本空間 Ω に含まれる一つ一つの要素を標本点という．たとえば，標本空間

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

の中に入っている，

《1》や《3》や《6》

は，それぞれ標本点だよ」

「標本点……，あれ？　さっきは要素とか元と呼んでなかった？」

「そうだよ．標本空間 $\{1,2,3,4,5,6\}$ の中に入っている《1》とか《3》を元や要素と呼んでもいいけど，確率論の文脈では特に《標本点》と呼ぶんだ．名前は違うけれど概念としては同じだよ．こういう例は，数学ではたくさん登場する」

「名前は違うけど，実体としては同じか．うーん……シャア・アズナブルとクワトロ・バジーナみたいなものかな．ほかにも特別な名前ってある？」青葉は聞いた．

「標本空間の一部分をとりだしたものを《事象》と呼ぶ．例えば標本空間

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

の一部分である

$$\{1,2\} \text{や} \{3,5,6\}$$

は事象だよ」

「事象ね……それ，何のために使うのかな？」

「お，いい疑問だ．事象は，興味のある結果の確率を計算するために使うんだ．《確率モデルを考える》ことは，《興味ある事象の確率を求めること》でもある．

例えば神杉さんが，サイコロ振り試行の結果として，《偶数がでる》という結果に興味があるとしよう．この場合，《偶数がでる》という結果は，標本空間の部分集合である$\{2,4,6\}$で表すことができる．《偶数がでる》確率を求めることは，事象$\{2,4,6\}$が生じる確率をもとめることに等しい．

そのほかにも，《4 以上の数がでる》という結果でもいいし，《1 もしくは 6 がでる》という結果でもいい．これらの結果は,それぞれ

《4 以上の数がでる》	事象$\{4,5,6\}$
《1 もしくは 6 がでる》	事象$\{1,6\}$

という事象に対応している．事象という概念を，より厳密に定義しておこう」

花京院は定義をあらためて紙に書いた．

$$

定義（事象）．標本空間Ωの部分集合を事象という．

例えばサイコロ投げの標本空間$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$にたいして，$A=\{1,2,3\}$はΩの部分集合だ．これを記号では$A\subset\Omega$とかく．AがΩの部分集合であることの定義，つまり$A\subset\Omega$の定義は

Aのどの元も，Ωの元である

ということだよ

$$

「集合Aが集合Ωの部分集合であるということは，AはΩに含まれるってことね」青葉が確認した．

「直感的には，そう．ただし部分集合$A \subset \Omega$の定義は『Aのどの元も，Ωの元である』だから，すこし注意が必要だよ．次のような問題を考えてみると分かりやすい」花京院は問題をホワイトボードに書いた．

> Q: 二つの集合をそれぞれ$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3\}$とおく．このとき$A \subset B$といえるか？

青葉は問題をしばらく眺めてから答えた．

「うーん，AはBにすっぽり含まれてないから，$A \subset B$といえないんじゃないかな？」

「じゃあ，定義にさかのぼって考えてみて」

青葉は次のように考えた．

$$

えーと，$A \subset B$であることの定義は，

Aのどの元も，Bの元である

だったよね……この定義を満たしているかどうかを確かめると…

$A = \{1,2,3\}$の元 1 は$B = \{1,2,3\}$の元である
$A = \{1,2,3\}$の元 2 は$B = \{1,2,3\}$の元である
$A = \{1,2,3\}$の元 3 は$B = \{1,2,3\}$の元である

…ということは，

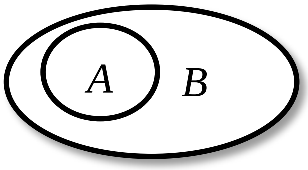
『Aのすべての元 1，2，3 が，Bの元である』

が成立しているんだ…，

あれ？　そうすると定義からいって$A \subset B$になるのかな？　でもAとBが同じなのに$A \subset B$って，ヘンな感じ……

$$

「慣れないと違和感があるけど，定義上《$A = \{1,2,3\}, B = \{1,2,3\}$ならば$A \subset B$》なんだよ．《$A$が$B$の部分集合である》という命題を聞くと，



みたいな絵を想像したくなるけど，これは特殊例にすぎない．つまり $A \subset B$ って書くと，《A が B にすっぽり含まれてる》と考えたくなるけど，A と B が同じ集合の場合もあるから注意が必要だ」

$$

定義（二つの集合が等しいこと）．A と B が集合として等しいことの定義は

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

が成立することである．

この定義は，二つの集合が等しいことを示す証明でよく使われる．つまり A と B が同じ集合かどうか知りたい時，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立することが分かれば，$A = B$ であると結論できるんだ．

$$

「さて，と······残りの重要な概念は全事象と根源事象だよ」
「なんだか難しそう」
「大丈夫．単に今までに登場した概念の違う呼び方だよ．例えばサイコロを 1 回振る試行の場合，標本空間 $\{1,2,3,4,5,6\}$ のことを《全事象》と呼び，標本点だけを含む事象 $\{1\}$ とか $\{3\}$ を《根源事象》と呼ぶ．新しい言葉がいっぱい出てきて混乱すると思うから，ここでちょっとまとめておこう」
　花京院はこれまでに登場した概念をまとめながら確認した．

$$

- サイコロ振りのような，繰り返しのできる実験を試行という．
- 試行の結果を標本空間という．サイコロを一回振る試行の場合，標本空間は $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ である．標本空間の一つ一つの点は標本点という．

- 標本空間の部分集合を事象という.
- 特にこれ以上分割できないという意味で標本点のみからなる事象を根源事象という.

表：各概念の記号例

数学一全般での名称	確率論での呼びかた	具体例
集合	標本空間	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
部分集合	事象	$A = \{1,2,3\}$，$A \subset \Omega$
要素，元	標本点	$\{1,2,3\}$ の中の 1 や 2 や 3
1 つの要素だけを含む集合	根源事象	$\{1\} \subset \Omega$，$\{5\} \subset \Omega$

$$

「まあここまでは，大体わかったと思う」青葉は少し自信なさそうに言った.

「ほんとにわかった？」

「多分‥‥‥」青葉は消え入りそうな声で言った.

「じゃあ今日はこれくらいにして，続きは明日やろう．クイズを出すから考えておいて」花京院は次のような問題を出した.

Q: サイコロを 2 回振る試行の標本空間は何か？

こうして花京院によるはじめての講義が終了した.

3.　算術的確率——練習曲 2

定義とは，ある言語から他の言語に翻訳するときの規則である．

3.343

3.1.　直積集合と順序対

自宅にもどった青葉は，さっそく花京院の出したクイズを考えはじめた．その問題は，彼女にとっては少し難易度が高かった．

（サイコロを二回振ったときの標本空間か……）

青葉はしばらく考えた．もちろん彼女は，サイコロを二回振るという行為の意味は分かるし，その結果も予想できる．しかしその結果を集合として表現するにはどうすればよいのか，と聞かれると，まったく答えの見当がつかなかった．

$$

サイコロを 1 回振るという試行の場合，その標本空間は$\{1,2,3,4,5,6\}$だったよね……2 回振る場合の標本空間は，……二つ並べて，こう書けばいいのかのかな

$$\{\{1,2,3,4,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$$

うーん，自信ないけど，とりあえず二回分の結果は集合の中に入っているから，これでいいのかな？

$$

青葉はとりあえずそこまで考えて，寝ることにした．彼女にしてみれば，それはすごく久しぶりの数学体験だった．

翌日，花京院と青葉は研究室で勉強会の続きを再開した．青葉は自分が考えてきた予想を花京院に見せた．

「うん，正解じゃないけど，なかなか，いい線いってる」

「ほんと？」

「サイコロを 2 回振るということは, 1 回目に出た目と 2 回目に出た目が存在するはずだ. まずはその二つを記録して，パタンが何種類あるか考えてみよう．表の形で組み合わせて書

くと分かりやすいよ」

花京院はサイコロを 2 回振ったときの出目の組み合わせを表の形で書き出した．

2 回目に出た目

1回目に出た目		1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

2 回の結果をまとめて（1 回目の目，2 回目の目）で表すとしよう．サイコロを 2 回振る試行の標本空間は次の通りだよ．

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
&(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
&(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\
&(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\
&(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\
&(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}
\end{aligned}
$$

「うわー，こんなにいっぱい数字をかかなくちゃいけないんだね」

「例を作ってみると，とても理解に役立つ．自分で例が作れないということは，結局ちゃんと理解できていない．僕の経験ではそう考えてほぼ間違いない」

「うーん，なかなか難しいなあ……集合の要素として $(1,2)$ とか $(6,4)$ みたいな数字の組み合わせを考えてもいいなんて知らなかった」

「こういう数字の組み合わせを《順序対》という．順序対は名前が示すとおり，その順番が重要なんだ」

「順番？」と青葉が聞いた．花京院は次のように順序対に関する説明を補足した．

「例えば $(3,5)$ と $(5,3)$ ではその意味する内容が異なる」

$(3, 5)$　1回目に3がでて，2回目に5がでること．

$(5, 3)$　1回目に5がでて，2回目に3がでること．

「つまり数字の並ぶ順番にちゃんと意味があるんだ．順序対は異なる二つ（以上の）集合を組み合わせて作ることが出来る」花京院は簡単な例を示した．

$$

もしA, Bという二つの集合がそれぞれ$A=\{1,2\}, B=\{r,s,t\}$だったとする．このとき二つの集合の直積$A\times B$は

$$A\times B=\{(1,r),(1,s),(1,t),(2,r),(2,s),(2,t)\}$$

だ．

この例で示したように，数字と文字の組み合わせでもいい．

一般的には次のように定義できる．

定義（集合の直積）．二つの集合X, Yの直積とは，集合Xの元xと集合Yの元yの組(x, y)の全体を指し，$X\times Y$と表す．

$$X\times Y=\{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}$$

$X\times Y$を集合の直積という．

$$

「直積集合，とか，カルテジアン積，とか，デカルト積とか，いろいろな呼び方があるよ」

「えーっと，ちょっと待って．この式よく分からない．$\in$とかはじめて見たんだけど」

「あ，そうか……，$\in$は，集合の元であることを表す記号だよ．他にも使いたい記号があるから，簡単に説明しておこう」花京院は基本的な集合の表記について解説した．

$$

aが集合Xの元であることを$a\in X$とかく．《aが集合Xの要素である》，とか《aが集合Xに含まれる》などとも言うんだ．

次に二つの集合の和集合という概念を定義する．たとえば

$$A=\{1,3\}, \qquad B=\{2,4\}$$

という二つの集合があるとき，『Aに含まれる元』または『Bに含まれる元』を集めて作った集合$\{1,2,3,4\}$を和集合と呼び，記号$A\bigcup B$であらわすんだ．この場合，

$$A\bigcup B=\{1,2,3,4\}$$

だよ．

一般的に定義すれば，和集合 $A \bigcup B$ は，こう書ける．

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

こういう定義のしかたを集合の内包的定義というんだ．

たとえば A という集合が $A = \{1,2,3,6\}$ のとき，この集合は $A = \{x \mid x\text{は}6\text{の約数}\}$ という風にも書ける．集合を

$$\{x \mid x \text{ に関する命題 }\}$$

のような形で定義するのが内包的定義なんだ．縦棒 $|$ の左に集合の元の代表例を書いて，縦棒 $|$ の右側に，その元が持っている性質を書くんだ．テキストによっては，縦棒の代わりに $:$ （コロン）をつかう場合もあるけど，意味は同じだよ．

これに対して外延的定義は $A = \{1,2,3,6\}$ のようにその要素を全て書き並べるんだ．

内包的定義　　要素について真であるような命題を用いて抽象的に表現したもの

外延的定義　　全ての要素を書き並べて具体的に表現したもの

つぎに二つの集合の共通合という概念を定義するよ．たとえば

$$A = \{1,3,5,6\},\ B = \{1,\ 2,4,5\}$$

という二つの集合があるとき，『 A に含まれる元』かつ『 B に含まれる元』を集めて作った集合 $\{1,5\}$ を共通集合と呼び，記号 $A \bigcap B$ であらわすんだ．この場合

$$A \bigcap B = \{1,5\}$$

だね．

一般的に定義すれば，こうも書ける．

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$

（外延的定義の方は具体的で分かりやすいな‥‥‥，でも内包的定義は抽象的すぎて難しい‥‥‥）

「えーっと，直積集合の定義

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

は，縦棒｜の左側にある (x, y) が集合の代表的な元で，縦棒｜の右側の，

$$x \in X, y \in Y$$

が，(x, y) が持っている性質を表していると読めばいいのかな？」青葉が聞いた．

「うん，そのとおりだよ」

定義の中には，まだ青葉にとって不可解な記号が含まれていた．

「この《×》っていう記号は，普通の数字をかける記号《×》とは意味が違うの？」

「そうだね．数字同士を《×》で組み合わせると掛け算の意味だけど，集合と集合を《×》という記号で組み合わせると，集合の直積という意味になるよ．文脈に応じて意味が変わるから注意した方がいいね‥‥‥じゃあ，例を作ってみるといいよ．やってみて」

「うーん，うまくできるかな‥‥」青葉はお得意のガンダムを使って例を考えた．

「A をモビルスーツの集合，B をパイロットの集合とするね．

A={ガンダム，ガンキャノン，ガンタンク}，B={アムロ，ハヤト，カイ}．

A と B の直積は

$$\begin{aligned}&A\times B=\{(\text{ガンダム},\text{アムロ}),(\text{ガンダム},\text{ハヤト}),(\text{ガンダム},\text{カイ}),\\&(\text{ガンキャノン},\text{アムロ}),(\text{ガンキャノン},\text{ハヤト}),(\text{ガンキャノン},\text{カイ}),\\&(\text{ガンタンク},\text{アムロ}),(\text{ガンタンク},\text{ハヤト}),(\text{ガンタンク},\text{カイ})\}\end{aligned}$$

になる‥‥‥．ちなみに直積 $A\times B$ はモビルスーツとパイロットの可能な全ての組合せを表してるんだよ．どう？」

「君はどうしてもガンダムの例にしないと気がすまないんだね」花京院がため息をついた．

「別にイデオンでもいいよ．その場合は

A={イデオデルタ，イデオノバ，イデオバスタ}，B={コスモ，ギジェ，カーシャ}

だから直積は‥‥‥」

「いや，分かったから，もういいよ」

青葉は父親の影響で，昭和のロボットアニメにやけに詳しかった．

3.2. 算術的確率

「それじゃあここまでの話を確認しよう．サイコロ 1 回振りの標本空間と根源事象は？」花京院が聞いた．

「えーっと，標本空間は

$$\{1,2,3,4,5,6\}$$

で，根源事象は標本点だけの事象だから

$$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$$

の 6 個じゃないかな」

「そのとおり．では以上の仮定から，サイコロで 1 が出る確率は 1/6 だと言えるか？」

青葉は答えにつまった．直感的に《言える》と思ったが，花京院が描いたおデブサイコロの

絵が思い浮かんだからだ.

「言えない…….《6 個ある標本点のどれもが同じ程度の確からしさで起こる》という仮定が必要だよ」

「そのとおり．注意すべきは，辺の長さが異なるサイコロを 1 個振るときの標本空間も，僕たちが普段想像する，全ての辺の長さが等しい立方体のサイコロを 1 個振るときの標本空間 Ω と全く同じという点だ」

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

「そうだね．目の数は同じだから，標本空間は同じだね」

「だから，ある標本点が起こる確率を定義するときに，

$$\frac{1}{\text{標本空間の元の個数}} \quad \text{とか} \quad \frac{1}{\text{全ての標本点の数}}$$

という式を使うためには，

《標本点のどれもが同じ程度の確からしさで起こる》

という仮定が必要なんだよ．こういう風に定義した確率を算術的確率と呼ぶんだ．本によっては先験的確率って呼んでる場合もある」

$$

定義（算術的確率）．標本空間の大きさが N で，いずれの根源事象も同じ程度に確からしく起こる場合，事象 A の起こる場合の数が n 通りあるとき，$\dfrac{n}{N}$ を事象 A の確率といい，記号 $P(A)$ で表す.

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

これを算術的確率という.

いま使った記号 $P(A)$ の P は確率 Probability の P を表していると考えると覚えやすい.

本によっては $\Pr(A)$ というふうに，r まで含めて書く場合もある．他には $\Pr\{A\}$ という具合に，丸い括弧『(　)』ではなくて，波括弧『{　}』を使う場合もある．でも全部意味は同じだよ.

$P(A)$ と書いても，$\Pr(A)$ と書いても，$\Pr\{A\}$ と書いてもその意味は，全部一緒で

《A という事象が起こる確率》

だ

$$

青葉は，確率とは常に生じる結果の数で決まるものだと思い込んでいた．しかし，その思い込みが《いずれの根源事象も同程度に確からしく起こる》という特殊な条件でしか成立しないことを，いまようやく理解した．

その事実は，青葉を少なからず驚かせた．

「花京院君って，なかなか教え方がうまいじゃない」と青葉が言った．

「そう？」

「うん，そうだよ」

「そんなこと，はじめて言われたよ」

「中学や高校の先生が，こんな風に教えてくれたら……私……数学を嫌いにならなかったかもしれない」青葉は言った．

「君は数学が嫌いなの？」花京院が聞いた．

「うん．数学は好きじゃない」

「昔から？」

「うーんと，最初から数学が嫌いだったわけじゃないけど……」

「じゃあ昔は好きだったんだね」花京院は青葉の顔をじっと見つめた．

「小学生の頃は数学を好きだったはず……，その頃は算数って呼んでたけど．でも，いつの頃からか，数学が私から離れていったの」

「数学が離れていったの？　おもしろい表現だね」

「うん，うまく言えないけど．そういう感じがするんだ．小さかった頃，私はすごく数学が好きだったはず」青葉はつぶやいた．

彼女は小学生だった頃の記憶を思い起こした．それは彼女がはじめて数学を体験したときの記憶だった．

（あの頃はまだ……，私は数学が嫌いじゃなかった……あれはいつこと？）

3.3.　おかあさん，聞いて 〜Ah! Vous dirai-je, Maman

それは青葉が小学 1 年生の頃の出来事だった．

「ねえ，おかあさん」
「どうしたの？」
「こっちきて」わたしはおかあさんの手をひっぱって，机のまえにやってきた．机のうえには《九九》の表がのっていた．
「あのね，《九九》なんだけどね」
「うん」
「《九九》の九の段はね，足すとぜーんぶ 9 になるの」
「え？　どういうこと？」おかあさんは，ふしぎそうな顔をした．わたしは《九九》の九の段のよこに，えんぴつで足し算を書きながら，おかあさんに説明した．

9×1=9	0+9=9
9×2=18	1+8=9
9×3=27	2+7=9
9×4=36	3+6=9
9×5=45	4+5=9
9×6=54	5+4=9
9×7=63	6+3=9
9×8=72	7+2=9
9×9=81	8+1=9

「ね？　九の段はね，《10 の位の数字》と《1 の位の数字》を足すとぜーんぶ 9 になるの」とわたしは自分の“はっけん”をせつめいした．あかあさんは，はじめはただ不思議そうな顔をしていた．だけど，順番に計算して，わたしの言っていることが分かると，にっこりと笑った．
「すごい発見じゃん！　青葉あったまいいー」おかあさんは，わたしの頭をぐりぐりっとなでた．
（わたしはもう小学生なんだから，ほんとはそういう子供っぽいこと，あんまりやってほしくないんだけどな）

でも，おかあさんに頭をなでられて，わたしはちょっぴりうれしくなった．

「ねえ，おかあさん」

「なあに？」

「8 の段だと足しても 8 にならないし，7 の段も足しても 7 にならないよ」

おかあさんは他の段を計算してたしかめると，うん，そうだねえ，ほかの段はちがうねえ，といった．

「どうして，9 の段だけ，1 の位と 10 の位を足すと 9 になるのかなあ」わたしが聞くと，おかあさんは少し困った顔をした．

「どうしてかしらねえ……おとうさんなら分かるかもね．おとうさんが会社から帰ってきたら，一緒に考えてみようよ」

「うん，そうだね」わたしはお父さんの帰りをわくわくしながら待った．

おとうさんも，おかあさんといっしょで，さいしょはわたしの《発見》の意味がわからなかったようだけど，やがて『青葉，すごいじゃん．よく気づいたね』と言ってくれた．

それからおとうさんは，おかあさんといっしょに，紙にいろいろ式を書いて計算したり，本を調べたりして, どうして 9 の段だけが 1 の位と 10 の位の合計が 9 になるのかを説明してくれた．

$$

いいかい？　青葉．まず 9 の段の 1 の位の数を観察すると，

$$\boxed{9},\ 1\boxed{8},\ 2\boxed{7},\ 3\boxed{6},\ 4\boxed{5},\ 5\boxed{4},\ 6\boxed{3},\ 7\boxed{2},\ 8\boxed{1}$$

というふうに 1 ずつ下がっているね．9 に対してかけあわせる数，つまり

$$9\times\boxed{1},\ 9\times\boxed{2},\ 9\times\boxed{3}$$

の右側の数を $n(=1,2,3,\ldots,9)$ とおくと，1 の位の数は $10-n$ で表す事ができる．例えば，

$$9\times 1=9,\qquad 10-1=9$$
$$9\times 2=18,\qquad 10-2=8$$

という風にね.

次に 10 の位の数を見ると，1 つずつ増えているね.

$$9,\ \boxed{1}8,\ \boxed{2}7,\ \boxed{3}6,\ \boxed{4}5,\ \boxed{5}4,\ \boxed{6}3,\ \boxed{7}2,\ \boxed{8}1$$

だから 10 の位の数は $10(n-1)$ で表すことができる．

1 の位の数　$10-n$

10 の位の数　$10(n-1)$

この二つを足した数が 9 の段だよ．

$$\underbrace{10-n}_{1\text{の位}}+\underbrace{10(n-1)}_{10\text{の位}}$$

これを計算すると，

$$10-n+10(n-1)=10-n+10n-10=9n$$

だから確かに「9 の段」と同じだね．さて，青葉が発見した《10 の位の数字》と《1 の位の数字》を足すとぜーんぶ 9 になる，ことを再現してみよう．

《1 の位の数字》は$10-n$

《10 の位の数字》は$10(n-1)$ の $(n-1)$ の部分だ

この二つを足すと

$$10-n+(n-1)=10-1=9$$

ほら！　n が消えただろう？　つまり 9 に対してかけあわせる数 n に関係なく,《10 の位の数字》と《1 の位の数字》を足すと，いつも 9 になるんだ．わかったかい？

$$

当時小学 1 年生だった青葉には，両親の説明は少し難しすぎた．しかし，彼女は自分の発見にちゃんと理屈がつくことに，少なからず感銘を受けた．また両親が，自分の発見を凄いと言ってくれたことや，一生懸命その理屈を説明してくれたことも嬉しかった．

彼女はそのことを今でもぼんやりと覚えている．

しかし中学, 高校と進むにつれて, 青葉はだんだんと数学の授業についていけなくなった．彼女は一度ひっかかると，そこから先に進めない律儀な性格だった．それが災いしたのだ．

分数で割ると，どうして逆数のかけ算になるの？

0 乗すると 1 になるのはどうして？

マイナスにマイナスをかけるとどうして，プラスになるの？

青葉はいつも疑問を解消したうえで先に進みたかった．

しかし中学校になるとそんな悠長なことは言ってられなかった．カリキュラムが要請する授業の進行速度と彼女にとっての最適な理解速度は次第にずれていった．

気がつくと，数学が曲芸的な計算技巧にしか見えなくなっていた．彼女は受験のためにしかたなく，心の底から納得することよりも，形式的な技術として数学を習得することを優先した．そんなことをやっているうちに彼女はいつのまにか，数学を嫌いになっていた．9 の段の秘密を見つけたときに体験したあの感動を，数学から得ることはもうできなかった．

もはや彼女にとって数学は，意味を失った記号操作に過ぎなかったのである．

「そういう体験ない？　数学が自分を置いてどんどん先に走っていく感じ……」青葉は聞いた．

花京院はしばらくのあいだ沈黙した．

青葉には彼がなにかを話すべきかどうか，迷っているように見えた．その質問はなにげなく発したものだったが，彼にとっては重大な意味を持っているようだった．

結局，花京院は質問には答えなかったが，そのかわりに，「数学が離れていったのなら，自分から追いかければいいんじゃないかな」と言った．

「追いかける？」

「数学は消えたり，逃げたり，なくなったりしない．どんなに難しい数学でも時間さえかければ，いつかは分かるようになる．もう受験はない．ゆっくりやればいいじゃない」

青葉はその言葉を聞いて，頭の中で閃光がきらめいた気がした．

（確かにそうだなあ……．もう急ぐ必要なんてないんだ．どれだけ時間をかけてもいいんだ．そんな風に考えたことなかった……．今から追いかけること，できるのかな……）

4.　経験的確率――練習曲 3

人は確実性が欠如している場合にだけ，確率を使う．

5.156

4.1.　青葉の挫折

「花京院くん，もうしわけないんだけど……，数学を勉強したり，教えてもらうのを，わたし，やっぱりやめようと思うんだ」

待ち合わせ場所の研究室に現れるやいなや，青葉は消え入りそうな声で言った．彼女は，見るからに意気消沈している．

「どうして？　まだはじまったばかりだよ」花京院は少し驚いた様子を見せつつも，青葉に事情を説明するよう促した．

「あのね，やっぱり私には向いてないみたい」

青葉は，自分が数学に向いていないことの理由を語りはじめた．

昨日，彼女は，花京院に励まされたおかげで，自分から数学を追いかけてみようと決意した．一度思い立つと彼女の行動は早かった．

今朝起きるとすぐに大学の図書館に行き，数学書が並んでいるコーナーを探した．はじめて訪れた数学書のセクションは，圧倒されるほどたくさんの専門書が並んでいた．それらの本は，いくつかのジャンルに分かれてきちんと整理されていたが，青葉にとっては，ジャンルそのものが未知の世界だった．

（こんなにたくさんの分野があるんだ……）

青葉にとっては，数学の中の部分的カテゴリーの名称そのものが，新たに学ぶべき知識だった．ただし幸いなことに彼女は，図書館を訪れる前から確率についての本を借りようと心に決めていたので，多様なジャンルの中で迷子になることなく，自分が目指していた場所にたどり着くことができた．

確率論のコーナーにたどり着いた青葉は，『基礎』や『入門』や『はじめての』とか『初心者』などの言葉をタイトルの中に探した．ほんとうは，『高校で挫折したけど，3 日でなんとかなる，やさしい確率論』とか『確率の初歩の初歩～ネコにでも分かる，いわんや人間をや』いうタイトルの本があればベストだったが，さすがにそこまで過剰に分かりやすさをアピールした本は存在しなかった．

青葉は結局,『確率論の基礎 [新版] 』という本を借りることにした．その本にした理由は三つあった．一つめは，全く同じ本が 3 冊も棚にならんでいたことである．きっと多くの学生が借りることを想定しているのだろうと彼女は考えた．次にタイトルに[新版]と書いてあったことである．[新版]であるからには[旧版]がどこかに存在し，需要があって新しい版が刊行されたのだろう．そして最後に，青葉が知っている大手出版社の本だったことである．青葉はカウンタで本の貸し出し手続きをしている最中，ずっとドキドキしていた.

（まさかわたしが，大学図書館で数学の本を借りるなんて······，もしかして,『こんな難しい本，ほんと読めるの？』なあんて，係の人に思われてないかな······）

こうして青葉は借りたばかりの本を手にして，図書館の入り口横にあるカフェに入ると，陽の当たるテラスの一番いい場所に座った. 彼女は普段, 一人でカフェに入ったりはしない. 友人のいない寂しい人間だと思われるのが嫌で，いつもは友人達と一緒だからだ．それでも今，彼女はとてもいい気分だった.

（カフェで一人で本を読むなんて，なんだか真面目な大学生になったみたい······）

彼女は，ちょっと贅沢して 350 円もするラテをオーダーして準備万端整えると，期待に胸を膨らませながら最初の頁をひもといた.

しかし，青葉の期待は無残にも打ち砕かれた．そしてあっという間に失望と後悔が彼女の心を満たしていった．最初のページから，まるで意味が分からないのだ.

完全加法族······？

加算無限個······？

ボレル集合······？

測度······？　なんなの······，これ？

日本語？　日本語だよね？　これ.

彼女は思った．やっぱり数学なんて私には向いていない······．こんなものを理解しようとすること自体，身の程知らずだったんだ，と.

彼女はぺしゃんこに打ちのめされた.

（これじゃあまるで，ジムに乗って初陣を飾ろうとしたら，いきなりビグザムに踏みつぶされたようなもんじゃない······）

難解な数学書をテーブルに置いてテラス席に一人で座っていることが，彼女にはひどく恥ずかしく思えてきた.

「まさか，最初の 1 頁目から分からないなんて，想像もしなかったわよ」青葉はまるで，

花京院にも責任があるかのような口調で，文句を言った．

「借りてきた本をみせてくれる？」花京院は冷静に言った．青葉はしぶしぶバッグから『確率論の基礎 [新版] 』を取り出すと，黙って彼に渡した．

花京院は受け取った本を数頁めくって中身を確認した．

「君が借りた本は 1944 年に初版が刊行された伊藤清の『確率論の基礎』だね．1930 年代始めに誕生したコルモゴロフの公理論的確率論を解説した歴史的名著の復刻版で，その後ファイナンス理論で注目される「伊藤の公式」を含む，確率論の重要テキストの一つだ．君がこの本を読んで難しく感じるのはきわめて当然なんだ．君はピアノを習ったことある？」

「え？　ピアノ？　んー‥‥‥．小学生のころ，習い事で少しやったことあるよ」

「君がこの本に感じた難しさは，ピアノを習い始めたばかりの子供が，リストやショパンの楽譜を見て，こんなの自分で弾けない，と感じるのと同じことなんだ．君が数学に向いていないわけじゃないよ」

「そう言われても‥‥‥．全然分かんないんだもん」

「公理論的確率論は，賭けの考察から始まった具体的な確率論を，対象範囲を拡張するために抽象化したものだ．いきなり抽象的な理論からはじめて理解できる人間はいない．それは言ってみれば，アタマだけで確率を理解するようなものだ．そのまえにもっと具体例に触れて，確率を手で触って体験したほうがいい」

そう言うと花京院は机のうえにあったサイコロを拾いあげた．

4.2.　サイコロ振りの実験

そのサイコロは学生同士で掃除当番やお茶の買い出し係を決める際によく使われているものだった．

「このサイコロで 1 が出る確率が 1/6 になっているかどうかを，神杉さんならどうやって確かめる？」

「サイコロを振ればいいんじゃないのかな‥‥‥」青葉は慎重に答えた．

「振った結果はどうなると思う？　実験するときには，結果を予想してからやったほうがおもしろいよ」花京院は，悪戯を企んだ子供のような笑顔で言った．

「えーと，1/6 だから，6 回ふれば《1》が 1 回くらいでるんじゃないかな」青葉は花京院の手からサイコロをつかむと，机のうえで転がした．結果はつぎのとおりだった．

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目
出た目	5	4	6	3	3	5

花京院は結果を見て，満足そうに微笑んだ.

「1 は一回も出なかったね．すると『1 が出る確率は 1/6 である』っていう予想は間違っているんじゃないだろうか？」

「え，そうじゃないよ．今回はたまたま出なかっただけだよ」

「たまたま？」と花京院が聞き返した.

「そう, たまたま. サイコロを振る回数が少なかったから, たまたま 1 が出なかったんだよ. サイコロをもっとたくさん振ればよかったんじゃないかな」と青葉は答えた.

「『もっと』というのは，どれくらい？」

「うーん，そうね，今の 10 倍で 60 回ぐらい振れば，そのうちの 10 回くらいは，1 が出るんじゃないかな」

「よし，じゃあやってみよう」

二人は交互にサイコロを振り，出た目を紙に記録していった．60 回の試行のうち，1 は出る場合もあれば出ない場合もあった．1 が出たところで何か得をするわけでもないのに，どういうわけか，1 が出ると二人は手をたたいて喜んだ．逆に 1 が出ないと残念がった．途中で何回かサイコロが机の上から転がり落ちてしまった．二人で話し合って，机から落ちた場合は『ノーカウント』にして，サイコロを振り直すことに決めた．10 回以上連続して出ないこともあれば，3 回連続で 1 が出ることもあった.

60 回の試行結果をまとめると次の列のようになった.

$$
\begin{array}{l}
6, 2, \boxed{1}, 5, 2, 5, 6, 3, 3, 6, \\
2, 2, 2, 6, 5, 4, 3, \boxed{1}, 2, 3, \\
2, 2, 5, \boxed{1}, 6, \boxed{1}, 4, 4, 3, 3, \\
3, 5, 4, 5, 5, 5, 3, 2, 6, \boxed{1}, \\
2, 2, 4, 4, 5, 2, \boxed{1}, 6, 5, \boxed{1}, \\
\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{1}, 4, \boxed{1}, 5, 6, 3, \boxed{1}, 4
\end{array}
$$

図：60 回のサイコロ振りの結果.

「1 が何回出たかを数えてみよう」花京院が言った.

「えっと，1 回，2 回，3 回, . . . , 12 回ね．ほら私のいったとおり，だいたい 10 回くらい《1

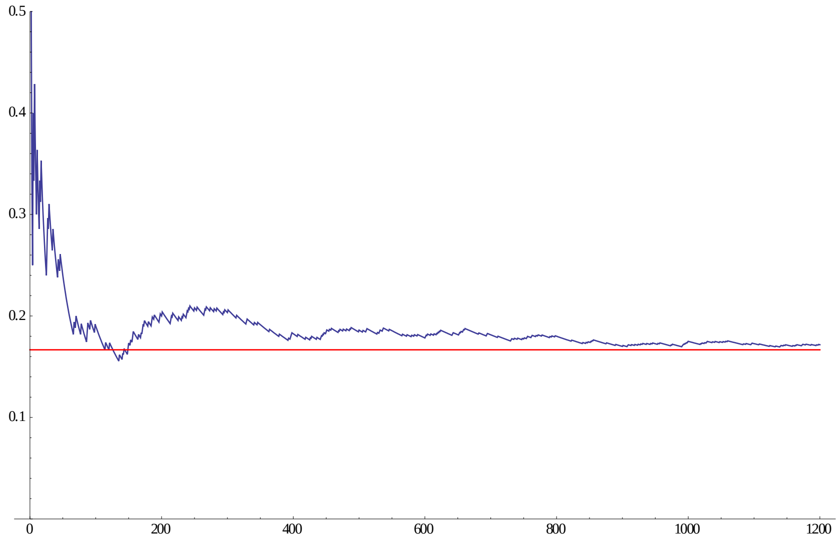
の目》が出たじゃない」青葉は出た目を記録した紙に丸をつけながら，正確に 1 の出た回数を確認した．
「でも《ぴったり 10 回》ではなかったね」と花京院が念をおした．
「う．細かいとこにこだわるのね．2 回くらいいいじゃん」
「このデータに基づいて，1 の出た回数とサイコロを振った回数の比を計算してみよう」花京院は簡単な式を書いた．

$$\frac{1\text{の出た回数}}{\text{サイコロを振った回数}}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

「1/6 よりも大きいね．『1 が出る確率は 1/6 である』という予想は，やっぱり間違いじゃないだろうか？」花京院は聞いた．青葉は少し考え込んだ．
「うーん，確かにいま試してみた結果は，1/6 よりも大きいんだけど‥‥‥これは，サイコロを振る回数が少なかったせいじゃないかな．きっとサイコロを振る回数を，もっと増やせば，1 が出る割合は 1/6 になるよ」

4.3.　サイコロ振りの相対頻度

「実験の回数を増やしていくと，1 が出る相対頻度はピッタリ 1/6 になるか？　例えば 6 億回振ると，《1》が 1 億回ピッタリ出るだろうか？」花京院は聞いた．
　青葉はまた少し考え込んだ．しかし 6 億回中の 1 億回という数があまりにも大きすぎるため，想像するのが難しかった．
「うーん，だいたい 1 億回出るんじゃないのかなあ？　でもピッタリ出るか，と言われると自信ないけど‥‥‥．実際にやってみると，どうなるのかな？」青葉はつぶやいた．
「1 億回と比べると少ないけど，1200 回までなら小学生のころに，実験したことがある」
　彼はパソコンを起動するとクラウドストレージにアクセスして，過去の実験結果が記録されたファイルを探しはじめた．やがてディスプレイ上にグラフが表示された．

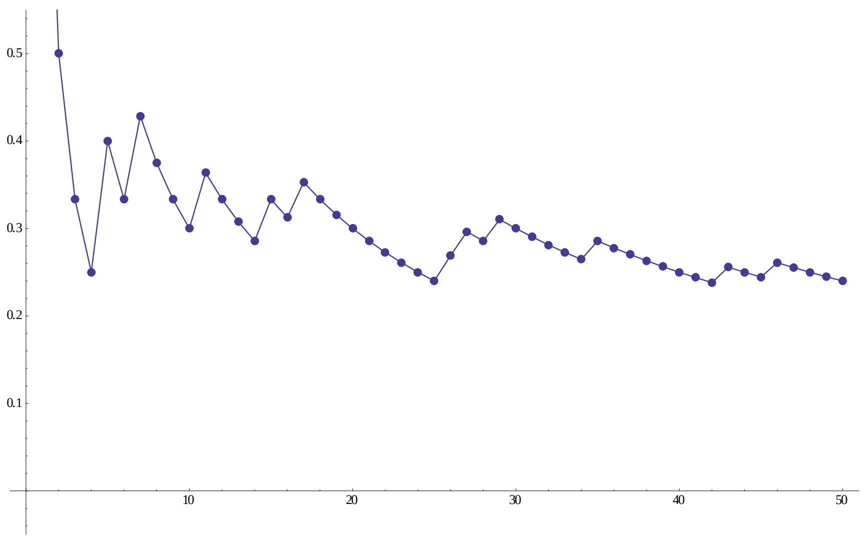


図：花京院（小学生時代）の実験結果．気合いで振った 1200 回試行．

「グラフの横軸の値は，サイコロを振った回数だよ．目盛りが 0 から 1200 まであるだろう？これは 1200 回サイコロを振ったことを表している．縦軸は,《サイコロを振った回数》と《振った回数のうち，1 が出た回数》の比だよ」花京院は式を書いた．

$$\text{縦軸の値} = \frac{\text{1が出た回数}}{\text{サイコロを振った回数}}$$

「たとえば 1 回目から 50 回目までをつないだ点を拡大すると，こんな風に見える」



図：花京院（小学生時代）の実験結果．50 回目までの，1 が出る回数の比．

「ギザギザに見える線は，細かく見ると点をつないでいる，ということね．じゃあ，この横に引いたまっすぐな線は何？」青葉は聞いた．

「これは 0.16666666⋯，つまり予想している値 1/6 を表した線だよ」

「それにしても暇だなあ．よくこんなことを続けたね」

青葉は感心すると同時に，自分ならきっと 100 回もサイコロを振れば，その作業に飽きていただろうと考えた. 実際のところ, 60 回振っただけで, すでにその作業に飽きていたのだ.

「実はこれ，途中から夏休みの自由研究に変わったんだ．宿題が一つ減ると思えば，たいした苦労じゃなかったよ．ただ残念なことに，当時の担任には全然理解してもらえなかったけど」

確かに担任にしてみれば，ちょっと怖い小学生かも，と彼女は思った．

「担任の先生には『サイコロで 1 が出る確率は 1/6 なのよ．そういう風に決まっていることだから，いちいち確かめなくていいのよ』って言われたよ」花京院は小学校時代の担任の口調を真似て言った．

「それは残念だったね」

「うん．僕はもちろん当時から『均等なサイコロの各目が出る確率は 1/6 である』と定義されていることは知っていた．僕が知りたかったのは，定義の話じゃなくて，一つの目が 1/6 の確率で出るってことの経験的意味そのものだったんだ」

青葉には，花京院にとって，サイコロ振りの実験はとても大切な意味を持っていることが理解できた．

それは，おそらく彼女が《9 の段の秘密》の思い出を大切に思っていることと，同じなのだ．花京院も自分と同様に，その実験をとおして，なにかとても大切なことを体験したに違いない，と彼女は思った．

「でもうちの親父には，めずらしく褒められたなあ．『おまえは意外と根性がある』って．あれはちょっと嬉しかった」そう言って花京院は笑った．青葉もつられて，すこし笑った．

「サイコロを振る回数が大きくなるほど，《1》が出た回数と全試行回数の比率は 1/6 に近づくってことが体感できた？」

「うん」

「昨日説明した算術的確率と何が違うか分かる？」花京院は聞いた．青葉は昨日の説明を思い出した．

「算術的確率の場合は，『全ての標本点が同程度の確からしさで出現する』と仮定した結果として 1/6 という数を定義した．でもいまの場合は，実際にサイコロを振って 1 が出る回数を調べて，それとサイコロを振った回数の比を調べた⋯⋯その結果 1/6 という数値は出てこ

なかったけれど，回数を増やすと，1/6 に近づいていくんじゃないかって予想できた」
「うん，いいまとめだね．最初に 60 回だけ振った場合の相対頻度は 1/5 で 1/6 から少し離れてたけど，1200 回振った実験結果によれば，確率は 1/6 に近い値になっていた．つまり《1》が出る回数 r とサイコロを振る回数 n の比である

$$\frac{r}{n}$$

は，n がおおきくなるにつれて 1/6 に近づくことが期待できる．これを経験的確率という」

4.4.　コンピュータはサイコロを振れるか？

「今ならコンピュータでサイコロを 6 億回だってすぐに振ることができるよ」花京院は数式処理ソフトを起動した．
「へえ, そんなにたくさん振ることができるの？　それだけ振ったら, 1 は 1 億回でるかな？」
「多少の誤差は出るけど，相対頻度は 1/6 に近づくはずだよ」花京院はサイコロをコンピュータ上で 6 億回振るコードを書いて実行した．
　彼は念のために，6 億回試行を 15 回繰り返すコード，すなわちをサイコロ振りの総回数が 90 億回に達するコードを書いた．
　計算には多少時間を要した．どうやら 6 億回振ってから，1 の出た回数をカウントするという 1 試行に，1 分ほどかかるようだ．二人は計算結果が出るのを待った．研究室には彼の操作するマウスのクリック音だけが響いた．
「ねえ，花京院君は，大学の授業っておもしろい？」青葉が唐突に聞いた．
「どっちでもないかな．おもしろいときもあれば，つまらないときもある」花京院はぶっきらぼうに答えた．それから，今のは排中律だからトートロジーだな，と独り言のように付け加えた．
　青葉は，大学の授業にあまり興味を持つ事ができなかった．高校の授業内容に比べると，大学の授業内容が，ずいぶん専門的であることだけは理解できた．しかし彼女はその専門的な内容や，病的なまでに細かな知識や方法が，自分の生活にどのように活かされるのかを理解できなかった．
　「私，あんまり授業が好きになれないんだ」
　「ふうん．どうして？」
　青葉は答えに迷った．
　どう表現すれば自分が大学に感じている違和感を他人に理解してもらえるのか分からなかったし，まだ十分に打ち解けていない花京院という同級生にたいして，どこまで自分の心情

を吐露していいのか，その見極めがつかなかった．

「お，やっと計算が終わったようだよ」花京院がモニタで結果を確認した．彼は器用に数式処理ソフトと表計算ソフトを使って，6 億×15 回の試行結果をまとめた．

「1 列目はサイコロを 6 億回振ったうち，1 が出た回数を表している．理論的には 1 億回に近い値になっているはずだね．2 列目は 1 列目の数を 1 億から引いた数だよ．2 列目の数が小さいほど，1 が出た回数が 1 億に近かったことになるね．3 列目は相対頻度，つまり 1 の出た回数を 6 億で割った値だよ」

1 の出た回数	1 億回からの差	相対頻度
99998476	1524	0.166664127
100009218	-9218	0.166682030
99999380	620	0.166665633
99991059	8941	0.166651765
99990670	9330	0.166651117
99998593	1407	0.166664322
99998314	1686	0.166663857
99990214	9786	0.166650357
100008503	-8503	0.166680838
99998519	1481	0.166664198
99997225	2775	0.166662042
99999935	65	0.166666558
100004400	-4400	0.166674000
100011034	-11034	0.166685057
100006758	-6758	0.166677930

「こうしてみると，1 が出た回数は 1 億回に近いと言えば近いけど，ピッタリ 1 億から 1 万回くらいは前後しているんだね」青葉は，膨大な計算結果を眺めながら言った．

「そうだね．でも 1 億回に対する 1 万回のズレというのは，ほとんど誤差の範囲と言っていいね．相対頻度は，理論的には 1/6，つまり 1.666666…だ．3 列目に書いた観察結果の相対頻度は，1/6 を基準にすると，だいたい 1 万分の 1 以内におさまっている」

「ほんとだ」

「人間がサイコロを 6 億回振ろうとすると，一体どれくらい時間がかかるか，想像できる？」

青葉は頭の中で考えた．

「うーんと‥‥‥．どれくらいかなあ．相当かかるはずだよね．‥‥‥じゃあ，3ヶ月くらい？」

「それくらいですむかな？」花京院は, ワンステップずつ紙に書いて所要時間を計算した.

$$

サイコロを1秒に1回振ると仮定する．すると6億回振るのに6億秒かかる．この6億秒を分になおすと

6億秒/60＝10000000分　(1千万分)

時間になおすと

1千万分/60＝約166666.67時間

日数になおすと

166666.67時間/24＝約6944.4日

年数になおすと

6944.4日/365＝約19年

$$

「つまり1回1秒で振ったとしても，サイコロを6億回振るためには，不眠不休で19年かかる．しかも，6億回を15セット繰り返すということは，19年×15回＝285年だから，現実的には不可能だね」

青葉は19年間ひたすらサイコロを降り続ける花京院の姿を想像して，くすりと笑った．そしてあらためて，コンピュータとはなんて律儀な道具なのだろうと彼女は思った.

「あ，でも‥‥‥」

「なに？」

「コンピュータが振るサイコロって，本当にあのサイコロと同じなのかなあ？」青葉は, ふと感じた疑問を口にした.

「というと？」

「うーん，うまくいえないんだけど．コンピュータ上でサイコロを振る，ということは, 何かプログラムを処理しているんでしょ？」

「ふむ．まあそうだね」

「サイコロってことは, 1から6の目が等しい確率で生じないといけないはずなんだけど, そういうのをどうやってプログラムするのかなあって‥‥‥」

「それはなかなかいい疑問だ，と言って花京院は微笑んだ.

「コンピュータで真にランダムな数列を発生させることは現在のところ難しいとされてい

る．量子コンピュータを使えば，理論上は可能らしいけどね．だからコンピュータ上で真の乱数に似た疑似乱数を発生させる方法が，これまでにいろいろ考案されてきたんだ」

花京院は，《ランダムネスとは何か》から始まり，コンピュータで疑似乱数を発生させる方法をかいつまんで説明した．その中でも最も原始的な方法である線型合同法に青葉は関心を持った．

「……ようするに，ある数を割った余りを利用して，ランダムに近い数字の並びを作るってこと？」

「うん，直感的な理解としては，それで大きくは間違っていない」

青葉は，そこから先の話は難しくて十分には理解できなかった．しかし，よく分からないけれど，理解できたらきっと楽しいんだろうな，とは思った．

5.　出会いのモデル——練習曲 4

現実の世界からどんなにかけ離れた思考の世界も，現実の世界とは何かを—ある形式を—共有しなくてはならぬことは明らかである

2.022

5.1.　青葉の矛盾

かつて文学部への入学が決まったとき，青葉は『もう数学なんか二度と勉強しない』と心に誓ったはずだった．あの面倒なだけで，実生活には何の役にもたたない数学を勉強することは二度とない，と……．

また，つい最近，難解な数学書を読もうとして挫折した時も，私はやっぱり数学には向いてない，と思ったはずだった．

にもかかわらず……

青葉は，今日もまた花京院から確率論を教えてもらうために研究室にやってきた．そして不可解なことに，花京院との《勉強会》が楽しいことを認めざるをえなかった．

（おかしいなあ．わたしは数学が嫌いなはずなんだけどなあ……．この研究室に来ちゃったのは，くじ運が悪かったせいなのに…….）

彼女は心の中の矛盾をどうあつかっていいか分からなかった．そこでしかたなく，数学に対する態度を少しだけ変更することにした．

（きっと，数学の中に《楽しい数学》と《つまらない数学》があるんだ．そして花京院君が教えてくれる数学は，すこし面倒なところもあるけど，楽しいほうなんだ．……だから基本的に私は数学が嫌いなはず. ……ただ, たまたま興味を引く題材があっただけ…….うん，きっとそうだよ．そういうことにしておこう）

5.2.　記号 n と x の意味

——研究室．青葉は時間通りに待ち合わせの場所にやってきた．

「さて少し回り道をしてきたけど，今日から，いよいよモテる確率の計算に進むよ」花京院はホワイトボードを押して机の脇に移動した．

「そうそう．もとはといえば，その話が聞きたかったの」

「まず,《モテる》っていう概念を定義しなくちゃいけない. 前にも少しだけ話をしたけど,

いったい何人から好かれればモテると言えるのか？　その確認からはじめよう」

「1 人だと少ないし，10 人だと多すぎるよね」

花京院は書架から辞書を取り出すと《モテる》の意味を確認した．

「なんだ，人数についての記述はないのか」花京院は残念そうに言った．

「そんなこと辞書に書いてあるわけないじゃない」

「《モテる》という言葉の辞書的意味は，要するに《人気がある》《人から好意をもたれ，よい扱いをうける》ということだね．じゃあ好意を持つ人数を変数化して，こう定義したらどうかな」花京院は《モテる》の定義を提案した．

《モテる》とは x 人以上から好意を持たれる状態である．ただし x は 1 以上の整数とする．

「x を変数にしておけば，2 人以上でも，3 人以上でも，好きな数字を選べるから，より一般的だ．変数っていうのは，特定の値に固定せずに，場合に応じていろいろと値を変えることができる数，くらいの意味だよ．ちなみに同性から好かれる状態は，いまは《モテる》の定義に含めない」

「あ，そうか･･･，同性にばっかりモテる人っているよね」青葉は小声で，私は違うけど，と付け加えた．

「次に出会う人数を定義しよう．以前聞いたとき，神杉さんは大学に入ってから一年間で 50 人と出会ったと言っていた．でも，これは時期によって異なるはずだ．たとえば高校生の頃には 20 人，大学生の頃には 50 人，社会人になると 100 人という具合にね．だから一般的には n という記号で表すことにしよう．こうして変数化しておけば，その都度 n に具体的な数値を代入することで，高校生の頃，大学生の頃，社会人の頃それぞれの時期について確率を計算できる」

「出会った人の数が n で，そのうち自分を好きになる人数が x だね」

「そういうこと．x の範囲は 1 から n じゃなくて，0 から n になるから注意して」

「え，どうして？･･････あ，そうか．誰も自分を好きにならなかったら，x=0 か．うーん，それだけは避けたい」

「n 人と出会って，1 人から好かれる確率や，3 人から好かれる確率，一般的には x 人から好かれる確率を計算することが，さしあたっての目的だ．そのために《確率変数》という概念を導入する必要がある」

5.3.　確率変数

「いま，君と出会う n 人の男性に 1 番から n 番まで番号をつけたとしよう」

「ちょっとまって，私，n 人っていう一般的な表現が苦手……．もっと具体的な数字で考えてもらってもいい？」

「そうか．じゃあ 3 人にしよう」

「え？　そんな小さい数でいいの？」青葉は驚いた．

「そう，簡単な具体例を考えることが，理解の最大の助けとなる．これは数理モデルをつくったり，理解したりするときの鉄則だよ」

「ふうん，そうなんだ」

「簡単な例を考えれば計算がラクになる．計算が難しいとモデルの構造の把握が難しくなるし，意味のある命題を引き出すことも難しくなる」花京院はホワイトボードに，《計算が簡単なモデルは，構造を把握しやすい》と書いた．

「ただし，簡単ならいい，というわけでもない．例えば $n=1$ の場合はもっとも簡単だけど，これは考えても理解に役立たない」

「そうだね，その場合はわざわざ計算しなくっても答えが分かっちゃうね」

「$n=2$ は，$n=1$ よりも例としては適しているけど，今考えている問題の場合には少なすぎる．だから集団としての特性を備え，そのなかでも最小の $n=3$ が例として適切，というわけ」

「なるほど」青葉はうなずいた．

「いまここに 3 人の男性がいるとしよう．それぞれが，ある確率で神杉さんを好きになると仮定する」

「ついでだからその三人を，私の好きなキャラクターに置き換えてもいい？」

「まあ，そうしたほうがイメージしやすいなら，別にいいよ．ただし，それってあんまり意味がないけど」花京院は冷静に指摘した．

青葉は自分が好きなキャラクターを想像した．

まず，シャアははずせないわね．それからガルマも．残りの一人は……．まあアムロってとこかなあ．ランバ・ラルやスレッガー・ロウだとちょっとマイナーすぎて花京院君には分からないだろうし……，よし決めた．

「三人の男性キャラクターはシャア，ガルマ，アムロにしたよ」彼女にしてみれば超メジャーなキャラを選択したつもりだったが，花京院は誰一人知らなかった．

「えーと，まずそのシャーって奴が好きなるかどうかを 0 か 1 で表すよ．確率変数っていうのは，好きになるかどうかという事象を 0 もしくは 1 へと対応させる規則なんだ．いま標本空間を

$$\Omega=\{\text{好きになる, 好きにならない}\}$$

とおいて，0 と 1 への対応を次のように定義する」

好きにならない　→　　0
好きになる　　→　　1

図：確率変数の例.

「ふむふむ，まあそんなに難しくないわね．これくらいなら，まだ大丈夫」

「この対応規則に X_1 という名前を与える．X_1 はシャーが君を好きになるかどうかを表し，この値が 1 であれば《好き》．0 であれば《好きにならない》を意味する」

「シャーじゃなくて，シャアなんだけど．なんか滑ってるみたいでヤダ」

「標本空間 Ω の要素 ω が，関数 $X_1 : \Omega \to R$ によって確率変数の実現値 $X_1(\omega)$ に対応させられるんだ．ここで R は実数の集合を表しているよ．イメージはこんな感じだ」

$$\Omega = \{\text{好きになる，好きにならない}\},$$
$$X_1(\omega) = \begin{cases} X_1(\text{好きになる}) = 1, & \omega = \text{好きになる} \\ X_1(\text{好きにならない}\}) = 0, & \omega = \text{好きにならない}. \end{cases}$$

青葉は確率変数 X_1 の定義をじっとながめた．そして自分が知っている関数と，いま花京院が説明した確率変数との違いを考えた．青葉が知っている関数は

$$y = 3x + 2$$

とか

$$y = x^2 + 2x + 4$$

のように，入力する x と出力する y との対応を数式で表すことができるものばかりだった．しかし確率変数は，《好きになる》や《好きにならない》という数字ではない事象を，0 や 1 という数字に割り当てることができる，という点が彼女にとって新鮮だった．

「知らなかったな．関数の《数》っていう漢字から，どうしても数式を連想しちゃうんだよね．確率変数を定義することにどういう意味があるのかな？」

「今考えている例だと，確率変数を使うことによって人数を数えやすくなる，というメリットがある」

青葉は関数という概念が，それまでに知っていたものより，もっと範囲の広い概念であることを少し想像できるようになった．

「関数の英語である function には《数》の意味は含まれていない．だから関数と聞いてす

ぐに数や数式を連想するのは僕らの文化圏に限った話かもしれないね．さて，残りの二人についても，好きになるかどうかを確率変数で表すよ．ガルマが X_2 でアムロが X_3 だ．定義は同じだよ」

\$\$

$$
\begin{aligned}
&\Omega = \{\text{好きになる，好きにならない}\}, \\
&X_2(\omega) = \begin{cases} X_2(\text{好きになる}) = 1, & \omega = \text{好きになる} \\ X_2(\text{好きにならない}\}) = 0, & \omega = \text{好きにならない} \end{cases} \\
&X_3(\omega) = \begin{cases} X_3(\text{好きになる}) = 1, & \omega = \text{好きになる} \\ X_3(\text{好きにならない}\}) = 0, & \omega = \text{好きにならない}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここから先は

$$X_1(\text{好きになる}) = 1,\ X_1(\text{好きにならない}) = 0$$

をそれぞれ省略して

$$X_1 = 1,\ \ X_1 = 0$$

と書くことにするよ．

《確率変数》と《確率変数の特定の値が実現する確率》の関係を表したものが確率分布だよ．たとえば，

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 1) &= p \\
P(X_1 = 0) &= 1 - p
\end{aligned}
$$

という二つの式で X_1 の確率分布は定まる．この記号の意味は

シャアが君を好きになる事象が生じて，確率変数 X_1 が 1 となる確率は p である

シャアが君を好きにならない事象が生じて，確率変数 X_1 が 0 となる確率は $1-p$ である

だよ．

\$\$

5.4.　確率 p の解釈

「《確率 p で自分を好きになる》か……．うーん，これは人数 n よりも解釈が難しいな．ある確率で好きになるって，どういうことなんだろう……．結果として《好かれる》か《好かれないか》のどっちかでしょ？　たとえば，《確率 0.01 で好かれる》ってどういうことな

のかなあ？」

「それは《経験的確率》で解釈したほうが，分かりやすいだろうね．例えば神杉さんが 100 人の男子と出会い，そのうち 1 人が君のことを好きになったと仮定する．このとき君を好きになった人の割合は 0.01 だ」

$$\frac{\text{自分を好きになる人の数}}{\text{自分が出会った人の数}} = \frac{1}{100} = 0.01$$

「実際に起こった現象は，

《1 人だけが君を好きになり，残りの 99 人はそうじゃない》

ってことでしかない．この状態を 1 人 1 人が，同じ確率 0.01 で君を好きになった，と見なすんだ．サイコロの場合と同じだよ」

「そっか．サイコロと同じかあ……．うーん，なんとなく分かるんだけど……，サイコロの場合は，すっごくたくさん振ったでしょ？　いまの例だと 100 人としか出会ってないよ．もっとたくさんの人と出会ったら，好かれる割合が 0.01 から増えるかもしれないし，減るかもしれないでしょ？」

花京院は深々とうなずいた．

「もちろん，そういう可能性もある．その場合は出会う人数 n と同様に，変化した確率 p を代入して，新たに計算すればいい」

「そんなものかな……，でも」

n や p にいろいろな数値を代入すればよい，という点は理解できる．しかしまだ頭の片隅に引っかかることがあった．青葉はそれを懸命に言語化しようと頭をひねった．

「この確率 p っていうのは，どの人でも同じなの？」

「なるほど，とてもいい指摘だ．君の疑問は『どの異性も同じ確率 p で自分のことを好きになるのか？』っていうことだね」

「人にはそれぞれ好みっていうものがあるでしょ．出会った人が全員同じ確率で自分を好きになるっていう仮定が不自然だなって思ったの」

「君の言うとおり，《出会った異性の全てが同じ確率で君を好きなる》という仮定は，現実的じゃない．君のことがすごくタイプだって言う人もいれば，全然タイプじゃないって言う人もいるだろう．アムロにとっては君がタイプだけど，シャーにとってはタイプじゃないっていう具合にね」

「だからシャアだってば……．全員が同じ確率で好きになると仮定するのってヘンじゃない？」

花京院は，深々とうなずいた．

「確かに，この仮定は事実をかなり単純化している．でも最初は単純なモデルをつくったほうがうまくいくんだ」花京院はホワイトボードに，《モデルはシンプルに作る》，と大きく書いた．

「現実は複雑だ．だからといって複雑なまま表現しても，現実をうまく理解できない．過度に単純な仮定であっても，はっきりと仮定しておけば，後で間違いが分かった場合にどこを修正すればいいのかすぐに分かる．その仮定は，経験的に正しいかもしれないし，間違っているかもしれない．だから，そこが仮定だという目印をつけて，一歩ずつ複雑な現実に近づいていくんだ．仮定はいくらでも，あとから変更したり追加したりできる･･･．これも重要だから書いておこう」花京院はホワイトボードに，もう一行追加した．《仮定はいくらでも変えることができる．またいくらでも追加できる》と．

「ちょっと釈然としないけど．まあいいか･･･，後で変更できるのね」青葉はうなずいた．

「神杉さんが感じた疑問はとても大切だから，覚えておくといいよ．実際に，自分が人から好かれる確率を推定することはとても難しいと思う．ここでいう確率 p とは，その人の魅力を表す数値だ，というふうに考えると理解しやすいんじゃないかな．魅力がある人は p の値が大きいし，魅力が少ない人は p の値が小さい．その値が実際にいくらなのかを知ることは難しいけれど，それが人によって違う，ということは簡単に想像できる」

「確率 p の値は, その人の魅力を表している･･････か. うん, それなら想像しやすいかも. 見た目がいいとか，話がおもしろいとか，そういう魅力が確率 p を高めるんだね」

「そうだよ」

青葉はそこでまた考えた．

「でもさあ，誰かを好きになるって，相手の魅力だけが影響するわけじゃない気がするんだけど」

「どういうこと？」花京院が聞いた．

「えっとね，私が小学生の頃ね，同じクラスに片平君ていう子がいたの･･････．ある日，友達からね，《片平君は青葉のことが好きらしいよ》っていう話を聞いたの」

「うん」

「でね，私は当時片平君のこと，なんとも思ってなかったわけ．ところがね，その話を聞いてから，なんとも思ってなかった片平君のことが，なんだか気になってきちゃったの」

「うん，そうだね．そういうことは，よくありそうだ」花京院は深々とうなずいた．

「あるでしょ？　何とも思ってなかったのに，相手が自分のことを好きだっていうことを知ったら，急に気になってくるという体験」

「つまり相手が自分のことを好きだという情報が伝わると，その相手を好きになる確率が

上昇するという現象だね．例えば僕が《神杉さんのこと，実は好きなんだ》っていうと，君が僕を好きになる確率は上昇するってことだ」

青葉はその言葉にドキリとした．彼女は自分の顔が意思とは無関係に赤くなるのを感じた．

しかし花京院はそんな青葉の様子に気づくこともなく，《条件付き確率》とか《信念のベイズ更新》とか，意味不明の言葉をぶつぶつとつぶやきながら，計算用紙に数式を夢中で書き殴っていた．

青葉はその様子をみて，一瞬でもときめきかけた自分を恥ずかしく思った．それと同時にまぎらわしい喩えを使った花京院に少し腹がたった．

「好意のポジティブ・フィードバック．これはとても重要な点だな．この仮定については一旦ベースモデルができた後で検討することにしよう」

「……」

「よし，ここまでの仮定はこんなところでいいかな．じゃあ次に進もう」そう言って花京院は，新しい計算用紙を取り出した．

「……」

「あれ，どうしたの神杉さん，何か怒ってるの？」花京院の問いかけを青葉はしばらくのあいだ無視した．

「さて，じゃあ最後に確認しておこう．3 人の男性シャア，ガルマ，アムロと出会い，それぞれが君を《好きなる》か《好きにならない》を決める．君を好きになる人数だけに注目すると結果は何パタンかな？」

「えーと，3 パタン．あ，違う．誰からも好かれない場合があるから 4 パタンだ」

「そう．起こりうるパタンは

0 人から好かれる

1 人から好かれる

2 人から好かれる

3 人から好かれる

の 4 パタンだ．各男性は確率 p で君を好きになると仮定する．ではそれぞれの確率はどう計算できるか？　これは宿題だよ．次に会うまでに考えておいて」

こうして，今日の講義は終了した．

6.　具体例からはじめよ――練習曲 5

ある対象を知るためには，その外的特質を知る必要はないが，しかし，その内的特質のすべてを知る必要はある．

2.01231

6.1.　青葉の第一歩

次の日，青葉は花京院から与えられた課題を解こうと自分なりに考えてみた．しかし一向にうまくいかなかった．そして計算に失敗する度に，やっぱり私には向いていない，と考えたくなるのだった．だがしばらくすると，花京院の言葉が頭に浮かんだ．

『君が数学に向いていないわけじゃない』

青葉はピアノの練習を思い出した．はじめは譜面を見て，音符が鍵盤のどの音に対応しているかを確認する．次に右手のパートだけ弾く．次に左手のパートだけ弾く．両手を一緒に弾く．途中でつまったら，少し戻って，スピードを落としてゆっくりと繰り返す．

ピアノを練習するように，数学も練習すればいいのかな……．

授業の開始時間前に研究室に立ち寄ると，部屋の奥に花京院がいるのが見えた．パソコンでなにか作業をしているようだ．青葉が例の問題について質問しようと歩み寄ると，一人の女子学生がさらに奥に居ることに気づいた．モニタの陰に隠れていた女子学生は，見かけない顔だった．

女子学生と花京院は，二人で何かを話をしている．青葉の位置から，その内容は聞き取れない．青葉は二人の会話が終わるまで，メールソフトを立ち上げて，受信トレイにたまった未読メールをチェックして時間をつぶした．

青葉はメールへの返信を入力しながら，モニタのあいだから気づかれないように，そおっと見慣れぬ女子学生の様子を観察した．長い黒髪で耳にはシルバーのピアスが鈍く光っている．黒いミニスカートから長い脚がのび，その先はヒールの高いパンプスをはいている．

（うわー，なんか大人っぽいひとだなー．ちょっと怖い．……うーん，でもよく見ると綺麗な人だな……それにすごくスタイルもいい……こんな人，文学部にいたっけ？）

青葉は，その学生に見覚えがなかった．

やがて女子学生は部屋から出て行った．すれ違いざま青葉と目が合うと女子学生は礼儀正しく会釈した．青葉も応えるように会釈した．

（あれ，なんだろこの焦げ臭い匂い．……煙草？）

花京院は青葉に気づくと，やあと手を上げた．

青葉は，あの見慣れない女子学生が誰なのかを知りたかったが，花京院が何も言わなかったので，結局聞けずじまいだった．いずれにせよ，花京院があのような美人と知り合いであることは，青葉にとって意外だった．

やがて授業開始時刻になると，青葉は講義棟へと向かった．授業のあいだ，青葉の頭には，確率の問題と謎の美人の顔が交互に浮かんでは，ぐるぐると回った．おかげで授業内容はさっぱり頭の中に入ってこなかった．

授業が終わると，青葉は研究室ではなく，図書館の自習室へと向かった．

あの女の人，誰だったのかな……．すごく綺麗だった．

もしかして，花京院君の彼女かな……．

いやいや．ない，ないって．あの理屈っぽい変人に彼女なんて，いるわけないよ．

いや，でも意外と……．

ダメだ，ダメだ．こんなこと考えるために，わざわざ自習室に来たわけじゃない……集中して問題を解くためにここに来たんだった．

$$

さて，いま仮定していることは，

1. 3 人と出会うこと．
2. 3 人のそれぞれが確率 p で自分を好きになること

そして問題は，その結果 0，1，2，3 人から好かれる確率を知ること

ふむ．どういうパタンがあるのか表に書いてみるかな．

自分を好きなる人の数	シャア	ガルマ	アムロ
0 人	×	×	×
	○	×	×
1 人	×	○	×
	×	×	○
	○	○	×
2 人	○	×	○

	×	○	○
3 人	○	○	○

うーん，全部で 8 パタンか．0 人や 3 人になるパタンは 1 つだけど，1 人と 2 人になるパタンは 3 種類あるのか……

うーん，ここからどうするのかな．

そういえば……

確率変数で表すっていってたな．○と×を確率変数の値で書き換えてみるか……

自分を好きなる人の数	シャア X_1	ガルマ X_2	アムロ X_3
0 人	0	0	0
	1	0	0
1 人	0	1	0
	0	0	1
	1	1	0
2 人	1	0	1
	0	1	1
3 人	1	1	1

表をながめていると，青葉はそこに，ある規則が成立していることに気づいた．

そうか……，自分を好きになる人数って，いつも $X_1 + X_2 + X_3$ になってるんだ．

まあ，でもよく考えてみれば当たり前か．

確率変数の定義がそもそも，好きになったら 1，好きにならなかったら 0 っていう規則だもんね．足すと好きになった人の総数になるのは当たり前か……

うーん，ここから確率をどうやって計算するんだろう．

とりあえず，分かったことをまとめておこう．

$X_1 + X_2 + X_3$ は自分を好きになる男性の人数を与えているから，これを一つの記号でまとめて書くと

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

だから，結局知りたいのは，この X が 0 になったり 1 になったりする確率．

つまり

$$
\begin{aligned}
P(X = 0) &= ?\\
P(X = 1) &= ?\\
P(X = 2) &= ?\\
P(X = 3) &= ?
\end{aligned}
$$

ということ.

うーん，どうやって計算するのかな……

$$

青葉はメモを持って花京院のもとを訪ねた.

「例の確率は計算できた？」花京院は涼しい顔で聞いた.

青葉は試行錯誤した結果を記したメモを見せた.

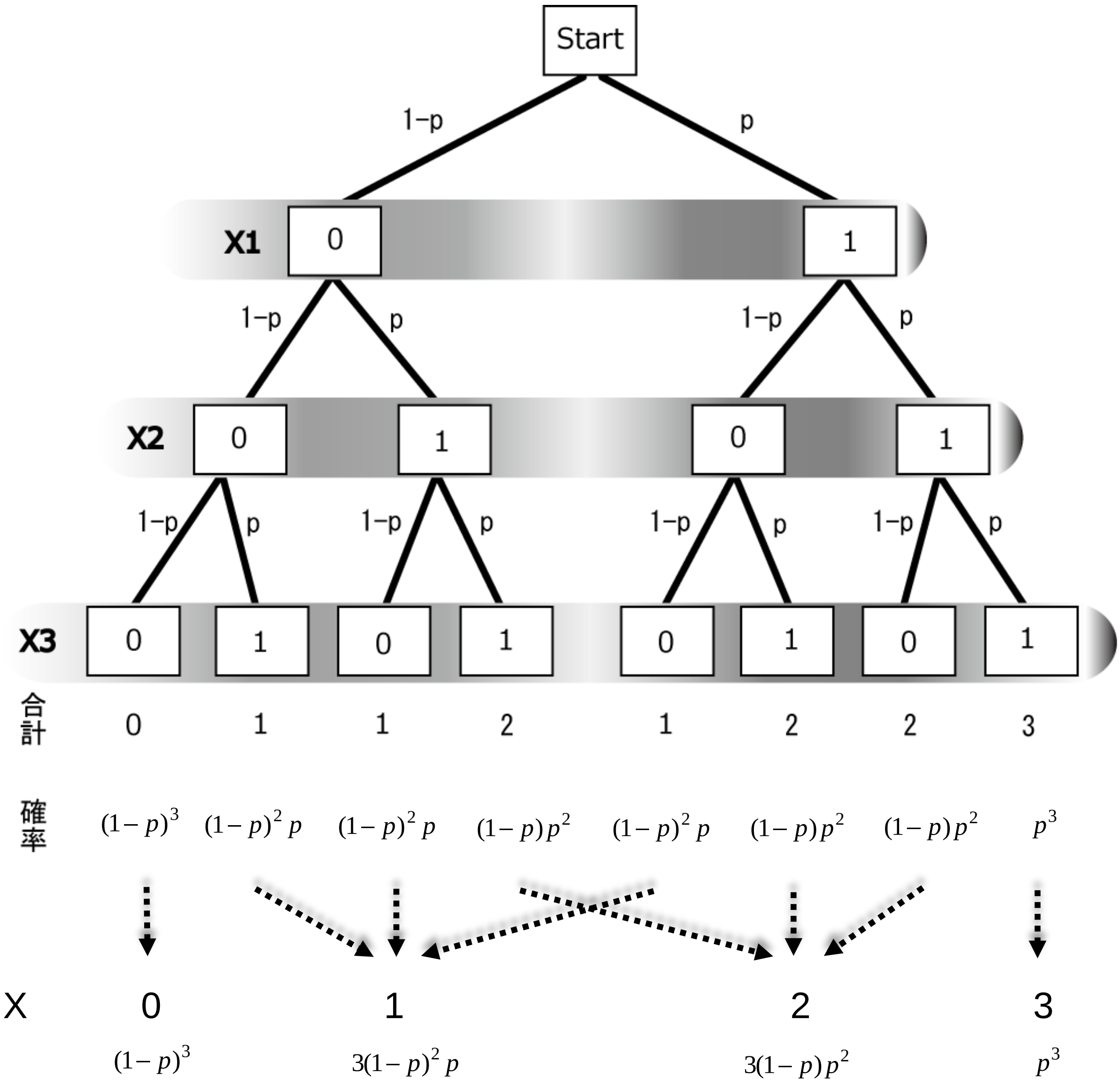
「うん．これはかなりいいよ．特に確率変数 X_1, X_2, X_3 を足して，一つの確率変数 X としてまとめるところなんて，すばらしいアイデアだよ」

「そう？」青葉は少し嬉しくなった.

6.2. 確率変数の合成

「君のアイデアに基づいて，複数の確率変数を合成して，1 つの確率変数をつくるってことが，なにを意味するのかを考えよう．作業をイメージしやすいように，図で表すよ」

ここに描いた図は，確率モデルの樹形図，って呼ばれるものだ．確率モデルの表す世界を表現するのに，とても便利なんだよ．□の中は実現する結果を表している．□をつなぐ線は，次に生じる結果の分岐を表しているよ．そして線の横に書かれた数字が，その線を通って次の状態が実現する確率だ．



X_1, X_2, X_3はそれぞれ《0》か《1》の値をとるから，2 通りに分岐していく．分岐する確率は常に《$1-p$》と《p》だよ．『合計』の行は$X_1+X_2+X_3$の実現値を表している．ここで注目して欲しいのは，合計 0 や 3 は 1 パタンしかないけど，合計 1 や 2 はそれぞれ 3 パタンずつあるってところだよ．

『確率』の行には，その位置に到達する確率が書いてある．例えば一番左端の$(1-p)^3$は，

$$《X_1 = 0》\to《X_2 = 0》\to《X_3 = 0》$$

という経路を辿って合計が 0 になる確率が$(1-p)^3$であることを意味している． どうして$(1-p)^3$かって言うと，$《X_1 = 0》\to《X_2 = 0》\to《X_3 = 0》$という経路を辿る確率をかけると

$$(1-p)\times(1-p)\times(1-p)$$

だからだ.

左から 2 番目の$(1-p)^2 p$は，

$$《X_1 = 0》\to《X_2 = 0》\to《X_3 = 1》$$

という経路をたどって合計が 1 になる確率が$(1-p)^2 p$であることを意味している.

ある経路をたどる確率を掛け合わせている理由だけど，これは《確率変数が独立である》ことを仮定しているからだよ．独立の意味については，あとで説明しよう.

さて$X = X_1 + X_2 + X_3$とおいて，Xが 1 になる確率は$X_1 + X_2 + X_3$の合計が 1 になるパタン全ての確率を足し合わせなければならない.

ここから先の計算を理解するためには，《条件付き確率》と《事象の独立》という概念を導入する必要がある.

$$

6.3. 条件付き確率と事象の独立

花京院は条件付き確率の定義をまず説明した.

$$

事象Aが起こったときの事象Bが起こる確率を記号$P(B|A)$で表し，《条件つき確率》と呼ぶ．条件つき確率の定義は

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

である．

$$

「うわあ，私これ苦手なんだあ．そもそも《条件付きの確率》がどうしてこういう定義になるのか，分からない」青葉が眉根をよせた．

「たしかに．定義を鵜呑みにするよりは，定義がどうしてそうなるのかを考えてから納得したほうがいい．そのために具体例を考えてみよう」

花京院は本棚から大きな本を一冊取り出して，机の上に立てた．すると机に向かい合わせに座った二人の間に置かれた本が衝立となり，お互いの手元が見えない状態になった．

「君の方からは見えないように，いまからサイコロを一回振るよ」花京院は立てた本の裏側でサイコロを振った．カラカラと音がしてサイコロが止まったことが分かった．青葉の側から衝立となった本がじゃまでサイコロの目は見えなかった．

「さて，いま振ったサイコロの目が《2》である確率はいくらだと思う？」

花京院が聞いた．

「え？　それ普通のサイコロだよね．だったら 1/6 じゃないの？」

「うん．出た目についてなんの情報も与えられてなければ，1/6 と考えるのが普通だね．ではヒントを追加する．今僕が振ったサイコロの目は偶数だったよ．さて，このサイコロが《2》である確率はいくつ？」

「偶数かあ･･･，ってことは $\{2,4,6\}$ のどれかが出ているんだよね．$\{2,4,6\}$ の中から 2 が出るってことは･･････3 つある可能性の中の 1 つだから，1/3 じゃないかな」

「そうだよ．条件のない場合と条件のある場合を比較すると，分かりやすいよ」

条件付きでない場合（通常の場合）

$\{1,2,3,4,5,6\}$ の中から 2 がでる確率

条件付きの場合（偶数が出るという条件がある場合）

$\{2,4,6\}$ の中から 2 がでる確率

「条件がない場合は 2 が出る確率が 1/6 だったけど,《偶数がでる》という条件付きの場合，2 が出る確率は 1/3 に変わったんだね．うん，これなら分かる」

「今考えたことを違う表現で表してみよう．サイコロ一回振りの試行で事象を

$$A=\{2,4,6\},B=\{2\}$$

とおく．条件つき確率 $P(B|A)$ は偶数が出たときの，2 が出る確率はいくらか？　という問

題として考える．条件つき確率の定義にしたがって計算してみるよ」花京院は計算用紙に一つずつ式を書いて確認した．

$$

まず偶数が出る確率 $P(A)$ は

$$P(A)=P(\{2,4,6\})=\frac{1}{2}$$

だよ．つぎに『偶数がでる事象』と『2 がでる事象』の共通集合を考えると

$$A\bigcap B=\{2,4,6\}\bigcap\{2\}=\{2\}$$

だから『偶数がでる，かつ，2 がでる事象』の確率は

$$P(A\bigcap B)=P(\{2\})=\frac{1}{6}$$

だ．ここから『偶数がでるという条件で 2 が出る』確率は，条件つき確率の定義から

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(A\bigcap B)}{P(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}$$

となる．

$$

「あ，さっき考えた答えと一致した」青葉は思わず声を上げた．

「条件がない場合 2 が出る確率は 1/6 だけど，偶数が出るという条件下では，2 の出る確率は 1/3 に増加している．言い換えると，《偶数が出る》という事象は《2 が出る》事象に影響を与えている」

$$P(B\,|\,A)=\frac{1}{3}\neq\frac{1}{6}=P(B)$$

$$P(\{2\}\,|\,\{2,4,6\})\neq P(\{2\})$$

「ある事象が他の事象に影響を与えない場合ってあるのかな？」青葉は聞いた．

「それが《好かれる確率》を考える上で，重要だ．例えば

シャアが君を好きになる事象 $\{X_1=1\}$

ガルマが君を好きになる事象 $\{X_2=1\}$

このふたつのあいだに関連はあるだろうか？」

「うーん，関連ないんじゃないかな．ガルマは婚約者のイセリナのことを好きみたいだけど，イセリナはシャアのタイプじゃなさそうだし．二人の好みは全然違うんじゃないかな」

「ということは」花京院は式を書きながら説明した．

$$

ガルマが君を好きになった（$\{X_2 = 1\}$）という条件のもとで，

シャアが君を好きになる事象（$\{X_1 = 1\}$）の確率，つまり $P(\{X_1 = 1\} \mid \{X_2 = 1\})$

は，単に

シャアが君を好きになる事象 $\{X_1 = 1\}$ の確率，つまり $P(\{X_1 = 1\})$

と変わらないと考えられる．このことを，まとめて書くとこうなる．

$$P(\{X_1 = 1\} \mid \{X_2 = 1\}) = \frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\})}{P(\{X_2 = 1\})} = P(\{X_1 = 1\})$$

この意味は

P(シャアから好かれる ｜ ガルマから好かれる)＝P(シャアから好かれる)

だよ．

さて，この式が成立するということは逆算すると

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1\})P(\{X_2 = 1\})$$

でなければならない．

$$\frac{P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\})}{P(\{X_2 = 1\})} = \frac{P(\{X_1 = 1\}) \times \cancel{P(\{X_2 = 1\})}}{\cancel{P(\{X_2 = 1\})}} = P(\{X_1 = 1\})$$

だからね．つまり《ガルマが君を好きになること》と，《シャアが君を好きになること》が独立である場合には，確率にかんして

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = P(\{X_1 = 1\})P(\{X_2 = 1\})$$

が成立する．もっと一般的に定義すると，こうだ．

定義（事象の独立）．事象 A の成立が事象 B の成立に影響をおよぼさないとき，条件付き確率に関して

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

が成立する．このとき，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成立する．つまり A と B の共通集合の確率を，それぞれの確率の積であらわすことができ

る．このとき《B は A から独立である》という．B が A から独立ならば，必ず A は B から独立となるため，単に《A と B は独立である》ともいう．

さて，ここから先，確率変数の独立っていう概念を使うから，導入しておこう．意味するところは事象の独立と似ているよ．

定義（確率変数の独立）．確率変数 X_1 と X_2 が独立であるとは，X_1 の任意の実現値 x_1 と X_2 の任意の実現値 x_2 に関して

$$P(\{\omega \mid X_1(\omega)=x_1\} \cap \{\omega \mid X_2(\omega)=x_2\}) = P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)$$

が成立することである．

　いま，3 つの確率変数について考えているから，その独立も定義しておこう．基本的には 2 つの場合と同じだよ．

定義（三つの確率変数の独立）．確率変数 X_1，X_2，X_3 が独立であるとは，X_1, X_2, X_3 の任意の実現値 x_1，x_2, x_3 に関して

$$P(\{\omega \mid X_1(\omega)=x_1\} \cap \{\omega \mid X_2(\omega)=x_2\} \cap \{\omega \mid X_3(\omega)=x_3\}) = P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)P(X_3=x_3)$$

が成立することである．

$$

　「うーん，ちょっと難しいけど，事象 A と B が独立なときに，A と B が同時に起こる確率を求めるには，それぞれが生じる確率 $P(A)$ と確率 $P(B)$ をかけあわせればいいってことだね．そういえば，高校生の頃に聞いたことがあったような……．あ，この独立っていう考え方を使えば，$P(X=0)$ や $P(X=1)$ が計算できるかも」

　「やってごらん」

6.4.　互いに排反

　青葉は計算を再開した．

$$

まず，誰からも好かれない確率を計算してみるよ．これはつまり《0 人から好かれる確率》だね．記号で書くと

$$
\begin{aligned}
&P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\})\\
&=P(X_1=0)\times P(X_2=0)\times P(X_3=0)\\
&=(1-p)(1-p)(1-p)=(1-p)^3
\end{aligned}
$$

だね．

次は 1 人から好かれる場合．パタンとして

$\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\}$　（シャアだけに好かれる）

$\{X_1=0\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_3=0\}$　（ガルマだけに好かれる）

$\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=1\}$　（アムロだけに好かれる）

の三つがある．

例えばシャアだけに好かれる確率は

$$
\begin{aligned}
&P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\{X_3=0\})\\
&\quad=P(X_1=1)\times P(X_2=0)\times P(X_3=0)\\
&\quad=p\times(1-p)\times(1-p)=p(1-p)^2
\end{aligned}
$$

だね．ほかのパタンも同じだから

ってことは分かる．うーん，でもこれをまとめて《(誰でもいいから) 1 人から好かれる確率》を計算するには，どうしたらいいのかな……．

$$

「ここでさらに,《互いに排反》という概念を導入すればその計算ができるよ」花京院は次のように説明した．

$$

二つの集合に共通の元がないことを

$$A\cap B=\varnothing$$

とかく．記号$\varnothing$は空集合を表している．$\varnothing=\{\ \}$，つまり要素がない集合だ．A,B を事象とみたとき，$A\cap B=\varnothing$ であるならば，A,B は互いに排反である，という．分かりやすくいうと，二つの事象が同時には起こらないとき，互いに排反であるという．互いに排反な事象に関して

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

が成立する．

サイコロを例に考えてみよう．1 回投げの試行の結果として《1》と《2》が同時に出ることはない．集合として見た場合，$\{1\}$ と $\{2\}$ の共通集合 $\{1\}\bigcap\{2\}$ の要素は

$$\{1\}\bigcap\{2\}=\varnothing$$

だから，事象 $\{1\}$ と事象 $\{2\}$ は《互いに排反》だ．

事象 $\{1\}$ あるいは事象 $\{2\}$ が生じる確率，つまり $P(\{1\}\bigcup\{2\})$ は

$$P(\{1\}\bigcup\{2\})=P(\{1\})+P(\{2\})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

である．3 事象の場合は，2 事象の場合に帰着させて考えればいい．例えば

$$A\bigcap B=\varnothing, B\bigcap C=\varnothing, A\bigcap C=\varnothing$$

という条件の下で確率

$$P(A\bigcup B\bigcup C)$$

を計算してみる．まず，$A\bigcup B$ と C が互いに排反かどうか調べるために，まず

$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$$

が成立することを説明しておくよ．

$$x\in(A\bigcup B)\bigcap C \Leftrightarrow (x\in A \text{ または } x\in B) \text{ かつ}(x\in C)$$

$$x\in(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C) \Leftrightarrow (x\in A \text{ かつ } x\in C) \text{ または}(x\in B \text{ かつ } x\in C)$$

である．

それぞれの命題が成立するかどうかの組み合わせを表で確認してみよう．1 が成立で 0 が不成立を表しているよ．

A	B	C	A または B	(A または B)かつ C
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

A	B	C	A かつ C	B かつ C	(A かつ C)または(B かつ C)
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

この表を《真理表》というんだ．左三列は上の表も下の表も同じだね．それから一番右の列を見比べてみると，やっぱり上の表と下の表では 1 と 0 の並びが全部同じになっている．これは一番右の複合命題「(A または B)かつ C」と「(A かつ C)または(B かつ C)」が論理的に等しいことを意味しているんだ．だから

$$(x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ}(x \in C)$$

と

$$(x \in A \text{ かつ } x \in C) \text{ または}(x \in B \text{ かつ } x \in C)$$

は論理的に同値であることが分かる．よって

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C)$$

が成立することが分かる．ちなみにこの関係は分配則と呼ばれているよ．

さて分配則を使えば

$$(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C) = \varnothing \bigcup \varnothing = \varnothing$$

より，$(A \bigcup B) \bigcap C = \varnothing$ であることが分かる．つまり $A \bigcup B$ は C が互いに排反だ．よって

$$P((A \bigcup B) \bigcup C) = P(A \bigcup B) + P(C) .$$

そして，事象 A と事象 B も互いに排反だから

$$P(A \bigcup B) + P(C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

となる．

$$

青葉は花京院が計算用紙に書いた内容を確認した．分配則の証明は少し難しかったが，時間をかけてゆっくり読むことで，なんとか理解できた．

「えーとつまり，二つの事象 A, B が互いに排反なとき，和集合の確率は

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B)$$

になる．うん，これなら簡単だ．いま教えてもらった《相互に排反》という概念を使えば《1 人から好かれる》が計算できるんだね．よし，じゃあやってみる」

青葉は新しい計算用紙を取り出した．

$$

《1 人から好かれる》事象は次の三つのパタンに分けることができる．これはさっき確認したよ．

《シャアだけに好かれる》という事象を A=$\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 0\}$
《ガルマだけに好かれる》という事象を B=$\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 0\}$
《アムロだけに好かれる》という事象を C=$\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 1\}$

とおく．

すると《1 人から好かれる》という事象は $A \bigcup B \bigcup C$ で表すことができるよね．

$X = X_1 + X_2 + X_3$ という記号を使えば《1 人から好かれる》確率は

$$P(X = 1)$$

と書くことができるよ．A, B, C の三つは同時には起こらないから，互いに排反だよ．だから

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(A \bigcup B \bigcup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &= p(1-p)^2 + p(1-p)^2 + p(1-p)^2 \\ &= 3p(1-p)^2 \end{aligned}$$

となる．

次に《二人から好かれる》場合. さっきと同じように 3 パタンに分けてそれぞれ考えると･･･

《シャアとガルマに好かれる》という事象を A=$\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 0\}$
《ガルマとアムロに好かれる》という事象を B=$\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 1\}$
《シャアとアムロに好かれる》という事象を C=$\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 1\}$

だね.《2 人から好かれる》という事象は $A \bigcup B \bigcup C$ で表すことができて，この三つは同時には起こらないから，

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(A \cup B \cup C) \\
&= P(A)+P(B)+P(C) \\
&= p^2(1-p)+p^2(1-p)+p^2(1-p) \\
&= 3p^2(1-p)
\end{aligned}
$$

かな．

最後に《三人に好かれる》パタンは一つしかないから，こうだね．

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P(\{X_1=1\} \cap \{X_2=1\} \cap \{X_3=1\}) \\
&= P(X_1=1)P(X_2=1)P(X_3=1) \\
&= p \times p \times p = p^3
\end{aligned}
$$

よし，できたー．結果をまとめておくよ．

表：三人の試行の例．各男性が確率 p で好きになる場合

事象	0 人に好かれる	1 人に好かれる	2 人に好かれる	3 人に好かれる
確率変数の値	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
確率	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

ここまでの計算で使った仮定を確認しておくね．

1. 自分と出会う男性は 3 人いる．
2. 各男性は確率 p で自分を好きになる． 確率 $1-p$ で好きにならない．
3. 各男性が自分を好きなるかどうかは互いに独立である

$$

ふうーと，青葉は大きな息をついた．

青葉は花京院に助けられながら，計算してきたことで，これまでの自分のやりかたのどこがまずいのかがよく分かった．

「私，ちょっと分かったかも……」

「なにが分かったの？」

「えっと，自分が《分からなかった理由》が分かったかも……，n とか p っていう記号を使った一般的な式の意味が分からなかったのは，その n や p に，3 とか 1/3 みたいな具体的な数値を入れて確かめなかったからなんだ……要するに，《難しいから分からない》んじ

ゃないんだ．ちょっとした手間を，省いていたから分からなかっただけなんだ……．ようするに私，サボってただけなんだ」

青葉は独り言のようにつぶやいた．花京院は青葉の《発見》の意味を理解するとうれしそうに微笑んだ．それはとても簡単なことだったが，青葉にとっては，大きな気づきだった．

7.　抽象化への第一歩――練習曲 6

これらの組み合わせに対応して，*n* 個の要素命題には，同じ数だけの真の，そして偽の,可能性がある

4.28

7.1.　スリルとロマンス

研究室――．5 限目の授業の終了時刻が過ぎると，青葉と花京院以外の学生は帰ってしまった．窓の外は暗い．煎りたてのコーヒーの香りが漂っている．

「私ね，大学生活にきっとスリルとロマンスを期待してたんだと思う」青葉は熱いコーヒーにふうっと息をふきかけた．表面に小さな波紋が生じ，湯気が立ち上がる．

「スリルとロマンス？」花京院は，眉間にしわをよせた．

「入学したあとすぐに，すごくかっこよくて，若い独身教授と出会うの」

「ふうん」

「それで，私とその独身教授が殺人事件に巻き込まれるわけ」

「ほおお」

「二人で協力して密室殺人事件を解決して，やがて師弟関係を超えた禁断の愛を育む，みたいな‥‥‥．そういうのに憧れてたんだけど‥‥‥」青葉は，ほうっとため息をついた．

「確かにそういう教員はこの大学に見当たらない．そもそも，どこの大学にもいないんじゃないかな‥‥‥」花京院は冷静に言った．さらに彼は続けた．

「平均的な大学生が殺人事件に関わることは無いし，その事件が密室事件である可能性はさらに低い．また，ハンサムな教授ってことは，それなりにルックスが良くて，高収入で安定した職業についているはずだから，結婚に有利な条件が十分にそろっている．ということはそもそも独身である可能性が極めて低い．それから今どきの大学教授はすごく忙しいってことも知っておくべきだね．研究だの教育だの大学運営だの学会運営だのいろいろ走り回らなくてはいけないから，殺人事件の謎なんかを解いている暇なんてないだろう．面倒なことには首をつっこまずに全て警察に任せると思うよ．それから教員と現役学生の恋愛なんて，大学のコンプライアンスに反するから，まともな倫理観を持った教員なら自分の学生に手は出さないね．つまり神杉さんが都合よく大学で殺人事件に巻き込まれ，推理癖のあるハンサムな独身教授とロマンチックな関係に陥る確率は，限りなく 0 に近い」

青葉は苦笑しながら彼の意見にうなずいた．

（そうだよね‥‥‥，そんな都合よくいかないかあ‥‥‥．それにしても，人の空想をよ

くもこれだけたくさん理由をつけて否定できるもんだね‥‥‥．ある意味で感心するよ）

「まあ密室殺人事件の話は極端な例だけど，とにかく何かドキドキするような，熱中できることと出会いたいってことなの．花京院君は，そういうこと考えたことないの？」

「うん，あんまりないな．まあ，ロマンスはさておき，スリルを感じる経験ならときどきあるよ」

「え？　どんな体験？　教えて教えて！」青葉は目を輝かせた．彼女の目から見て，花京院はその種の体験とは無縁の人間に見えたからだ．花京院は机の上の計算用紙を指でトントンと叩いた．紙の上にはさきほど書き連ねた数式が並んでいた．

「え？　数式？」

「うん，たまにだけど，数学をやっていると，すごいスリルを感じることがある」

花京院は平然とした様子で言った．青葉はがっかりした．

（そういうことじゃないんだけどな‥‥‥．そりゃあたしかに，なるほどって思うことは時々あるけれど，数学なんてスリルとかロマンスから一番遠いものじゃない‥‥．なに言っているのかな，この人は‥‥‥）

7.2.　二項定理

「例えば，一見関連しそうにないものが，関連すると分かったとき，少しドキっとする．昨日，君が計算した単純例で考えてみよう」

花京院は青葉が完成させた表を取り出した．

表：三人の試行の例．各男性が確率 p で好きになる場合

事象	0 人に好かれる	1 人に好かれる	2 人に好かれる	3 人に好かれる
確率変数の値	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$
確率	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

「君の計算が正しければ，全ての確率の和は 1 になっているはずだ．

$$P(\Omega)=1$$

だからね．それを少し変わった計算方法で確かめてみよう」

花京院は全ての事象の確率の和が 1 になっているかどうかを, 次のような方法で確かめた.

$$

まず求めるべき確率の和（全事象の確率）は

$$p^3+3p^2(1-p)+3p(1-p)^2+(1-p)^3$$

という式になっている．この和が 1 になっているかどうかを確かめたい．そこで，ちょっと唐突に感じるかもしれないけれど，$(p+(1-p))^3$ という式の展開を考える．$1-p$ のままだと計算しにくいので，$1-p=q$ とおけば

$$\begin{aligned}(p+(1-p))^3 &= (p+q)^3=(p+q)(p+q)^2\\ &= (p+q)(p^2+2pq+q^2)\\ &= p^3+2p^2q+pq^2+qp^2+2pq^2+q^3\\ &= p^3+3p^2q+3pq^2+q^3\end{aligned}$$

ここで$1-p=q$ を使って，p だけの表現に書き換えると

$$p^3+3p^2(1-p)+3p(1-p)^2+(1-p)^3$$

となる．つまり，求めるべき確率の和（全事象の確率）と$(p+(1-p))^3$ を展開した式は一致している．さて，

$$(p+(1-p))^3=(1)^3=1$$

だから実は$(p+(1-p))^3=1$ という関係が成立する．左辺を展開すると

$$p^3+3p^2(1-p)+3p(1-p)^2+(1-p)^3=1$$

とも書ける．つまり事象の確率の和（全事象の確率）は確かに 1 になっている．

$$

青葉は最初，花京院が何を説明しているのか分からなかった．しかしやがて，その意味を理解するとはっとした．

「うーん，不思議だなあ．$(p+q)^3$ の展開式の各項が《0〜3 人から好かれる確率》に対応しているなんて，よく分かったね」青葉は花京院が示した展開式に感心した．

「これは，二項定理という有名な定理の応用なんだ．なぜこうなるのかは，別の機会に解説してあげるよ」

7.3.　十分条件と必要条件

「あ，そうだ．ついでに，ちょっと注意しなくちゃいけないことがある．全ての確率を足して 1 になったからといって，計算が正しいとは限らないんだ」

「え？　1 になれば正しいでしょ？　確率なんだから」青葉は目をまるくした.

「そうとは限らないよ」花京院は次のように十分条件と必要条件の違いを解説した

$$

これはとても大切なことだ.

「モデル X は正しい確率モデルである」$\Rightarrow$「モデル X の全事象の確率は 1 である」

この関係は正しい．でもその逆

「モデル X の全事象の確率は 1 である」$\Rightarrow$「モデル X は正しい確率モデルである」

は常に正しいとは限らない．だから「全事象の確率が 1 である」ことはそのモデルが正しいことの必要条件でしかない.

ただし，最初の命題の対偶である

「モデル X の全事象の確率が 1 でない」$\Rightarrow$「モデル X は正しい確率モデルではない」

はやはり正しい．だから全事象の確率を計算することで，間違った計算をしていたり，モデルの仮定がどこかで間違っている場合には，誤りを発見できることがある．ただし常に発見できるとは限らない.

例えば正しい確率分布は

0 人に好かれる確率	1 人に好かれる確率	2 人に好かれる確率	3 人に好かれる確率
$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

にも関わらず，たまたま計算で得た結果が

0 人に好かれる確率	1 人に好かれる確率	2 人に好かれる確率	3 人に好かれる確率
$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{27}$

だとする．このとき，間違った表に基づいて全部の確率を足しても 1 になる．つまり，間違いが二カ所以上あって，

値を実際よりも大きく計算してしまった箇所と，

値を実際よりも小さく計算してしまった箇所

のプラスマイナスが釣り合うと，ちょうど全事象が 1 になることがある．だから全事象の確率が 1 になるからと言って，安心はできないんだ．

$$

そういうこともあるのか，と青葉は思った．十分条件と必要条件の違いなど，これまでに考えたこともなかった．

7.4. 余事象

「では，《1 人以上に好かれる確率》を計算してみよう」

「やってみる」青葉は計算をはじめた．

$$

1 人以上から好かれるっていう事象は確率変数を使って書くと

$$X \geq 1$$

ってことだね．だから

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p) + p^3$$

む．ちょっと待ってよ……，

三つの項を足さなくても，全体の和が 1 になっていることを使えば，もっと簡単に計算できるんじゃないかな．

例えば，こう．

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (1-p)^3 \end{aligned}$$

ほら，簡単にできた．

$$

「うん，いいところに気づいた．全体の構造を把握して計算を簡略化するのはとても大切なことだ．面倒なだけの計算をしても疲れるだけだからね」

花京院は余事象の考え方を導入した．

$$

サイコロ振りで偶数が出る事象を $A=\{2,4,6\}$ とおくと，奇数が出る事象 $\{1,3,5\}$ は事象 A 以外の事象となっている．標本空間 Ω のなかで，事象 A 以外のことがおこる事象を余事象といい，記号 A^c であらわすんだ．ちなみに集合論では余事象のことを補集合というけど，同じ意味だよ．たとえばサイコロ振りの標本空間 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ について

$$A=\{2,4,6\}$$
$$A^c=\{1,3,5\}$$

だ．事象と余事象のあいだには常に

$$A\bigcap A^c=\varnothing,\ \ A\bigcup A^c=\Omega$$

という関係が成立する．

この関係に注目すると

$$\begin{aligned} P(A\bigcup A^c)=P(\Omega)=1 \\ P(A\bigcup A^c)=1 \\ P(A)+P(A^c)=1 \\ P(A^c)=1-P(A) \end{aligned}$$

であることがわかる．

《1 人以上から好かれる》という事象を A とおくと，その余事象 A^c は《誰からも好かれない》という事象だ．だから 3 人と出会って誰からも好かれない確率は

$$P(A^c)=(1-p)^3$$
$$\begin{aligned} P(A)&=1-P(A^c) \\ &=1-(1-p)^3 \end{aligned}$$

となる．

$$

7.5. 確率の基本仮定

花京院は，これまでに話してきたことに関して，何か疑問はないか青葉に確認した．彼女は，算術的確率や統計的確率について教わったことを頭の中で思い返した．

ここ数日でずいぶんといろんな考え方を覚えた．

「そうだなあ，だいぶ分かってきたと思うんだけど‥‥‥まだピンとこないところがあるかなあ」

「どういうところ？」

「サイコロを 1 個振るとき $\{1\}$ がおこるとか，$\{5\}$ がおこるっていうのは，よく分かるの」

「うん」

「結果が一個しかない場合はいいの．でも事象っていうのは $A=\{1,2,3\}$ みたいな数字の集まりの確率を考えるわけでしょ．サイコロを一個振るときに，$A=\{1,2,3\}$ が起こるってどういう意味なのかな？」

「排反事象に分ければいいんだよ」

「あ，そうか」青葉は新しい計算用紙をとりだした．

$$

事象 $\{1,2,3\}$ は

$$\{1,2,3\}=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$$

と書けるから

$$\begin{aligned}P(\{1,2,3\}) &= P(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\})\\ &= P(\{1\})+P(\{2\})+P(\{3\})\\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

だね．そうだ，そうだ．

これまでに覚えたことの組み合わせでちゃんと解けるんだ．

うーん，これは便利だね．

$$

「最後に確率の基本仮定をまとめておこう. コルモゴロフ流の公理を簡略化したものだよ」花京院は仮定を三つにまとめた．

確率の基本性質

1. 任意の事象Aに対して$0 \le P(A) \le 1$
2. 全事象Ωの確率は$P(\Omega)=1$
3. 事象A,Bが互いに排反ならば$P(A \bigcup B)=P(A)+P(B)$

「確率はこの三つの基本仮定は必ず守るように定義しなくてはならない．もっとも基本的な仮定なので確率論の公理ともいう」

「守らない場合は，どうなるの？　私って，やるなって言われると無性にやりたくなるタイプなんだよね」

「そういう場合は，もはや確率とはみなせない．たとえば全事象が 1 を超えるようなものや，ある事象の確率がマイナスであるような例はダメだ」

表．確率の定義に必要な概念のまとめ

概念	サイコロを一回振る試行の具体例
標本空間Ω	$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$
事象	$A=\{1,2,3\} \subset \Omega$
根源事象	$\{1\} \subset \Omega$，$\{5\} \subset \Omega$
和集合$A \bigcup B$	$A=\{1,3\}, B=\{2,4\}, A \bigcup B=\{1,2,3,4\}$
共通集合$A \bigcap B$	$A=\{1,3,5\}, B=\{3,4,5\}, A \bigcap B=\{3,5\}$
A,Bが互いに排反	$A=\{1,3\}, B=\{2,4\}, A \bigcap B=\emptyset$
条件付き確率	Aが起きた条件のもとでBが起きる確率$P(B \mid A)=\dfrac{P(A \bigcap B)}{P(A)}$
事象の独立	AとBは独立である$\Leftrightarrow P(A \bigcap B)=P(A)P(B)$

「今日はこのへんでやめておこう」花京院が言った．

「そうね．結構時間もかかったしね」青葉も少し疲れていた

「続きはまた今度にしよう．ゆっくりやればいいよ．授業じゃないんだから時間はいくらでもある」

「うん」

彼女が今日，花京院から説明してもらったことは，全て一度は習ったはずのものだった．その多くを彼女は忘れていた．しかし今日，花京院の話によって，それらの記憶はよみがえ

った．そして単によみがえっただけでなく，その知識は彼女に以前と異なる印象を与えていた．

「花京院君って，私とはずいぶん数学の考えかたが違うんだね」

どこが違うのかと花京院は聞いた．

「うーん，私の見方は結構，教科書に書いてあることとか，先生に言われたことに忠実なんだけど，花京院君の捉え方は，それとは少し違うみたい」

そうかな，と花京院はつぶやき，少し考え込んだ．

「きっと高校生の頃に，いい先生と出会ったからだと思う」

「へえ，そうなんだ．どんな先生だったの？」

「先生は，教科書に書いてあることを鵜呑みにするなって教えてくれたんだ．だから僕は自分が納得するまで，全ての公式や命題を自分で計算した」

青葉はその様子を想像して，自分なら途中で投げ出すだろうと思った．

「ずいぶん時間がかかりそうだね」

「そりゃあ，かかったよ．･･･だから数学のテストの得点はずっと悪かった．小学校から高校までの間ずっと，算数や数学のテストの得点が平均点にとどかなかったよ」

「へえ，意外」青葉は少し驚いた．花京院ならきっと満点ばかりをとっていたのだろうと思ったからだ．しかし花京院は，謙遜しているわけではなさそうだった．

その話を聞きながら，花京院が自分の過去について語ったのはこれで 2 度目だと，青葉はふと思った．いずれも数学に関することだったが，彼女は少し嬉しく感じた．それは彼が自分に心を開こうとしていることの証拠のように思えた．

「先生はテストの点なんて，どうでもいいって言ってくれた．君のやり方のほうが，本当は正しいんだって」

「ふうん，いい先生だったのね」と言って青葉は微笑んだ．

「そうだね．僕は幸福だった，あの頃は．じゃあ，続きは明日またやろう」花京院は少し寂しそうに笑った．青葉は，《あの頃は》という言葉にひっかかったが，彼の表情を見て，続きを聞くことを断念した．

8.　n 人のばあいの一般化——練習曲 7

数学の問題を解決するために，直感が必要であるかいなか．この問いに対しては、そこで必要な直感は，ほかならぬ言語によって提供されている，と答えねばならない．

6.233

8.1.　文学部の噂

花京院と青葉は研究室で，最近文学部の学生の間で囁かれている，ある噂について話していた．その噂とは文学部から社会科学系の学科が独立して新しい学部をつくり，残る人文学系の学科を文学部として再編するというものだった．

青葉と花京院が籍を置く数理行動科学研究室は，社会学研究室，心理学研究室，社会心理学研究室と共に社会科学系の学科に属している．一方で文学部には，哲学や国文学や歴史学を擁する人文学系の学科が存在し，現在，文学部の学生達はこの二つの学科に分かれて所属している．

「独立するついでに，PC 教室を広くして欲しいね」と花京院は言った．パソコンの台数が足りないことが彼にとって一番の不満だった．

「うーん，私は新しい学部を作るついでに，学食のメニューを増やして欲しいな．ほら，私は一人暮らしだからさ．帰りが遅くなるときは，学食で晩ご飯を食べるんだよね」

青葉にとって文学部の再編は，それほど関心のある話題ではなかった．

「さてと，それじゃあ前回の続きをはじめようか．今日考えたいのは，前回 3 人の場合で考えた《出会いのモデル》を n 人の場合について計算する，という問題だ」花京院は机の上に計算用紙を並べた．

Q: n 人の異性と出会い，各異性が確率 p で自分を独立に好きになる．このとき，自分が x 人の異性から好かれる確率はいくらか？

「えー．こんなの分かるわけないじゃん」青葉は即答した．

「そんなに簡単にあきらめちゃダメだよ」花京院は彼女を励ました．しかたなく青葉は頭の中で必死に考えた．

n 人の異性がいる…….

それぞれ独立に自分を確率 p で好きになる…….

x 人が自分を好きになる確率はいくらか……？

それぞれが好きになるかどうかは独立だから p の x 乗？

いくつかのキーワードが頭の中でぐるぐると回った．しかし青葉は，どういう手順で考えればいいのか思いつかなかった．問題の意味は分かる．そして仮定についても，多少納得していない点もあるが，おおよそ理解している．にもかかわらず，どういう風に考えればいいのか，その考え方が彼女にはまるっきり分からなかった．

「うーん．だめだあ…．考え方が分からない」青葉は諦めたようにつぶやいた．花京院は青葉が考える様子を，コーヒーを飲みながらじっと眺めていた．

「まず，必要な概念を二，三導入しよう」

8.2. n 個の確率変数の独立

「人数を n 人に一般化するためには，まず n 個の確率変数の独立ってことを定義しないといけない．そこで最初に，n 人それぞれが君を好きになるかどうかを，n 個の確率変数を使って表現してみよう」

\$\$

ある 1 人が持つ標本空間を

$$\Omega = \{\text{好きになる，好きにならない}\}$$

とおく．そして《好きになる》という事象が生じる確率を p とおく．結果は二通りかしかないから，《好きになる》という事象が生じない確率は $1-p$ だ．

つまり

$$P(\{\text{好きなる}\}) = p$$

$$P(\{\text{好きにならない}\}) = 1-p$$

だ．こんな風に，結果が二通りしかなくて，どちらか一方が生じる試行をベルヌーイ試行という．

定義（ベルヌーイ試行）．標本空間を $\{A, A^C\} = \Omega$ とおく．すなわち結果が二通りしかない，と仮定する．注目する事象 A が生じる確率を p， A が生じない確率（言い換えれば A^C が生じる確率）が $1-p$ で定義された試行をベルヌーイ試行という．

さてベルヌーイ試行を実現値 0，1 に対応させる確率変数を考えてみよう．確率 p で 1，確率 $1-p$ で 0 になるような確率変数を X_1 と呼ぶことにしよう．

$$P(X_1(\{\text{好きなる}\})=1)=p$$
$$P(X_1(\{\text{好きにならない}\})=0)=1-p$$

事象を省略してすっきり書けば

$$P(X_1=1)=p$$
$$P(X_1=0)=1-p$$

だよ．要するに確率変数 X_1 は 1 番が君を好きになったかどうかを表していて，結果が 1 なら《好きになる》ことを，結果が 0 なら《好きにならない》ことを示しているんだ.

こういう確率変数をベルヌーイ確率変数という．

定義（ベルヌーイ確率変数）．ベルヌーイ試行に対応させて，確率 p で 1，確率 $1-p$ で 0 になるような確率変数 X_1 を定義する．

$$P(X_1(A)=1)=p,$$
$$P(X_1(A^C)=0)=1-p$$

$$

「うーん，定義は分かるんだけど，わざわざ確率変数に言い換えて，なんの得があるの？」
「確率変数の実現値を 0 と 1 にしておくと，人数をカウントするときに便利なんだよ．それから事象列の独立性を，より一般的に確率変数の独立性によって定義できる」

$$

$X_1, X_2, ..., X_n$ は全て同じ確率変数とおく． $X_k=1$ なら k 番の男性が君を《好きになる》ことを意味する． $X_k=0$ なら，その逆で《好きにならない》ってことだよ.

さて今考えている確率変数 X_k の実現値は 0 か 1 なんだけど，これを一般に x_k とおいて，実現値 x_k で任意の結果（つまり 0 か 1）を表すことにしよう．

定義（n 個の確率変数の独立）．確率変数の列 $X_1, X_2, ..., X_n$ が独立であるとは，任意の実現値の x_k について（$k=1,2,...,n$），

$$P(\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k = x_k\}) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$$

が成立することをいう．

$$

「うーん，最後の定義は難しいなあ．わたし，《任意の》っていうのが苦手なんだ」

「《任意の》という表現が難しいんだったら，《全ての》と置き換えるといいよ」

$$

例えば， X_1, X_2, X_3 の三つが独立である場合，任意の実現値に関して

$$P(\bigcap_{k=1}^{3}\{X_k = x_k\}) = \prod_{k=1}^{3} P(X_k = x_k)$$

が成立するってことは，全ての実現値の組み合わせについて

$$P(\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 0\}) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)$$
$$P(\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 0\}) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)$$
$$P(\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 0\}) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 0)$$
$$P(\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 1\}) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)$$
$$P(\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 0\}) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 0)$$
$$P(\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 1\}) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 1)$$
$$P(\{X_1 = 0\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 1\}) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1)$$
$$P(\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 1\} \bigcap \{X_3 = 1\}) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = 1)$$

が成立するってことと同じだよ．

ここから先の計算で特に重要なのは， n 個の場合でも

$$P(\{X_1 = x_1\} \bigcap \{X_2 = x_2\} \bigcap \cdots \bigcap \{X_n = x_n\}) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

が成立する，ってことだよ

$$

「そっかあ．例をみたら，イメージがつかめてきた」

「n を使った一般的な定義がよく分からないときは， $n = 3$ くらいで例を考えるといいよ」

8.3. $P(X=0)$

花京院はホワイトボードの前に立って話を続けた．

$$

それじゃあ n 人と出会って，誰からも好かれない確率を計算しよう．

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

でそれぞれ男性 1,2,…,n から好かれないという事象を表すことにする．確率変数で書けば

$$A_1 = \{X_1 = 0\}, A_2 = \{X_2 = 0\}, \ldots, A_n = \{X_n = 0\}$$

だよ．求める確率は

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

だ． n 人が好きになるかどうかは独立であるという仮定は， n 個の確率変数が独立であると言い換えることができる．

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= P(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}) \\ &= P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) \times \cdots \times P(X_n = 0) \\ &= \underbrace{(1-p)}_{\substack{1\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{2\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times \cdots \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{n\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

つまり，《誰からも好かれない確率》は $(1-p)^n$ だ．一段目から二段目に変形するときに，確率変数の独立性の定義を使ったよ．

$$

「計算のやり方は分かったけど，数字としてはピンとこないな． $(1-p)^n$ ってどれくらいの大きさなんだろう？」

「$n = 50$，p=0.05 という条件で計算してみるといい」

「えっと $n = 50$ で，$1 - p = 1 - 0.05 = 0.95$ だから 0.95 の 50 乗ね．うわわ，電卓使っても無理」

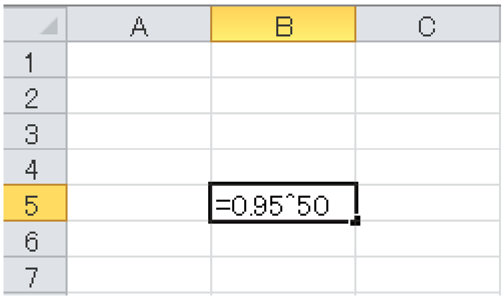
「コンピュータを使えばすぐにできる」花京院はパソコンで表計算ソフトを起動した．

青葉は『コンピュータ基礎演習』という授業で，表計算ソフトの使い方からプログラムの基礎まで習ったことを思い出した．コンパイラを使ってディスプレイに《Hello World!》と表示させるコードを書くために，悪戦苦闘したことをよく覚えている．紙に書いた方がよっぽど早いのに，なぜこんな面倒なことをするんだろう，としか思えなかった．

「あの一，わたし表計算ソフトの使い方を全く覚えてないんだけど……」青葉は申し訳

なさそうに言った．

「どこか適当なセルにこう打つんだよ」カタカタとキーボードを叩く音が響いた．



「^50　っていう書き方で 50 乗を表すのかあ．うわあー，超便利じゃん」

「この記号は帽子みたいな形だから《ハット》と呼ばれている」花京院が数式を入力すると，瞬時に，スプレッドシートの上に 0.076945 という数字が出力された．

「大体 8%くらいだね．50 人と出会っても，誰からも好かれない確率が 8%なのかあ．なんだか不安になってきた‥‥‥」

「余事象をつかって，逆に考えれば？」

「逆？　あ，そうか．8%の確率で《誰からも好かれない》って事は，92%の確率で《一人以上から好かれる》ってことと同じだったね．うん，ちょっと希望でてきた．‥‥‥それにしても，見方を変えると意味がまるで違ってみえるって，おもしろいね」

「論理的には同じ命題なのに，人間にとっての意味は異なる．確かに興味深い現象だ」

8.4.　コンビネーション

「次に必要なのは，コンビネーションの考え方だ．これは一度高校で習ったと思うんだけど」花京院はホワイトボードに数式を書き込むために椅子から立ち上がった．

「えー．ちょっと待って，疲れたから休憩しようよ」青葉は机の上に置かれたお菓子の箱に手を伸ばした．

研究室の机の上には，いつもお菓子の箱が置いてある．それらは教員が出張したときや，学生が帰省したり旅行に出かけた際のお土産である．

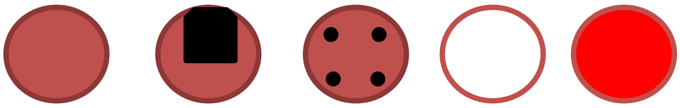
青葉は箱の中からせんべいの包みを二つ取り出し，そのうちの一枚を花京院に渡した．花京院は自分が受け取ったせんべいの包み紙をまじまじとみつめ，次に青葉が手にしたせんべいの包み紙をじっとみつめた．

青葉はすでに中身を取り出してせんべいをかじっている．

「あれ，もしかしてこっちの海苔付きのほうがよかった？」

花京院が手にしたせんべいは，海苔のついていない醤油せんべいだった．彼は箱をのぞきこみ，残りのせんべいの種類を確かめると，ホワイトボードに絵をかいた．

「この中にあったのは，醤油，海苔付き醤油，胡麻醤油，サラダ味，唐辛子の 5 枚だ」



図．せんべい

「せんべいを例にコンビネーションを説明しよう．いま，神杉さんが取り出したせんべいは，たまたま《海苔付き醤油》と《醤油》だった．二枚を取り出す組み合わせは他にもあるよね？」

「えーっと，そうね．唐辛子と胡麻，醤油とサラダ味とか，いっぱいあるよ」

「じゃあ，5 枚の中から 2 枚取り出す組み合わせは全部で何通りあるか分かる？」

「えー．そんなのわかんないよ」

「順番に考えていこう．まず 2 枚のせんべいを並べるパタンを考えてみよう．5 枚のせんべいに 1 から 5 の番号をつけて，1 と 2 を並べることを　1-2　と書くことにするよ」

花京院はホワイトボードに数字を書き並べた．

1-2,　1-3,　1-4,　1-5

2-1,　2-3,　2-4,　2-5

3-1,　3-2,　3-4,　3-5

4-1,　4-2,　4-3,　4-5

5-1,　5-2,　5-3,　5-4

全部で 20 通り　　（5×4＝20 通り）

「じゃあ，5 枚の中から 2 枚をとりだす選び方は全部で 20 通り？」青葉が聞いた．

「順番を区別する場合は，20 通りだね．つまり正確に言うと，

5 枚の中から 2 枚を選んで並べる，並べ方は全部で 20 通り

ってこと．でもいまの場合，順番はどうでもいいから，区別しないことにする．たとえば，今考えた 20 通りには，《1 – 2》と《2 – 1》のように，《同じ数字の組み合わせだけど順番だけが違う組み合わせ》が混じっている．これは

（サラダ，海苔）と（海苔，サラダ）

を別々のペアとしてカウントしているようなものだ．二枚の組み合わせの数だけを知りたい場合には，区別しなくてもいい」

「あ……，そうか．味の組み合わせが何通りあるかを知りたい場合には，たしかに（サラダ，海苔）と（海苔，サラダ）を区別する必要はないね」

$$

そこで，（サラダ，海苔）と（海苔，サラダ）を，区別しない場合はどうなるか，という問題を考える．

二つの数字 X, Y の並べ方は（X, Y）か（Y, X）の二通りしかない．

20 通りのうち，並び方が違うだけで同じ組み合わせが 2 つずつ存在するから，ダブリは全部で 10 通りある．

ダブっている組み合わせをグレーで囲むよ．

1-2,	1-3,	1-4,	1-5
2-1,	2-3,	2-4,	2-5
3-1,	3-2,	3-4,	3-5
4-1,	4-2,	4-3,	4-5
5-1,	5-2,	5-3,	5-4

ダブリ 10 組をのぞく組み合わせは

$$20-10=10 \text{通り}$$

だから 10 通りだ．

同じように，5 枚の中から 3 枚選ぶ組み合わせの総数を考えてみよう．

まずダブリも含めて全てカウントすると

$$5\times4\times3=60 \text{通り}$$

ある．3 枚選んだときには，例えば『1』『2』『3』の並べ方には

(123) (132) (213) (231) (312) (321)

の 6 通りがある．つまり並べ方だけが違うパタンが，6 通りあるから，全ての並べ方を 6 で

割ればいい．だから 5 枚の中から 3 枚選ぶ組み合わせは

$$60\times\frac{1}{6}=10\text{通り}$$

だ．

5 枚の中から 1 枚を取り出す組み合わせ，2 枚を取り出す組み合わせ，――5 枚を取り出す組み合わせ，はそれぞれこうなっている

1 枚　$\dfrac{5}{1}=5$，

2 枚　$\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$，

3 枚　$\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$，

4 枚　$\dfrac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}=5$，

5 枚　$\dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}=1$

どう？　規則性が見えてきたかな？

一般的に書けば，n 個のものから x 個を選ぶ組み合わせの総数は，こうなる．

$$\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-x+1)}^{n\text{から1ずつ減らして}x\text{個をかけあわせる}}}{\underbrace{x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times3\times2\times1}_{x\text{から1ずつ減らして}x\text{個をかけあわせる}}}$$

分母は x からはじめて 1 ずつ減らしながら 1 まで掛け合わせる．

分子は n からはじめて 1 ずつ減らしながら $n-x+1$ まで掛け合わせる．

分母分子共に x 個の項を掛け合わせている．

分母，分子ともに 1 ずつ減らしながらかける，という計算をしているので，これを記号『！（階乗）』で表すことにする．

たとえば 5 の階乗は $5!$ と書き，$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ だ．この記号 ! を使って書くと，n 個のものから x 個を選ぶ組み合わせの総数は次の式で表せる

$$\begin{aligned}
&\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-x+1)}{x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}\\
&=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-x+1)}{x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}\cdot\frac{(n-x)!}{(n-x)!}\\
&=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-x+1)\times(n-x)\times(n-x-1)\times(n-x-2)\times\cdots\times 2\times 1}{\{x\times(x-1)\times(x-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1\}(n-x)!}\\
&=\frac{n!}{x!(n-x)!}
\end{aligned}$$

いま 1 段目から 2 段目の変形で

$$\frac{(n-x)!}{(n-x)!}$$

をかけたけど，これは 1 をかけているのと同じだから，1 段目と 2 段目を等号でつなげることができる．どうして，わざわざ $(n-x)!/(n-x)!$ をかけたのかというと，分子に『n から $n-x+1$』までの階乗があったから，続きの『$n-x$ から 1』までの階乗をつなげて全体で $n!$ にするためだったんだ．分子だけを見ると，こうなってる

$$\underbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-x+1)}_{n\text{から}n-x+1\text{までの階乗}}\times\underbrace{(n-x)!}_{n-x\text{から}1\text{までの階乗}}=n!$$

組み合わせの総数を記号で

$${}_nC_x=\frac{n!}{x!(n-x)!}\quad\text{あるいは}\quad\begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

と書く．高校では ${}_nC_x$ という表現がよく使われるけど，大学以降では $\begin{pmatrix}n\\x\end{pmatrix}$ という表現が使わることが多いようだよ

$$

「たしかに，この ${}_nC_x$ っていう記号，昔見たことがあったかも……」青葉は遠い記憶に残るかすかなイメージを思い起こした．

「じゃあ確認してみよう．5 枚の中から 2 枚を選ぶ組み合わせの総数は 10 通りだったけど，この記号を使って計算過程を書いてみて」花京院が計算用紙を差し出した．青葉は紙を受け取ると，考えはじめた．

$$

えっと，5 枚の中から 2 枚を選ぶから，記号で書くと ${}_5C_2$ だね． $n=5, x=2$ を代入するから

$$\frac{n!}{x!(n-x)!}=\frac{5!}{2!(5-2)!}$$

だね．このビックリマークの計算は‥‥‥，え？

階乗って呼ぶんだっけ？　まあ，なんでもいいじゃない，読み方は．

とにかく数を一個ずつ減らしていきながら，かけあわせればいいんでしょ？

こうかな？

$$\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times(3\times2\times1)}=\frac{120}{12}=10$$

なるほど‥‥‥，これで組み合わせの計算の仕方は分かったけど，せんべいの選び方とモテる確率の計算と，どういう関係があるの？

$$

「コンビネーションを使うと

n 人のうち x 人だけが自分を好きになる組み合わせの総数

がすぐに計算できる．そして組合わせ総数が分かれば，

n 人のうち x 人だけが自分を好きになる確率

も簡単に計算できるんだ」

「へえー．そうなんだ‥‥‥どうでもいいけどサラダ味のサラダって，全然サラダの味しないね」

「僕は好きだよ．君がいま最後の一枚を食べちゃったけど」

「そ，そう言えば，うすあじっていうのもあるよね．あれはなんの薄味かなー」

8.5. $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$, そして

「では n 人と出会って 1 人から好かれる確率．計算できるかな」

「えーっとまず，男性 1 人が自分を好きになるパタンがいくつあるか考えてみるね」

$$

今までどおり，好きになった状態は確率変数が 1．そうでない状態は 0 で表すよ．

事象 $B_1 = \{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}$　男性 1 だけが好きになる

事象 $B_2 = \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}$　男性 2 だけが好きなる事象

事象 $B_3 = \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 = 1\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}$　男性 3 だけが好きなる事象

$\vdots$

事象 $B_n = \{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 0\} \cap \{X_3 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = n\}$　男性 n だけが好きなる事象

全部で n 個あるから n パタンだね

$$

花京院が別の表現で補足した．

「コンビネーションの公式を使えば《n 人のなかで 1 人だけが好きになる組み合わせの総数》だから

$${}_nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1}{1 \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{n}{1} = n$$

と考えてもいい．

では次に事象 B_1 が生じる確率，つまり

$$P(B_1) = \text{《男性 1 だけが自分を好きになる確率》}$$

は分かる？」

「《男性 1 だけが自分を好きになる》ってことは，残りの $n-1$ 人は自分を好きにならないってことだから‥‥‥」青葉は次のように考えた．

$$

えーっと，まず一人一人の状態を確率変数で書けば……

$\{X_1=1\}$: 男性 1 が自分を好きになる事象　　$P(X_1=1)=p$
$\{X_2=0\}$: 男性 2 が自分を好きにならない事象　　$P(X_2=0)=1-p$
$\{X_3=0\}$: 男性 3 が自分を好きにならない事象　　$P(X_3=0)=1-p$
$\vdots$
$\{X_n=0\}$: 男性 n が自分を好きにならない事象　　$P(X_n=0)=1-p$

と表す.

n 人が好きになるかどうかは独立だから……ここで独立性の定義を使うんだね.

$$
\begin{aligned}
P(B_1) &= P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}\cap\cdots\cap\{X_n=0\}) \\
&= P(X_1=1)\times P(X_2=0)\times\cdots\times P(X_n=0) \\
&= \underbrace{p}_{\substack{\text{1に好かれ}\\\text{る確率}}} \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{\text{2に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{\text{3に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{\text{4に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times\cdots\times \underbrace{(1-p)}_{\substack{n\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \\
&= p\times\underbrace{(1-p)\times(1-p)\times\cdots\times(1-p)}_{n-1\text{個}} \\
&= p(1-p)^{n-1}
\end{aligned}
$$

どうかな？

《$n-1$ 乗》でまとめるとスッキリするね.

$$

花京院は青葉による計算を確認すると，その続きを説明した.

$$

求める確率は《1 人から好かれる確率》だから，事象 $B_1, B_2, ..., B_n$ のうちどれかひとつが生じる確率だ．つまり

$$P(X=1)=P(B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n)$$

だ.

ところで $B_1, B_2, ..., B_n$ が生じる確率は全部等しい．つまり

$$P(B_1) = P(B_2) = \cdots = P(B_n)$$

となっている．これを利用すれば

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n) \\ &= P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) \\ &= P(B_1) + P(B_1) + \cdots + P(B_1) \\ &= nP(B_1) = np(1-p)^{n-1} \end{aligned}$$

となる．

$$

「よし，次は私が《2 人から好かれる確率》を計算してみるよ．えーっと，手順としてはこうだね」青葉が続けた．

$$

1. 2 人から好かれるパタンの 1 つが生じる確率を求める．
2. 2 人から好かれるパタンが何通りあるかをコンビネーションを使って計算する
3. 手順 1 で求めた確率を，手順 2 で求めたパタン数だけ足し合わせる

2 人から好かれるパタンの 1 つとして《1 番と 2 番から好かれる》事象の確率を考えるよ．

$$\begin{aligned} &P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 0\} \cap \cdots \cap \{X_n = 0\}) \\ &= P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \times P(X_3 = 0) \cdots \times P(X_n = 0) \\ &= \underbrace{p}_{\substack{1\text{に好かれ}\\\text{る確率}}} \times \underbrace{p}_{\substack{2\text{に好かれ}\\\text{る確率}}} \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{3\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{4\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \times \cdots \times \underbrace{(1-p)}_{\substack{n\text{に好かれ}\\\text{ない確率}}} \\ &= p \times p \times \underbrace{(1-p) \times (1-p) \times \cdots \times (1-p)}_{n-2\text{個}} \\ &= p^2 (1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

他のパタンはかけ算の順序が変わるだけで，結果は全部同じになる．だから，《二人から好かれる確率 $P(X=2)$ 》は， $p^2(1-p)^{n-2}$ を《n 人のうち 2 人が好きになるパタン数 ${}_nC_2$》だけ足した数に等しくなる．

つまり

$$P(X=2)=\underbrace{p^2(1-p)^{n-2}+p^2(1-p)^{n-2}+\cdots+p^2(1-p)^{n-2}}_{{}_nC_2\text{個}}$$

$$={}_nC_2 p^2(1-p)^{n-2}$$

だよ．あ，そうか．ってことは……，

《3 人から好かれる確率》や,《4 人から好かれる確率》も同じように計算できるはずだね.

えーと，3 人から好かれる確率は

$$P(X=3)={}_nC_3 p^3(1-p)^{n-3}$$

じゃないかな.

で，4 人から好かれる確率は

$$P(X=4)={}_nC_4 p^4(1-p)^{n-4}$$

のはず…….

あ，なんだかパタンがつかめてきた気がする.

$$

青葉は，計算を通して見いだされる規則性に，爽快感を覚えた．それは遠い記憶のなかにある，なつかしい感覚だった.

「では x 人から好かれる確率は？」満を持して花京院が聞いた.

青葉は，一般の x 人の場合の確率を予想した.

ふいに，心の中で何かがびりっとふるえるのを彼女は感じた.

9.　2項分布――主題

一つの出来事は，出現するかしないかのいずれかであって，その中間はない

5.153

9.1.　2項分布の確率関数

青葉は，ようやく一般的な問題の解答に到達しようとしていた．

《一人一人が確率 p で独立に自分を好きになる場合，n 人と出会って x 人から好かれる確率はいくらか》，これが考えてきた問題だった．

「えーと，n 人と出会って，x 人から好かれる確率は，こうじゃないかな‥‥‥」

$$ {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} $$

「そのとおり．この関数を使えば，仮定した条件のもとで，x 人から好かれる確率を一意的に計算できる」

$$

いま，確率変数 $X_1, X_2, ..., X_n$ が 1 から n までの各異性が自分を好きになるかどうかを表している．ベルヌーイ確率変数だよ．そして

$$ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n $$

と定義すれば，X は《n 人のうち自分を好きになる人の数》を表している．

X_1 や X_2 や X_n の実現値は 0 か 1 のどちらかでしかない．そして 1 が《好きになる》で，0 は《好きにならない》状態を表している．

例えば

$$ X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = 0+1+1+0+\cdots 1 = 10 $$

だったとすると，この $X = 10$ は《10 人が君を好きになった》ことを意味している

$$

「あ，そっか‥‥‥．0 は足しても 0 だから，結局人数をカウントしたことと同じなんだね」

「そういうこと．確率変数を使うと人数をカウントするのに便利だと言ったのは，こういう意味だよ．それだけじゃない」

$$

ここまでの考察によって，《$X = x$ となる確率》すなわち《x 人から好かれる確率》は，

$$P(X = x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

であることが分かる．

この関数は，確率変数を確率に対応させる関数になっている．

これを《確率関数》という．確率関数は確率変数と確率の対応を定める．つまり確率変数によって確率分布が定まるんだ．特に確率関数 ${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$ によって定義される確率分布を 2 項分布という．

表：2 項分布の確率分布

確率変数の実現値 $X(\omega)$	x
確率	${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$

$$

花京院は確率変数を確率に対応させる関数として確率関数を新たに定義した．

「へえ……，確率分布って，これまでは，事象 1 個 1 個に確率を対応させて書いてたけど，2 項分布は式 1 個で書けちゃうんだね．そっか……確率変数を使うと便利だって言ってたのは，こういう意味もあったのかあ」

「確率変数 X の実現値は《自分を好きになる人の数》だから，0 人，1 人，2 人，…, n 人の $n+1$ 通りもある．しかしそれぞれが実現する確率は，たった一つの式

$${}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

で表せる．これを便利と言わずして何を便利と言おうか」

花京院は嬉しそうに言った．

青葉はこのシンプルな結果に感嘆した．

そしてここまで具体的な数値例の計算をこなしてきたせいで，抽象的な確率関数の意味もよく理解できた．

（たぶん具体例から始めずに，いきなりこの確率関数を見せられたとしたら，きっと理解できなかったんだろうな．

そうか……．私が数学書を見て挫折したのは，自分が理解できる具体例から始めずに，いきなり結論だけを理解しようとしたせいなのか……．花京院君の言うとおり，私の読み方が間違っていたのかな……）

「さて，2 項分布と 2 項定理の関係を確認しておこう」

$$

以前，$n=3$ の例を考えたとき，

$$(1-p)^3+3p(1-p)^2+3p^2(1-p)+p^3=1$$

であることを，

$$(p+(1-p))^3$$

の展開を利用して確かめた．

このことは，一般に 2 項の n 乗の展開式に関して成立する次の定理を利用したんだ．

命題（二項定理）．自然数 n について次がなりたつ．

$$\begin{aligned}(p+q)^n &= {}_nC_0 p^0 q^{n-0} + {}_nC_1 p^1 q^{n-1} + \cdots + {}_nC_n p^n q^{n-nn} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k}\end{aligned}$$

総和記号 Σ で足し合わせている項をよく見てごらん．何に見える？

$$

青葉は，目をこらして二項定理の右辺をじっと観察した．

「あ！　確率関数と同じだ．順番に並んでる」

「二項定理を確率分布に適用したものが二項分布といえる．$p+q=1$ という関係があるならば，二項定理によって常に $(p+q)^n=(1)^n=1$ となる．二つの項の n 乗を展開する式と確率分布が，綺麗に対応するんだ．結果が 3 通り以上に分かれる多項分布にも使えるんだよ」

青葉は複雑な展開式と確率分布との完璧な対応に，目をみはった．

（数学って，いろんなところでつながってるんだ……）

9.2. 分布関数

「分布関数を使えば《x 人以上から好かれる確率》や《x 人以下から好かれる確率》を簡単に表現することができるよ」

青葉は分布関数という言葉を初めて聞いた．

「プンスカプン‥‥‥？　怒った時の擬態語みたい」

「全然違う．英語で言うと cumulative distribution function. ある確率変数が《3 以下の値をとる確率》や《5 以下の値をとる確率》を与える関数のことだよ」

$$

例えば 2 人以下に好かれる確率 $P(X \le 2)$ を具体的に書くと

$$P(X \le 2) = {}_nC_0 p^0 (1-p)^n + {}_nC_1 p^1 (1-p)^{n-1} + + {}_nC_2 p^2 (1-p)^{n-2}$$
$$= \sum_{i=0}^{2} {}_nC_i p^i (1-p)^{n-i}$$

となっている．

$P(X \le 2)$ の 2 の代わりに一般的な記号 x を使って書けば

$$P(X \le x) = \sum_{i=0}^{x} {}_nC_i p^i (1-p)^{n-i}$$

となる．n や p の値を条件として与えれば，右辺の式は，x の関数として見ることができる．つまり x の値が決まれば自動的に，確率 $P(X \le x)$ が決まるっていう意味だよ．だから《x 人以下から好かれる確率》を x の関数 F として明示的に定義すれば

$$P(X \le x) = F(x) = \sum_{i=0}^{x} {}_nC_i p^i (1-p)^{n-i}$$

とかける．このように定義した関数 $F(x)$ を確率変数 X の分布関数という．

直感的に言えば分布関数っていうのは，確率関数をある範囲で足し合わせた数だよ．

$$

「うーん，定義は分かるんだけど，何のために使うのか分からない‥‥‥」

「分布関数を使えば，そうだな―――，例えば，《二人以上から好かれる確率》が簡単に書ける」

$$

2 人以上から好かれる確率は

2 人に好かれる確率+3 人に好かれる確率＋⋯＋n 人に好かれる確率

に等しい.

記号 $P(X=x)$ はちょうど x 人から好かれる確率を表しているから，二人以上から好かれる確率を記号 $P(X \geq 2)$ で表すと

$$P(X \geq 2) = \underbrace{P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=n)}_{X=2\text{からはじまって}X=n\text{まで足す}}$$

となる．ここで

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=n)=1$$
$$\underbrace{P(X=0)+P(X=1)}_{\substack{0\text{人あるいは}1\text{人から}\\\text{好かれる確率}}}+\underbrace{P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=n)}_{2\text{人以上から好かれる確率}}=1$$
$$\underbrace{P(X \leq 1)}_{\substack{0\text{人あるいは}1\text{人から}\\\text{好かれる確率}}} + \underbrace{P(X \geq 2)}_{2\text{人以上から好かれる確率}} = 1$$
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$$
$$P(X \geq 2) = 1 - F(1)$$

だから 《2 人以上から好かれる確率》は，分布関数 $F(1)$ を 1 から引いた値に等しい.

$$

「うーん，確かに見た目はすっきりしてるね．でも，ちょっと難しいかな」青葉は首をかしげた.

「まあ，使っているうちに慣れてくるよ． $n=50, p=0.05$ という条件で，どのくらいの値になるのかを確かめてみよう」

花京院は《2 人以上から好かれる確率》を途中まで手計算で変形してから，最後にパソコンで数値化した.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - F(1)\\
&= 1 - \left({}_nC_0 p^0 (1-p)^{n-0} + {}_nC_1 p^1 (1-p)^{n-1}\right)\\
&= 1 - \left\{1 \cdot 1 (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}\right\}\\
&= 1 - \left\{(1-p)^{n-1}((1-p)+np)\right\}\\
&= 1 - \{(0.95)^{49}(0.95 + 50 \cdot 0.05)\}\\
&\approx 0.720568
\end{aligned}$$

「ということは･･･私が 50 人と出会ったとき， $p=0.05$ なら，《2 人以上から好かれる確率》は，約 72％なんだね」

「ちなみに，100 人と出会えば《2 人以上から好かれる確率》はもっと高くなる」

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - \{(1-p)^{n-1}((1-p)+np)\} \\
&= 1 - \{(0.95)^{100-1}(0.95 + 100 \cdot 0.05)\} \\
&\approx 0.962919.
\end{aligned}
$$

「うーん，なるほど．一般的なモデルを作ると，n や p を変えながらいろいろ計算できるのか‥‥‥便利だね．ところで‥‥，最初に花京院君が私に教えてくれた確率って，もっと低かったと思うんだけど」

「最初っていつ？」

「はじめて花京院君が私に話しかけてきたとき」

「ああ，あのときか――うん，あのとき計算した数値は，条件が違ったはずだ．ちょっと待って」花京院は鞄の中から計算用のノートを取り出して，ぱらぱらとめくった．

「ふむ，これだな．あのときは $n = 50, p = 0.05$ という条件のもとで $P(X \geq 3)$ を計算したんだ．もう一度再現してみよう」

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 3) &= 1 - F(2) \\
&= 1 - \{P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)\} \\
&\approx 0.4594
\end{aligned}
$$

「僕が最初に言った 45.9%という数値は，各男性が 0.05 の確率で君を好きになると仮定したとき，1 年間で 50 人と出会って，3 人以上から好かれる確率だ」

「なるほど‥‥‥．あのとき言ったのはこの数字だったのかあ‥‥．別の仮定を使ったから別の結論になったんだね‥‥‥」

「そういうこと．仮定が変われば結論も変わる．これはとても重要なことだ．また，仮定を明確にしておけば，結果をいつでも再現できる．これはさらに重要だ」

「ところで花京院君, 1 年間で 50 人と出会うっていう設定は私の実情に合っているとして，$p = 0.05$ という数字はどこから出てきたのかしら？」青葉は目を細めて聞いた．

「深い意味はないけど‥‥‥統計でよく使われる数字だし‥‥‥大体，有意確率って 0.05 を基準にして考えることが多いんだ‥‥‥」

青葉の目はますます細くなった．

「いや, その神杉さんは, 超絶美人ってわけじゃないけど, 平均よりは少し上かなあって. 少し上っていうのはこの場合, 容姿の分布の一標準偏差くらいは上っていう意味なんだけど. あれ？　なんかヘンなこと言ったかな？　この条件だと 0.05 っていう数値は出てこないか」

（なによ，そのおかしな表現．そこはただ《かわいいほう》くらいでいいんじゃない？）

パラメータ p の推定理由に少し不満はあったが，1 年間で 45.9%という数値の意味を理解

して彼女は納得した．自分がモテる確率に関する花京院の見積もりは，現実の数値とはことなるのかもしれない．でも，そこに到達するまでの推論がクリアで，論理的な飛躍が一切なかったところが，青葉は気に入った．

特に，この予想が経験的に間違いであるにしても，どの仮定が間違っているのかを確認できる点は，とても健全なことだと彼女は思った．

9.3. 期待値

「2 項分布の性質を使って，これから《出会いモデル》をいろんな角度から分析しようと思う．･･･ただ，そのためにいくつかの準備をする必要がある．そのひとつが期待値だ」花京院は平均と確率変数の期待値について説明した．

$$

サイコロを 600 回振って，各目がピッタリ 100 回ずつ出たと仮定する．

目の数	1	2	3	4	5	6
回数	100	100	100	100	100	100

このとき出目の平均は

$$\frac{(1\times100)+(2\times100)+(3\times100)+(4\times100)+(5\times100)+(6\times100)}{600}=\frac{2100}{600}=3.5$$

と考えられる．

いま，各目が出る確率を相対頻度で定義すると

目の数	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

と表すことができる．

この確率分布を意識しながら，さきほどの平均の計算を，違った表現で書くと

$$
\begin{aligned}
平均 &= \frac{(1\times 100)+(2\times 100)+(3\times 100)+(4\times 100)+(5\times 100)+(6\times 100)}{600} \\
&= \frac{1\times 100}{600}+\frac{2\times 100}{600}+\frac{3\times 100}{600}+\frac{4\times 100}{600}+\frac{5\times 100}{600}+\frac{6\times 100}{600} \\
&= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6} \\
&= 3.5
\end{aligned}
$$

途中の式は，次のように解釈することができる．

$$
\underbrace{1}_{\substack{\text{確率変数の}\\\text{実現値}}} \times \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{確率}} + 2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}
$$

つまり平均値は《確率変数の実現値と確率の積の和》と見なすことができる．

これが確率分布の平均値である期待値の直感的な意味だ．

定義（確率変数の期待値）．確率変数 X の確率分布が次のように与えられたと仮定する．

実現値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

このとき，次の総和

$$
p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i
$$

を確率変数 X の期待値と呼ぶ．確率変数 X の期待値を $E[X]$ と書く

$$
E[X]=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ .
$$

$$

「実現値と，それに対応する確率をかけて，全部足した数値を《期待値》というんだね，うん．……それは分かるんだけど，サイコロの平均が 3.5 と言われてもピンとこないなあ……」

「ピンとこない？」

「うん」青葉は花京院が示した計算結果を疑うように，途中経過を何度も確認した．しかしそれは何度計算しても 3.5 だった．その様子を見て花京院は彼女が，計算が正しいにもかかわらず納得できない理由を考えた．

「サイコロの期待値がピンとこない理由は二つあると思うよ」
「ふたつ？」
「まず《3.5》という数値がサイコロの目の中にないから，イメージしにくい」
「うん，そうだね．3.5 という数字が，まずしっくりこないよね」
「それから，サイコロの期待値は，平均に対してわれわれが持っている《出やすい値》というイメージと一致しない」
「え？　平均って，《出やすい値》とか，《真ん中の値》を意味するんじゃないの？」青葉が驚いたように言った．
「確かに平均は,《出やすい値》や《真ん中の値》になっていることが経験的に多い．しかし，それはたまたまそうなっていることが多いだけで，常にそうなっているわけじゃない」
「そうなんだ……，私，平均って一番出やすい値のことだと思っていた」
「統計学では一番出やすい値のことを最頻値というんだ．平均が最頻値と一致することもあるけど，一致しないこともある．サイコロは全ての目が均等に出るから最頻値が一意的に定まらない．だから平均と最頻値が一致しないんだ．
　実は僕も，最初はサイコロの期待値が 3.5 と言われて意味が分からなかったんだ」
「なんだ，花京院君も最初は分からなかったんだね．それでどうやって理解したの？」
「もちろん，サイコロを朝から晩まで振り続けて，その平均を計算したんだよ」花京院は当然のように答えた．
（やっぱり……）
「それでようやく，自分が《どうしてサイコロの期待値の意味が分からない》のか，分かったんだ．実際にサイコロを振ってデータを集め，計算することで，サイコロの期待値は,《すべての出目の合計を,振った回数で割った値と同じになる》ってことが納得できたんだ．いまなら簡単に言語化できるけど,『平均値が最頻値である』という思い込みが間違っていたんだ．サイコロの平均は《頻繁に出る値》なんかじゃない．平均が最頻値になるかどうかは，分布の形に依存するんだ」
「そっかあ．平均ってよく出る値のことだとずっと思ってたよ」
　（それにしても，サイコロ振るの好きだなあ．やっぱりちょっと，変わってる……）

9.4.　2 項分布の期待値

「さて，期待値の定義を確認したから，さっそく二項分布の期待値を考えてみよう．確率変数 X が二項分布にしたがうとき，その期待値はパラメータ n, p により決まる」

「え？　期待値って平均のことでしょ．二項分布って n とか p が変わると，分布の形が変わるから，平均だって変わるんじゃないの？」

「n, p の値が与えられると，二項分布の期待値は，その二つを使って簡単に計算できるんだ．パラメータが n, p である二項分布の期待値は必ず np になる．例えば $n=50, p=0.05$ なら期待値は $np = 50 \times 0.05 = 2.5$ だよ」

「えー，どうして？」

「じゃあ，それを今から示そう」

$$

命題（二項分布の確率変数の期待値）．試行回数 n，パラメータ p の二項分布にしたがう確率変数の期待値は

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_nC_x (p)^x (1-p)^{n-x} = np$$

である．

証明．直接計算によって証明するよ．大まかな方針は，次の通りだ．

まず結論である np を総和記号の中から，くくりだし，

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_nC_x (p)^x (1-p)^{n-x} = np \sum (\qquad)$$

という形にする．次に $\sum(\quad)$ の部分が 1 に等しいことを示す．

それじゃ，np をひっぱりだすよ．

$$\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{n} x \cdot {}_nC_x (p)^x (1-p)^{n-x} = 0 + \sum_{x=1}^{n} x \cdot {}_nC_x (p)^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x \cdot {}_nC_x (p)^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} (p)^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p (p)^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} np \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} (p)^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)}
\end{aligned}$$

ここで

$${}_{n-1}C_{x-1} = \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-1-(x-1))!} = \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}$$

という関係に注意すれば，

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=1}^{n} np \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} (p)^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= \sum_{x=1}^{n} np \ {}_{n-1}C_{x-1} (p)^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)} \\
&= np \sum_{x=1}^{n} \ {}_{n-1}C_{x-1} (p)^{x-1} (1-p)^{n-1-(x-1)} \quad np\text{を総和記号の前にだす} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \ {}_{n-1}C_{i} (p)^{i} (1-p)^{n-1-i} \quad \text{添え字を}i = x-1\text{で置き換える} \\
&= np(p + (1-p))^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np \quad \text{二項定理を使う}
\end{aligned}
$$

がいえるというわけ．

$$

「ええー？　なんかよく分からない．どうしてサメーションの添え字が，《$x=1$からnまで》だったのが，《$i=0$から$n-1$まで》に途中から変わるの？」

「$i=x-1$と定義して，記号を書き換えたんだよ」花京院は添え字を置き換える部分の詳細を解説した．

$$

$i=x-1$という関係を仮定する．このときxが

$$x = 1,2,3,\ldots,n$$

と変化するのに対して，iの方は

$$
\begin{aligned}
&x=1, \quad i = x-1 = 1-1 = 0, \\
&x=2, \quad i = x-1 = 2-1 = 1, \\
&x=3, \quad i = x-1 = 3-1 = 2, \\
&\vdots \\
&x=n, \quad i = x-1 = n-1
\end{aligned}
$$

と対応しているから，

$$i = 0,1,2,\ldots,n-1$$

と変化する．

$$

「えー？　そんなことしていいの？」

「じゃあ，もっと簡単な例で確認してみよう．

$$\sum_{x=1}^{n}(x-1)=0+1+2+\cdots+n-1$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} i=0+1+2+\cdots+n-1$$

ゆえに

$$\sum_{x=1}^{n}(x-1)=0+1+2+\cdots+n-1=\sum_{i=0}^{n-1} i$$

ほらね？　同じことだろ？」

「確かに‥‥‥，添え字の記号が変わったときに，足される項の表示も変わるから，同じことなんだね．うーんでも，まだスッキリしない‥‥‥，あ，そうだ．さっきの式だと指数にも添え字がついていたよ」

「じゃあ，添え字が指数部に使われている計算例を作ってみるといいよ」

「よーし今度は私がやってみるね」

$$

$$\sum_{x=1}^{n}(x-1)p^{x}=0\cdot p^{1}+1\cdot p^{2}+2\cdot p^{3}+\cdots+(n-1)p^{n}$$

$x-1=i$ という関係を使って，総和の式を書き換えるよ

$$\sum_{i=0}^{n-1}(i)p^{i+1}=0\cdot p^{1}+1\cdot p^{2}+2\cdot p^{3}+\cdots+(n-1)p^{n}$$

えーと，だから

$$\sum_{x=1}^{n}(x-1)p^{x}=0\cdot p^{1}+1\cdot p^{2}+2\cdot p^{3}+\cdots+(n-1)p^{n}=\sum_{i=0}^{n-1}(i)p^{i+1}$$

ふむふむ．やっぱり同じね

$$

「サメーションの記号にある表示が《1 から n》だったものが《0 から $n-1$》に変わったので，計算そのものが変わってしまったように錯覚したんだね」

「そうそう．『p を 1 乗するのと 0 乗するのとは違うのに,』って考えたくなるのよ」

「実際には，足される項の添え字も同時に変わっているから，式そのものは変化していないんだよ．つまり p の 1 乗が 0 乗に変わったわけではなくて，もともと 0 乗だったんだ」

　添え字の表示を変えても，値が変化しないという例を，青葉は，ようやく理解した．

「総和の値そのものは変化しない，ということは分かったけど‥‥‥じゃあ，どうして《1

からn》だったものを《0 から$n-1$》に，わざわざ変えたのかな？」青葉が添え字を変えた理由を質問した．

「そうだね. 普通はわざわざ添え字を変えたりしないよね. いまは二項定理を使いたいから，工夫したんだよ」

二項定理は

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \, a^x b^{n-x}$$

だったね．このnを$n-1$に変えても成立するので，

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n-1} {}_{n-1}C_x \, a^x b^{(n-1)-x}$$

と書ける

「そっかあ，二項定理はサメーションが 0 からスタートしているから，その形に合わせたのかあ……うーん，なるほどなあ．自分じゃとてもこんな計算を思いつかないな……」青葉はようやく証明の流れを把握した．

「僕もそうだよ．そもそも，教科書に載っているような証明は，大勢の頭のいい人達が，何十時間，何百時間と費やして計算した結果を，わずか数行に圧縮したものなんだ．だからそれを自力で思いつけないからといって，悲観することはない」

「そんなものかな」

「そうだよ．僕だってこんな証明がすらすら思いつくようなら，そもそも———，いや，まあ．なんでもない」

9.5. 期待値の性質

「ついでだから，どんな期待値についても成立する命題を紹介しておこう．これを利用すれば二項分布の期待値の証明がもっと簡単になる」

命題（期待値の性質）． a,bを実数とおく．確率変数Xの期待値に関して，

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

が成立する．

証明．X の確率関数を $f(x)$，実現値の集合を$\{x_1,x_2,...,x_n\}=A$とおくよ．こう仮定しても一般性は損なわれていない．

$$\begin{aligned}E[aX+b]&=\sum_{x\in A}(ax+b)\cdot f(x)\\&=\sum_{x\in A}ax\cdot f(x)+\sum_{x\in A}b\cdot f(x)\qquad (\textstyle\sum \text{ の性質})\\&=a\sum_{x\in A}x\cdot f(x)+b\sum_{x\in A}f(x)\\&=aE[X]+b\cdot 1=aE[X]+b.\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{x\in A}$ は集合 A の要素を全て足すってことだよ．

命題の簡単な例を示そう．例えばサイコロを振り，出た目を 2 倍してに 1 を足すっていう操作で新しい確率変数を作ったと仮定する．もとのサイコロを表す確率変数を X として

$$Y=2X+1$$

とおく．Y が新しい確率変数だよ．このとき

$$E[Y]=E[2X+1]=2E[X]+E[1]=2E[X]+1=2\times 3.5+1=8$$

が成立する．

次は確率変数同士の和について成立する期待値の性質だ．

命題（確率変数の和の期待値）．離散的確率変数 X,Y に，それぞれ期待値 $E[X],E[Y]$ が存在して，X,Y の同時確率関数が $p(x,y)$ で表されると仮定する．このとき

$$E[X+Y]=E[X]+E[Y]$$

が成立する．

証明．X の確率関数を $f(x)$，実現値の集合を$\{x_1,x_2,...,x_n\}=A$，Y の確率関数を $g(y)$，実現値の集合を$\{y_1,y_2,...,y_m\}=B$ とおこう．補題として

$$\sum_{y\in B}p(x,y)=f(x)$$

であることをさきに示しておこう．X の実現値 x_1 を一つ選んで

$$\sum_{y \in B} p(x_1, y)$$

を考える．するとこれは

$$\sum_{y \in B} p(x_1, y) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \cdots + p(x_1, y_m)$$

を表している．この値は確率変数Yの実現値とは無関連に出現するx_1の実現確率を表している．つまりXの確率関数を使って書けば

$$\sum_{y \in B} p(x_1, y) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \cdots + p(x_1, y_m) = f(x_1)$$

なんだ．この関係はXの実現値がx_1以外の全ての実現値について成立するから，

$$\sum_{y \in B} p(x, y) = p(x, y_1) + p(x, y_2) + \cdots + p(x, y_m) = f(x)$$

も成立するよ．同様の考え方で$\sum_{x \in A} p(x, y) = g(y)$も示せる．これで補題が準備できた．

つぎに$X+Y$の期待値を計算する．

$$\begin{aligned}
E[X+Y] &= \sum_{y \in B}\sum_{x \in A} (x+y)p(x,y) \\
&= \sum_{y \in B} \{(x_1+y)p(x_1,y) + (x_2+y)p(x_2,y) + \cdots + (x_n+y)p(x_n,y)\} \\
&= \sum_{y \in B} \left\{\sum_{x \in A} x \cdot p(x,y) + \sum_{x \in A} y \cdot p(x,y)\right\} \\
&= \sum_{y \in B} \left\{\sum_{x \in A} x \cdot p(x,y)\right\} + \sum_{y \in B} \left\{\sum_{x \in A} y \cdot p(x,y)\right\} \\
&= \underbrace{\sum_{x \in A} \left\{\sum_{y \in B} x \cdot p(x,y)\right\}}_{\text{総和の順番を入れ替えた}} + \sum_{y \in B} \left\{\sum_{x \in A} y \cdot p(x,y)\right\} \\
&= \sum_{x \in A} \underbrace{x \cdot f(\mathrm{x})}_{\text{補題を使った}} + \sum_{y \in B} \underbrace{y \cdot g(y)}_{\text{補題を使った}} = E[X] + E[Y]
\end{aligned}$$

この命題はX, Yが独立でなくても成立するってところが重要だ．いま示した計算の中で，XとYが独立であるという仮定，つまり

$$p(x, y) = f(x)g(y)$$

を使っていないからね．

この確率変数の和の期待値の性質を使うと，さっき示した 2 項分布の期待値の証明がぐっ

と簡単になる．

確率変数 X_1 と《確率分布が同じ》かつ《独立な》確率変数を n 個足しあわせて，確率変数 X をつくる．

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

すると確率変数 X はパラメータ n, p の 2 項分布に従う．言い換えれば 2 項分布に従う確率変数 X を n 個の同一で独立なベルヌーイ確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の和と定義する．

確率変数 X_1 の期待値は $E[X_1] = 0(1-p) + 1(p) = p$ であり，$X_2, X_3, \ldots, X_n$ の期待値も同じである．

$$E[X_1] = E[X_2] = \cdots = E[X_n] = p$$

だから期待値の線形性により

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] \\ &= E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_n] \\ &= p + p + \cdots + p = np \end{aligned}$$

となる．

\$\$

「そっかあ．ベルヌーイ確率変数って，この場合は《ある 1 人の男性が自分を好きになるかどうか》を表した確率変数のことだったね．男性 1 を表す確率変数 X_1 の平均は

$$E[X_1] = \underbrace{1}_{\text{「好き」に対応}} \times \underbrace{p}_{\text{好きになる確率}} + \underbrace{0}_{\text{「好きでない」に対応}} \times \underbrace{(1-p)}_{\text{好きにならない確率}} = p + 0 = p$$

で，X_2 や X_3 も平均は同じだから，n 人分で np になるんだね」

青葉はすっきりとした結果に満足した．特に個人個人の行動が集約されて，二項分布として簡潔に表現できる点を，とても気に入った．

（あ，……ちょっと待って．なんか忘れてるような気がする．うーん，なんだっけ…….あのとき花京院君が書いた式の一つは，確かに 2 項分布の確率関数だった…….でも，もう一つあったような気がする…….あの記号はなんだっけ，積分？　だっけ…）

《もう一つの式》に彼女が到達するのは，しばらく後のことだった．

10. インプリケーション――第１変奏

もしも対象のすべてが与えられているとすれば，それとともに，可能的事態のすべても与えられている．

2.0124

10.1. 青葉の再出発

青葉は再び図書館の数学コーナーにやってきた．ただし今回は，事前に花京院から情報を入手していたため，自分のレベルにあった本を借りることが出来た．

それは『社会科学者のための基礎数学　改訂版』という本で，タイトル通り社会科学を勉強する学生向けに基礎的な数学を解説した教科書だった．行列，微積分学，確率・統計までの内容がコンパクトに解説されている．新しい定理や概念が出てくる度に，その理解を促す例題が続く構成のため，青葉は最初から一人で読み進めることができた．

花京院が勧めるだけあって，この教科書の水準は青葉にぴったりあっていた．また花京院は本を勧めるだけでなく，本を読む時の注意点を青葉に伝えていた．

- 分からなくても，先に進むこと
- ただし分からなかった箇所は覚えておき，あとで振り返ること
- 例題は必ずフォローすること
- 練習問題を解くこと．ただし解けないからといってそこで立ち止まらないこと

青葉ははじめ，このルールを聞いたとき本当にそんなやりかたで数学の勉強になるのだろうかと疑問に思った．

数学は論理の積み重ねだ．だから，一歩でもつまずいてしまったら，それ以降の話は絶対理解できないはずだ．青葉はそう考えていた．

だから，こんな読み方でうまくいくかどうか半信半疑であった．

しかし，青葉の予想に反して，この「分からないところはとばす」というやり方は，極めて効率のよい学習方式だった．

「確かに，くやしいけど花京院君の言うとおりなんだ．分からなくても，飛ばして分かるところだけ読んでいくでしょ．そしてしばらく進んだら，不思議と，あ，前に飛ばしたところは，こういう意味なんだって分かってくるの」

ジグゾーパズルみたいなもんだよ，と花京院は言った．

「ジグゾーパズルを作る時って，たいてい端っこからはじめるけど，やっているうちに，別の端っこのピースが見つかったり，少し離れている部分が島みたいに点々とできあがってくるよね？　で，島と島をつなぐピースがあとで見つかって，それをくっつければ大きな絵ができあがるでしょ？　数学の理解もあれと似てるんだ．理解できたところだけが島になって，あとで島同士がつながってることに気づくと，理解が体系的になるんだ」

「うん，そうだね．確かにパズルって，そんなふうに作った気がする」

「で，どこまで進んだ？」

「えーと微分が終わって，積分の途中かな」

「それはちょうどいい．微分ができれば，モデルからインプリケーションが導出できる」

「インプリケーションって？」

「モデルから論理的に導き出せる命題のことだよ．どれだけ興味深いインプリケーションを導き出せるかによって，モデルの評価が決まる．数理モデルと現実の世界の間をつなぐ橋と言ってもいい」

花京院は例としてひとつ問題を出した

Q: n を定数とおく．x 人以上から好かれる確率，つまり $P(X \geq x)$ は p が増えると，常に増えるか？

「えーっと，パラメータ p って，各異性が自分を好きになる確率だったよね．その p が増えれば，x がどんな数でも確率 $P(X \geq x)$ も増えるんじゃないのかな？」青葉は少し考えてから言った．

「じゃあ，証明はできる？」

「えー？　証明なんてできないよ」青葉はたじろいだ．

「ゆっくり考えれば大丈夫だよ．この問題を考えるために，微分が大いに役立つんだ」

10.2. ツールとしての微分

花京院は，微分の定義を確認した．

\$\$

関数 $f(x)$ の定義域にあるすべての x について，次の極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - (x)}$$

が存在するとき，この極限を関数 $f(x)$ の導関数と呼び， $f'(x)$ と書く．関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを，関数 $f(x)$ を微分するというんだ．関数 $y = f(x)$ の導関数を表す記号には $f'(x)$ のほかに

$$\frac{df(x)}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x), \frac{dy}{dx}, \quad y'$$

などがあるよ．記号は違うけど全部同じ意味なんだ．

たとえば $y = x^2$ という関数の場合，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2hx+h^2)-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\end{aligned}$$

だよ．一般に $y = x^n$ という形の関数の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

になる．

　極限の意味は別の機会に説明するとして，いまは微分の意味について説明しよう．微分には，いろんな使い方があるんだけど，モデルを分析する場合には

《x が増えると，関数 $f(x)$ は増えるのか，それとも減るのか》

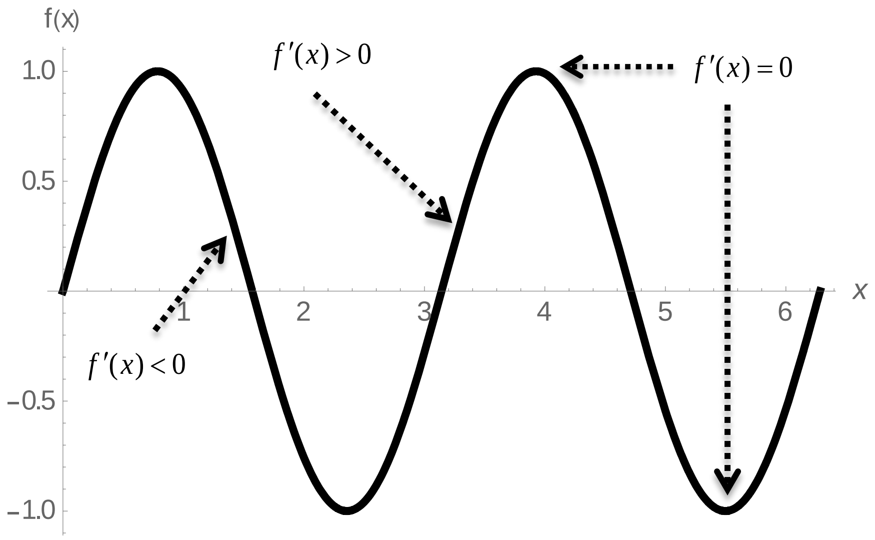
を調べるために使うことが多い．僕たちが今考えてる問題がまさにそうだ．2 項分布のパラメータ p の増加によって，$P(X = x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ が増えるのか, それとも減るのか？　という問題だ

$$

「増えるかどうかを知るために微分を使うの？　そんな面倒なことしなくても，グラフを描けばいいじゃん」

「確かにグラフを描くのは，とてもいい方法だ．でも関数によっては微分をするよりもグラフを書くための計算のほうが難しい場合もある．それに，グラフは特殊な条件下で計算した例でしかないから，そこから読み取った傾向を一般化できないという短所もある．直感的にはこんなイメージだよ」

　花京院は曲線のグラフを書くと，増減に対応する導関数の符号を，その上に重ねた．



「グラフが増加している部分では導関数 $f'(x)$ は正，減少している部分では負，そしてちょうど山の頂上や谷底になっている部分では 0 になるんだ．微分は，モデルを分析する際に最も有用なツールの一つだ．これを使って p が増えると，$P(X \geq x)$ は増えるか？　を考えることが次の課題だよ．ゆっくりと考えてきて」

こうして二人の勉強会は一旦終わった．

10.3.　　青葉の挑戦

自分の部屋に戻った青葉は，ベッドに寝転んで考えた．

$$

p が増加すると $P(X \geq x)$ が増加するかどうかなんて，私にわかるのかな……

まず微分するために確率 $P(X \geq x)$ を具体的にかくと，たしか

$$
\begin{aligned}
P(X \geq x) &= 1 - F(x-1) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{x-1} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

だったはず．これを p で微分する……．

……

え？　サメーションでまとめた項を微分するのってどうやるんだっけ？

……

やっぱり，私には無理……

$$

青葉はベッドにうつぶせになり，ノートに式を書きかけたが，そこで枕に顔をつっぷした．（花京院君も，いじわるだなあ．こんなのできるわけないじゃん……）

ふと花京院の言葉が頭に浮かんだ．『具体例からはじめるんだよ』

$$

そうだ．具体例だ……なるべく簡単な形で考えた方がいいよね．

p が増加すると $F(x)$ が増加する $\Leftrightarrow$ p が増加すると $1-F(x)$ が減少する

という関係は常に正しいから，まず $F(x)$ の増減を調べよう． $F(x)$ を具体的に書けば

$$F(x)=\sum_{k=0}^{x}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

だね．

最初に $x=0$ とおいて $F(0)$ を p で微分してみよう．

$$\begin{aligned}F(0)&=\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}=(1-p)^n\end{aligned}$$

ふむ．これなら微分できそう……．あれ？　p^n は微分できるけど，$(1-p)^n$ ってどうやって微分するんだっけ．

そうだ．これはテキストに書いてあった．

……

なになに……，$(1-p)^n$ を p で微分するには， $x=1-p$ とおいて， x^n を x で微分したものと，$1-p$ を p で微分したものをかければよい……と．

……

……むう？　こういうことかな？

$f(p)=(1-p)^n,\qquad x=1-p$ とおけば

$(1-p)^n=(x)^n$

合成関数の微分を使って

$$\frac{df}{dp}=\frac{df}{dx}\frac{dx}{dp}=n(x)^{n-1}\cdot(-1)=-n(1-p)^{n-1}.$$

こうかな……．これは明らかに $0<p<1$ の範囲では負だね.

よし，x=1 の場合もやってみよう.

$$F(1)=\sum_{k=0}^{1}{}_nC_k p^k(1-p)^{n-k}$$
$$={}_nC_0 p^0(1-p)^{n-0}+{}_nC_1 p^1(1-p)^{n-1}=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$$

だね．うーん，さっきよりちょっと難しそう……

あ，でも第 1 項はさっきと同じだから，第 2 項だけ追加すればいいのか．ってことは

$$f(p)=(1-p)^n+np(1-p)^{n-1}$$

とおいて $f(p)$ を p で微分すればいいんだね．あれ？　$np(1-p)^{n-1}$ の部分は

$$np\times(1-p)^{n-1}$$

っていう積の形になってるな……えーと，これは

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

っていう定理を使えばいいのか……

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}f(p)&=-n(1-p)^{n-1}+\{n(1-p)^{n-1}+np(n-1)(1-p)^{n-2}\cdot(-1)\}\\&=-n(1-p)^{n-1}+\{n(1-p)^{n-2}((1-p)-p(n-1))\}\\&=-n(1-p)^{n-1}+\{n(1-p)^{n-2}(1-p-pn+p)\}\\&=-n(1-p)^{n-1}+n(1-p)^{n-2}(1-pn)\\&=n(1-p)^{n-2}\{-(1-p)+1-pn\}\\&=n(1-p)^{n-2}p(1-n)=-n(n-1)p(1-p)^{n-2}.\end{aligned}$$

ふう．これはちょっと難しかったな．これもやっぱり $p=0,1$ のときは 0 で $0<p<1$ の範囲では負だね.

続いて…… $x=2$ のときも計算はできそうだけど．これを続けて一般に $F(x)$ の場合は計算できるのかな？　$x=3$ とか $x=5$ みたいに具体的な数値なら計算できるけど，いくら続けても一般項の微分はできそうにないなあ……

うーん，どうしたらいいんだろう.

$$

青葉は結局 $x=4$ の場合まで計算すると，力尽きて寝てしまった．大学に入ってからしば

らく数学から遠ざかっていたために，彼女にしてみれば，それは驚異的な計算量だった.

次の日，青葉は計算結果を携えて，花京院と研究室で再会した.

「証明はできたかい？」花京院は涼しげな顔で聞いた.

「できるわけないじゃない．見てよこれ．こんなにいっぱい計算したのに無駄だったよ」青葉は $x = 0,1,2,3,4$ の場合に $F(x)$ を p で微分した計算結果をまとめたノートを彼に見せた. 花京院は手書きの計算結果をじっと見つめると，満足げに微笑んだ.

「十分できてるじゃないか」

「え？　ほんと？」

「まず，$x = 0,1,2,3,4$ の場合について，$0 < p < 1$ のとき $dF(x)/dp < 0$ であることが，この計算によって確かめられている．これは十分な成果だよ」

そう言われて多少青葉の機嫌はよくなったが，それでもまだ不満が残っていた.

「そりゃあ，確かに具体的な数値に関しては結果が分かったけど……，一般項 $F(x)$ の導関数が負になっているかどうか，結局わからないじゃん」

「あとは結果をよく観察して，規則性を発見すればばいいだけだよ」

花京院は青葉の計算結果を机に置くと，それをもとに説明した.

$$

まずこれは，君が計算してきた結果だ.

$x = 0$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp} = -n(1-p)^{n-1}$

$x = 1$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp} = -n(n-1)p(1-p)^{n-2}$

$x = 2$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp} = -\dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}(1-p)^{n-3}p^2$

$x = 3$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp} = -\dfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(n-1)np^3(1-p)^{n-4}$

$x = 4$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp} = -\dfrac{1}{24}(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)(1-p)^{n-5}np^4$

ここから規則性が見えやすいように，少しだけ計算結果の書き方を変えてみよう

$x = 0$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp} = -\left(\dfrac{1}{0!}\right) \times n \times p^0(1-p)^{n-1}$

$x=1$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp}=-\left(\dfrac{1}{1!}\right)\times n(n-1)\times p^1(1-p)^{n-2}$

$x=2$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp}=-\left(\dfrac{1}{2!}\right)\times n(n-1)(n-2)\times p^2(1-p)^{n-3}$

$x=3$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp}=-\left(\dfrac{1}{3!}\right)\times n(n-1)(n-2)(n-3)\times p^3(1-p)^{n-4}$

$x=4$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp}=-\left(\dfrac{1}{4!}\right)\times n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\times p^4(1-p)^{n-5}$

どう？　なにか規則性が見えてこない？

$$

青葉はしばらく，花京院による修正を経た計算結果をじっと観察した．

「ほんとだ，見えるよ．私にも見える・・・・・・あ，今のシャアっぽかった．でも花京院君が書き直した方には，確かに規則性が見える・・・・・・．不思議」

「この調子でいくと，$x=k$ のときはどうなると思う？」花京院が聞いた．青葉は数式を見比べながら，一般項の形を予測した．

$x=k$ のとき　$\dfrac{dF(x)}{dp}=-\left(\dfrac{1}{k!}\right)\times n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)\times p^k(1-p)^{n-(k+1)}$

「そうだね．階乗の部分はこうまとめてもいい」

$$\frac{dF(x)}{dp}=-\frac{n!}{k!(n-(k+1))!}p^k(1-p)^{n-(k+1)}$$

「わー，すごい．こんな綺麗な形になったよ」

「それじゃ仕上げに，一般項が正しいことを数学的帰納法を使って確認しておこう」

$$

任意の x について，$\dfrac{dF(x)}{dp}$ が

$$\frac{dF(x)}{dp}=-\frac{n!}{x!(n-(x+1))!}p^x(1-p)^{n-(x+1)}$$

であることを示す.

1)　$x=0$ のとき,

$$\frac{dF(0)}{dp}=-\frac{n!}{0!(n-(0+1))!}p^0(1-p)^{n-(0+1)}$$
$$=-\frac{n!}{(n-1)!}(1-p)^{n-1}=-n(1-p)^{n-1}$$

である．よって成立する.

2) $x=k$ のとき成立すると仮定して，$x=k+1$ のときにも成立することを示す.

まず仮定より

$$\frac{dF(k)}{dp}=-\frac{n!}{k!(n-(k+1))!}p^k(1-p)^{n-(k+1)}$$

である．つぎに

$$\frac{dF(k+1)}{dp}$$

を直接計算する.

ところで

$$F(k+1)=\sum_{i=0}^{k+1}{}_nC_i p^i(1-p)^{n-i}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}{}_nC_i p^i(1-p)^{n-i}+{}_nC_{k+1}p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)}$$

だから，第 2 項を 2 項分布の確率関数 $f(k+1)$ として分けておく事ができる．したがって，$F(k+1)$ を p について微分するということは,

$$F'(k+1)=\frac{dF(k)}{dp}+\frac{df(k+1)}{dp}$$

を計算することに等しい．さきに

$$\frac{df(k+1)}{dp}$$

の部分を計算しておこう.

$$\frac{df(k+1)}{dp} = {}_n C_{k+1}\{(k+1)p^k(1-p)^{n-(k+1)} - p^{k+1}(n-(k+1))(1-p)^{n-(k+1)-1}\}$$
$$= {}_n C_{k+1}\{p^k(1-p)^{n-k-2}((k+1)(1-p) - p(n-(k+1))\}$$
$$= {}_n C_{k+1}\{p^k(1-p)^{n-k-2}(k-pn+1)\}$$

である．あとはこれを組み合わせて

$$F'(k+1) = \frac{dF(k)}{dp} + \frac{df(k+1)}{dp}$$

を計算すればいい.

$$\frac{dF(k)}{dp}$$

の部分は，仮定

$$\frac{dF(k)}{dp} = -\frac{n!}{k!(n-(k+1))!} p^k(1-p)^{n-(k+1)}$$

が使えるから，

$$F'(k+1) = \frac{dF(k)}{dp} + \frac{df(k+1)}{dp}$$
$$= -\frac{n!}{k!(n-(k+1))!} p^k(1-p)^{n-(k+1)} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}\{p^k(1-p)^{n-k-2}(k-pn+1)\}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!} p^k(1-p)^{n-k-2}\left\{\frac{1}{k+1}(k-pn+1) - (1-p)\right\}$$
$$= \frac{n!}{k!(n-(k+1))!} p^k(1-p)^{n-k-2}\left\{\frac{-p(n-k-1)}{k+1}\right\}$$
$$= -\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} p^{k+1}(1-p)^{n-k-2}(n-k-1)$$
$$= -\frac{n!(n-k-1)}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1}(1-p)^{n-k-2}$$
$$= -\frac{n!}{(k+1)!(n-k-2)!} p^{k+1}(1-p)^{n-k-2}$$

である．この式は確かに，命題が $x = k+1$ のときにも成立することを示している．よって数学的帰納法により,

任意の x について,

$$\frac{dF(x)}{dp} = -\frac{n!}{x!(n-(x+1))!} p^x(1-p)^{n-(x+1)}$$

であることが示せた.

$$

「うーん，計算は分かるんだけど，数学的帰納法ってのがよくわかんない」

「自然数 n に関する命題を，1 から順にドミノ倒しで示す論法だよ．この場合は $x=0$ からはじめて， $x=1,2,3,...$ という具合に任意の自然数 x について，命題が成立する事を証明したんだ」

「《$x=k$ のとき成立することを仮定して》，ってところが分からないんだけど．そこが仮定できるなら，最初から任意の x で命題が成立するって言えばいいんじゃないの？」

「いや $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ であることは仮定じゃないから，ここを証明することが大切なんだ． $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ の部分と， $x=0$ の部分が言えれば，あとは代入を繰り返すことで，任意の x について命題の成立を示せる．

例えば $x=0$ のとき，成立する事は確かめられるから，ここから $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ であることを使って，

$$P(0) \Rightarrow P(0+1) = P(1)$$

がいえる．このとき $x=1$ の場合について，計算して確かめなくてもいい，という点がポイントだ．x=0 の場合に命題が成立することと， $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ を組み合わせて，x=1 のときも命題は成立する．だって， $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ の部分は自明ではないけれど，証明したからね．今度は x=1 が成立するから，そのことと $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ を組み合わせれば，x=2 の場合にも命題は成立する．これを繰り返すんだ」

青葉は，すぐには数学的帰納法のロジックが理解できなかった．しかし自分で 0 から代入を繰り返していくうちに，次第に，どんな x の値でも，導関数の一般項が成立するという事実を納得していった．

そして， p や n という一般的な記号のままでも，微分によって関数の増減が分かることを知り，素直におどろいた．

微分って役に立つこともあるんだ……．それは彼女が人生ではじめて微分の有用性を感じた瞬間だった．

11. 続・インプリケーション――第 2 変奏

ある事態の成立あるいは非成立から，他の事態の成立あるいは非成立を推論することはできない．

2.062

11.1. 魅力が増すことの意味

　お互いに暇な時間を見つけては，数学や数理モデルの話をすることが，すっかり二人の日課となっていた．研究室の共有スペースは，そのためのうってつけの空間だった．

　そこには広い机があり，ホワイトボードがあり，パソコンがあり，辞書や事典や必要最小限の参考図書があった．またコーヒーが飲めるところも二人にはありがたかった．

　青葉は花京院との会話にはすっかり慣れていた．

　ただし，彼と話すときの話題は，いつも数学に関することで，彼自身の普段の生活は依然として謎に包まれていた．

「ねえ，花京院君．出会いモデルの確率は，パラメータ p に関して $P(X \geq x)$ が増加ってことは分かったけど，これって当たり前のことじゃないのかな？」

「当たり前？」

「だって，パラメータ p は《各異性が自分を好きになる確率》を表してるんでしょ．それが大きくなれば，

《1 人から好かれる確率》や《2 人から好かれる確率》

は，当然上昇するはずでしょ？　だったら，結局

《x 人以上から好かれる確率》

だって大きくなるんじゃないかな？」

「いや，厳密に言えば違う．任意の x についてパラメータ p が増加すれば $P(X \geq x)$ は増加するが， $P(X = x)$ は増加する場合だけでなく，減少する場合もある」

「え？　ほんと？」

「今からそのことを示そう．まず x 人から好かれる確率を p の関数として表す．これは

$$P(X = x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

だね．この関数が《 p が増えたときに，増えるかどうか》を確認するよ．そのためにまた微分を使う」花京院は証明にとりかかった．

$$

まず確率関数を p で微分するよ．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dp}P(X=x) &= {}_nC_x\{xp^{x-1}(1-p)^{n-x}+p^x(-1)(n-x)(1-p)^{n-x-1}\} \\
&= {}_nC_x\{xp^{x-1}(1-p)^{n-x-1}(1-p)-p^{x-1}p(n-x)(1-p)^{n-x-1}\} \\
&= {}_nC_x p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}\{x(1-p)-p(n-x)\} \\
&= {}_nC_x p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}(x-px-pn+px) \\
&= {}_nC_x p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}(x-pn)
\end{aligned}
$$

微分ができたから今度は，この導関数の符号がプラスになっているのかマイナスになっているのかをチェックする． ${}_nC_x p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}(x-pn)$ の各項の符号を順番に確認していこう．

まず ${}_nC_x$ は正だ．

つぎに $0<p<1$ を仮定すれば p^{x-1} も正だ．

それから， $(1-p)^{n-x-1}$ も正だね．

残ったのは $x-np$ の部分だけど，ここは正の場合もあるし，0 の場合もあるし，負の場合もある．だから条件分けすればいいんだ．結局 ${}_nC_x p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}(x-pn)$ の符号は，

$$
\begin{aligned}
x-np&>0 \\
x-np&=0 \\
x-np&<0
\end{aligned}
$$

のパタンによって決まる．結果をまとめると，こうだよ．

命題． n,x を所与とするとき， x 人から好かれる確率は $x>np$ の場合に， p に関して増加である．ただし $0<p<1$ を仮定する．

証明．

$$
\frac{d}{dp}P(X=x)={}_nC_x p^{x-1}(1-p)^{n-x-1}(x-pn)
$$

より

$$
\frac{d}{dp}P(X=x)=\begin{cases}\text{正}, & x>np \\ 0, & x=np \\ \text{負}, & x<np.\end{cases}
$$

$$

「少し見方を変えると， $p=x/n$ のとき， $P(X=x)$ は最大値を持つ，ということだね．それから np は確率変数の期待値だってことが分かっているから，x が平均値よりも大きい範囲

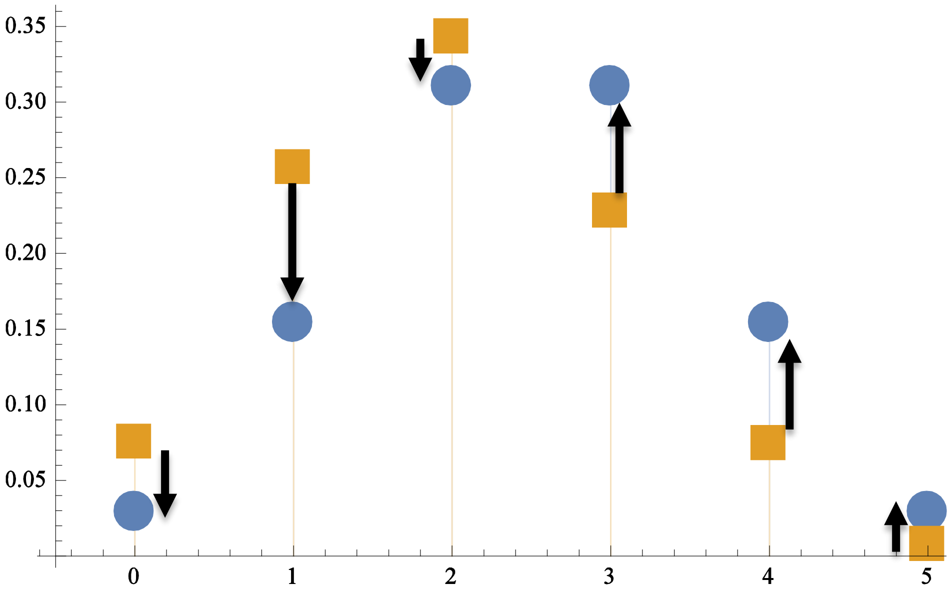
では

p が大きくなるほど x 人から好かれる確率が大きくなる

ってことを意味している」花京院はコンピュータで確率関数のグラフを書いた．

$$

○と□を使って，二つの確率関数のグラフを比較してみたよ．○が $n=5, p=0.5$ で，□が $n=5, p=0.4$ の場合を表している．横軸は $x=0,1,2,3,4,5$ に対応し，縦軸は確率関数 $P(X=x)$ の値に対応しているんだ．



図：確率関数の比較．○： $p=0.5$，□： $p=0.4$

図中に書き込んだ上下の矢印が，パラメータ p が 0.4 から 0.5 に上昇した場合に，確率分布がどう変化するのかを表している．途中から矢印の向きが下向きから上向きに変わっているだろう？

例えば $x=0,1,2$ の範囲では，丸のマーカー（$p=0.5$）の位置が四角のマーカー（$p=0.4$）の位置よりも低い．だから矢印は下を向いている．この範囲では p が増加すると，

$$P(X=0), P(X=1), P(X=2)$$

は減少する．

逆に $x=3,4,5$ の範囲では，丸のマーカー（$p=0.5$）の位置が四角のマーカー（$p=0.4$）

の位置よりも高い．だから矢印は下を向いている．この範囲では p が増加すると，$P(X=0), P(X=1), P(X=2)$ は増加する

$$

「うーん，なるほどお．たしかに，p が増えるからといってどの x でも $P(X=x)$ が増えるってわけじゃないんだね」

「こう考えることもできる．確率の定義上，

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x)=1$$

でなければならないから，全ての x について確率 $P(X=x)$ が増加することはありえない．なぜなら全ての確率が増加すると 1 を超えてしまうからだ．

だから確率の和を 1 に保つためには，ある点 x において $P(X=x)$ が増加するならば，別の点では確率が減少する必要がある」

「そっかー．だから p が大きくなると少ない人数から好かれる確率は減少するけど，逆に多い人数から好かれる確率があがるんだね」

「直感的に，こう言うこともできる．x 人以上から好かれる確率は，$x, x+1, \ldots, n$ 人から好かれる確率の和になっているけど，平均数より大きな数から好かれる確率は p の増加によって増える．そして p の増加によって確率が増加する項の数が，p の増加によって確率が減少する項の数を上回るから，結果的に増加するんだ」

11.2. 出会いの数が増えることの意味

「次の問題は一緒に考えてみよう」花京院は問題をホワイトボードに書いた．

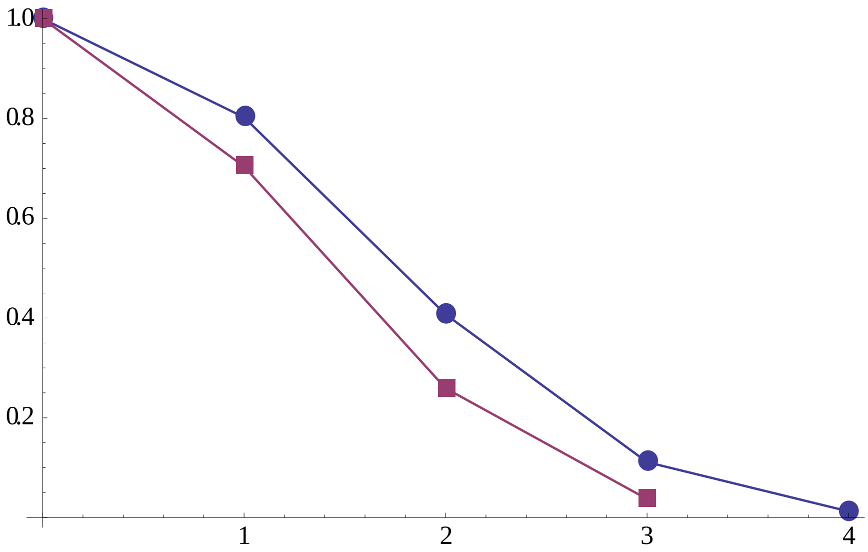
> Q: p, x は所与とする．x 人より多くの人に好かれる確率は，出会う人数 n に関して増加するか？

「うーん，これはどうかなあ．p, x が変わらないのなら，多くの人と出会うほどモテる確率は高くなりそうだけど‥‥‥」青葉はさきほどの p の増加に関する $P(X=x)$ のふるまいについての考察から，直感があてにならないことを学習していた．

「まずは具体的な数値例を確認しておこう」

\$\$

$p=1/3$ とおいて，$n=3$ の場合と $n=4$ の場合で $P(X\geq x)$ を比較したグラフだよ．



図：$P(X\geq x)$ の比較．横軸が x で縦軸が $P(X\geq x)$ の値．$p=1/3$ で下が $n=3$，上が $n=4$ の場合に対応する．

\$\$

「グラフからどんなことが分かる？」花京院が聞いた．

「えーと，《0 人以上から好かれる確率》は常に 1 だから n にかかわらず一定だけど，それ以外の

《1 人以上から好かれる確率》,

《2 人以上から好かれる確率》,

《3 人以上から好かれる確率》

は n=3 より，n=4 の場合の方が高いね．だから出会う人数が多くなるほど，x 人以上から好かれる確率は増加するんじゃないかな」青葉がグラフを見ながら慎重に答えた．

「うん，証明すべき予想は具体例を通して得られた．次に証明を考えるために，記号を導入しておこう．まず《x 人より多くの人に好かれる確率》を n の関数として表す」花京院は計算用紙に次のように書いた．

$$

《x 人より多くの人に好かれる確率》は，x 人以下の人に好かれることの余事象だから，

$$1-P(X \leq x)=1-\sum_{k=0}^{x} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

だ．分布関数 $F(x)$ を使うと，

$$1-P(X \leq x)=1-F(x)$$

と表すことができる．パラメータが n であることを明示的に書けば

$$F_n(x)=\sum_{k=0}^{x} {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

となる．出会う人が 1 人増えて $n+1$ 人になった場合，その分布関数は

$$F_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{x} {}_{n+1}C_k p^k (1-p)^{n+1-k}$$

だ．F の添え字の n や $n+1$ が出会った人数を表している．この表記を使って，

《n 人と出会って x 人より多くの人に好かれる確率 $1-F_n(x)$》

よりも

《$n+1$ 人と出会って x 人より多くの人に好かれる確率 $1-F_{n+1}(x)$》

のほうが大きいことを示せばいい．

つまり

$$1-F_n(x)<1-F_{n+1}(x)$$

であることが言えればいい．不等式を変形すれば

$$\begin{aligned} -F_n(x)&<-F_{n+1}(x) \\ F_n(x)&>F_{n+1}(x) \\ F_n(x)-F_{n+1}(x)&>0 \end{aligned}$$

と同じ意味だから最後の $F_n(x)-F_{n+1}(x)>0$ を示す問題だね．

$$

「うーん，どうすればいいのかなあ？」

「まずは，直接計算してみようか」花京院は式を展開した．

$$

$$
\begin{aligned}
F_n(x)-F_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{x} {}_nC_k\, p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{x} {}_{n+1}C_k\, p^k q^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{x} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} p^k q^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{x} \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)(n-k)!} p^k q^{n-k} q \\
&= \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \left(1-\frac{(n+1)q}{n+1-k}\right)
\end{aligned}
$$

分布関数の差をまとめると，こんな感じだよ．

$$

「でも正か負かはちょっと分からないね」と青葉が残念そうに言った．

「うん．でも

$$
\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}
$$

の部分は必ず正だよね」と花京院が指摘した．

「あ，そうか．ここはよく見ると確率関数と同じ形になってるね」青葉は，確率は非負であるという基本仮定を思い出した．

「ということは——，各項の正負は後ろの $\left(1-\dfrac{(n+1)q}{n+1-k}\right)$ の部分で決まると言うことだね」花京院が続けた．

「うん．この部分が常に正だったら，ぜーんぶ正の項を足しているから， $F_n(x)-F_{n+1}(x)$ は全体として正になるはずね」

「確かめてみよう，えーっと， $\left(1-\dfrac{(n+1)q}{n+1-k}\right)$ が正になるということは———」花京院は式を変形した．

$$

$$
\begin{gathered}
\left(1-\frac{(n+1)q}{n+1-k}\right) > 0 \Leftrightarrow -\frac{(n+1)q}{n+1-k} > -1 \Leftrightarrow \\
\frac{(n+1)q}{n+1-k} < 1 \Leftrightarrow (n+1)q < n+1-k \Leftrightarrow \\
k+(n+1)q < n+1 \Leftrightarrow k < n+1-(n+1)q \Leftrightarrow \\
k < (n+1)(1-q) \Leftrightarrow k < (n+1)p
\end{gathered}
$$

つまり，$(n+1)p$ を超えない最小の整数を m とおけば，$k \le m$ のとき，注目した項

$$\left(1-\frac{(n+1)q}{n+1-k}\right)$$

は正になっている．逆に言えば，$k > m$ の場合は正ではない，ということだ

$$

「そっかあ，k がある程度大きくなってくると，$\left(1-\frac{(n+1)q}{n+1-k}\right)$ が負になることもあるんだ. ということは……，総和を考えたとき，全体として正になっているから負になっているかは，すぐには分からないなあ」と青葉は頭をかかえた.

「うーん，困ったね」花京院はしばらく考えてから証明を続けた.

$$

総和の各項をまとめて書いてみよう．先ほどの結果を利用して

$$\begin{aligned} F_n(x) - F_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{x} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \left(1-\frac{(n+1)q}{n+1-k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{x} h(k) \end{aligned}$$

と書く．$(n+1)p$ を超えない最小の整数を m とおけば,

$$h(0), h(1), h(2), ..., h(m)$$

は全部正だから,

$$\sum_{k=0}^{m} h(k) > 0$$

となる．m よりも大きい整数にかんして $h(m+1), h(m+2), ..., h(x)$ は負だから

$$\underbrace{h(0)+h(1)+\cdots+h(m)}_{\text{正}} + \underbrace{h(m+1)+h(m+2)+\cdots+h(x)}_{\text{負}}$$

となっている．x は最大で n に等しいから，その場合は

$$\begin{aligned} F_n(n) - F_{n+1}(n) &= 1 - F_{n+1}(n) = 1 - \{1 - f_{n+1}(n+1)\} \\ &= 1 - \{1 - {}_{n+1}C_{n+1} p^{n+1} q^0\} = 1 - (1 - p^{n+1}) \\ &= p^{n+1} > 0 \end{aligned}$$

が成立している．ということは

$$\underbrace{h(0)+h(1)+\cdots+h(m)}_{\text{正}}+\underbrace{h(m+1)+h(m+2)+\cdots+h(n)}_{\text{負}}>0$$

である．これを不等号でつなげると，0 から n までの任意の x について

$$\begin{aligned}
&F_n(x)-F_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{x}h(k)\\
&=\underbrace{h(0)+h(1)+\cdots+h(m)}_{\text{正}}+\underbrace{h(m+1)+h(m+2)+\cdots+h(x)}_{\text{負}}\\
&>\underbrace{h(0)+h(1)+\cdots+h(m)}_{\text{正}}+\underbrace{h(m+1)+h(m+2)+\cdots+h(x)+h(x+1)+\cdots+h(n)}_{\text{負}}\\
&>0
\end{aligned}$$

となる．ここで $x>m$ と定義しているよ．2 段目より 3 段目が小さいのは，負の項を追加して足しているからだ．n 項まで足しても正になることは分かっているから，結局

$$F_n(x)-F_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{x}\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}\left(1-\frac{(n+1)q}{n+1-k}\right)>0$$

が正しい．よし，結果をまとめよう．

命題．他の条件が等しければ，多くの人と出会うほどモテやすい．

証明． n 人と出会って x 人より多くの人に好かれる確率は，分布関数 $F_n(x)$ を使うと，

$$1-P(X\leq x)=1-F_n(x)$$

で表すことができる．これまでの考察により

$$F_n(x)>F_{n+1}(x)$$

であることが分かっているので，

$$F_n(x)>F_{n+1}(x)\Rightarrow 1-F_n(x)<1-F_{n+1}(x)$$

が成立する．つまり他の条件が等しければ n 人と出会う場合よりも $n+1$ 人と出会う方が，x 人より多くの人に好かれる確率が大きい．

□

\$\$

「うーん，n が増えれば任意の x について $P(X\geq x)$ が増加するのって，一見自明な気がしたけど，ちゃんと示すのは思ったよりも面倒だったね．もっと簡単な示し方があるかもしれないから，今度考えてみよう」花京院は計算用紙の余白に課題をメモ書きして残した．

11.3. 極限

「ちょっとした思考実験をやってみよう」花京院は計算をはじめた．

$$

これまで考えてきたモデルでは 1 年間で n 人の異性と出会った．仮に，この n 人が次の 1 年ではすっかり入れ替わったとする．すると 2 年目の n 人は，1 年目の n 人と独立に君を好きになると考えられる．すると，2 年間で誰からも好かれない確率は，1 年目で誰からも好かれず，かつ，2 年目にも誰からも好かれない事象の確率となる．1 年目の確率変数を X_1，2 年目の確率変数 X_2 とおくと，2 年連続で誰からも好かれない確率は

$$P(X=0)\cdot P(X=0)$$

となる．二つの確率変数は名前が違うだけで，確率分布は全く同じだから，単に《0 人に好かれる確率》を 2 乗すればいい．

つまり

$$P(X_1=0)\cdot P(X_2=0)=(1-p)^n(1-p)^n=(1-p)^{2n}$$

となる．

この確率を 1 からひくと，2 年間で 1 人以上から好かれる確率になる．つまり

$$1-(1-p)^{2n}$$

だ． $n=50, p=0.05$ という条件で計算してみると．

$$1-(1-p)^{2n}\approx 0.994$$

2 年間で 1 人以上から好かれる確率は約 99.4% もある．4 年間なら

$$\begin{aligned}&1-P(X_1=0)\cdot P(X_2=0)\cdot P(X_3=0)\cdot P(X_4=0)\\&=1-(1-p)^n(1-p)^n(1-p)^n(1-p)^n\\&=1-(1-p)^{4n}\approx 0.999\end{aligned}$$

になる．このことを一般的に表現すると，

命題．長く生きていれば，期間中ずっと誰からも好かれない確率は限りなく 0 に近づく．

証明． t 年間のあいだ連続で誰からも好かれない確率は，$P(X=0)^t$ である． $0\le P(X=0)<1$ だから， $P(X=0)^t$ は 1 よりも小さい数を t 個かけあわせた数である．

したがって， $P(X=0)^t$ は t が大きくなるほど，限りなく 0 に近づく．よって t 期間中つねに誰からも好かれない確率は

$$\lim_{t\to\infty} P(X=0)^t = 0$$

である．

そうだ，約束通り，極限を説明をしておこう．

変数 x を限りなく大きくするとき $f(x)$ の値が一定値 a に限りなく近づくならば，

x を無限大にするとき $f(x)$ は極限値 a に収束する

という．これを記号で $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ と書く．

いまの命題に出てきたのは，

$$\lim_{t\to\infty} P(X=0)^t = 0$$

という式だから，これは変数が t でこれが限りなく大きくなると，$P(X=0)^t$ がどんどん 0 に近づくっていうことだよ．

$P(X=0)$ は確率だから，0 以上 1 以下の値だね？　例えば

$P(X=0)$=0.1

とする．$P(X=0)^t$ を考えると t が 1,2,3,…と大きくなるにつれて，$P(X=0)^t$ が小さくなくって，どんどん 0 に近づいていく．

言いかえれば $P(X=0)^t$ と 0 との間の距離がどんどん短くなっていく．こんな風に

t	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=0)^t$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{1000000}$	$\frac{1}{10000000}$

$$

「どう？　大体のイメージはつかめたかな？」花京院は $P(X=0)^t$ が t の増加と共に 0 に近づいていく様子を表で示した．

「うん，そうだなあ．たしかに t が大きくなると，$P(X=0)^t$ は小さくなっていくね」

「神杉さん，0 にものすごく近いけど 0 じゃない小さな数を何か一つ言ってみて」

「え？　……うーん，それじゃあ……1 億分の 1」青葉はとっさに答えた．

「《1 億分の 1》は 1/10 の 8 乗だね．つまり t が 9 よりも大きければ，$P(X=0)=0.1$ のと

き，

$$P(X=0)^t \text{ と } 0 \text{ の距離}$$

は《1 億分の 1》より小さくなる．

神杉さんがどんな小さな数を言ったとしても，———たとえそれが 1000 兆分の 1 でも———，僕は t として適当に大きな数を選ぶことで，その数以降の

$$P(X=0)^t \text{ と } 0 \text{ の距離}$$

を《1000 兆分の 1》よりもさらに小さくできる．これが 0 に限りなく近づくってことの意味だよ」

「うん. 極限の意味は, 大体分かったよ. ……でも, tを限りなく大きくするといっても, 人間の寿命なんてせいぜい 100 歳でしょ？　ある程度まで行くと，それ以上大きくならないんじゃないかな」

「確かに君の言うとおり, 人の行為に関するモデルだから，t を 1 年と解釈する場合には, あまり大きな数を想定しても現実的じゃない．$t=20, n=50, p=0.05$ という条件で考えてみよう．この場合 20 年の間ずっと，誰からも好かれない確率は

$$\begin{aligned} P(X=0)^{20} &= \{(1-p)^{50}\}^{20} \\ &\approx 5.29 \times 10^{-23} \\ &= 0.0000000000000000000000529 \end{aligned}$$

でしかない．かなり 0 に近い数だ」

「そうだね，これくらい小さな数字なら，ほとんど 0 に見えるね」

11.1. モデルが教えてくれること

「出会いモデルのパラメータについての分析結果をまとめると，こうだ」

- 他の条件が等しければ，p が大きいほど，$P(X \geq x)$ が大きくなる．
- 他の条件が等しければ，$x > np$ の範囲で p が大きいほど $P(X = x)$ も大きくなる．
- 他の条件が等しければ，n が大きいほど，$P(X \geq x)$ が大きくなる．

「驚くべき結果ではないけれど，一般的に証明できたことは，いいことだ．ちなみに平均については次のことが直ちに言える」

- p が大きいほど，自分を好きになる人の平均人数は，大きくなる
- n が大きいほど，自分を好きになる人の平均人数は，大きくなる

「このことは，出会いモデルが二項分布で表現できるという命題から，派生的に言える．こういう命題を系と呼んだりする．出会いモデルの現実的な含意の一つは，より多くの人から好かれるための基本戦略には，次の二種類がある，ということなんだ」

1. 自分の魅力を上昇させて，異性 1 人から好かれる確率 p を増加させる
2. より多くの人に出会う

「どちらの方法が簡単だと思う？　数学的には n も p も単なる確率関数のパラメータに過ぎない．でもそのパラメータの持つ経験的意味は全然違う．君がモテたいと思ったとき，どちらの戦略を選ぶ？」

「そうだなあ，一人一人から好かれる確率 p を増加させるって，よく考えると難しいかな．そもそも，その方法が分かれば苦労しないっていうか‥‥‥．でも《多くの人に出会う》は，比較的簡単にできそう」

「僕もそう思う．世の中には，どうやったら魅力的な人間になれるか？　という言説で溢れかえっているけど，それができれば誰も苦労しない．コストを考えれば，より多くの人と出会うことの方がよほど簡単だ．もっと具体的に示そう」

$n=10, p=0.01$ という条件のとき，1人以上から好かれる確率は

$$P(X \geq 1) \approx 0.0956$$

だ．自分の魅力を上げて $p=0.05$ まで上昇させると，この確率は

$$P(X \geq 1) \approx 0.40126$$

まで増加する．このとき p はそのままで，出会う人数だけを10人から52人まで増やすと，1人以上から好かれる確率は

$$P(X \geq 1) \approx 0.40703$$

となり，ほぼ同レベルの確率を達成できる．

「p を増加させる確実な方法を僕らはハッキリとは知らない．でも n を増加させる方法なら知っている．つまり p と n とでは現実世界における増加の意味合いが違う．人間行動のモデルにおいて，この違いはとても重要だ」

「なるほど‥‥‥」

「2項分布の確率分布自体は，ありふれたものだ．でもそのフレームを通してみると，社会は以前と違って見える．僕はその眺めが好きなんだ」

青葉にとっては，数学を通して見える社会だけでなく，数学そのものが新鮮だった．

12. 陪審定理——第 3 変奏

将来の出来事を，現在のそれから推論することは，できることではない

5.1361

12.1. 内定がもらえる確率

研究室では 4 年生の男女数名が，お茶をのみながら休憩していた．

「あれれ，スーツなんか着てみなさんどうしたんですか？」青葉は 4 年生たちに声をかけた．金融系企業の合同説明会に出ていたんだ，と紺色のスーツを着た男子学生が答えた．机の上には説明会の配付資料があちこちに散乱している．

私は家電メーカーの 1 次面接の帰りだよ，緊張して疲れちゃった，黒いジャケットにタイトスカートをはいた女子学生が答えた．いつもはカジュアルな服装をしているせいか，スーツを着ているだけで，ぐっと大人びて見える．先輩達の顔つきが少しだけ引き締まっているように青葉には思えた．

「へえ，就職活動かあ……，たいへんですねえ」

青葉は他人ごとのように言った．実際，彼女にとってそれは，まだ遠い未来の話だった．

「そんな人ごとみたいに考えてないで，青葉ちゃんも，早めに志望先を決めて準備しておいた方がいいよ，あっという間なんだから」先輩の一人がアドバイスした．

しかし青葉は，自分が働いている姿を全く想像することができなかった．当然ながら，どういう業界で働きたいのか，という志望すらもっていなかった．スーツを着た学生達はそれぞれの卒業論文指導ゼミに参加するために，研究室から出て行った．青葉は就職についてぼんやりと考えながら，研究室の隅で本を読んでいた花京院に目をやった．

「ねえ，花京院君は就職について考えたことある？」青葉はおそるおそる聞いた．

「考えていないこともない」

「へえ，もう考えてるんだ．えらいなあ」

「《考えていないこともない》は《考えていない》の否定だから，論理的には《考えている》という意味だから，そう解釈してもらっても大過ない．しかし，ニュアンスとしては，やや積極性を欠いた状態で考えている，と言う意味をこめたつもりだ——．まあ，なんにせよ，もう少しさきの話だよ」

（相変わらず，無駄に理屈っぽいなあ……）

「私もそろそろ将来のこと考えたほうがいいのかなあ．最近は新卒でもなかなか就職が厳しいって話だし．ちゃんと内定もらえるかなあ」青葉は不安そうにつぶやいた．

「気になるなら，計算してみるといい」花京院は冷静に言った．

「え？　そんなこと計算できるの？」

「2 項分布を使えば，おおまかな近似計算はできる」

「そうなの？　だって 2 項分布って，出会いのモデルでしょ？　そんな使い方していいの？」

「ベルヌーイ試行の解釈を変えれば，当然，他の現象にも適用できる．就職活動もそのうちの一つだ」花京院は読んでいた本を閉じると青葉の方へと視線を移動した．

「どういうふうに考えればいいの？」

「パラメータの解釈を変えればいいんだよ．自分が訪問する会社数を n，ある一つの会社から内定をもらえる確率を p とおく．p は全ての会社で等しく，各会社は独立に学生を採用するかどうかを判定していると仮定する．たとえば 1 社あたり，0.05 の確率で内定が出るという条件のもとで，100 社の入社試験を受けたと仮定しよう．このとき，どこからも内定をもらえない確率は――」

$$

確率変数 X を《n 社を訪問して獲得した内定の総数》と定義する．ある 1 つの会社が内定を出す確率が 0.05 だから，　100 社全てが内定を出さない確率は

$$P(X=0)=\underbrace{(1-0.05)\times(1-0.05)\times\cdots\times(1-0.05)}_{100\text{社}}=(0.95)^{100}\approx 0.00592053$$

となる．

逆に《1 社以上から内定が出る確率 $P(X\geq 1)$》は《100 社全てから内定が出ない確率 $P(X=0)$》を 1 から引けばよい．つまり

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-(0.95)^{100}\approx 0.99408$$

だ．

ちなみに 50 社しか会社訪問しなかった場合，50 社全てから内定が出ない確率は

$$P(X=0)=\underbrace{0.95\times 0.95\times\cdots\times 0.95}_{50\text{社}}=(0.95)^{50}\approx\ 0.076945$$

だから，50 社訪問して 1 社以上から内定が出る確率は

$$P(X\geq 1)=1-(0.95)^{50}\approx 0.923055$$

だ．さらに手を抜いて 10 社しか訪問しなかった場合，

$$P(X \geq 1) = 1 - (0.95)^{10} \approx 0.401263$$

となる．まあ 90%程度の安心がほしければ 45 社は訪問することだね．

内定をたくさんもらったところで，最終的に就職するのは必ず 1 社だ．だから，たくさん訪問して，たくさん内定をもらい，自分にとって最も望ましい会社に就職するのが最適な戦略だね．まあ，当たり前か．

$$

「ただし業種や職種によるマッチングの相性という問題は，まだ残っている．それはまた今度考えてみよう」花京院は，計算用紙のすみに課題をメモ書きした．

（男女の出会いと就職活動って，一見するとまったく異なるのに……同じ数学的構造が潜んでるって，ちょっとおもしろい……．私には見えなかった共通点が，どうして花京院君には見えるんだろう……数学をもっと勉強したら，私にも見えるのかな……）

12.2. 花京院の進路

「花京院君は，どういう会社に就職したいの？」

「僕は――」花京院は，次の言葉を迷っているかのようにうつむいた．

「僕は，就職活動をしないつもりだ．少なくとも学部を卒業する段階では」

「へえ，そうなんだ．卒業したらどうするの？」青葉は花京院の言葉を意外に思った．彼の大学の成績が極めて優秀であることを知っていたからだ．性格的に営業職などには向かないかもしれないが，企画や会計で能力を発揮するタイプだろうと青葉は勝手に想像していた．

「僕は，――できれば，大学院に進もうと思っている」

「へえ，すごいじゃん」

青葉は，彼が既に卒業後の進路を考えていることにまず驚いたし，その進路が想像もしなかった道であることにも驚いた．しかし花京院の表情は，どういうわけか険しかった．

「ただ，先生が――，僕の進学に，賛成していないようなんだ」

「え？　そうなの？　先生って，うちの研究室の美田園先生のこと？」

「うん」

「どうしてなのかな？」

「理由はよく分からない」彼はそこまで話すと口をつぐんだ．しばらく沈黙が続いた．青葉は残っていたコーヒーを飲んだ．花京院は腕を組んだままじっと視線を床に落としていた．

「先生が反対しても，花京院君ならきっと優秀な研究者になれるんじゃないかな」

「自信は，あまりない．きっと先生も見込みがないと思ってるんだと思う．そうでなけれ

ば，賛成してくれるはずだ」

「大丈夫だよ．きっと……．だって花京院君は，数学をあんな風に使えるんだもん」

「あんな風って？」

「私はこれまで……数学って，与えられた方程式を解いたり，与えられた図形の面積を計算することにしか使えないと思っていたんだ．でも花京院君は，《出会い》や《就職活動》みたいな，一見数学とは関係なさそうな現象を表現するのに数学を使っていたでしょ？　そういうことが考えられる人って，きっと研究に向いていると思うんだ．だから大丈夫だよ」

「ありがとう」そう言って花京院は微笑んだ．花京院の表情を見て彼女は少しほっとした．

「そうだね．数学は，僕たちが考えているよりも，ずっと自由なはずだ．きっと不自由なのは僕たちの頭の方なんだ」彼はその言葉を，とても大事そうに言った．

「人の行動や社会は全て数学で表せるの？」

青葉の質問に対して，花京院は少し考えた．

「世界の全てを表すことは無理だと思う．でも人の行動や社会現象の一部は数学的なモデルで表現できると思う．そしてまだ表現できていない現象は，たくさんあるはずだ」

「へえ，おもしろそうだね」

「神杉さんにだって，できるよ」

「ほんと？」

「うん．数理モデルは誰にでも作れる」花京院は少しだけ力をこめて言った．

この数ヶ月の間で青葉の数学に対する態度は少しずつ変わっていた．花京院の作った数理モデルの世界をのぞいているうちに，こういう数学なら自分も興味が持てるかもしれない，と彼女は感じ始めていた．

しかしそれでも，彼女にはまだ自信が足りなかった．

自分の頭で何か新しいことを考えつく能力が自分には欠けている，特に数学に関しては，自分にはセンスがない……そんな風に彼女は思い込んでいた．

（数学はもっと自由で，不自由なのは私たちのアタマのほう，か……）

青葉は花京院の言葉を心の中でゆっくりと繰り返した．

12.3. 進路相談

個人研究室のドアを開けると，花京院は緊張したまま面談用の椅子に座った．花京院は，はじめて美田園の部屋をおとずれたとき，旧い SF 映画に出てくる宇宙船の操縦室を連想した．部屋の中央には大きな机が一つだけ配置され，壁面の全ては巨大なホワイトボードで覆われている．机の前後には教員用と学生用に椅子が一脚ずつ配置され，面談の際には机を挟

んで向かいあう構図になる．

この部屋には電話機がない．美田園が LAN 以外のケーブルを全て引き抜いてしまったため，外線も内線も通じないからだ．

紙の資料は全てスキャナでデジタル化され，オリジナルを破棄するために棚もキャビネットも本棚さえこの部屋には存在しない．

机と椅子，壁面を囲むボード全てが白一色で統一され，色彩すら不要のものとしてこの部屋から排除されていた．このような設備で仕事に支障がないのか不思議だったが，本人は個人研究室としてこれが最適化された空間であると宣言していた．目的にとって不要なものは全て排除する，それがこの部屋の思想だ．部屋を訪れた者は，そのデザインを支える強固な思想にいやおうなく曝された．

「先生，卒業後の進路について相談があるんですが――」

美田園は，机に座って，何か数式を書きながら顔も上げずに話を聞いていた．これが美田園のいつものスタイルだった．不思議と作業をしながらでも学生の話をちゃんと聞けるようだった．

「君は確か，大学院志望だったね」

「はい」と花京院は答えた．

「以前にもこの件については話したことがあったな．内容は覚えている？」

「はい．部分的にですけど」花京院は以前，大学院進学について美田園に相談したときのことを思い出していた．

花京院は，自分の進学を美田園が諸手を挙げて賛成してくれるものと信じていたが，実際の反応は違っていた．

こと研究に関する限り，質問や相談に対して美田園が不明瞭な答を述べることは一切なかった．だが花京院が美田園に大学院への進学希望を打ち明けたときの反応は，それまでとは異なっていた．美田園はめずらしく口ごもったのである．

ようやく聞き出した美田園の返答は，さっぱり要を得ないものだった．かいつまんでいえば，どうしてもというのならば止めないが，勧めはしない，という返事．それは美田園にしては，煮えきらない曖昧な返事だった．

（自分に研究者としての資質がないから，賛成してくれないのか……）花京院は，当然そう考えた．そして自分に研究者としての才能や能力がないと判断しているなら正直に言ってほしいと頼んだこともあった．

しかし，美田園はその可能性は否定した．

『君に能力がないわけではないし，そもそも現時点で能力があるかどうかなど誰にも分か

らない．これは個人の問題ではなく，君や私の意思ではどうにもならない問題なのだ』

美田園の返答は，花京院の予想とは異なる奇妙なものだった．今日こそ，その理由をはっきりさせるために，花京院は美田園の研究室を訪れたのである．

「君は文学部の再編についての噂を聞いたことはある？」美田園は突然，花京院が予想もしていなかったことを質問した．学部再編の噂は確かに知っていた．以前そのことについて青葉とも話をしたことがある．

「はい, 聞いたことがあります. ――確か, 文学部から社会科学系の学科が独立するとか」

「その後，大学の中期計画に見直しがあった．現在は文学部を含む文系学部の理工系学部への統合が検討されている」

「え？　文学部が消えてしまうということですか？　単に社会科学系の学科が独立して新しい学部になるんじゃなかったんですかか？」

「確定しているわけではないが，文学部が消える可能性は低くはない」

「じゃあ，この研究室はどうなるんですか？」

「いまのところ未定だ．最悪の場合は，他の学部学科に吸収されて消える」そう言って美田園は頭の後ろで両手を組んだ．

「これが，私が君に大学院への進学を勧めなかった理由の一つだ．君が進学しても，この研究室が存続するかどうか分からないし，私自身がこの大学に残っているかどうかすら定かではない」

花京院は目の前が一気に暗くなるのを感じた．純粋数学から応用数学に転進した自分にとって，この研究室が唯一の居場所だと思っていたのに．

「でも，どうして文学部がなくなるんですか？」花京院はかろうじて聞いた．美田園はしばらく考え込んだ．どこまで花京院に話すべきか迷っているように見えた．

「理由は単純ではない．役員会や経営協議会がいくつかの事情を勘案した結果として，その計画が立てられたのだ．しかし，あえて単純化して本質的な理由を二，三述べるとするならば……」美田園は，そこで言葉を切って少し考えた．

「第一に，文学部は他の学部に比較すると大学院も含めて定員充足率が低い．第二に文学部の研究は，理工系の学部に比べて大学の外部から獲得してくる研究費が圧倒的に少ない．ひとことでいえば，金と人が集まらないからなくしてしまえ，ということさ」

「そんな……」

「君も知っているとおり，国立大学の経済的基盤は運営費交付金という国からの補助金で成り立っている．この補助金は年々削減されているから，外部資金の獲得に貢献できない学部を抱えていることは，大学法人にとってリスクになると判断されたのだ．この計画をどう思う？」

人が集まらないから，そして予算が取れないから，研究室を廃止する．理由としてはあまりに明白すぎて，反論できないような気がした．

「はあ……，そういうふうに言われると，なんとも言えないです．納得は出来ませんけど」花京院は自分の感想を正直に伝えた．

「私もそう思う．研究と教育を目的とする大学の運営は，そもそも企業経営とは違うと考えるべきだ. 短期的な採算にあうから続けるとか, 合わないから止めるというものではない」

12.4. 陪審定理

「ここでわたしたちが悲嘆したり怒ってもはじまらないな……．コーヒーでも飲んで一息つこう」美田園は二人分のコーヒーを用意した．

「集合的な意思決定は，個人の意思決定よりも，ある条件下では優れている･･･，陪審定理って聞いた事あるかい？」美田園はそう言って，立ち上がると研究室の壁面のホワイトボードに式を書いた．

「はい，一応聞いた事はあります」花京院は答えた．

「集団が n 人からなり，それぞれが独立に，ある決定命題の真偽を判定したと仮定する．真の判定を下す人の数が過半数を超える確率は，二項分布の確率関数の和で表現できる．」美田園は次のように説明した．

$$

一人一人が独立に確率 p で正しい決定を下す，と仮定する．すると x 人が正しい決定を下す確率は 2 項分布の確率関数 $P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ で表される．集団人数 n が偶数であると仮定すると，過半数は $(n/2)+1$ 以上の数となる．過半数以上の人間が正しい決定を下す確率は

$$P(X \geq \frac{n}{2}+1) = \sum_{x=\frac{n}{2}+1}^{n} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x}$$

となる．この確率は，多数決によって正しい判断に至る確率とも言える．

確率 $P(X \geq \frac{n}{2}+1)$ は n の増加と共に単調に増加する． $p>0.5$ という条件下では

$$\lim_{n\to\infty} P(X \geq \frac{n}{2}+1) = 1$$

が成立する．これがコンドルセの陪審定理とよばれる命題だ．

$$

美田園がなんのために陪審定理の話を急に始めたのか，理解できなかった．陪審定理は，1 人 1 人が 0.5 よりも大きい確率で正しい判断ができるとき，多数決によって正しい判断をする確率が 1 になる，という命題だ．

「この命題のおもしろさは，各個人が 0.5 よりも僅かに大きい確率で正しい判断ができれば，*n* の増加により《多数決によって正しく判断できる確率》が増加する点だ．三人寄れば文殊の知恵，*n* 人寄れば菩薩の知恵，といったところかな」

「先生，陪審定理の意味は分かるんですが，先ほどの話と一体どういう関連が——」

「人と金が集まらない学部を潰すという判断の正しい確率が 0.5 よりも大きいならば，多数決によってその意見を採択することは，陪審定理によって正しい……」

花京院は，ようやく話が飲み込めた．

「しかし，個人の判断が 0.5 より僅かでも大きいという仮定は本当に満たされているのだろうか？　また個人間の判断は独立だろうか？」美田園は自問した．

「でも，真か偽か，2 通りの結果しない場合，でたらめに判断したとしても，正しい確率は 1/2 です．大学運営に関わっているような賢い人達なら，正しい判断が出来る確率は 1/2 より大きいんじゃないですか？」

「そうだといいね．でも正しいか間違っているか，2 つに 1 つを選ぶ場合であっても，人が正しい道を選ぶ確率は 1/2 とは限らない．1/2 になるのは，双方を等しい確率で選択するときだけだ．人は真剣に考えた結果，時として誤った道をそうとは知らずに選ぶことがある．皮肉なもんだよ」美田園は寂しそうに笑った．

花京院は，そんなことってあるのだろうかと考えた．目をつぶって選んだとしても正答率が 1/2 のときに，真剣に考えた結果間違った答えを選ぶなんてことが，ほんとうに？

花京院の様子を見て，美田園はこう言った．

「ハンス・ロスリングという統計学者の話をしっているかい？　彼はスウェーデンのとある医科大の授業で，『次にあげる 5 組から，乳幼児死亡率が高い方の国をそれぞれ選べ』っていうクイズを学生に出したそうだよ」美田園はホワイトボードに国名を書いた．

スリランカ	or	トルコ
ポーランド	or	韓国
マレーシア	or	ロシア
パキスタン	or	ヴェトナム
タイ	or	南アフリカ

「君ならどう答える？」

花京院はそれぞれのペアを見て，経済発展の度合いが低い国の方が，死亡率が高いだろうと考えた．経済的に貧しければ，医療設備が十分ではなく，乳幼児死亡率が高いはずだと推測したのである．

花京院はそれぞれ順番に，スリランカ，韓国，マレーシア，ヴェトナム，タイと答えた．

「君の答えは，まさに模範解答だよ」美田園はその答えを聞いて微笑んだ．花京院は，自分の答えに自信があるわけではなかったが，少なくとも半分以上は正解しているだろうと思った．

「全問不正解だ」

「え？　ほんとですか？」花京院は思わず声をあげた．

「チンパンジーに同じ問題を答えさせると，……むろん彼らは問題の意味を理解できないが，平均正答率は 2.5 問くらいだろうね．でたらめに選べば半分は正解だから．ちなみにスウェーデンのエリート学生達の平均正答率は 1.8 問程度, 研究所の教授達の平均が 2.4 問だったそうだよ．これがなにを意味しているか分かるかい？」

花京院はクイズを全問間違えたことがショックで，何も言えなかった．彼は自分がまさに誤った思い込みによって間違ったことを知り，落ち込んだ．

（こういう短絡的なところが，僕はやっぱりだめなのかな）

「人間という生き物は，ときおり真剣に考えるがゆえに間違いを選ぶ．バイアスや思い込みによってね．例え十分に知性的な人間であっても，集団的意思決定の結果として，間違った道を選ぶことは十分にありえる」美田園はホワイトボードに式を一つ追加した．

$p < 0.5$ という条件下では

$$\lim_{n\to\infty} P(X \geq \frac{n}{2}+1) = 0$$

「陪審定理のもう一つの顔だよ．一人一人の判断が正しい確率がわずかでも 0.5 を下回るとき，集合的意思決定が正しい判断を下す確率は 0 だ．私はそれを危惧している」

花京院は陪審定理を使った美田園のたとえ話を理解した．

「ところで先生，さっき僕に《これが大学院進学を勧めない理由の一つだ》とおっしゃいましたが，別の理由がまだあるんですか」

彼はずっと，美田園の言葉の中にあった《理由の一つ》という表現が気になっていた．

しかし美田園は，それはまた機会があったら話そうと言って，この話を打ち切った．

13.　連続分布――第 4 変奏

もしも私がその対象を知っているとすれば，さまざまな事態のうちそれが出現するすべての可能性をも知っているのである．

2.0123

13.1.　モデルのコア

図書館の自習室――．研究室に立ち寄る前に，青葉には一人でやることがあった．

『数理モデルは誰でもつくることができる』

花京院のその言葉を信じ，彼女は自分一人でモデル作りに挑戦しようと思ったのだ．読み終えたばかりの『基礎数学』を手にして，青葉は空いている机を探した．学期末試験が近いせいか，自習室はほぼ満席だ．両脇を高さ 30cm ほどの板で仕切られた机の上で，学生達はめいめい自分の作業に没頭している．

やっと空席を見つけた青葉は椅子に腰掛けると，真っ白なノートを開いた．

（さて，どんなモデルを考えよう‥‥‥）

作業にとりかかった青葉はすぐに，今までとは全く異なる難しさがそこに潜んでいることに気づいた．花京院に与えられた課題を考えているときは，到達すべき具体的な目標があった．しかし，いまはそれがない．

（うーん，一体どこから手をつければいいんだろう‥‥‥．これは，ちょっと‥‥‥いや，かなり難しいかも‥‥‥）

自習室で，青葉は 2 時間ばかり頭をひねった．しかし，よいアイデアは生まれなかった．

（そうか‥‥‥．なにを考えるべきかを考えることが，一番難しいんだ）

青葉は研究室へと向かった．

「ねえ，花京院君」

「うん」花京院は一人で本を黙々と読んでいる．

「このあいだ，『数理モデルは誰でもつくることができる』って言ったよね」

「ああ」

「ちょっとやってみたんだけど，うまくいかないの．どうやればモデルって作れるの？」

花京院は読んでいた本を閉じた．

「何もないところから始めるのは，難しいよ．そういうときは，ベースになるモデルを探して，まずはそれに少しだけ修正を加えるんだ」

「どういうこと？」

「そうだな．例えばこのあいだ《出会いのモデル》を 2 項分布を使って，作っただろう？あれをベースにして拡張を考えてみればいい」

青葉は，モデルを拡張する，ということをうまく想像できなかった．

「それって，あれかなあ……コア・ファイターみたいなものかな」

「コアファイター？」

「コア・ファイターっていう，ガンダムに出てくる戦闘機はね……変形してガンダムのコックピットになるんだ．ちょうど，ガンダムのおなかの部分に格納されてるんだけど，ガンダムだけじゃなくって，他のガンキャノンやガンタンクやGファイターのコックピットにもなるわけ」

「へえ，そうなんだ．おもしろい設定だね」

「用途にあわせて，上半身と下半身をつけ変えることで，いろいろんなタイプに変形できるの．《2 項分布をベースにしてモデルを拡張する》って，そういう感じかな？」

「うーん……ガンダムをみたことないから分からないけど，共通部分を残しつつ部品を取り替える事で，別の用途に使えるように拡張するっていう意味では似ているのかもしれないな」

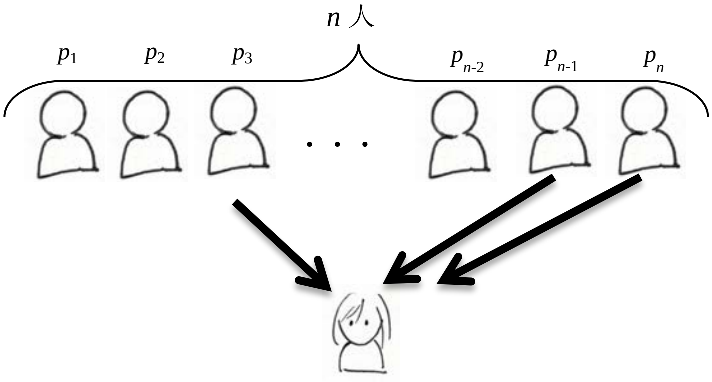
「男の子の教養として，一度くらいガンダムを観ることをお勧めするわ」青葉はせんべいに手を伸ばした．ちなみに観るならファーストガンダムからだよ，と彼女は付け加えた．

「うん，まあ時間があったら見てみるよ．じゃあ実際に《出会いモデル》を修正してみよう．神杉さんは，あのモデルのどこをなおしたら，もっといいモデルになると思う？」

青葉はしばらく考えた．

「そうだなあ……，やっぱり《1 人 1 人が全員同じ確率 p で自分を好きになる》っていう仮定かな．実際には，好みって人それぞれだろうし……全員が同じ確率 p で好きになるってのは無理があるよね．ちなみに私が好きなタイプは……」

「いや，君のタイプは今度ゆっくり聞くとして，まずは《好み》や《嗜好》の違いを表現する方法を考えよう．出会った人それぞれの p の値が違う，と仮定するんだよ．まず絵で描くとこんなイメージだ」花京院は計算用紙に図を描いた．



図：モデルのイメージ（p が n 人の間で異なる）

「ふむふむ，それで」青葉は身をのりだしてきた．花京院は黙って天井を見上げると，頭の後ろで手を組んだ．

青葉は，花京院が言葉を発するのを待った．

……

……

……

しかし，花京院は腕を組んだままじっと考え事にふけるだけで，一向に話を再開しなかった．しばらくすると，計算用紙に矢印や記号や数式を書きはじめた．余白が無くなると新しい紙を取り出し，また同じような作業を繰り返した．

やがて，天井の一点をじっと見つめると，そこで動かなくなった．まるで，視線の先からアイデアがあふれてくることを期待しているかのように．しかし，何も起こらなかった．

コーヒーでも飲もうか，と花京院が提案して立ち上がった．

「うまくいかないときは，とりあえず逃避でコーヒーを飲む．これがなかなかおいしい」花京院はいれたてのコーヒーを一口飲んだ．

「でも，どうせなら，うまくいった後に飲んだほうがおいしいんじゃないかな？」

「それもそうだね」花京院はにこりと笑った．

13.2. アンリのおせっかい

二人がコーヒーを飲んでいると，突然ドアをノックする音が聞こえた．一人の女子学生が研究室に入ってくる．

（あ，あのときの美人だ……）

長い黒髪と耳に光るピアス．ベージュのトレンチコートを肩にはおり，その下には白いシャツとジーンズをあわせている．赤いヒールが大人びてみえた．

青葉はその人物が，以前研究室で花京院と話をしていた女子学生であることにすぐ気づいた．

「今日は先端研に行くんじゃなかったの？」挨拶もそこそこに花京院が女子学生に話しかけた．やはり顔見知りのようだ．先端研とは，先端応用数理研究所の略称で，花京院が以前所属していた理学部にある施設の名称である．

「今日はあなたじゃなくて，美田園先生に用があって来たの．先生は今どちら？」その声は低く，落ち着いている．自分よりもきっと年上だろうと青葉は思った．

「えーっと，今日は委員会があるって言ってたから，この時間は教授棟の方だと思うよ」花京院が答えた．

「いつお戻りかしら？」

「うーん，多分あと 30 分くらいで個人研究室に戻ってくると思うけど———．どうする？ここで待つ？」

「そうね……」女子学生は腕時計を見て，少し考えた．そしてちらりと青葉の方を見た．花京院は，女子学生を青葉に紹介した．

「えっと，彼女はね，理学部の七北(ななきた)さん．僕が前にいた研究室の同級生だよ．といっても，僕は留年しているから，彼女の方が今では学年が上だけどね」

七北は青葉に向かってにっこりと微笑んだ．

「こんにちは．七北アンリです．理学部応用数学科の 4 年生です」

「あ，神杉青葉です．はじめまして……」

青葉の自己紹介が終わるやいなや，アンリは自分の顔をぐっと青葉の顔に近づけた．その距離は明らかに青葉のパーソナルスペースを侵害していた．彼女は青葉の瞳をじっとのぞきこんだ．煙草の匂いがする．青葉は硬直したまま，ぱちくりとまばたきした．

「あなた，とっても可愛い目をしてるわね……青葉ちゃんって呼んでいいかしら」

「え……，あ，は，はい」青葉はどぎまぎして後ずさりしながらこたえた．花京院は，困惑する青葉を気遣い，アンリに座るよう椅子を勧めた．

「気にしないで，彼女いつもこうだから」花京院は青葉に小声で言った．

テーブルの上には，計算用紙が散乱していた．七北アンリは座りながら，ちらりと机上に散乱するメモを見た．

「なにか計算してたの？」とアンリが聞いた．

「うん」

「ちょっと見せてもらってもいい？」

「え，いや――これは，まだ途中だから」

青葉は，花京院の様子が少しヘンだと思った．

（応用数学科の人だったら，なにかいいアイデアをくれるかもしれないのに．どうして見せたくないんだろう？）

結局，花京院は，あまり気のりしない様子のまま，アンリに押し切られる形で，これまでの計算結果を見せることにした．

アンリは，しばらくのあいだ資料を読みふけった．花京院は何も説明しなかった．しばらく静寂が続いた．ときおり微かな音量で，なるほど，とか，うんなどの独り言を彼女は発した．短時間だったが，とても集中しているように見えた．やがてアンリは計算用紙の束を机の上に置いた．

「最近はこんなことを考えてるんだ」アンリが計算用紙に書かれた数式を指さした．花京院はだまってうなずいた．

「君はいまどんなことをやっているの？　複素射影平面の局所等長埋め込み？　それともフェラス不等式の射影幾何的証明？」今度は花京院が逆に聞いた．

「ううん，最近は，ちょっと違う方面に興味が出てきたかな．尖点特異点の幾何学的不変量と対称凸錐体に付随するゼータ関数の間で成立する関係，特に対称管状領域の場合の Hirzebruch 予想について考えているの」

青葉にとって，二人の会話は外国語のように聞こえた．何について語っているのか，全く理解できなかった．

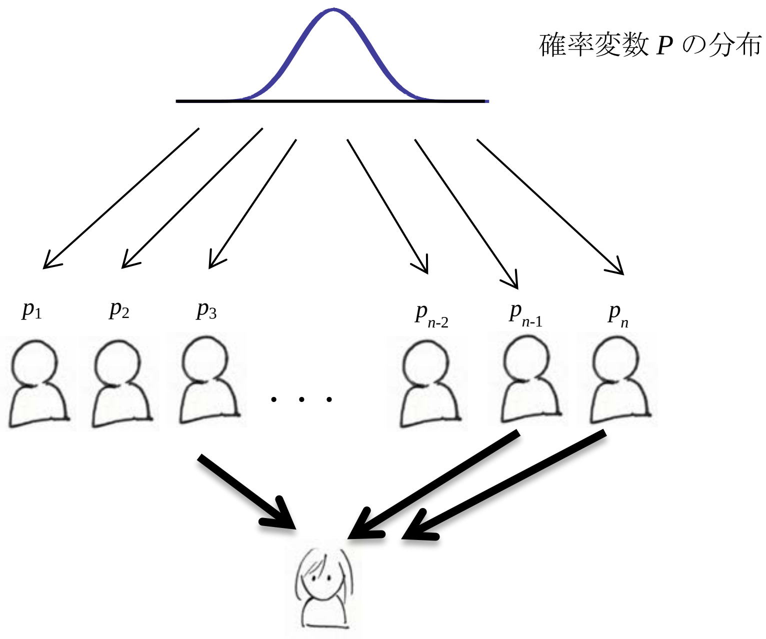
「青葉ちゃんも，美田園先生のゼミ生なの？」

アンリの質問に，青葉はうなずいた．

「ふうん, なるほどね……」アンリは計算用紙を一枚手にとると, 花京院をじっと見た．花京院は，はじめ目をそらしていたが，やがてアンリと視線を合わせた．

「何か思いついた？」花京院が口惜しそうに聞いた．

「ふふふ, バレた？　いっそのこと母数 p が分布を持つって仮定したらどうかなと思って」そう言ってアンリは，花京院の描いたイメージ図に，確率密度関数のグラフを書き足した．



青葉は首をかしげた．

一方，花京院は，図を見ただけでアンリが提案したアイデアを理解した．

「つまり各個人の p_i をパラメータ P の分布の実現値と見なすってことか……．いいアイデアだと思うよ．でも確率変数を合成したあとの確率関数をうまく定義できるのかな？」花京院は頭の中で計算をはじめた．アンリは目をつぶって，10 秒ほど集中した．

「好かれる数 X と 2 項分布のパラメータ p が確率変数だと考えれば，p で積分した値は X の周辺分布になるはず……，p は確率だから，ベータ分布あたりが適当じゃないかしら」

アンリは独り言のようにつぶやくと，数式を紙に書きはじめた．それは，考えながら式を書くスピードではなく，既に頭の中でできあがった式を再現する速さに見えた．

$$

2 項分布のパラメータ p がベータ分布に従うと仮定すると，確率関数は X, p の同時確率関数の周辺確率分布によって与えられる．つまり

$$f(x) = \int_0^1 {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \cdot \frac{1}{B(a,b)} p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp$$

で与えられるから……これを計算すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{B(a,b)}\,{}_nC_x \int_0^1 p^x(1-p)^{n-x} \cdot p^{a-1}(1-p)^{b-1}dp \\
&= \frac{1}{B(a,b)}\,{}_nC_x \int_0^1 p^{x+a-1}(1-p)^{n-x+b-1}dp \\
&= {}_nC_x \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)}
\end{aligned}
$$

だね．つまり，母数 p がベータ分布に従う場合，n 人と出会って x 人から好かれる確率は

$$
P(X = x \mid p) = {}_nC_x \frac{B(a+x, b+n-x)}{B(a,b)}
$$

になるみたいよ．おもしろいね．2 項分布のパラメータがベータ分布に従っていると仮定すると，確率関数がコンビネーションとベータ関数の積になるんだ．

わりと自然な発想だから，すでに存在する分布かもね．

$$

アンリはペンをおくと，計算結果を楽しそうに眺めた．花京院は黙ったまま，アンリが示した式を見つめていた．青葉はアンリの話をよく理解できなかったが，花京院がやろうとしてできなかったことをアンリがやってのけたことだけは，分かった．

「二人の邪魔しちゃったかな？　ごめんなさい」アンリは，遊びに夢中になった子供のように，屈託のない笑みを浮かべていた．

花京院はむすっとしたまま何も答えなかった．

「そろそろ 30 分たったわね．じゃあ美田園先生の研究室をのぞいてみるね．相手をしてくれてありがとう」そう言い残して，アンリは去って行った．

青葉は花京院と顔を見合わせた．

「なんだか，変わった人だね‥‥‥七北さんって．‥‥‥理学部の女子ってみんなああいう感じなの？」

「みんなが彼女みたいなわけじゃあない．ただ彼女はいつもああいう調子なんだ」

「へえ‥‥‥」

「だから彼女には，考えかけの問題を見せたくなか――，まあ，いいや」

13.3. ベータ分布とは？

「ねえ，花京院君．七北さんが言っていたベータ分布ってなあに？」

「うん，ベータ分布というのは確率分布の一種だよ」花京院は，ベータ分布の確率密度関数をホワイトボードに書いた．

\$\$

定義（ベータ分布）．パラメータ $a>0, b>0$ を持つベータ分布の確率密度関数は

$$f(p)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(a,b)}p^{a-1}(1-p)^{b-1}, & 0\le p\le 1\\ 0, & p<0 \ \text{or}\ 1<p\end{cases}$$

である．

ベータ分布は，[0, 1]以外の範囲では確率が 0 になるような，特殊な確率分布なんだ．直感的に言えば，確率変数の実現値が 0 から 1 の範囲におさまる確率が正で，それ以外だと 0 になるんだよ．

分母の $B(a,b)$ はベータ関数と呼ばれる関数で，明示的には

$$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$$

という積分だ． a,b が自然数のときは，もっと簡単に

$$B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt=\frac{(a-1)!(b-1)!}{(a+b-1)!}$$

と表せる．

\$\$

「花京院君……」

「ん？」

「その説明じゃあ，全然，分からない……」青葉が目を細めて花京院をにらんだ．

「あ，ごめん，ごめん．そうだなあ．ベータ分布はそもそも，いままで使ってきたベルヌーイ分布や 2 項分布と違って連続確率変数だし――，やっぱりそこから説明した方がいいか」花京院はしばらく考え込んだ．

「よし，それじゃあ，これまで同じように，天下り式に分布を導入せずに，ベータ分布をつくってみよう」

「え？　分布をつくる？　そんなことできるの？」

「ベータ分布はね，ベルヌーイ分布からつくることができるんだ．ベルヌーイ分布なら神杉さんも知ってるよね．そこから作れば分かりやすいだろう？」

「うん，ベルヌーイ分布って，

$P(X=1)=p$

$P(X=0)=1-p$

っていう単純な確率変数 X の確率分布でしょ？　そこからスタートすれば分かると思う．2 項分布の時も，ベルヌーイ分布をベースにしたら理解しやすかったし」

「それじゃあ，観察されたデータによって，信念が更新されるプロセスを辿って，ベータ分布を導出してみよう」

花京院はホワイトボードの前で腕組みをして，これから進む道をじっと考えた．

13.4. 連続確率変数

「まず，人の《好み》はそれぞれだってことの意味をよく考えてみよう．これまでに考えてきたモデルだと，出会った人それぞれから好かれる確率は，全部同じ p という数値だった」

「そうだね．例えば p=0.1 って仮定すれば，n 人全員が確率 0.1 で，自分を好きになるという意味だったね」

「言い換えると p は定数だった．これに対して七北さんのアイデアは，この p を《確率変数とみなす》というものだった．p が何らかの確率分布を持つ，という仮定によって，p の値が，人によって違うってことを表現しているんだ」

「ふむふむ」

「p の分布として七北さんは，特に根拠を示さずにベータ分布を使った．そしてパラメータ p がベータ分布に従うような特殊な 2 項分布を導出したんだ」

「そうそう．それでベータ分布ってなによ？　って話になったんだよ」

「僕の考えでは，七北さんはちゃんと理由があってベータ分布を選んだのだと思う．今から彼女が辿ったプロセスをトレースしてみようと思う．まず p の分布なんだけど，神杉さんなら，どんな分布を想像する？」

「え？　私？　そんなの，わかるわけないじゃん．……とにかく，人によって違う，くらいのことしかわかんない」

「そうだね．僕もよく分からない．だからそのよく分からないっていう事実を出発点にしよう．p の分布については《実現値が 0 から 1 の範囲にある》という情報しかないから，その範囲で同じ確率で実現するって仮定しよう」

「よく分からないから，どれも同じような確率ってことね」

「そういう確率分布を表すのにピッタリの確率分布がある．一様分布だ」

「一様分布．はじめて聞く名前だね」

$$

一様分布の典型的な例はサイコロだよ．全ての出目の確率が等しいようなサイコロの確率分布は

確率変数 X の実現値	1	2	3	4	5	6
確率	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

だった．

確率関数を明示的に書くと，

$$P(X = x) = \frac{1}{6},\ x = 1,2,3,4,5,6$$

だ

$$

「うん，これは分かる．いわゆる《普通の》サイコロだよね．なあんだ．サイコロのことだったのかあ．一様分布なんて言うから，なんか難しいこと想像しちゃった」

「一様分布には，サイコロのような離散確率変数で表現するタイプの他に連続確率変数で表現するタイプがある．これから使いたいのは連続のほうだよ」

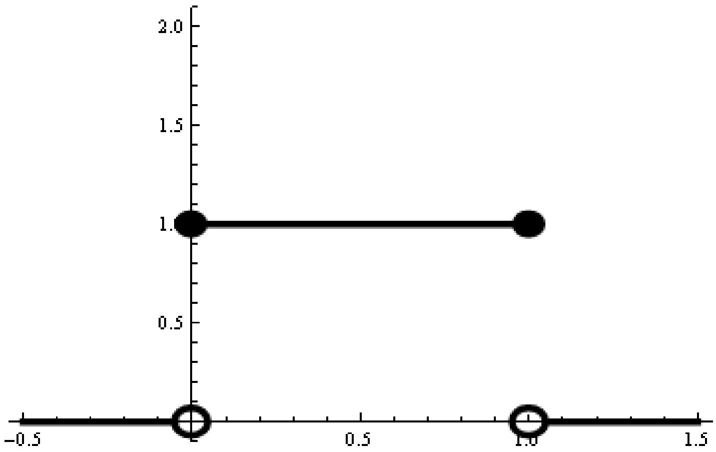
「れんぞく？」

$$

連続確率変数を特徴付けているのは，確率密度関数を使った確率の定義だよ．例えば，

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

という関数を考える．これが連続型一様分布の確率密度関数の一例だよ． x が[0, 1]の範囲内であれば定数 1 で，それ以外は 0 であるような関数だ．グラフを書くと

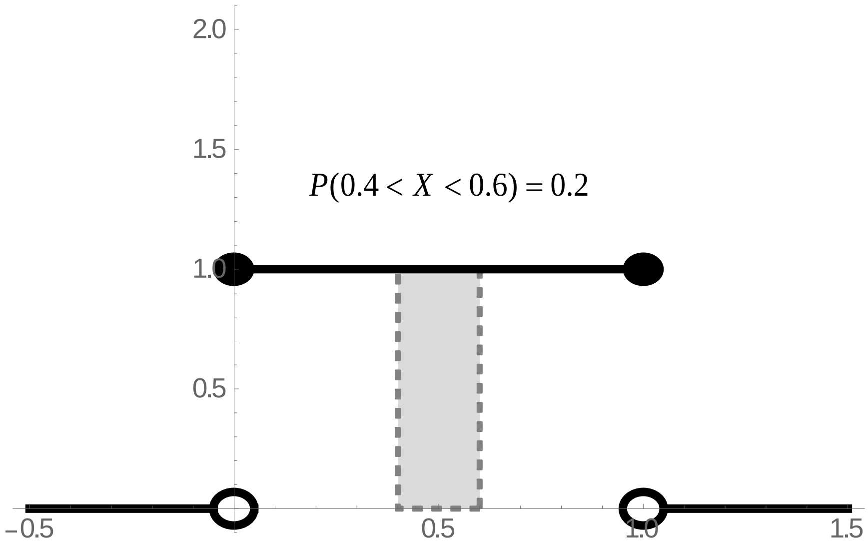


となる．

$$

「ふーん，確率密度関数なんて，難しそうな名前だから身構えちゃったけど，これもずいぶんとシンプルな形なのね」

「確率密度関数は，関数のグラフと x 軸との間の面積で確率を定義する点に特徴がある．グラフ全体の面積は常に 1 なんだよ．例えば次の図のグレーの部分の面積は，連続型一様分布にしたがう連続確率変数 X が 0.4 から 0.6 の範囲で実現する確率，つまり $P(0.4 < X < 0.6)$を表している」



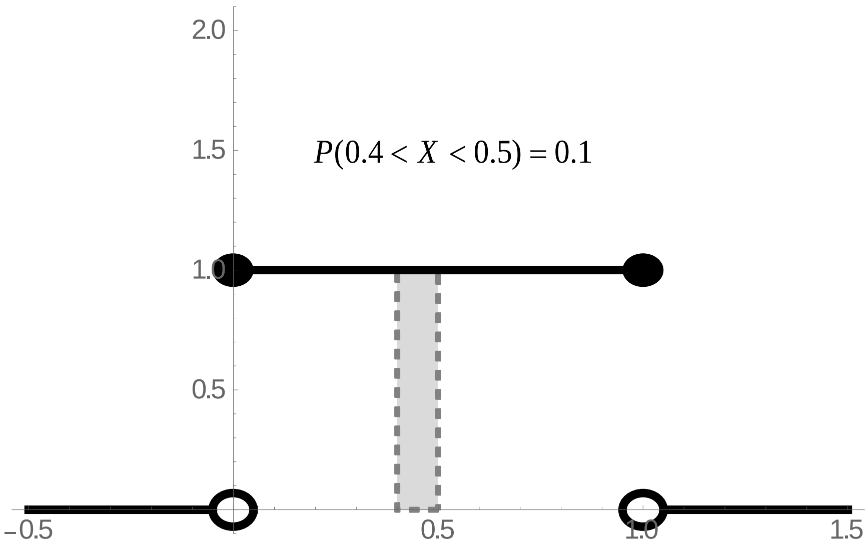
図：連続型一様分布の確率密度関数

「このグレーの部分の面積が確率 $P(0.4 < X < 0.6)$と一致してるの？」
「そうだよ．面積がいくつか分かる？」
「えーっと，これって長方形だよね．底辺が 0.2 で高さが 1 の長方形の面積だから

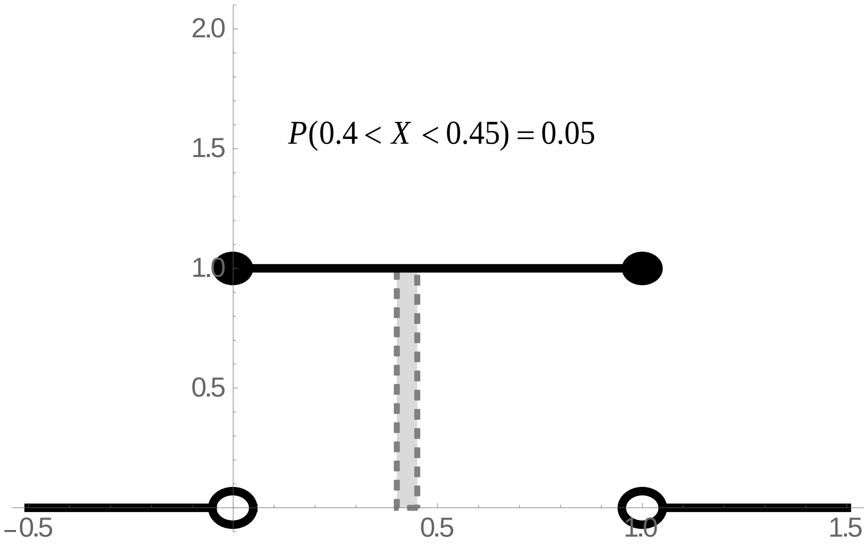
$$0.2 \times 1 = 0.2$$

だよ．つまり確率は 0.2 ってこと？」
「そう．$P(0.4 < X < 0.6)=0.2$ だよ．じゃあ Xが 0.4 から 0.5 の範囲で実現する確率は？」
「えっと，底辺部分が短くなって，0.1 だから，$0.1 \times 1 = 0.1$ かな」
「そうだよ．では実現値の範囲がどんどん狭くなっていくと，どうなると思う？」
花京院は，だんだんと面積が狭くなっていく様子をグラフで示した．

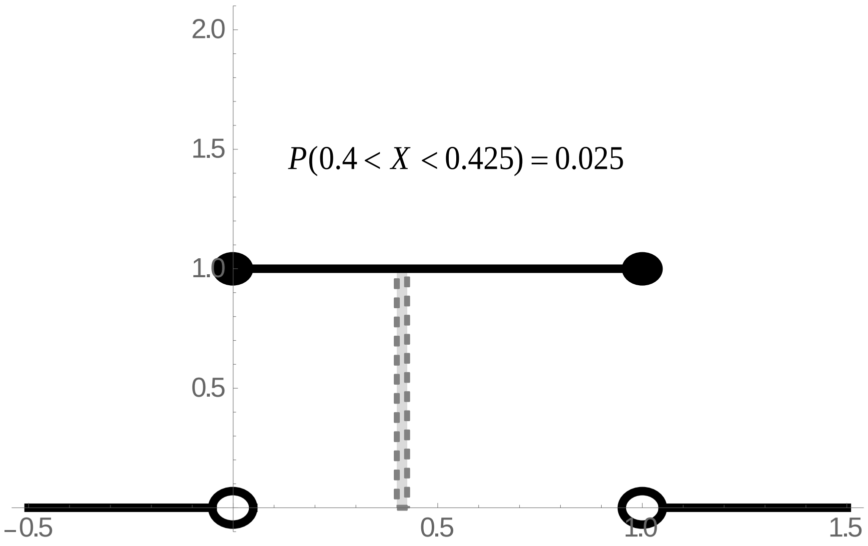
$$



図：$P(0.4 < X < 0.5)$に対応する面積（グレーの部分）



図：$P(0.4 < X < 0.45)$に対応する面積（グレーの部分）



図：$P(0.4 < X < 0.425)$に対応する面積（グレーの部分）

$$

「そうね，だんだん面積が小さくなるから，確率も小さくなっていくはずよね」
「じゃあ，確率変数 X がぴったり X=0.4 となる確率は？」

$$

えーっと，こんな感じで小さくなっていくから‥‥‥

X が 0.4 から 0.6 の範囲で実現する確率	0.2
X が 0.4 から 0.5 の範囲で実現する確率	0.1
X が 0.4 から 0.45 の範囲で実現する確率	0.05
X が 0.4 から 0.425 の範囲で実現する確率	0.025

$$

青葉は返答に困った. このまま続けていけば 0 と答えるのが自然だということは理解できた. しかし，そう考えるとなにか奇妙なことが起こるような予感がした.

「ぴったり $X=0.4$ になる確率は，0 かなあ‥‥‥．でも‥‥‥それだと，なにか変な気がする‥‥‥」青葉はゆっくりと自分の疑問を口にした.

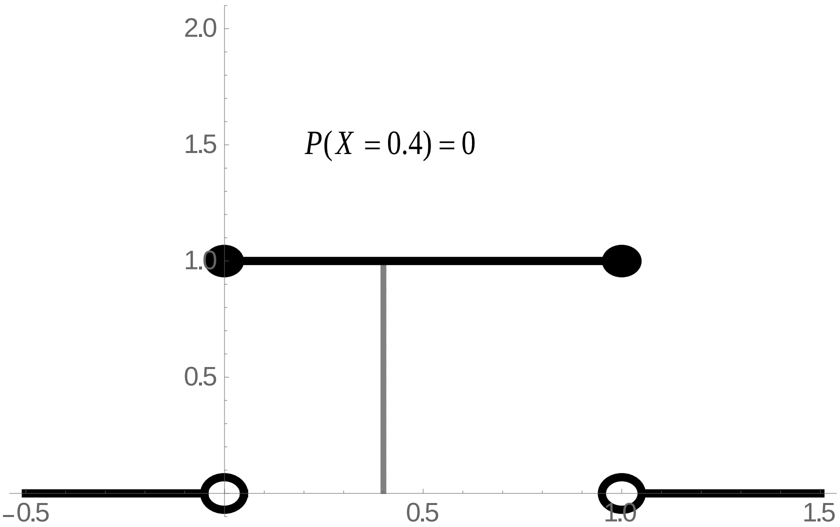
「どうして？」

「だって，$P(X=0.4)$ になる確率が 0 なら，$P(X=0.1)$ も $P(X=0.2)$ も $P(X=0.3)$ も，ぜーんぶ確率 0 ってことになるでしょ」

「うん．そう考えるのが自然だね」花京院は落ち着いていた．青葉の疑問を予期していたように.

$$

図で書くと，こんな感じになるよ.



高さは 1 だけど，底辺の長さが 0 だから面積は

$$1\times 0=0$$

になる，だから確率は 0.

$$

「でもさあ，それだと《0 から 1 のあいだにある全ての点》の確率が 0 なのに，《0 から 1》っていう範囲そのもの》が実現する確率が 1 ってことになるでしょ？」

「そういうことになるね」

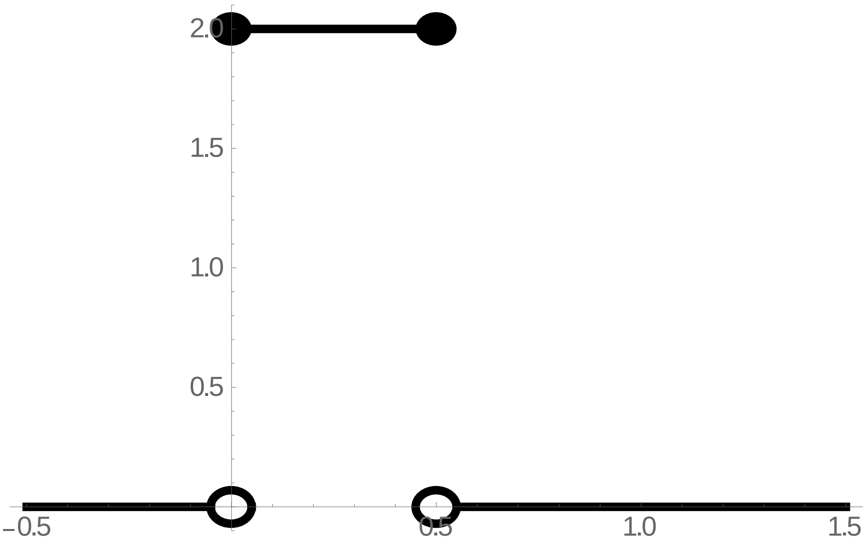
「0 をたくさん足しても 0 なのに，全事象の確率が 1 になるのって，なんか変な気がする」

「そうだね．各点の確率は 0 なのに，全範囲では 1 になる．実に不思議だ．つまり連続確率変数の場合，全事象の確率は各点の確率の合計ではない，ってこと．これが《離散確率変数》と《連続確率変数》の違いなんだ」

「うーん，よく分からないなあ．関数のグラフの面積と確率が一致するっていうのは，おもしろいんだけど．これまでに使ってきた 2 項分布の確率関数は，計算すると《確率》を出力したはずでしょ？　どうして確率密度関数の場合は，密度関数の値と確率が一致しないんだろう？　」青葉は確率密度関数という概念が今ひとつ理解できなかった．

「僕も最初は，確率関数と確率密度関数の違いが，よく分からなかった．次の例をみて」花京院は新しいグラフを書いた．

$$



これは一様分布の確率密度関数だよ．範囲が[0, 0.5]にかわっている．

$$f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 0.5 \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

高さが 2 に増えて，幅が 0.5 に減ったから，[0, 0.5] の範囲で面積は

$$0.5 \times 2 = 1$$

で全事象の確率はちゃんと 1 になっている．

もし確率密度関数の値が確率だとすると，例えば

$$f(0.25) = 2$$

だから

$$P(X = 0.25) = 2$$

になってしまう．これは確率の公理に反する．でも任意の点 a について

$$P(X = a) = 0$$

なら，問題ない．

一方で，ある程度の長さを持った区間を考えれば，例えば

$$P(0 \le X \le 0.25)$$

を考えると，この部分の面積は

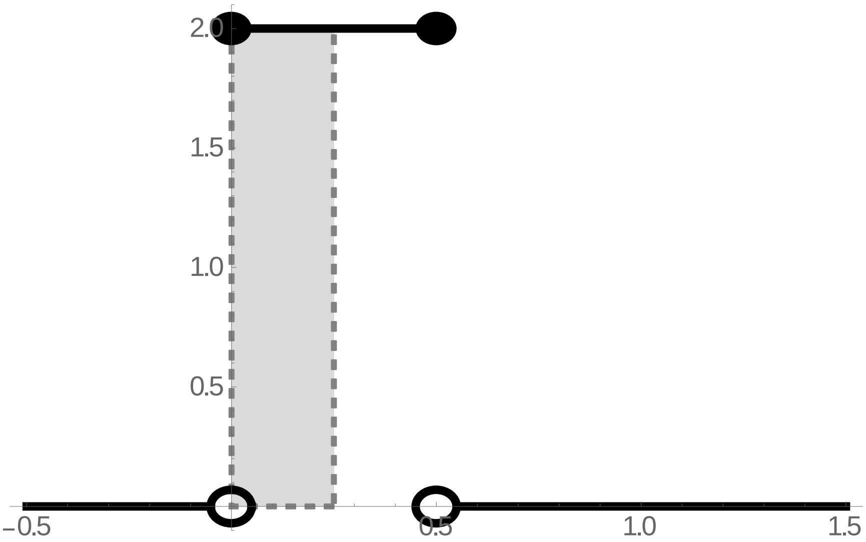
$$2 \times 0.25 = 0.5$$

だから

$$P(0 \le X \le 0.25) = 0.5$$

となる．

グラフで書くとこうだよ．



一様分布だからちょうど半分の区間が実現する確率は 0.5 なんだ.

一般的な定義を確認しておこう.

定義（一様分布）. 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{それ以外}\end{cases}$$

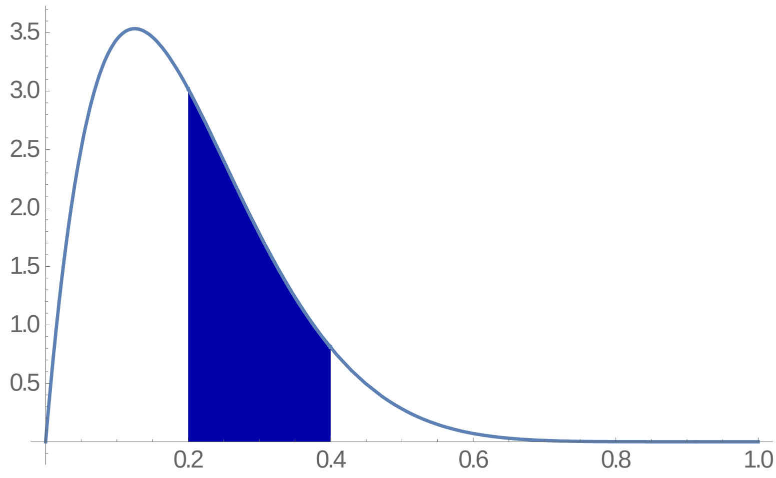
であるとき，確率変数 X は一様分布にしたがう，という.

$$

「うーん, そっかあ. 確かにある 1 点をとる確率が 0 じゃないと都合が悪いのは, 分かった. でもさあ，一様分布の場合は面積を簡単に計算できるけど，確率密度関数のグラフがぐにゃっとした曲線だったらどうするの？」青葉は曲線を使ってグラフを画いた.

「こんな風に，曲線で囲まれた図形の面積を計算するには，確率密度関数を積分するんだよ．確率密度関数は，確率関数と違って，確率変数が《ある範囲で実現する確率》を出力する関数なんだ」花京院はグラフの一部に色をつけて出力した.

$$



これはベータ分布の確率密度関数のグラフだよ．0.2 から 0.4 の範囲で色をつけてある．この色がついた部分の面積が

$$P(0.2 < X < 0.4)$$

に対応している．この部分が，

確率変数 p が 0.2 から 0.4 の間の値をとる確率

に等しい．つまり確率密度関数を《0.2 から 0.4 の範囲で積分した値》が，ちょうど確率変数が《0.2 から 0.4 の間に実現する確率》に等しいんだ．

　こういうイメージで考えるといい．

表：確率関数と確率密度関数の性質

	計算	結果の例
確率関数 $f(x)$	確率変数の実現値 $x=5$ を代入	$f(5)=P(X=a)=0.1$
確率密度関数 $h(x)$	確率変数の実現範囲 $3 \le x \le 5$ を積分	$\int_3^5 h(x)\ dx = P(3 \le X \le 5) = 0.15$

$$

「じゃあ，ベータ分布にしたがう確率変数 X がピッタリ X=0.5 になる確率や X=0.2 になる確率はどうやって計算するの？」

「いっしょだよ．その範囲で積分すればいい，つまり

$$\int_{0.5}^{0.5} f(x)\ \ dx = 0, \qquad \int_{0.2}^{0.2} f(x)\ \ dx = 0,$$

だから確率は 0 だよ．確率密度関数は，積分することで確率を出力する関数だから，確率変数が《ある範囲で実現する確率》を与えるけど，《ある 1 点をとる確率》は自動的に 0 だ」

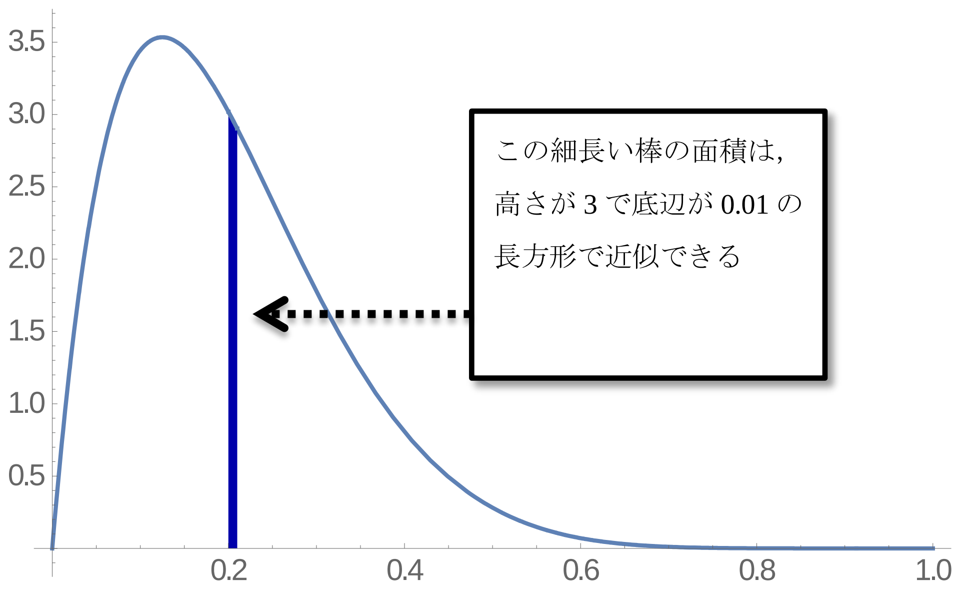
「面積と確率が一致してるってなんか不思議‥‥‥どうして高さが 1 を超えてるのに，面積が 1 を超えないんだろう？」

\$\$

さっきの図を使って説明しよう．x=0.2 のところで関数 $f(x)$ は，だいたい 3 だ．正確には 3.0199 だけどね． $0.2 < x < 0.21$ の範囲で囲まれた面積は，すごく細長いから，大体 3×0.01 の長方形で近似できる．計算するとこれは 3×0.01=0.03 でしかない．

つまりグラフの高さが 1 を超えていても，底辺の長さが短ければ，積分しても 1 を超えないんだ．

実際に，色がついた部分を積分すると 0.0296225 だから 0.03 にとても近い



\$\$

「そうかあ，積分って高校の時に習って，いつ使うんだろうって思ってたけど，確率を計算するときに使えるなんてしらなかったなあ」

「社会科学で積分を使う場面は，確率計算が多いから覚えておくといいよ」

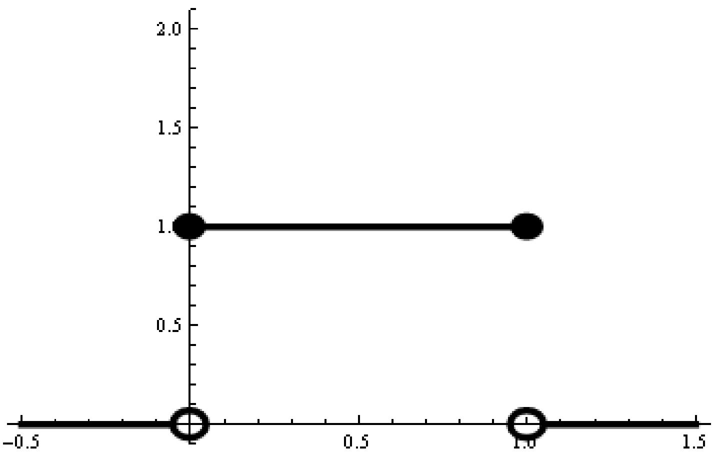
14. ベータ分布――第 5 変奏

ある命題が私たちにとって自明なものであるとしても，このことから，それが真であることが帰結しているのではない．とすれば，自明ということも，命題の真理性に対する私たちの信仰を正当化しうるものではない．

5.1363

14.1. ベイズの定理

「さてっと，話を戻そう．僕らは，君が好かれる確率 p が人によって異なることを，どうやって表現するかってことを考えてきた」
「そうだったね」
「これを《p が連続一様分布に従う》という仮定で表す．ここまではいいかな？」
「なんだかよく分からないから，p は 0 から 1 の範囲で同じような確率で実現するって仮定したんだね」
「そうだよ．図で画けば，こうだ」



図：p の確率密度関数

「これを，なんの情報もない場合の出発点の分布という意味で，事前分布と呼ぶ．次に考えたいのは，君が実際に人と出会って，好かれたり，好かれなかったりする経験を経て，この p の分布がどう変化するかってことなんだ」
「ふむふむ」
「この考え方の基礎にあるのは条件付き確率だ．例えば，《3 人の男性と出会った》という条件のもとで，《人に好かれる確率 p》は何か？　を考えるんだ」

「条件付き確率‥‥‥，えーと，たしかサイコロの場合だと，《偶数がでた》という条件のもとで，《2》がでる確率を，条件付き確率で計算したんだっけ」

「そうだよ．よく覚えてたね．《偶数が出る事象》を A と，《2 が出る事象》を G とおけば，A という条件のもとで，G が生じる確率は，

$$P(G \mid A) = \frac{P(G \cap A)}{P(A)}$$

と書けるんだよ」

$$

この条件付き確率の両辺に $P(A)$ をかけて分母をはらうと

$$P(G \mid A)P(A) = P(G \cap A)$$

になる．

　このとき $P(G \cap A)$ の G と A の位置を入れ替えても同じことだから

$$P(A \cap G) = P(G \mid A)P(A)$$

と置き換えることができる．

　ここで事象 B を《奇数がでる》事象と定義しよう．つまり

事象 A　偶数が出る

事象 B　奇数が出る

だから，事象 A, B は相互に排反，すなわち $A \cap B = \varnothing$ であり，全事象 Ω は $\Omega = A \cup B$ と表すことができる．一方，事象 G（2 が出る）は

$$\begin{aligned}
P(G) &= P(G \cap \Omega) \\
&= P(G \cap (A \cup B)) \\
&= P((G \cap A) \cup (G \cap B)) && \text{分配則} \\
&= P(G \cap A) + P(G \cap B) && \text{有限加法性}
\end{aligned}$$

と書くことができる．この式を使って，$P(A \mid G)$ を考えてみよう．A と G の位置がさっきとは逆になっているよ．

$$\begin{aligned}
P(A \mid G) &= \frac{P(A \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G \cap A)}{P(G)} \\
&= \frac{P(G \mid A)P(A)}{P(G \cap A) + P(G \cap B)} \\
&= \frac{P(G \mid A)P(A)}{P(G \mid A)P(A) + P(G \mid B)P(B)}
\end{aligned}$$

　これをベイズの定理という．ここでは定理が天下り式に導入されたんじゃなくって，条件

付き確率の定理から演繹的に定理が出てきたことが重要だよ

$$

「えーっと，計算が正しいのは，分かるんだけど．これと好かれる確率の分布と，どういう関係があるの？」
「君が好かれる確率を，アプリオリに仮定するのではなく，ベイズの定理を利用して，データに基づいて推定するんだよ.」

$$

ベイズの定理を，与えられたデータと，データによって変化する確率という観点から解釈してみよう．例えば単に $P(A)$ を考えると，何も情報がない状態で偶数がでる確率だから，

$$P(A) = 1/2$$

と考えるのが自然だ.

一方で《2 が出た》という事象を観察したデータと捉えてみよう．すると G というデータが与えられたとき，偶数が出る確率は，$P(A|G) = 1$ になる．つまり偶数が出る確率の分布がデータを観察したことで，変化したんだ.

そこでベイズの定理を《観察データ》と《確率を知りたい実現値》という観点から書き直してみよう．観察したデータを D，実現値を θ_1 とおくよ．いままで，君が好かれる確率を p で表してきたけど，ここからさき，この p が確率変数であることを強調するために，θ で表すことにするよ.

従来の書き方

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B)}, \ \Omega = A \cup B$$

観察データを強調した書き方

$$P(\theta_1|D) = \frac{P(D|\theta_1)P(\theta_1)}{P(D|\theta_1)P(\theta_1) + P(D|\theta_2)P(\theta_2)}, \ \Omega = \theta_1 \cup \theta_2$$

これで確率変数の実現値が離散的な場合は表現できる．例えば実現値が $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ と離散的な値をとる場合に，観察データ D のもとでの実現値 θ_i の確率は

$$P(\theta_i \mid D) = \frac{P(D \mid \theta_i)P(\theta_i)}{P(D \mid \theta_1)P(\theta_1) + P(D \mid \theta_2)P(\theta_2) + \cdots + P(D \mid \theta_n)P(\theta_n)}$$

と表現できる．

分母がややこしいので，もっと単純に書き換えよう．条件付き確率の定義から

$$P(\theta_i \mid D) = \frac{P(D \cap \theta_i)}{P(D)} \tag{1}$$

だった．同様に

$$P(D \mid \theta_i) = \frac{P(D \cap \theta_i)}{P(\theta_i)}$$

だから，この分母をはらうと

$$P(D \mid \theta_i)P(\theta_i) = P(D \cap \theta_i)$$

となる．これを (1) の分子に代入する

$$P(\theta_i \mid D) = \frac{P(D \mid \theta_i)P(\theta_i)}{P(D)}$$

となる．これはベイズの定理の分母を簡略化した形になっている．ここで$1/P(D) = k$ とおけば，k は定数だからベイズの定理は簡単に

$$P(\theta_i \mid D) = kP(D \mid \theta_i)P(\theta_i)$$

と書ける

$$

「えーと実現値がたくさんあるって，よく分からないんだけど」

「例えば，おでぶサイコロみたいな立方体ではないサイコロを考えて，各目の確率が分からない場合を想像してみよう」

$$

このとき，出目は 6 個だから実現値は 6 種類だ．でもそれぞれの確率は分からない．つまり

$$P(X=1)=? \;\; P(X=2)=? \;\; P(X=3)=?$$
$$P(X=4)=? \;\; P(X=5)=? \;\; P(X=6)=?$$

という状態だとする．このよく分からない事を記号θを使って

$$P(X=1)=\theta_1 \;\; P(X=2)=\theta_2 \;\; P(X=3)=\theta_3$$
$$P(X=4)=\theta_4 \;\; P(X=5)=\theta_5 \;\; P(X=6)=\theta_6$$

と書く．このよく分からない$\theta_1 \sim \theta_6$を観察したデータから，推定するのにベイズの定理が応用できるんだ．

例えば極端な話，100 回サイコロを振って，100 回とも 1 が出るようなイカサマサイコロを考えてみよう．もしそんなデータが得られたら，

$$\theta_1 = 1,$$
$$\theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0$$

って考えるのが自然だろう？

《100 回振ったら，全部 1 が出た》というデータ（事象 D）が与えられたとする．この情報を得た後の確率 θ_1 は

$$P(\theta_1 \mid D)$$

と書ける．そしてベイズの定理が主張していることは，この確率が

$$P(\theta_1 \mid D) = kP(D \mid \theta_1)P(\theta_1)$$

で，表される，ということなんだ

\$\$

「うーんと，でも実際どうやってそれを計算するのかなあ」

「それを実際にこれからやってみよう」

14.2.　ベイズ更新

花京院はホワイトボードに 2 つの式を並べて書いた. 2 つの式の見た目はよく似ていたが，その意味するところは若干異なっていた.

\$\$

準備として離散じゃなくて連続確率変数の場合を考える. 連続確率変数を特徴づけるのは，確率密度関数だったから，確率の記号 P を確率密度関数に置き換えて

離散の場合　$P(\theta_i \mid D) = kP(D \mid \theta_i)P(\theta_i)$

連続の場合　$\underbrace{f_1(\theta \mid D)}_{\text{事後分布}} = kh(D \mid \theta)\, \underbrace{f_0(\theta)}_{\text{事前分布}}$

と表す． $f_0(\theta)$ は，データが与えられる前の，正体不明の確率変数の確率密度関数を表して

いる．これを事前分布と呼ぶことにする．

$f_1(\theta|D)$ はデータ D が与えられたことで，正体が少しわかってきた確率密度関数を表している. 情報がなかったときの $f_0(\theta)$ とは関数の形が変わっているかもしれないから，$f_1(\theta|D)$ と書いたよ. D という条件の下で, ということを明示するために,《$|D$》も追加した．$f_1(\theta|D)$ を事後分布という.

f_0, f_1 と数字を変えたのは,《0》が前で《1》が後を表しているんだよ．

最後に $h(D|\theta)$ は θ がある分布を持っているという条件の下で，データ D が与えられる確率だよ．

$$

「うーん，最後の $h(D|\theta)$ って分からないな」

「ある θ のもとで，観察されるデータの確率ってことだよ．例えば，1 人が君を好きになる確率が $\theta=1/3$ のとき

$$h(\{\text{好きになる}\}|\theta=1/3)=1/3$$
$$h(\{\text{好きにならない}\}|\theta=1/3)=1-1/3=2/3$$

ってこと．もし θ が 1/2 なら

$$h(\{\text{好きになる}\}|\theta=1/2)=1/2$$
$$h(\{\text{好きにならない}\}|\theta=1/2)=1-1/2=1/2$$

だよ．でも今は θ を確率変数と考えているから，具体的な数値は代入せずに，データが観察される確率は,

$$h(\{\text{好きになる}\}|\theta)=\theta$$
$$h(\{\text{好きにならない}\}|\theta)=1-\theta$$

のどちらかで表記するんだ」

「そっか．出会った人が自分を好きになったら θ で，好きにならなかったら $1-\theta$ だね」

「そういうこと．要するにデータがベルヌーイ確率分布にしたがうと仮定しているんだ」

$$

いま，θ は連続で，君が好かれる確率の分布を表していると仮定する．θ の正体はよくわからないので，最初は区間　[0, 1]　で実現する連続一様分布だと仮定するよ．実現値の範囲が[0, 1]の一様連続分布の確率密度関数は

$$f(x)=1$$

だったから，$f_0(\theta)=1$ だ．これが事前分布だよ．

次にデータだけど，仮に君が 4 人と出会い，それぞれが

1 人目　好きになる
2 人目　好きにならない
3 人目　好きにならない
4 人目　好きにならない

という結果を示したとする．このときの君が好かれる確率 θ の分布はどんな分布だろうか？　順番に考えてみよう．

ベイズの定理から

$$\underbrace{f_1(\theta\,|\,D)}_{\text{事後分布}}=\underbrace{k}_{\text{定数}}\times\underbrace{h(D\,|\,\theta)}_{\substack{\text{観察データ}\\\text{を得る確率}}}\times\underbrace{f_0(\theta)}_{\text{事前分布}}=k\times h(D\,|\,\theta)\times 1$$

1 人目が君を好きになるかどうかは，ベルヌーイ確率変数に従うから

$$h(\{\text{好きになる}\})=\theta$$
$$h(\{\text{好きにならない}\})=1-\theta$$

という確率関数で観察したデータを表すことができる．

$$h(\{\text{好き}\}\,|\,\theta)=\theta$$

だから

$$\underbrace{f_1(\theta\,|\,D)}_{\text{事後分布}}=k\times\theta\times 1=k\theta$$

である．ところで定数 k はどんな値だろうか？　左辺は確率密度関数だから，θ の全範囲で積分したら 1 にならなくてはいけない．つまり

$$\int_{-\infty}^{\infty}k\theta\ d\theta=1$$

という条件を満たす必要がある．そこで積分を計算すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty}k\theta\ d\theta=\int_{-\infty}^{0}k\theta\ d\theta+\int_{0}^{1}k\theta\ d\theta+\int_{1}^{\infty}k\theta\ d\theta=0+\int_{0}^{1}k\theta\ d\theta+0$$
$$=k\int_{0}^{1}\theta\ d\theta=k\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^1=k\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{k}{2}$$

ゆえに

$$\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

だから

$$\underbrace{f_1(\theta \mid D)}_{\text{事後分布}} = 2\theta$$

である．

$$

「うーん……，計算は……まあ，分かるんだけど事後分布が 2θ ってどういう意味なのかな．よく分かんない．確率が 2 倍になったわけじゃないんだよね」

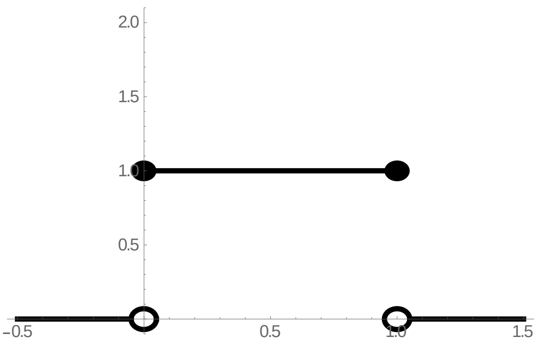
「2θ は 1 人目のデータを観察した後に変化した θ の確率密度関数を表してるんだよ．確率そのものじゃないから注意してね．変化前と変化後の確率密度関数を比較してみよう」

$$

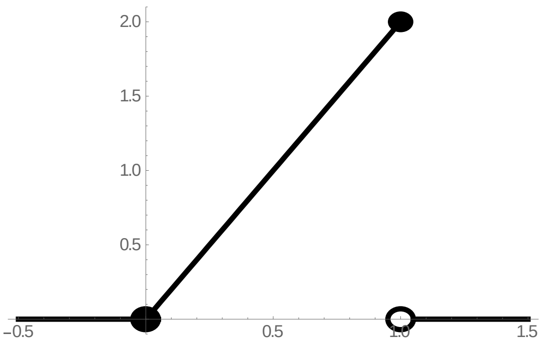
変化前　　　$f_0(\theta) = 1$

変化後　　　$f_1(\theta \mid D) = 2\theta$

それぞれの確率密度関数のグラフを描くと，こうなっている．

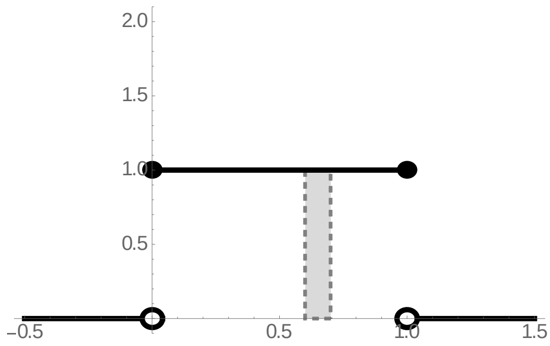


図：変化前の確率密度関数

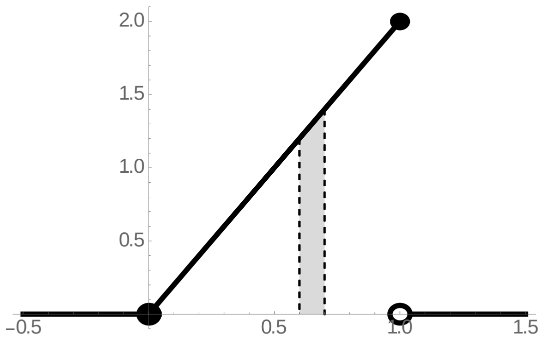


図：変化後の確率密度関数

ここで θ が 0.6 から 0.7 の範囲にある確率 $P(0.6 < \theta < 0.7)$ を計算してみよう．図で描くとグレーの部分の面積の比較だよ．



図：変化前の確率密度関数



図：変化後の確率密度関数

まず事前分布の場合， $P(0.6 < \theta < 0.7) = 0.1 \times 1 = 0.1$

次に事後分布の場合， $P(0.6 < \theta < 0.7) = \dfrac{(1.4 + 1.2) \times 0.1}{2} = \dfrac{0.26}{2} = 0.13$

変化後の確率密度関数では，確率に対応する面積の図形が台形になっている．ほら，図形を横倒しにして見ると台形だろ？　だからこの部分の面積は{(上底+下底)×高さ}/2 っていう公式で計算したよ．

$$

「あ，変化前より，変化後のほうが，面積がちょっと増えてる」

「そう．初期状態では，君が好かれる確率は一様分布だから，[0, 1]の範囲では， θ が実現する確率はどこでも等しい．0.1 の幅に実現値がおさまる確率は，

$$P(0.1 < \theta < 0.2) \quad \text{でも} \quad P(0.4 < \theta < 0.5) \quad \text{でも} \quad P(0.6 < \theta < 0.7)$$

でも，等しく 0.1 だ.

$$P(0.1 < \theta < 0.2) = P(0.4 < \theta < 0.5) = P(0.6 < \theta < 0.7) = 0.1.$$

ところが《君が 1 人と出会い，その人に好かれた》というデータを反映すると，君が好かれる確率 θ の分布は，より 1 に近い範囲で大きくなるように更新される．

確率密度関数が 2θ の場合には，それぞれの確率を計算すると，

$$P(0.1 < \theta < 0.2) = 0.03,\ P(0.4 < \theta < 0.5) = 0.09,\ P(0.6 < \theta < 0.7) = 0.13$$

となる．ここから分かるとおり，君が好かれる確率 θ は，1 に近い範囲で実現する確率が大きくなっている．このような手順で確率密度関数を更新していく作業をベイズ更新という」

$$

続けよう．2 人目のデータは，《好きにならない》だ．1 人目のデータで更新された事後分布が，次のステップでは事前分布になる．そして 2 人目の結果は《好きにならない》だからデータの実現確率は

$$h(D\,|\,\theta) = f(\{\text{好きにならない}\}\,|\,\theta) = 1-\theta$$

である．よって

$$\begin{aligned}
\underbrace{f_2(\theta\,|\,D)}_{\text{事後分布}} &= k \times h(D\,|\,\theta) \times \underbrace{f_1(\theta)}_{\text{事前分布}} \\
\underbrace{f_2(\theta\,|\,\{\text{好きにならない}\})}_{\text{事後分布}} &= k(1-\theta) \times \underbrace{2\theta}_{\text{事前分布}} \\
&= k(2\theta - 2\theta^2)
\end{aligned}$$

先ほどと同様に積分によって定数 k を計算すれば，

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} k(2\theta-2\theta^2)\ d\theta &= \int_{-\infty}^{0} k(2\theta-2\theta^2)\ d\theta + \int_{0}^{1} k(2\theta-2\theta^2)\ d\theta + \int_{1}^{\infty} k(2\theta-2\theta^2)\ d\theta \\
&= 0 + \int_0^1 k(2\theta-2\theta^2)\,d\theta + 0 \\
&= k\left(\int_0^1 2\theta\ d\theta - \int_0^1 2\theta^2\ d\theta\right) = k\left(\left[\theta^2\right]_0^1 - \left[\frac{2\theta^3}{3}\right]_0^1\right) = k\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{k}{3}
\end{aligned}$$

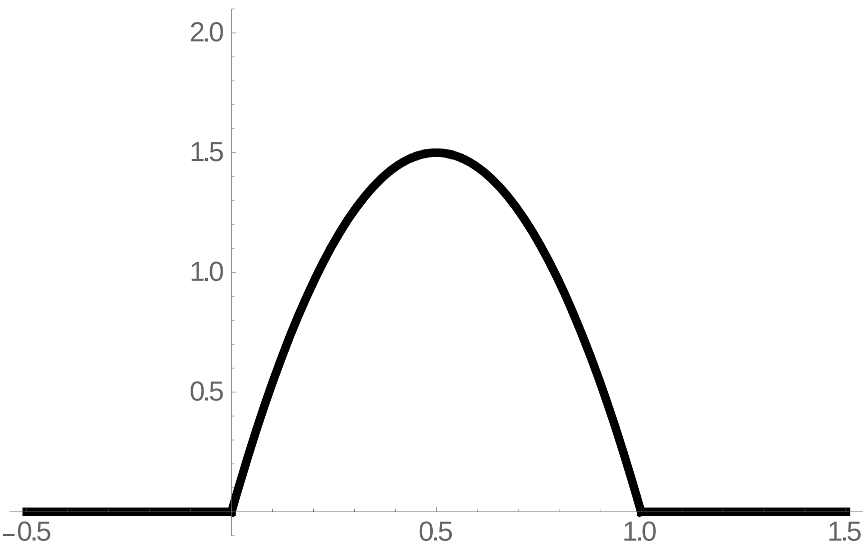
よって

$$\frac{k}{3} = 1 \Leftrightarrow k = 3$$

である．定数を k を代入すれば

$$\underbrace{f_2(\theta\,|\,\{\text{好きにならない}\})}_{\text{事後分布}} = 3(2\theta - 2\theta^2)\,.$$

この確率密度関数のグラフを描いてみよう．



図：2 人目のデータで更新したθの事後分布

$$

「あ，今度は山型になった」

「2 人目のデータは《好きにならない》だから，θが低い値で実現しやすいように，事後分布が更新されたんだ．こうやってデータに合わせて，事後分布を更新していくと，観察したデータを得る確率が最大になるような，事後分布が導出できるんだ．直感的にいえば，観察したデータの確率が最大になるようなθの分布が決まるんだ」

$$

続けて 3 人目のデータを使って事後分布を更新しよう．3 人も，《好きにならない》だ．さっきと同様に直前のステップで更新された事後分布が，次のステップでは事前分布になる．3 人目のデータの実現確率は

$$h(D|\theta) = f(\{\text{好きにならない}\}|\theta) = 1-\theta$$

である．よって

$$\underbrace{f_3(\theta \mid D)}_{\text{事後分布}} = k \times h(D \mid \theta) \times \underbrace{f_2(\theta)}_{\text{事前分布}}$$

$$\underbrace{f_3(\theta \mid \{\text{好きにならない}\})}_{\text{事後分布}} = k(1-\theta) \times \underbrace{3(2\theta - 2\theta^2)}_{\text{事前分布}}$$
$$= 6k(\theta^3 - 2\theta^2 + \theta)$$

積分によって定数 k を計算すれば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} 6k(\theta^3 - 2\theta^2 + \theta)\, d\theta = 0 + \int_0^1 6k(\theta^3 - 2\theta^2 + \theta) + 0$$
$$= 6k\left(\int_0^1 \theta^3 - 2\theta^2 + \theta\, d\theta\right)$$
$$= 6k\left(\left[\frac{\theta^4}{4} - \frac{2\theta^3}{3} + \frac{\theta^2}{2}\right]_0^1\right) = 6k\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{k}{2}$$

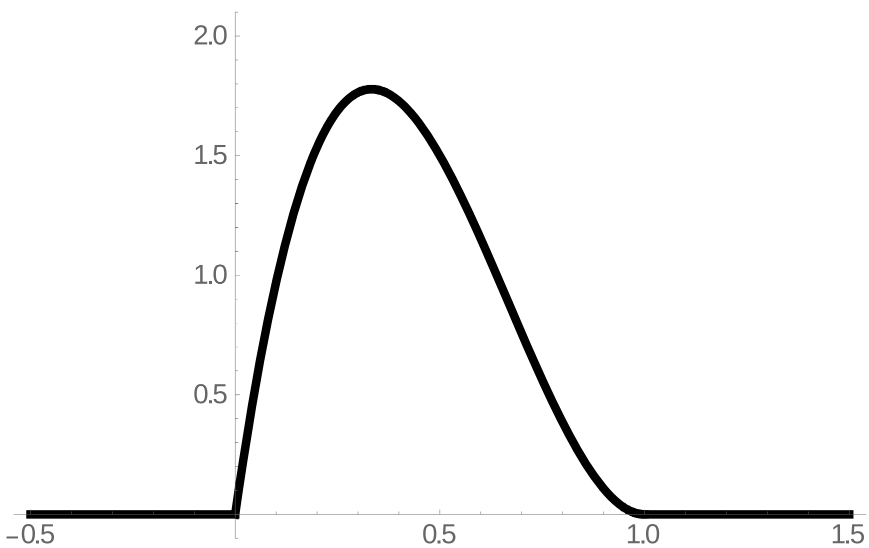
だから

$$\frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

となり,定数を k を代入すれば

$$\underbrace{f_3(\theta \mid \{\text{好きにならない}\})}_{\text{事後分布}} = 12(\theta^3 - 2\theta^2 + \theta)\ .$$

確率密度関数のグラフはこうなる.



図：3 人目のデータで更新したθの事後分布

3 人目のデータが{好きにならない}だったから，θの分布は，さらに低い値の方で実現しやすい形に変わる．グラフで山の形が変化した様子を確認してね．

最後に 4 人目のデータを反映した事後分布を示そう．計算の過程はさっきと同じだよ．4 人目も《好きにならない》だから，

$$\underbrace{f_4(\theta|D)}_{\text{事後分布}} = k \times h(D|\theta) \times \underbrace{f_3(\theta)}_{\text{事前分布}}$$

$$\begin{aligned}\underbrace{f_4(\theta|\{\text{好きにならない}\})}_{\text{事後分布}} &= k(1-\theta) \times \underbrace{12(\theta^3 - 2\theta^2 + \theta)}_{\text{事前分布}} \\ &= 12k(-\theta^4 + 3\theta^3 - 3\theta^2 + \theta)\end{aligned}$$

積分で定数 k を計算すると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} 12k(-\theta^4 + 3\theta^3 - 3\theta^2 + \theta)\, d\theta &= 12k\left(\int_0^1 -\theta^4 + 3\theta^3 - 3\theta^2 + \theta\, d\theta\right) \\ &= 12k\left(\left[-\frac{\theta^5}{5} + \frac{3\theta^4}{4} - \theta^3 + \frac{\theta^2}{2}\right]_0^1\right) \\ &= 12k\left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3k}{5}\end{aligned}$$

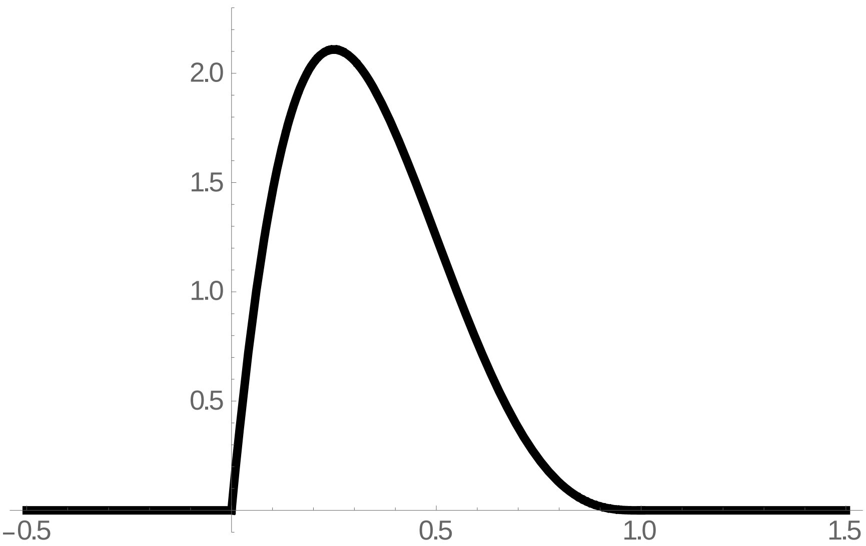
だから

$$\frac{3k}{5} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{5}{3}$$

となり，定数を k を代入すれば

$$\underbrace{f_4(\theta|\{\text{好きにならない}\})}_{\text{事後分布}} = 20(-\theta^4 + 3\theta^3 - 3\theta^2 + \theta)\,.$$

確率密度関数のグラフはこうなる．



図：4 人目のデータで更新した θ の事後分布

$$

「うーん，最初は調子よかったけど，結局山が左の方に寄っちゃったね」

「ビギナーズラックってやつかな．いま説明のために 1 ステップずつ計算したけれど，データの独立性を仮定すれば一度でまとめて計算することができる」

$$

1 人目から 4 人目のデータを確率変数を使って

$$X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0$$

で表すことにしよう．するとデータが得られる確率は

$$\begin{aligned}
&h(D \mid \theta) = h(X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0 \mid \theta) \\
&= P(\{X_1 = 1\} \bigcap \{X_2 = 0\} \bigcap \{X_3 = 0\} \bigcap \{X_4 = 0\}) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0)P(X_4 = 0) \\
&= \theta(1-\theta)(1-\theta)(1-\theta)
\end{aligned}$$

である．ベイズの定理より

$$\underbrace{f_4(\theta \mid D)}_{\text{事後分布}} = k \times h(D \mid \theta) \times \underbrace{f_0(\theta)}_{\text{事前分布}}$$

$$\underbrace{f_4(\theta \mid X_1 = 1,\ X_2 = 0,\ X_3 = 0,\ X_4 = 0)}_{\text{事後分布}} = k \times \theta(1-\theta)(1-\theta)(1-\theta) \times 1$$

$$= k(-\theta^4 + 3\theta^3 - 3\theta^2 + \theta)$$

ここから積分で定数 k を求めると同じ結果になる.

$$

14.3. ベータ分布

「今計算してきたプロセスを一言でまとめると，こうだよ.

データがベルヌーイ確率分布に従う場合に，ベイズ更新によって事後分布を確定すると，その分布はベータ分布に一致する

ここまでの計算は，この一般命題の具体例だったんだ」
「ベータ分布……」
「そう，ベータ分布の定義をも一度書くと，こうだった．記号を θ に変えておくよ」

定義（ベータ分布）．パラメータ $a > 0, b > 0$ を持つベータ分布の確率密度関数は

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}, & 0 \le \theta \le 1 \\ 0, & \theta < 0 \text{ or } 1 < \theta \end{cases}$$

である.

ところでベイズ更新した事前分布と事後分布はベータ分布と一致している事が分かる.

$$\frac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} = \frac{1}{B(1,1)} \theta^{1-1}(1-\theta)^{1-1} = 1 = f_0(\theta)$$

$$\frac{1}{B(a,b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} = \frac{1}{B(2,1)} \theta^{2-1}(1-\theta)^{1-1} = 2\theta = f_1(\theta \mid D)$$

$$\frac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}=\frac{1}{B(2,2)}\theta^{2-1}(1-\theta)^{2-1}=6\theta(1-\theta)=f_2(\theta|D)$$

$$\frac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}=\frac{1}{B(2,3)}\theta^{2-1}(1-\theta)^{3-1}=12\theta(1-\theta)^2=f_3(\theta|D)$$

$$\frac{1}{B(a,b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}=\frac{1}{B(2,4)}\theta^{2-1}(1-\theta)^{4-1}=20\cdot\theta(1-\theta)^3=f_4(\theta|D)$$

こんな具合に．全ての事後分布がベータ分布の確率密度関数と一致するんだ．

一般に，ベルヌーイ分布にしたがう n 個の独立なデータのうち，確率 θ によって実現する事象（好きになる）が x 回観測され，確率 $1-\theta$ によって実現する事象（好きにならない）が $n-x$ 回観測されたとする．このとき事後分布はパラメータ $a=x+1, b=n-x+1$ であるベータ分布に従う．確率密度関数は,

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(x+1,n-x+1)}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x}, & 0\le\theta\le1\\ 0, & \theta<0 \text{ or } 1<\theta\end{cases}$$

である．

$$

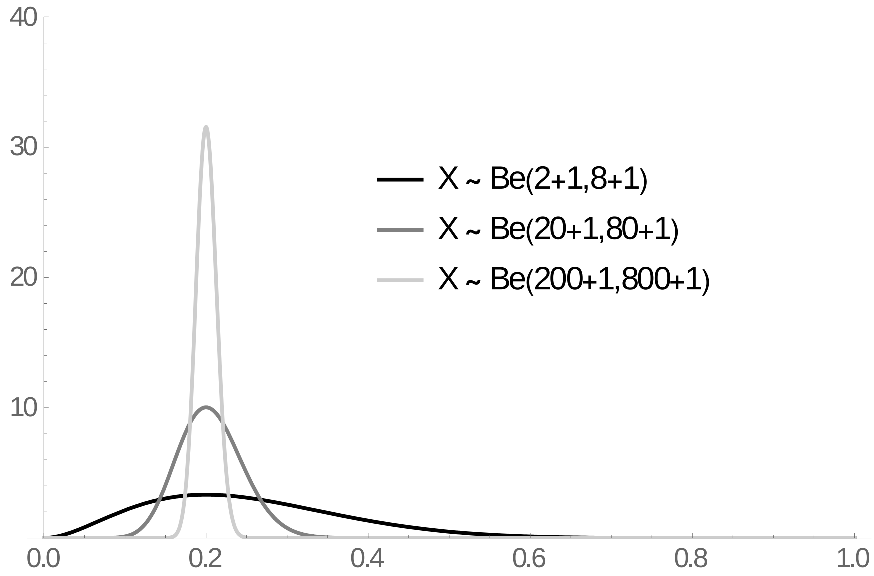
「そっかあ．ベータ分布を，一番単純なベルヌーイ分布から作ることができるって，こういう意味だったんだね．ちゃんと観察したデータを反映する形に変わっていくなんて，うまくできてるなあ」

「こんな風にデータに基づいてパラメータを推定する方法をベイズ推定というんだ．ベイズ推定は，観察データに一番あうようにパラメータを推定するから，僕たちの直感にもよくあうんだ．例えばデータセットに応じて事後分布は次のように変わる」

$$

データセット	事後分布（ベータ分布）
10 人と出会って，2 人から好かれた場合	$Be(2+1,8+1)$
100 人と出会って，20 人から好かれた場合	$Be(20+1,80+1)$
1000 人と出会って，200 人から好かれた場合	$Be(200+1,800+1)$

$Be(a, b)$ はパラメータが a, b であるようなベータ分布を意味する記号だよ．パラメータが出会った人数 n と，好かれた人数 x で一意的に決まる点に注意してね．結果を比較してみよう．次のグラフは，事後分布の確率密度関数の様子だよ．



図：ベータ分布の確率密度関数の比較．黒が $X \sim Be(2+1,8+1)$，灰が $X \sim Be(20+1,80+1)$，薄灰が $X \sim Be(200+1,800+1)$ に対応する，最頻値は全て 0.2.

三つの分布の最頻値は，全て同じで 0.2 だ．なぜならベータ分布の最頻値はパラメータの関数として

$$M = \frac{a-1}{a+b-2}$$

と書けるから，どのデータセットの場合でも，この値は同じになる．

$$M = \frac{a-1}{a+b-2} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = \frac{200}{800} = 0.2$$

ベータ分布の最頻値は，観測データの相対頻度と一致していることが分かる．しかもデータの数が増えるほど，つまりたくさんの人と出会うほど，ベータ分布の分散が小さくなっていく．言い換えれば，実現値が最頻値のすぐ近くばかりに集中するってことだ．これはたくさんデータをとるほど，推定の誤差が小さくなることに対応しているんだ．

ベータ分布 $Be(a, b)$ の平均は

$$E[X] = a/(a+b)$$

で，分散は

$$V[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

だから，どちらもパラメータa,bだけによって決まる．

$a>1, b>1$のとき a,b が共に増加すると，$V[X]$の分母が分子に比して大きくなるから$V[X]$全体として小さくなる．a,b が大きくなると，山の幅が狭くなっている様子がグラフからよく分かる．ばらつきが小さくなって，山の幅がどんどん細くなると，確率密度関数のグラフはどんどん高く，細長くなっていくんだよ

$$

「なるほど．パラメータが異なっても，最頻値は全部 0.2 なんだね．たくさん観察すればするほど，パラメータの推定が正確になるってのも，直感によくあってる」

「これで，ベータ分布のイメージは，かなり具体的につかめたと思う．七北さんは，ベータ分布が，ベルヌーイ分布をベイズ更新することで導出できることを，ほのめかしていたんだと思う．さて，問題は，このあとだ」

「このあと？」

「今，僕がフォローした計算は，いわばベイズ統計の基礎なんだ．七北さんは，さらに，2 項分布とベータ分布の混合を考えたんだよ」

花京院は，アンリが導出した確率関数について，あらためて調べてくると約束して，勉強会を終えた．

14.4. ベータ 2 項分布

次の日――．研究室で数理モデル勉強会を再会した花京院は，さっそく調査結果を報告した．

「結論から言うと，彼女が考えた分布は，既に存在する確率分布で，ベータ 2 項分布という分布だった．多分彼女は知らずに計算したんだろうけど．あんな風に自分で思いつくなんて，僕にはできないね．彼女のああいうところが，僕は―――まあ，いいや．

ベータ 2 項分布は，2 項分布をより一般的に定式化した確率分布だ．逆にいえば，2 項分布はベータ 2 項分布の特殊系として導出することもできる」

$$

2 項分布のパラメータ p は定数なんだけど，ベータ 2 項分布は，このパラメータ p がばらつきを持っている状態を表現した分布だった．

ベータ分布は，パラメータ p の分布と見なすことができる．実際に，僕らはベイズ更新によって，データから導いた事後分布がベータ分布にしたがうことを，確認してきたね．

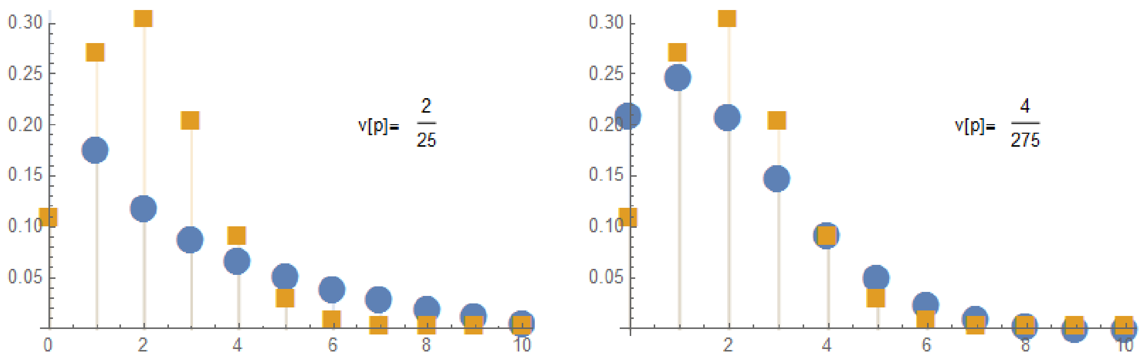
だから，パラメータ p の分布の分散が 0 である場合には，2 項分布とベータ 2 項分布は一致すると予想できる．

2 項分布の確率関数とベータ 2 項分布の確率関数をグラフで比較してみよう．

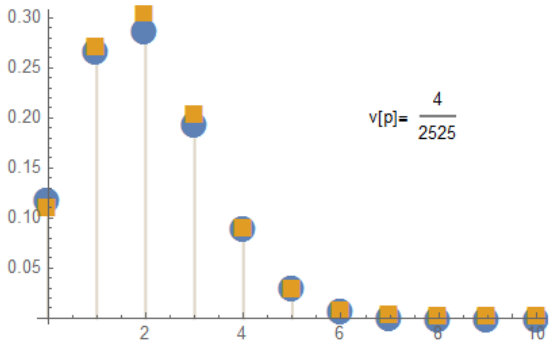
4 つの図があるけど，□のマーカーがプロットしたのが 2 項分布で，全部共通でパラメータは $n=10$, $p=0.2$ だよ．

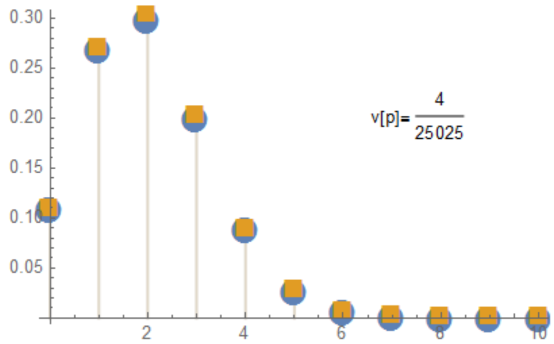
□のマーカーがベータ 2 項分布を表している，p の分散だけを変化させているよ．破線で書いたのがベータ 2 項分布だよ．2 項分布は固定したまま，ベータ 2 項分布だけパラメータを変化させているんだ．パラメータの変化は p の分散の変化，と解釈すればいいよ．

ほら，p の分散が 0 に近づくと 2 つのプロットが一致していく様子が分かるだろう？



図：左 $a=0.2, b=0.8$．右 $a=2, b=8$





図：左 $a=20, b=80$．右 $a=200, b=800$

$$

「うん，確かに，最後はほとんど同じだね」

「厳密な証明は別に必要だけど，直感的なイメージはつかめたかな？」

「うん，なんとなく分かってきた．自分が好かれる確率 p は相手によって異なるけど，その違いがわずかなら，結局全員共通の p を持つと仮定しても変わらない，ってことだね」

「そうだね．p のばらつきが 0 ということは，誰にとってもその人の魅力が一定であることを意味している．一方，ばらつきが大きいということは，その人に対して好意を持つ確率が 0 から 1 まで幅広く分布するということだから，好きになる人もいれば，好きにならない人もいる，ということだね

p が一定：あまり個性がない人，

p がばらつく：個性的な人

って感じかな」

「私は p が一定のタイプで，花京院君は個性的だから p がばらつくタイプだね」

「じゃあ p の平均は同じと仮定して，僕と君のどっちがモテるか比較してみる？」

「お，いいねえ．勝負する？」青葉は声をはずませた．花京院は計算にとりかかった．

$$

p の分散が 0，つまり 2 項分布の場合と，ベータ 2 項分布の場合とで x 人以上から好かれる確率 $P(X \geq x)$ がどう異なるかを比較するよ．出会う人数は 10 で固定する．つまりパラメ

ータ n=10 だよ．

ベータ 2 項分布は p の平均が 0.2 のままで，分散だけを変化させるよ．

	パラメータ	$P(X \geq 2)$	p の分散
2 項分布	$n=10, p=0.2$	0.624	0
ベータ 2 項分布	$n=10, a=100, b=400$	0.622	0.000319
	$n=10, a=50, b=200$	0.619	0.000637
	$n=10, a=10, b=40$	0.602	0.003137
	$n=10, a=5, b=20$	0.584	0.006154
	$n=10, a=1, b=4$	0.495	0.026667

この計算から，p のばらつきが大きくなると，《2 人以上から好かれる確率》は下がるってことが分かる．

次に《5 人以上から好かれる確率》を比較してみよう．条件はさっきとおなじだよ．どうなるかな？

	パラメータ	$P(X \geq 5)$	p の分散
2 項分布	$n=10, p=0.2$	0.03278	0
ベータ 2 項分布	$n=10, a=100, b=400$	0.0342	0.000319
	$n=10, a=50, b=200$	0.0357	0.000637
	$n=10, a=10, b=40$	0.0469	0.003137
	$n=10, a=5, b=20$	0.0598	0.006154
	$n=10, a=1, b=4$	0.126	0.026667

なるほど……，この条件だと個性的な人は少人数から好かれる確率が小さいかわりに，多人数から好かれる確率が大きいように見えるね．

まだ特定の数値例だから一般的な証明はできてないけど，これからどこまで一般的に言えるか調べてみる必要があるね

$$

二人は計算結果に満足した．特に，これまでに考えてきた 2 項分布を，パラメータのばらつきが 0 になる場合として，ベータ 2 項分布の特殊形として解釈できる点が気に入った．

「よーし，一息つこう．計算がうまくいった後だから，きっとコーヒーがおいしいはずだよ」青葉は大きく背伸びをすると，コーヒー豆を挽き始めた．花京院は，何か言いかけたが，結局黙ったまま，カップをならべて青葉の給仕を手伝った．

「どう？　おいしい？」

「うん，おいしいよ」花京院は複雑な微笑を浮かべたままコーヒーを飲んだ．青葉の予想に反して，あまりおいしそうに見えなかった．

（七北さんと花京院君との関係って，どうやら想像以上に複雑なのかな？）

15. 相思相愛と浮気の奇妙な関係――第 6 変奏

世界は，私の意思には依存しない

6.373

15.1. 社会との接点

計算結果がたまってきたから一度清書しておこう――.

花京院の提案に従い，二人はこれまでの結果を TeX 形式で保存する作業に着手した.

「紙に書いたままだと，なくしてしまったり，読み返したときに，意味が分からなかったりするからね」

花京院に教えてもらうまで，青葉は TeX の存在を知らなかったが，基本的な構造はすぐに理解できた．以前，ウェブサイト用に HTML を編集した経験があったからだ.

コンパイルした結果を pdf ファイルで確認した青葉は，その数式の美しさにしばし見とれた. なによりも, 自分たちが考えてきたことが無駄なく綺麗に積み上がる様子が気に入った.

二人が編集作業を進めていると，そこに美田園准教授が両手で大量の資料を抱えながらやってきて，いまいましそうに資料を机の上に置いた．学内委員会が長引いたのであろう．背伸びをすると，体のあちこちから関節のなる音がした.

「あれ，神杉さん……？　君が研究室で勉強してるなんて珍しいじゃない」自分で肩をもみながら美田園が声をかけた.

「私だってたまには勉強します」青葉は少しむっとした調子で言った.

「なにしてたの？」

「花京院君と二人で，数理モデルを考えていたんです」青葉は，机一面に散らばった計算用紙を誇らしげに指さした.

美田園は，机上の計算用紙やホワイトボードに書かれた数式をちらりと見る.

「恋愛……，いや出会いをモデル化しようとしているのか」数式の断片やメモを見ただけで，彼らがどんな計算していたのかを瞬時に理解したようだった.

「すみません．俗っぽいテーマで」花京院は申し訳なさそうに言った．青葉は黙って様子をうかがった.

「俗っぽくて，どうして悪いの？」美田園は，表情をかえずに言った.

「え？　いいんですか？」花京院は美田園の予想外の反応に少し驚いた.

「《恋愛》はキャッチィなトピックだから確かに俗っぽいといえる. だけど, 重要なことは, その根底に何を見いだすか，そこに潜む本質的なメカニズムだ．いつも言ってるだろう？」

青葉はその言葉を聞いて，安心した．

「ただし，惜しむらくは……このモデルからは，まだ《社会》が見えてこない」

「社会……ですか？」と青葉が聞いた．

「そうだ．出会いを 2 項分布で表現するというアイデアはなかなかいい．ただ，それだけでは経験的モデルと言いがたい．社会との接点が薄い，と言ったほうが分かりやすいかな．まあ，もう少し考えてみるといい」大量の資料を再び抱えると，美田園は，研究室を出て行った．

「社会かあ……どういうことなのかなあ」青葉はつぶやいた．花京院はずっと黙ったまま，計算用紙の束を眺めていた．

「実は僕も美田園先生と同じようなことを考えていた．出会いのモデルは，このままでは不十分じゃないかって」

「うーん，どこがダメなのか，私にはちょっとわからないなあ」

「つまり，2 項分布を使った出会いのモデルは，ある個人が特定の条件のもとで何人から確率的に好かれるのか, という情報は与えてくれるけど, 自分が相手を好きになるかどうか, とか，社会全体で何が起こるのか，ということまでは教えてくれない」

「うん，まあそうね．でもこのモデルは，最初からそういう目的で作ったものだから，それでいいんじゃないの？」

「個人の行動だけじゃなくて，社会全体の構造も同時に説明できるようなモデルの方が，よりいいモデルだと思うんだけど．うまく言えないな……この問題について，もう少し考えてみるよ」

青葉には，美田園や花京院の言うことがよく分からなかった．社会ってどういうことなんだろう？　社会を数学であらわすって，どういうことなんだろう？

15.2. 好かれるから，好きになる

数日後，花京院は研究室に青葉を呼んだ．出会いモデルの拡張について二人で考えるためである．

「出会いモデルはね，一方向の《好き》という感情しか考慮していなかった」

「そうだね．自分が好かれる確率だけで，自分が相手を好きになるかどうかは考えていなかったよね」

「だから，こちらも相手を好きになると仮定したときに，両思いという状態が確率的にどのくらい発生するのかを計算してみようと思うんだ」

「へえ，どうやるの？」

「そうだな，とりあえず男女の区別が必要かな．集合で男性と女性を分けて定義してみよう」花京院は二つの集合を定義した．

$$N_1 = \{1,2,3,\dots,n\},\ N_2 = \{1,2,3,\dots,n\}$$

「男性の集合が $N_1 = \{1,2,\dots,n\}$ で，女性の集合が $N_2 = \{1,2,\dots,n\}$ だよ」

「両方とも 1 から n までだから人数は同じってこと？　でもさあ，うちの研究室なんかはだいたい男女半々だけど，ほかの研究室なんかは男子学生のほうが多いよ」

「たしかに，現実には男性の数と女性の数は違うんだけど，最初から違うと仮定するときっと混乱するよ．それはあとで一般化することにして，まずは同数と仮定しよう．《単純例からはじめよ》の原則だ」

「うん」

「次は好意の双方向性をどう数学的に表現するかだ．自分が好きになることと，相手から好かれることをどうやって区別するか･･･」

「どうやるの？」青葉はいろいろ想像してみたが，いいアイデアを思いつかなかった．花京院は目をつぶって，しばし思索にふけった．

「まずは違う事象として定義してみよう．例えば自分が相手を好きになる事象を A とおいて，相手が自分を好きになる事象を B とおく．そうすると，お互いに好きになる事象は $A \bigcap B$ で表すことができる」

「なるほど．《A かつ B》は，お互いに好きになった状態だね」

「ここで問題は，《自分が相手に好かれると相手のことを好きになりやすい》っていう傾向をどう表現するかだ」

「うん，それってやっぱり重要な仮定だと思うんだよね」

花京院はじっと考えた．

$$

たとえば，こうしたらどうだろう．

単に自分が相手を好きになる確率

と

相手が自分を好きだという条件の下で，自分が相手を好きになる確率

は違うと考える．つまり

自分が相手を好きになる確率は $P(A)$

と

相手が自分を好きだという条件の下で，自分が相手を好きになる確率 $P(A \mid B)$

を比較すると，

$$P(A) < P(A|B)$$

になるはずだ，と仮定するんだ．

いま無条件に《好きになる確率》をそれぞれ

$$P(A) = p,\ P(B) = p$$

だと仮定すると．なんらかの正の確率$\varepsilon > 0$が存在して

$$P(\text{自分が相手を好き}|\text{相手が自分を好き}) = P(A|B) = p + \varepsilon$$

だと考えれば，$P(A) < P(A|B)$となるから，自分が相手に好かれたときは，その相手を好きになりやすくなる傾向を表現できる．

条件付き確率の定義から

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

だから，これを変形すれば

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$

となる．

$P(A \cap B)$は自分が相手を好きで，かつ相手も自分を好きになっている確率だから，結局自分と相手が相思相愛になる確率は

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = (p + \varepsilon)p$$

となる．$\varepsilon = 0$の場合は，$P(A \cap B) = p(p + \varepsilon) = p^2$となる．このことは

$$P(A) = p,\ \ P(A|B) = p$$

を意味するから，自分が相手を好きになるかどうかは，相手が自分を好きかどうかとは独立だという意味になる

$$

「なるほど‥‥‥．εの値によって，行為が独立な場合と独立でない場合の両方を表現できるなんて,おもしろいなあ･･･,条件付き確率をこういう風に使うって思いつかなかったなあ」

「《知っていること》と，《思いつくこと》の間には，とてつもないほど大きな距離があるといつも思うよ」

15.3. 浮気は許せない

「さて，次に社会全体で発生する相思相愛の組を確率変数として表してみよう」花京院は計算を続けた．

$$

n 人の各男女について可能な相思相愛の組を ij で表すと

11,　12,　13,…, 1n,

21,　22,　23,..., 2n,

…,

n1,　n2,　n3,…, nn

となる．この組み合わせの総数は $n \times n = n^2$ である．

各組は全て発生確率が $p(p+\varepsilon)$，発生しない確率が $(1-p(p+\varepsilon))$ なのでベルヌーイ試行と見なせる．最大 n^2 個の組から，x 個のカップルが実現する組み合わせの総数は ${}_{n^2}C_x$ である．

また x 組の相思相愛カップルが発生して，$n^2 - x$ 組の相思相愛カップルが発生しない事象の確率は $(p(p+\varepsilon))^x (1-p(p+\varepsilon))^{n^2-x}$ である．ゆえに，社会全体での相思相愛組数の実現数を確率変数 X で表すと，その確率関数は

$$P(X = x) = {}_{n^2}C_x (p(p+\varepsilon))^x (1-p(p+\varepsilon))^{n^2-x}$$

である．

確率分布は 2 項分布だから期待値は

$$E(X) = n^2 p(p+\varepsilon),$$

分散は

$$V(X) = n^2 p(p+\varepsilon)(1-p(p+\varepsilon))$$

である．

$$

「うーん，なんかヘンだなあ」青葉が首をかしげた．

「どこか，おかしいかな？」

「例えば，X=3 のとき，

$\boxed{11}$,　12,　$\boxed{13}$,…, 1n,

21,　22,　$\boxed{23}$,..., 2n,

…,

$n1, \quad n2, \quad n3, \ldots, nn$

っていう組み合わせができたとするでしょ？

そしたら，この 3 番の女の子は，1 番の男の子と 2 番の男の子と，同時につきあわないといけないでしょ？　これっていわゆる二股なんじゃないかなー」

「なるほど，確かに，両思いの相手が複数いる，というのは修羅場になりそうだ」

花京院はしばし考えた．そして計算用紙に数字を書き並べると，丸をつけたり下線を引いたりして，数字をひと組ずつチェックしていった．

「そうか……．この計算は，両思いになるカップルの現実的な数じゃなくて，可能な両思いの組数を与えてるんだ．君が言うように，二股が発生しない組み合わせとなると，実際にはもっと少なくなる．逆に言えば，この計算から潜在的な浮気の発生確率がわかるんだ．ちょっと例を作って確認してみよう」

「じゃあ，やってみる」青葉は率先して例を作り始めた．

$$

私が《シャア》《アムロ》《ガルマ》の三人と出会った場合のことを考えるよ．

【0 人　or　1 人から好かれる場合】

《0 人からかれる場合》や《1 人から好かれる場合》は，そもそも二股にならないから考えなくてもいいね．

【2 人から好かれる場合】

2 人から好かれるパタンは ${}_3C_2 = 3$ で 3 パタンあるよ．つまり

《シャアとアムロ》,　《シャアとガルマ》,　《アムロとガルマ》

の 3 パタンだね．

2 人から好かれた状態のとき，私の反応は

0 人を好きになる，1 人を好きになる，2 人を好きになる

っていう 3 種類あるよ．このうち二股になってしまうのは，《2 人を好きになる》っていう反応をした場合だね．

【3 人から好かれる場合】

3 人から好かれるパタンは ${}_3C_3 = 1$ で 1 パタンしかないよ．つまり

《シャアとアムロとガルマ》

だね.

3人から好かれた状態のとき，私の反応は

0人を好きになる，1人を好きになる，2人を好きになる，3人を好きになる

っていう4種類あるけど，二股になってしまうのは，《2人を好きになる》と《3人を好きになる》っていう反応をした場合だね．さらに細かく言うと，私が《3人を好きになる》パタンは1パタンだけど，《2人を好きになる》は3人のうちから2人を相手に選ぶから，3パタンあるよ.

つまりパタン数だけ考えると，私が浮気しちゃう組み合わせは

【2人から好かれた場合】

{シャア,アムロ,青葉}，　{シャア，ガルマ，青葉}，　{アムロ，ガルマ，青葉}

【3人から好かれる場合】

{シャア,アムロ,青葉}，　{シャア，ガルマ，青葉}，　{アムロ，ガルマ，青葉}

{シャア,アムロ,ガルマ，青葉}

これだけあるよ.

$$

「うーん，けっこうあるんだなあ」花京院が意外そうに言った.

「こうやって考えてみると，カップル数が増えると二股にならない方が珍しいのかも」

「そうだね．君が単純例を作ってくれたおかげで，だいぶん見通しがよくなったよ．今の例を一般化しつつ，それぞれの組み合わせが生じる確率を定式化してみよう」花京院が作業を引き継いだ.

$$

まずはじめに

確率変数 X ：自分に好意を持つ相手の数

確率変数 Y ：自分に好意を持つ相手のなかから自分が好意を持つ相手の数

と定義する．浮気の発生とは，x 人（$x \geq 2$）から好かれている，という条件下でその中から2人以上に対して好意を持つ状態だと考えればよい．例えば2人から好かれている場合に

は

$$\{X=2\}\cap\{Y=2\}$$

という事象が浮気に相当する.

もし 3 人から好かれている場合は

$$\{X=3\}\cap\{Y=2\}\ ,\ \ \{X=3\}\cap\{Y=3\}$$

という事象が浮気に相当する. 4 人なら

$$\{X=4\}\cap\{Y=2\}\ ,\ \ \{X=4\}\cap\{Y=3\}\ ,\ \ \{X=4\}\cap\{Y=4\}$$

だね.

これを順番に $X=2,3,4,\ldots,n$ の場合について合計すればいい.

$$\begin{aligned}
&P(\{X=2\}\cap\{Y=2\})\\
&+P(\{X=3\}\cap\{Y=2\})+P(\{X=3\}\cap\{Y=3\})\\
&+P(\{X=4\}\cap\{Y=2\})+P(\{X=4\}\cap\{Y=3\})+P(\{X=4\}\cap\{Y=4\})\\
&+P(\{X=5\}\cap\{Y=2\})+P(\{X=5\}\cap\{Y=3\})+P(\{X=5\}\cap\{Y=4\})+P(\{X=5\}\cap\{Y=5\})\\
&+\cdots\\
&+P(\{X=n\}\cap\{Y=2\})+P(\{X=n\}\cap\{Y=3\})+P(\{X=n\}\cap\{Y=4\})+\cdots+P(\{X=n\}\cap\{Y=n\})
\end{aligned}$$

という確率の合計が浮気発生確率だ. これを総和記号でまとめると

$$\begin{aligned}
&P(\{X=2\}\cap\{Y=2\})\\
&+\sum_{y=2}^{3} P(\{X=3\}\cap\{Y=y\})\\
&+\sum_{y=2}^{4} P(\{X=4\}\cap\{Y=y\})\\
&+\sum_{y=2}^{5} P(\{X=5\}\cap\{Y=y\})\\
&+\cdots\\
&+\sum_{y=2}^{n} P(\{X=n\}\cap\{Y=y\})
\end{aligned}$$

第一項の $P(\{X=2\}\cap\{Y=2\})$ をあえて総和記号を使って書けば

$$P(\{X=2\}\cap\{Y=2\})=\sum_{y=2}^{2} P(\{X=2\}\cap\{Y=y\})$$

だから

$$\sum_{y=2}^{2} P(\{X=2\}\cap\{Y=y\}) + \sum_{y=2}^{3} P(\{X=3\}\cap\{Y=y\}) + \sum_{y=2}^{4} P(\{X=4\}\cap\{Y=y\})$$
$$+\sum_{y=2}^{5} P(\{X=5\}\cap\{Y=y\}) + \cdots + \sum_{y=2}^{n} P(\{X=n\}\cap\{Y=y\})$$
$$=\sum_{x=2}^{n}\left(\sum_{y=2}^{x} P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})\right)$$

と，2 重の総和記号でまとめることができる.

さて，ここから具体的に $P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})$ の中身を特定していこう.

先ほど考えた条件付き確率より，2 人から好かれているという条件の下で，その 2 人を好きになる確率は

$$P(\{Y=2\}|\{X=2\}) = \frac{P(\{X=2\}\cap\{Y=2\})}{P(\{X=2\})}$$

だ．これを変形すれば，$\{X=2\}\cap\{Y=2\}$ が発生する確率は

$$P(\{X=2\}\cap\{Y=2\}) = P(\{X=2\})\cdot P(\{Y=2\}|\{X=2\})$$

となる．確率 $P(\{X=2\})$ は既に分かっているように，自分が n 人と出会って x 人から好かれる確率だから 2 項分布の確率関数であらわすことができる.

一方，$P(\{Y=2\}|\{X=2\})$ はこう考える．自分が相手に好かれたとき，その相手を好きになりやすくなる傾向は，正の確率 $\varepsilon>0$ を使って

$$P(\text{自分が相手を好き}|\text{相手が自分を好き}) = P(A|B) = p+\varepsilon$$

と表現できるから，あとは 2 人を選ぶパタン数を掛け合わせればいい．つまり

$$P(\{Y=2\}|\{X=2\}) = {}_2C_2(p+\varepsilon)^2(1-p-\varepsilon)^{2-2}$$

だ．$X=2,3,4,5$ までの場合を表にまとめよう.

式が長くならないように，$p+\varepsilon=a$ と置き換えるよ.

表: X,Y の確率関数の組み合わせ

X	相手が自分を好きになる確率	Y	相手が自分に好意を持つ条件下で相手を好きになる確率
0	${}_nC_0 p^0(1-p)^n$	0	—
1	${}_nC_1 p^1(1-p)^{n-1}$	0	—
		1	—

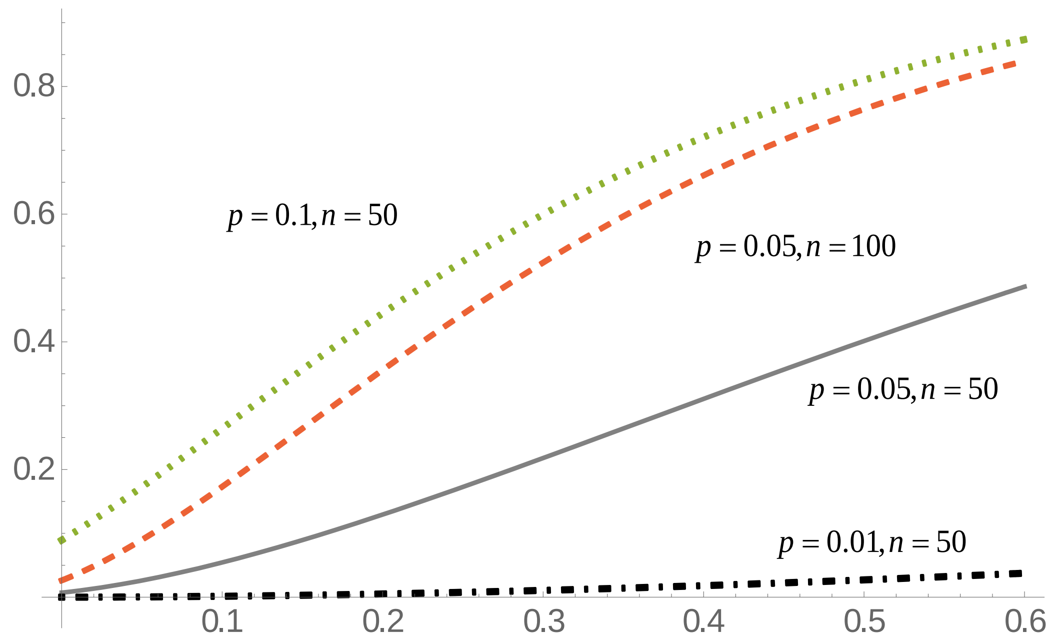
2	${}_nC_2 p^2(1-p)^{n-2}$	0	—
		1	—
		2	${}_2C_2 a^2(1-a)^{2-2}$
3	${}_nC_3 p^3(1-p)^{n-3}$	0	—
		1	—
		2	${}_3C_2 a^2(1-a)^{3-2}$
		3	${}_3C_3 a^3(1-a)^{3-3}$
4	${}_nC_4 p^4(1-p)^{n-4}$	0	—
		1	—
		2	${}_4C_2 a^2(1-a)^{4-2}$
		3	${}_4C_3 a^3(1-a)^{4-3}$
		4	${}_4C_4 a^4(1-a)^{4-4}$
5	${}_nC_5 p^5(1-p)^{n-5}$	0	—
		1	—
		2	${}_5C_2 a^2(1-a)^{5-2}$
		3	${}_5C_3 a^3(1-a)^{5-3}$
		4	${}_5C_4 a^4(1-a)^{5-4}$
		5	${}_4C_5 a^5(1-a)^{5-5}$

この表から，浮気発生確率（二股以上の発生確率）を 2 項分布の確率関数を使って明示的に書けば

$$\sum_{x=2}^{n}\left(\sum_{y=2}^{x} P(\{X=x\}\cap\{Y=y\})\right)=\sum_{x=2}^{n}{}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}\left\{\sum_{y=2}^{x}{}_xC_y(p+\varepsilon)^y(1-p-\varepsilon)^{x-y}\right\}$$

となる.

分析例を示そう.



図：パラメータは $n=50,100; p=0.01,0.05,0.1,$ として，横軸に ε をとり 0 から 0.6 まで変化させた．縦軸は確率である．

$$

「四つのグラフは，それぞれ違う条件下での浮気発生確率を表しているよ．n が出会った人数で，p は出会った相手が自分を好きになる確率だ．この二つのパラメータの意味はベースになっている《出会いモデル》と同じだよ．横軸が ε の値だよ．これは双方向モデルに追加されたパラメータで，相手の好意に反応して，自分が好意を持つ確率の上乗せ分だよ」

「$\varepsilon=0.6$ って，自分を好きになった相手を好きになる確率が 0.6 プラスされるって意味でしょ？」

「そうだよ． $p=0.05$ なら $p+\varepsilon=0.65$ に上昇するっていう意味」

「これってそんなに極端な値じゃないと思うんだよね. なのに, その確率で好意を返すと, 浮気になっちゃう確率が 8 割もあるんだよ」青葉はグラフの右上を指さした．

（どうりで世の中，浮気だの不倫だのとしょっちゅう騒いでいるわけだよ……）

「自由恋愛の《意図せざる帰結》ってやつかな．自由恋愛って響きはいいけど，僕たちが考えている以上にリスキーな相互行為なんだよ」

「ほんとだ」

「《好き》という感情の双方向性を考える問題は，なかなかいい練習だったね．こうやって計算してみることで，ひとの行動についての理解が少しだけ深まった」

「ねえ，これって部分的に《社会》の表現になっているんじゃないかな．ほら社会って，

たくさんの人の思いが絡まって，自分の思い通りにならないものでしょ」

「うん．確かに少し《社会》の表現に近づいたのかもしれない．美田園先生の意見を聞いてみよう」

15.4. 問題とはなにか？

個人研究室を訪ねると，美田園は，きちんと整理されたデスクに座り，プリントアウトされた論文を読んでいた．花京院と青葉は出会いモデルの拡張版について意見を求めた．

「うん，これは前のモデルよりもいいね．特に計算上の不具合かと思われた点が，期せずして浮気や不倫の可能性を表現していたことに気づいた点はとてもいい．モデルというものは，時としてビルダーの言うことを聞かないものなんだ．自分の予想したとおりの計算結果しか出てこないモデルなんて，作る意味がないからね．それにしても，不倫のモデルなんて聞いたことがないよ……こいつは傑作だ」二人の書いたメモを一通り読み終えてから，美田園は感想を述べた．二人は少し安心した．

「じゃあ，これで少しは《社会》を表現したモデルになっていますか？」花京院が聞いた．

「そうだね，社会のモデルにより近づいている，と言える」

「じゃあ，まだ改善の余地があるんですね」

「うん．どこが改良できそうか考えてごらん」美田園は言った．花京院と青葉は顔を見合わせた．

「うーん，どこかなあ．やっぱり数学的に単純すぎる点を直した方がいいんでしょうか」花京院が聞いた．青葉は，いまのモデルでも私にとっては十分難しいんだけどな，と思った．

「いや，プリミティブなのはむしろモデルの美点だよ．もっと本質的な改善点がある」美田園は答えた．

「えー，どこですか？」青葉が聞いた．

「このモデルは，表現したい対象だけがあって，説明したい問題がない，というところだ」

「説明したい問題……ですか？」

青葉と花京院は二人同時に首をひねった．

「このモデルは，何を説明するためのモデルなの？」今度は美田園が二人に対して質問した．青葉と花京院は返答に困った．二人が考えていたのは《出会い》という現象であることは確かだ．しかし，何を説明するためのものか？　と改めて問われると，どう答えていいのか分からなかった．

「えっと，この《出会いモデル》は，モテるという現象，つまり 2 人以上から好かれるっていう現象が，特定のパラメータのもとではそれほど珍しい現象ではない，ってことを示すために，はじめは作ったんです」花京院がモデルを作った経緯を説明した．

「うん，それで？」

「それで——，それだけだと数学的にはありふれた 2 項分布の例示にしかすぎないので，これをベースにして拡張できないかなって考えている間に，ベータ 2 項分布に派生したり，浮気の潜在的発生確率の話につながっていったんです」

「ふむ．最初の問題設定はかなり個人的だ．だが好意の双方向性を取り入れたモデルは，個人の一方向的な感情だけでなく，インタラクションを表現しようと試みている．だから社会のモデルとして, よりよいモデルになっている. しかしまだ解きたい問題が見えてこない」

（解きたい問題かあ……，たしかにそれって難しいよね．私が自分でモデルを作ろうとしたとき，そこでつまずいたんだ……）

青葉は美田園が言っていることが, なんとなく理解できた. しかし, そうであるがゆえに, これからどうすればよいか，ということについての明確な指針を得ることは出来なかった.

二人は研究室に戻り，今後の方針を相談した.

「うーん, 解くべき問題かあ……. どんな問題を考えればいいのかなあ.《私が大学にいるあいだにモテる確率がどれくらいあるのか》って悪くない問題だと思うんだけど……, どうしてそれだと駄目なのかなあ」

「多分，その問題だと個人的な興味以上の答えに到達できないからじゃないかな．もっと《多くの人に共通する謎》のほうが，いいと思うんだけど．僕もまだ，うまく言語化できない．どういう問題がよくて，どういう問題がよくないか」

（問題の善し悪しって，どういう基準で判断すればいいのだろう？　人や社会についての数理モデルって，思ったよりも数学以外の要素が重要なんだなあ……）

16. ギャンブラー　——第 7 変奏

そのうちのあるものは，その場に起こり，あるいは，起こらぬこともありうる．

1.21

16.1. 青葉の交際費

学期末試験が終わり，研究室にはいつもの静寂が戻ってきた——．

部屋の中にいるのは青葉と花京院の二人きり．青葉は共用冷蔵庫のドアに貼られた飲み会の案内を凝視したまま，さきほどから動かない．参加の欄に自分の名前を書くべきかどうか，彼女は 5 分ほど悩んでいる．

（アルバイトの給料日まで，あと二週間……．なんとかなるか？　でもバーゲンもあるし……，きびしい……）

「神杉さん，何を悩んでるの？」見かねた花京院が声をかけた．

「研究室飲み会だよ．花京院君はどうするの？」

「行かないよ」あっさりと彼は答えた．

「どうして？」

「いや，どうしてと言われても——．行ってもみんなと話すことないし」花京院は当然のように答えた．青葉は思わずふきだした．実に花京院らしい，完璧な理由だと青葉は思った．

「神杉さんは？」

「うーん，行きたいんだけど，お金がなくて悩んでる．丁度その日はアルバイトにも誘われてるし」

「その日アルバイトに行くといくらもらえるの？」

「えーと多分 3000 円くらい」

「飲み会に行くと，飲み会の費用 3000 円だけでなく，アルバイトで稼いだはずの機会コスト 3000 円も失う．合計 6000 円のマイナスだ．しかし飲み会を欠席してアルバイトに行けば，プラス 3000 円．その差額は 3000 円－（－6000 円）=9000 円．僕なら迷うことなくバイトに行くね」花京院は，読みかけの論文に再び視線を戻した．

彼が人づきあいや，仲間との親睦といったものに一切の価値を見いだしていないことは明らかだった．そんな花京院の性格が少しだけうらやましかったが，自分には真似できないと青葉は思っていた．

「花京院君は，頭がいいんだからお金を稼ぐ方法くらい知ってるでしょ？　バイトに行か

ずにお金を稼ぐ方法ってないの？」青葉は手のひらを上に向けて，彼が読んでいる論文の横にすっと差し出した．

「無茶なこと言うなあ．どれどれ――《働かずにお金持ちになれる相》は残念ながら出てないね」

「え，そんな手相あるの？　あるんだったら教えてよ．マジックで線を書き足すから」

「市場原理が支配的な社会において，無リスクで稼ぐことは難しい．第一，そんなものがあれば誰かが実行しているだろう」

「それもそっかー」青葉は少しがっかりした．

「ただ，昔，プログラミングの練習用に，高確率で少額を稼ぐギャンブルの賭け方について考えたことがあるよ」花京院が意外なことを口にした．

「え？　そんなのあるの？　どうやるの」青葉の表情が明るくなった．

「あんまり参考にならないと思うけど．知りたい？」

青葉は少し考えた．話は聞きたかったが，彼の話はいつも難しいからだ．しかしギャンブルとは無縁そうな花京院がいったいどんなことを考えたのか，興味はあった．迷ったすえ，青葉は花京院の教えを請うことにした．

「じゃあ，今日は忙しいから，明日にでも説明してあげるよ」花京院は読みかけの論文を手にとると，無言で《話しかけるなオーラ》を放出した．

16.2. ルーレット

次の日，青葉はわくわくしながら花京院が来るのを研究室で待った．高確率でギャンブルに勝つ方法なんてあるのだろうか？　彼のことだから，さぞかし巧妙な手法を考えた違いない．そう考えると，青葉の期待はますます膨らんだ．

「さあ，さっそくお金持ちになる方法を教えてちょーだい」花京院が現れるやいなや，青葉は待ちきれない様子で言った．

「なんだか話が微妙に変わってない？　高確率で少額を稼ぐギャンブルの賭け方の分析だよ？　お金持ちになる方法じゃないよ」

「似たようなもんじゃない．お金を稼ぐ方法には違いないでしょ」

「いや，全然違うんだけど．―――まあいいや．まずはルーレットの仮定の確認からはじめよう」花京院はホワイトボードに向かった．

$$

仮定

1. ルーレットの「赤」か「黒」に賭ける．成功すれば賭金が 2 倍に増え，失敗すれば賭金を失う．
2. プレイヤーは十分な初期資産を持つ．
3. 胴元は，賭金の上限を設定しない．

1 番目の仮定から確認していこう．実際のルーレットだと，0 がでたとき親の総取りになるけど，これから考えるモデルでは，単純化のために 0 はないと考える．

つまり勝つのも負けるのも 50%ってことだ．

二番目の仮定は，プレイヤーが最初にお金をたくさん持っているという意味だよ．100 万円とか，1000 万円とか，大金を想像すればいい．

三番目の仮定は，胴元にとってもリスクがあるから，現実的じゃないけど，分析を簡単にするために，導入しておく．

$$

16.3. 定額賭けと倍賭け

「さて，ルーレットの賭け方として次の二つを比較してみよう．一つは定額賭け，もう一つは倍賭けだ」花京院は二つの方法を説明した．

- 定額賭け：毎回 x 円を賭ける
- 倍賭け：一回目に x 円を賭ける．勝てば次の回にも x 円を賭け，負けた場合には二倍の額をかける．次に勝てば賭け金を x 円に戻し，負けた場合は前回の賭金を二倍して同じ事を繰り返す．

「うーん，定額賭けは分かるけど，倍賭けはちょっと難しいね」

「ようするに《負ければ前回の倍額を賭ける》というやり方だよ」

「こんな賭け方，大丈夫なのかなあ？　負ければ負けるほど大金を賭けなくちゃいけないんでしょ？　ちょっと怖いなあ」

「じゃあ，試しに僕と神杉さんで勝負してみる？　僕が《倍賭け》を使い，君が《定額賭け》を使うんだ」花京院が提案した．

「お，実験だね．おもしろそう，やるやる」

「所持金は二人とも 1000 円と仮定する．結果を比較しやすくするために，定額賭は毎回 100 円をかけて，倍賭けも最初に 100 円を賭ける．もちろんホントにお金を賭けるわけじゃなくて，賭けたつもりで計算するんだ．まずは 10 回ほどやってみよう」

花京院は《赤》と《黒》の文字を 1/2 の確率で表示させるプログラムをあっというまに書いた．

「Enter キーを押すたびに，画面に《赤》か《黒》がそれぞれ 1/2 の確率で出てくるよ．キーを押す前にどちらが出るかを予測して」

「よーし，最初は赤」「じゃあ僕も赤にしよう」

1 回目のルーレットの結果は黒だった．

「ふたりとも負けちゃったね」「うん，僕は倍賭けだから次は 200 円賭けるよ」

「私は定額だから，また 100 円賭けるんだね，よーし次は黒に賭けるよ」

「じゃあ，僕は逆に赤に賭けよう」

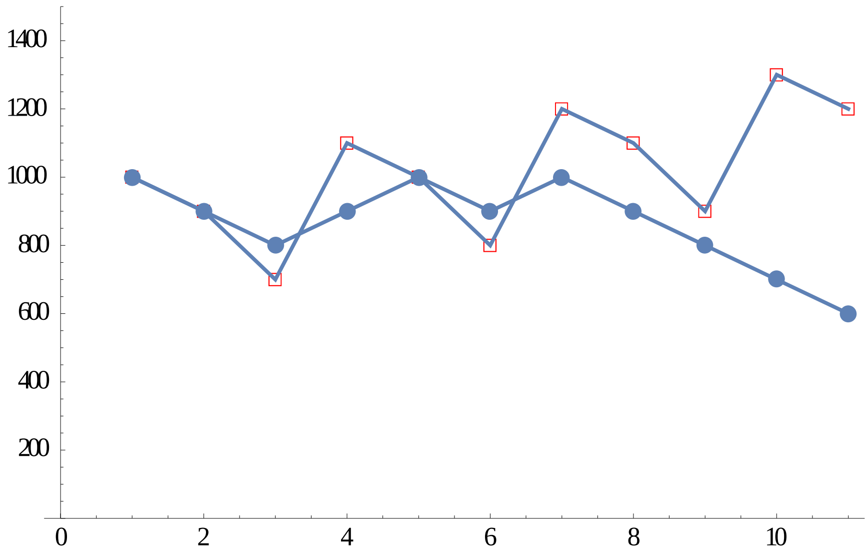
2 回目のルーレットの結果は黒だった．

「やった！　私の勝ちだ」

「僕はまた負けたから今度は 400 円を賭ける」

「400 円も賭けるの？　うわあ，大丈夫？　お昼代なくなっちゃうよ．……あ，そうか．賭けたフリだから平気なんだった」

3 回目のルーレットの結果は，赤だった．二人は赤と黒を予想しながらコンピュータ上のルーレットを回し続けた．10 回目が終了した時点で架空の収支は花京院がプラス 200 円，青葉がマイナス 400 円だった．



図：□は花京院（倍賭け），●は青葉（定額賭け）

「僕の勝ちだね」

「うーん，……悔しい．でも今のはたまたまだよ」

「じゃあ，同じ条件でもう一度勝負してみる？」

「いいわよ．負けたって本当にお金がなくなるわけじゃないし」

二人は同じ条件でルーレットを繰り返した．10 回を 1 セットにして，20 セットほど繰り返してみたところ，花京院が 14 回勝った．

青葉は悔しがった．そして今回も，たまたま花京院が多く勝っただけだと主張した．

「たまたま僕が多く勝ったと思う？」

「そうだよ，偶然だよ」

「じゃあ，回数を増やして試してみよう」花京院は，《定額賭け》と《倍額賭け》の 10 回試行を 1000 セット繰り返すプログラムを書いた．

プログラムを実行した結果を調べてみたところ，《倍額賭け》の勝利数は 1000 回中 741 回だった．この結果を見て青葉は勝率に差があることを認めざるをえなかった．

（それにしても，同じルーレットを使って賭けているのに，どうして勝率に違いがでるのかなあ？）

本物のお金を賭けているわけでもないのに，いつのまにか架空のルーレットに青葉は夢中になっていた．彼女は知らず知らずのうちに，またもや花京院の作ったモデルの世界へと引き込まれていった．

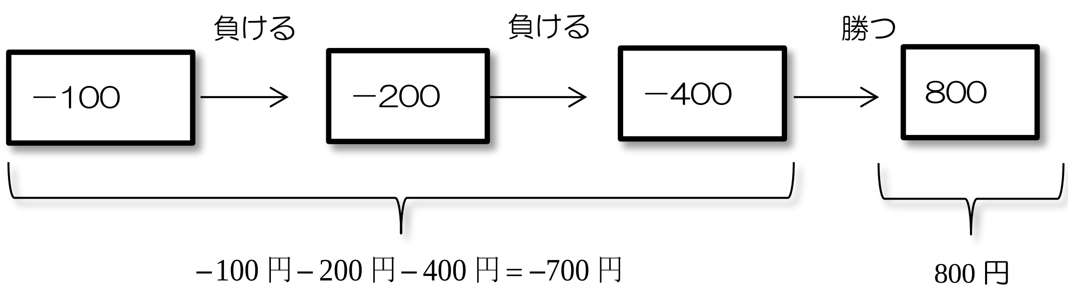
16.4. 倍賭法のしくみ

「どうして《倍賭け》のほうが，勝率がいいのかなあ？」

「うん，じつに不思議だね．《倍賭け》法を使った時，初めて勝つまでにいくら賭けていたのかを計算してみよう．スタート時点で 100 円を賭けると仮定するよ」

$$

まず，具体的な例として 1 回目と 2 回目に負けて，3 回目に初めて勝った場合を考えてみよう



3 回目までに賭けた総額は 700 円で, 3 回目に賭けた金額 400 円の倍の 800 円が戻ってくるから，結局，収支は

$$800\text{円} - 700\text{円} = 100\text{円}$$

となり，100 円のもうけとなる

$$

「つまり初めて勝った時，そこまでに何回負けていても，収支で 100 円プラスになるんだね．あ⋯⋯，そうか.《倍賭け》法は,《今まで負けた分を一挙にチャラにする方法》と考えればいいんだ」

「そうだね.《一挙にチャラにする》は，本質をついた良い表現だね．今の例を一般式で表してみよう」花京院は問題を出した．

Q:　n 回目に初めて勝った場合，第 n 回目に賭けた金額はいくらか？

$$

ちょっと待って⋯⋯．n 回目に初めて勝つということは，$n-1$回までずーっと負け続けているわけだから，1 回目から順番に考えていけばいいんだよね.

1 回目の賭け金：$100 = 100 \times 1 = 100 \times 2^0$
2 回目の賭け金：$200 = 100 \times 2 = 100 \times 2^1$
3 回目の賭け金：$400 = 100 \times 4 = 100 \times 2^2$
4 回目の賭け金：$800 = 100 \times 8 = 100 \times 2^3$
⋮

ということだから，この規則を n 回目まで適用すれば，n 回目の賭け金は

$$100 \times 2^{n-1}\text{円}$$

じゃないかな？

$$

「そのとおり．n 回目に勝つ場合でも，n 回目の賭金は払っていなければならない，という点に注意する必要がある．では次」花京院は問題を出した．

Q:　n 回までに賭けたお金の《総額》はいくらか？

$$

えっと，合計を考えればいいんだね？　1 回目から n 回目までの賭け金を全部足すと，

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{100 \times 2^{1-1}}_{1\text{回目の賭金}} + \underbrace{100 \times 2^{2-1}}_{2\text{回目の賭金}} + \underbrace{100 \times 2^{3-1}}_{3\text{回目の賭金}} + \cdots + \underbrace{100 \times 2^{n-1}}_{n\text{回目の賭金}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} 100 \times 2^{i-1} \\
&= 100 \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}
\end{aligned}
$$

こうじゃないかな？

あ，……ちょっと待って．最後の式は，等比数列の総和を使えばもっと簡単になるね．

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$$

の部分を初項 1，公比 2 の等比数列と見なすと

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} &= 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} \\
&= 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \cdots + 1 \cdot 2^{n-1} \\
&= \frac{1\,(1-2^n)}{1-2} = -1\,(1-2^n) = 2^n - 1
\end{aligned}
$$

だから

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$$

だね．

ってことは，倍賭法での総コストに $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$ を代入すると，《n 回までにベットした総額》は，

$$100\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 100\ (2^n - 1)$$

じゃないかな？

$$

「うん．等比数列の総和を使うところが，いい工夫だったね」

「えへへ.『基礎数学』を読むために，ちょっと高校数学を復習したんだ．等比数列って何のために使うのか分からなかったけど，今みたいに，繰り返す行動を表す時には便利なんだね」

$$

神杉さんが計算してくれた式を使って，リターンとコスト総額の差を考えてみよう．

n 回目に初めて勝った場合にもらえる金額 100×2^n と，そこまで負け続けて払った金額の総額 $100(2^n-1)$ の差は

$$\begin{aligned} &100\times 2^n - 100(2^n - 1) = 100(2^n - (2^n - 1)) \\ &= 100(2^n - 2^n + 1) \\ &= 100(1) = 100 \end{aligned}$$

となる．

この式は n がどんな数字であっても成立するから，n 回目に初めて勝った場合，n とは無関係に 100 円だけプラスになっているんだ．n とは無関係という点が重要だよ．

初回賭金額を一般化して x 円賭けた場合の差額を計算してみよう．初回に x 円賭けて，n 回目で初めて勝ったとすると，$n-1$ 回目までは負け続けるから，賭け金の総額は

$$\begin{aligned} &\underbrace{(x\times 2^{1-1})}_{1\text{回目}} + \underbrace{(x\times 2^{2-1})}_{2\text{回目}} + \underbrace{(x\times 2^{3-1})}_{3\text{回目}} + \cdots + \underbrace{(x\times 2^{n-1})}_{n\text{回目}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} x\times 2^{i-1} = x\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = x(2^n - 1). \end{aligned}$$

n 回目に初めて勝った場合にもらえる金額は $x(2^n)$ 円だから，その差額は常に

$$x(2^n) - x(2^n - 1) = x(2^n - (2^n - 1)) = x(2^n - 2^n + 1) = x$$

だ．

$$

「つまり．ずーっと負け続けても，n 回目に勝てば，x 円だけプラスにできるんだね」

「そう．負けた回数が大きくなっても，君が言ったように 1 回で《チャラにできる》んだ．言い換えると，倍賭け法は資金が底をつくまで負けることができる」

「あれ？　ってことは破産する危険もあるってこと？」

「そうなんだ．そこにトリックがある．1 回勝つまでに何度も負けていいってことは，1 度も勝てずに破産した時に大金を損することを意味している．1 回で逆転が可能になるってことは，その裏で，破綻した時のリスクも増加しているんだ」

青葉は，ぼんやりとだが，倍賭法のしくみが分かってきたような気がした．彼女が想像していたギャンブルの必勝法とは，ほど遠いものであることも．

（将来カジノに行くことがあったら，倍賭法だけは使わないでおこう……）

16.1. ランダムウォーク

「倍賭法の数学的解析は少し難しいけど，定額賭けなら，ランダムウォークというモデルを使って簡単に分析できるよ」

「ランダムウォーク？　なんかかっこいい名前じゃん．移動中のガンダムみたい」

「そういえば君が勧めるから，ガンダムを観てみたけど．なんか理解できなかったよ」

「え，そう？　どの辺が？」

「なんか主役メカが黒いし，どの集団とどの集団が戦っているのか，全然説明がないし」

「それ，ゼータガンダムだよ．黒い奴はマークⅡ．駄目だよー，無印から観ないと」

「そうなのか．どうりで話についていけないと思ったよ．まあ，今度時間があったら観ておくよ．じゃあ，ランダムウォークを説明するよ」花京院はホワイトボードに移動した．

「まず，1 回毎のルーレットの結果を

確率変数 X_i

で表すことにしよう．ここで i は $i=1,2,...,n$ だよ．この確率変数は

勝った時には 1,

負けた時には -1

という値をとると仮定する」

「ふむふむ．コインの表裏みたいな感じね」

「勝つ確率を 1/2（一般的には p），負ける確率を 1/2（一般的には $1-p=q$）とおけば，

$$P(X_i=1)=1/2=p$$

$$P(X_i=-1)=1/2=1-p=q$$

だよ．X_i が独立である，つまり毎回のルーレットの結果は，過去の結果からまったく影響をうけないと仮定する．すると，1 回目の結果から n 回目の結果の和は

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

で表される．この確率変数 S_n をランダムウォークという．S_n の添え字 n は回数を表していて，0 回目の位置は $S_0 = 0$ と定義しておく．ではここで問題．少し難しいよ」花京院は確認のための問題をホワイトボードに書いた．

Q:　n 回のルーレットで $S_n = k$ となる確率は何か？

$$

えーと，勝てば 1 進み，負ければ -1 進むような運動だと考えればいいのね．ということは，n 回後に位置が k であるような確率を考えればいいはず‥‥‥

勝った数の分布は二項分布に従うことが分かっているから，k 回勝つ確率を考えれば，位置が k である確率と一致するんじゃないかな‥‥‥？

まず，n 回の試行で k 回勝つ確率は二項分布に従うから

$$P(X = k) = {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

だよね．つまり n 回後に $S_n = k$ となる確率は

$$P(S_n = k) = {}_nC_k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

のはず．どう？

あれ？　ちょっと違うかな．

勝利数と現在位置が一致しないときもあるのかな？　ちょっと単純な例で考えてみよう．

分かってるってば，小さい数で考えればいいんでしょ？

えーと，$n = 5$ で考えてみるね‥‥‥，勝った数を 3，負けた数を 2 とおくよ．

たとえば最初に 3 回勝って，残り 2 回を負けると，現在位置は

$$S_n = 1 + 1 + 1 - 1 - 1 = 3 - 2 = 1$$

となる‥‥

あ，そうか，《勝利数 3》と《現在の位置 1》は違うんだ．

うーん，どうしてかな‥‥‥？

あっ！　そうか．負けたときに－1 進むからだ．ということは，勝利数と現在位置の関係は

現在位置＝勝利数―負け数

になっているはずだ.

えーっと，これは言い換えれば

$n=$ 勝利数＋負け数

ってことでもあるね.

ふむふむ……，

ということは，現在位置 x を確率変数と見なすと，その確率は……

あれえ？　現在位置は《勝利数》と《負け数》によって決まるから，さきに《勝利数》と《負け数》を仮定しないと計算できないじゃん．困った…….

$$

青葉はそこで行き詰まって考え込んだ．花京院はヒントを出した.

「n は試行回数として与えられているから，実質的には《勝利数》と《負け数》のどちらかを決めれば，現在位置は決まるよ」

青葉はそのヒントを受けて，思考実験を再開した.

$$

えーっと，また具体例で考えるね.

$n=5$ とする．勝利数を $w=3$，負け数を $n-w=2$ とおくよ.

$s_n=1$ となる確率は《$n=5$ で勝利数が 3 になるような二項分布》の確率に等しいから･･･

$$\begin{aligned} P(S_n=1) &= P(X=3) \\ &= {}_nC_w\left(\frac{1}{2}\right)^w\left(\frac{1}{2}\right)^{n-w} = {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

になっているはずだよね.

ここまでは……，うん，問題ない.

でもこの計算だと勝利数 w を先に決めておかないと計算できないよね……えーと，現在位置から勝利数を逆算するには，どうしたらいいのかな？

一般的な記号で考えてみよう…….

勝利数を w，負け数を l とおく．現在位置 k は

現在位置 $k=w-l$

になっている．それから試行回数 n は勝利数 w と負け数 l の合計

試行回数 $n=w+l$

になっている．勝利数 w を現在位置と試行回数 n の関数で表したいから⋯⋯

あ，そうか.

$$\begin{cases} k = w - l \\ n = w + l \end{cases}$$

こういう形の連立方程式を解けばいいんだ．二つの式を足すと

$$\begin{aligned} k + n &= (w - l) + (w + l) \\ k + n &= 2w \\ w &= \frac{k + n}{2} \end{aligned}$$

になる.

つまり勝利数 w は現在位置と試行回数 n でちゃんと決まる．よし⋯⋯,

この関係を二項分布の確率関数に代入すると

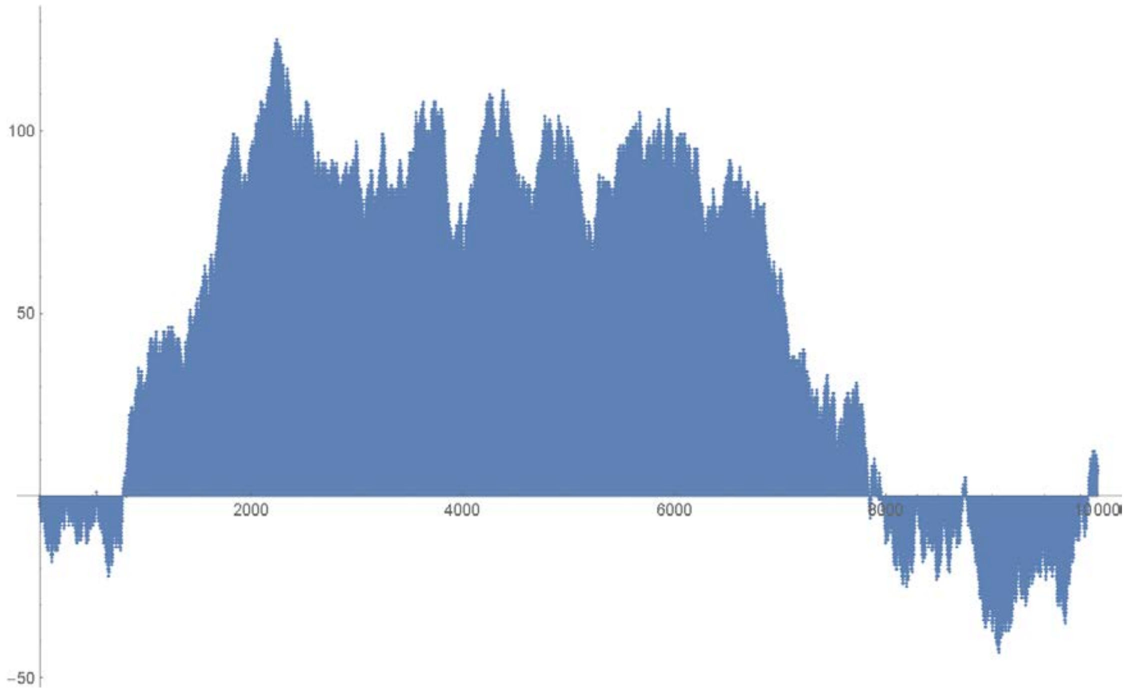
$$\begin{aligned} P(S_n = k) = P(X = w) &= {}_nC_w \left(\frac{1}{2}\right)^w \left(\frac{1}{2}\right)^{n-w} \\ &= {}_nC_{(k+n)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{w+n-w} = {}_nC_{(k+n)/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

どうかな？　k の範囲は，$-n$ から n までの整数だよ

$$

青葉は計算結果に満足した様子だった.

「うん．勝利数 w に注目して，k,n の関数として表した点が，いい発想だったね．コンピューターで計算例を作ってみよう」花京院はランダムウォークの軌跡を画面にプロットした.



「確率 0.5 で+1，0.5 で－1 移動することを 1 万回繰り返した結果だよ」

「0 を通る回数って以外と少ないんだね」

「証明は難しいけど，単純ランダムウォークでは回数が増えるほど，正か負のどちらかの領域にとどまる確率が増えるんだ．つまり原点に戻りにくくなるんだよ」

16.2.　¬（∃つまらない数学）

「花京院君のおかげで，微分とか等比数列とかいろんなことを思い出せた．ありがとう」

「それはよかった」

「でも逆に……，一度は覚えたはずのことをあんなに忘れてたなんて……少しショックだったな……．私ってやっぱり，数学に向いてないのかな…」青葉が気落ちした様子で言った．

「そんなことないよ」

「そうかなあ」

「別に公式や定理を暗記してなくたってかまわない．僕だってほとんど覚えていないよ

「へえ……，意外．試験のときとか，困らなかった？」

「うん，確かに困った．でも試験なんて，じきに受けなくなる」

確かに彼の言うとおり，これから数学の試験を受けることはほとんどなさそうだ．もしかしたら皆無かもしれない……．

「公式を暗記しなければ，解けないなんてのは数学の問題じゃない．そんなのは成績に分散が欲しい側の都合だよ」

花京院の言う通りかもしれない，と彼女は思った．もしかすると自分は試験や授業のせいで，数学を嫌いになってしまったのだろうか？　そもそも，自分はほんとうに数学が嫌いになっていたのだろうか？　青葉は数学に対する自分の気持ちが，急速に不透明になっていくのを感じた．

「最近ね．少し，数学の見方が変わったような気がするんだ……」

「どんな風に？」

「この研究室への所属が決まってすぐの頃は，数学って面倒なだけで，役に立たないモノだって思ってたけど……，花京院君が教えてくれる数学はおもしろい」

「それはよかった」

「だから数学の中にもおもしろい数学とつまらない数学があるのかなって」

花京院は首を振った．

「おもしろい数学とつまらない数学があるわけじゃない．数学は常に興味深い．ただ——数学を楽しめる人間と楽しめない人間がいるだけじゃないかな」

花京院は窓の外を見つめて言った．外は暗く，どこか遠くで鳴る寺の鐘の音が，今日の終わりを告げるかのように響いていた．

17. お金持ちになる方法——第 8 変奏

命題は，古い表現を用いて新しい意義を伝えなくてはならない

4.03

17.1. ポーカー

研究室の机の上には，チップの山があちこちにそびえている．青葉，花京院，大学院生の小田原の三名は，昼休みのあいだずっとポーカーゲームに興じていた．鉛の入った本格的なチップは，ポーカー好きの小田原が用意したものだ．その重量感は三人の気分を盛り上げることに一役買っていた．

最後の大勝負・・・・・・．青葉は気合いを入れて持っていた全てのチップを賭けた．しかし彼女の渾身のブラフは，花京院と大学院生の小田原には全く通用しなかった．

「青葉ちゃん，表情に出すぎやで．それではわいには勝てん」関西弁でアドバイスを言い残すと，小田原は部屋を出て行った．結局，小田原が一位で，手堅い勝負を続けた花京院は二位，青葉は最後の大勝負に負けて最下位，に終わった．

「小田原さんって絶対関西出身じゃないよね．なんかへんだもん」

「僕もそう思う．多分，本物の関西人は『わい』とか滅多に言わないと思う」

青葉は机上に残ったポーカーチップを積み上げながら，ため息をついた．

「どうしたの」

「いや，ポーカーって不思議だなあと思って．この間，ルーレットを使ってお金持ちになる確実な方法はないって話をしたよね．でも三人でポーカーをやってると，その中には常に他の人よりもチップを稼ぐ人——つまりお金持ち——がいるんだよね．これってどういうことなのかな？」

「個人の主観から見ると，必勝法は存在しないにもかかわらず，社会全体で見ると勝者の存在が必然であるのはなぜか・・・・・・．確かに不思議だね」

花京院は何か思いついたのか，しばらく考え込んだ．

「神杉さん．そもそも世の中に《お金持ち》と呼べる人がどのくらい存在するのかな？」

花京院にしては曖昧な質問だと青葉は思った．

「分かんないなあ．そもそも，《お金持ち》の定義によるし」

「さっそく統計を調べてみよう」花京院は研究室の本棚から，家計調査年報と賃金構造基本統計調査取り出すと，そこに記載された度数分布を調べ始めた．そして瞬く間に，表計算

ソフトに数値を入力すると，世帯年収が 1 千万円以上ある家庭の割合を計算した．花京院は作業の途中で何かを思いついたのか，またしばし考え込んだ.

17.2. 所得分布

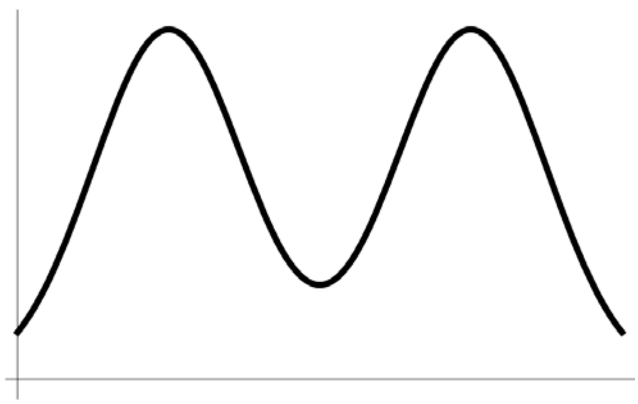
「ねえ，神杉さん．所得の分布ってどんな形をしているか知ってる？」

「所得の分布のかたち？　えーっと分布の形っていうのは，ようするに横軸に金額をとって，縦軸に割合をとったときの，グラフの形のこと？」

「うん，そうだよ．その形」

Q:　所得の分布はどんな形をしているか？　そしてお金持ちはどれだけ存在するか？

青葉はしばらく考えこんだ．しかしいくら想像しても，これだ！という形を思いつかなかった. 青葉は紙にいくつかの山の形を描き, 最終的に自分が想像する分布の形に〇をつけた. 彼女が示した図は次のようなものだった.



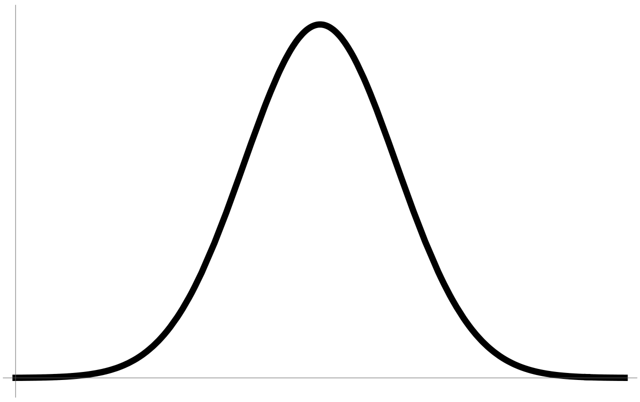
図：青葉の想像図.

花京院は興味深そうに，その図をながめた.

「なるほど……，二峰型の分布か．こういう形を想像した理由ってなにかある？」

「うーんと，ほら，よくニュースなんかで《格差社会》とか《不平等の拡大》っていう言葉を聞くじゃない．だから貧しい人と，裕福な人にぱきっと別れるんじゃないかなあって思ったんだ」なるほど，と花京院はうなずいた.

「これは，僕が最初に想像した形だよ」



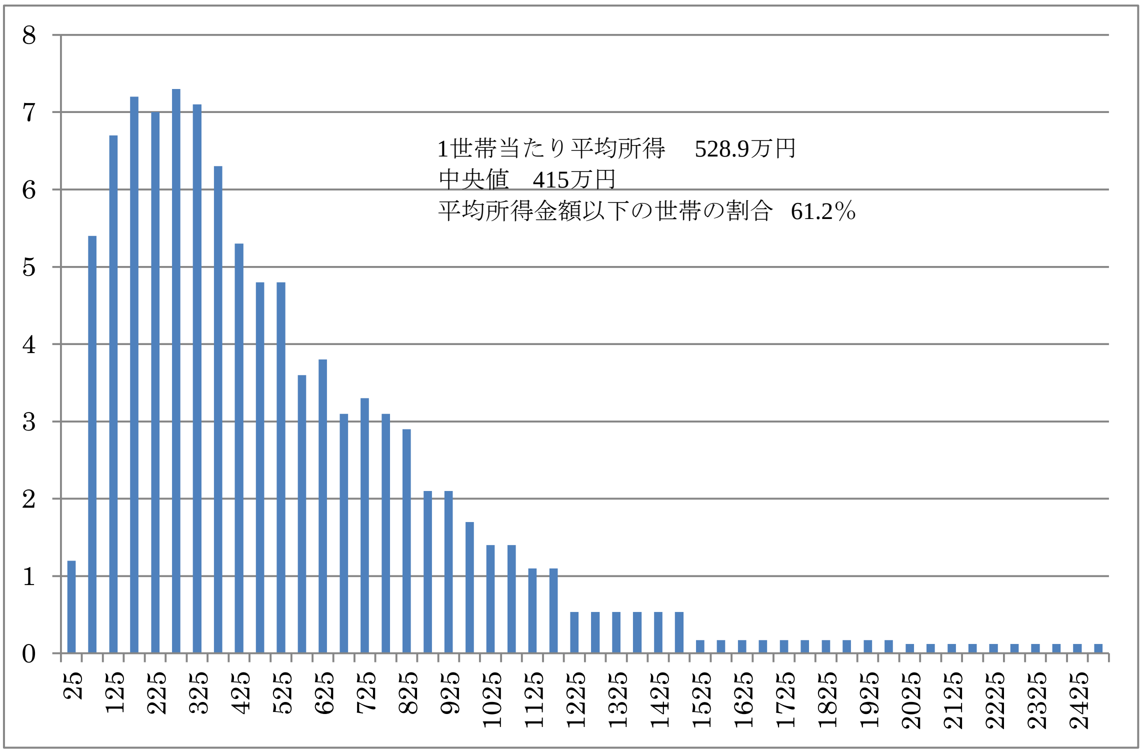
図：花京院の想像図

青葉は花京院の想像図と自分のものとを見比べた．両者の違いは一見して明らかだった．

「僕が想像したのは《正規分布》という確率分布だった．世の中の多くの現象は正規分布にしたがうからね．きっと収入もそうに違いないと予想したんだ．けど――，実際は違っていた」

（え？　違うの？　じゃあ，私の想像であってるのかな？）

花京院は世帯年収の分布を実際のデータに基づいてプロットしてみせた．そのグラフは，花京院の想像とも，青葉の想像とも違っていた．



図：世帯年収の分布．横軸は万円．縦軸は%．（国民生活基礎調査：平成 26 年度）

「高額所得者のデータは詳細まで分からないから，1000 万円以上はカテゴリ毎に一様分布に変換して表示したよ．横軸が世帯年収の金額（万円）を，縦軸はその年収を稼ぐ世帯が全体で何%いるのかを示している」

「へえ‥‥‥なんだかヘンな形．左の方に偏ってるんだね」予想が外れ，青葉は少しがっかりした．分布の形が左右非対称であることも，なんだかすっきりしなかった．

「この形からどんなことが分かる？」

青葉はグラフの横軸と縦軸の数値を注意深く交互に観察した．

「山が一番高いところはだいたい，300 万円かな．ってことは年収 300 万円くらいの家庭が日本には一番多いってことかな．それと‥‥‥，収入が高い人は，思ったよりも多くないんだね．うーん，収入の分布がこんな形だなんて，知らなかったなあ‥‥‥」

「収入に格差があるってことは誰でも知ってるけど，全体がこんな形をしているなんて，みんな知らないかもね．これはおもしろい問題になりそうだから，少し調べてみるよ」花京院は，より詳しい情報を調べるために図書館へと向かった．

17.3. 対数正規分布

花京院は，所得分布について調べてきたことをかいつまんで青葉に説明した．

$$

経済学の知見によれば，所得分布はだいたいどの社会でも，左右非対称で右の裾野が長く，最頻値が低所得側に位置している．

ほら，さっき見た図のような形だよ．

つまり低所得階層に大部分の人が集中し，所得が高くなればなるほど，その割合が減る，という特徴を持っているんだ．

そして過去数十年間にわたって蓄積してきた統計データによれば，この傾向は時代や国の違いに影響されないらしい．数学的には《対数正規分布》や《パレート分布》という確率分布で近似できるそうだよ．

直感的にいえば，現実のデータから作った所得の度数分布に，特定の確率密度関数のグラフを重ねると，よく一致するんだ．

例えばこれは，所得分布の低・中層に対する当てはまりがよいとされる対数正規分布の確

率密度関数の定義式だよ．

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{y} \exp\left\{ -\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad 0 < y$$

あまり馴染みがないかもしれないけど，統計でよく使われる正規分布の親戚のようなものだよ．　対数をとったときに正規分布に従うような確率変数の分布なんだ．

$$

花京院の提供した情報があまりに多かったので，青葉はかるいめまいを感じた．

「えっと，収入の分布は，数学的には《対数正規分布》や《パレート分布》で近似できるってことね」

「分布のパラメータはそれぞれの時代や国で違いがあるはずだけど，本質的な構造は変わらないみたいだよ」

花京院は日本のデータだけを使って，過去 10 年間の所得分布を重ねて見せた．図に示されたグラフは，ほとんど一致していた．

「世の中の人は，所得分布の形なんて知らないだろうし，知らないってことは，その形を保とう，なんて考えてないよね」

「そうだね」花京院はうなずいた．

「でも，データが示しているように，所得分布の本質的な構造は変わらない……これって，とても不思議なことじゃない？」

「いい疑問だと思う．それって，きっと美田園先生が言っていた，解くべき問題だよ」

「そうかな？」青葉は淡い希望を感じた．

「少し時間をかけて考えてみたら？」

（どうしようかな……．この問題は難しすぎるんじゃないかな……．きっと自分の手にはおえないはず）

彼女にとって数理モデルは，自分以外の誰かが作ったものであり，自分がそこに何かを加えたり，その一部を自由に書き換えたりすることは決してできない完結した作品だった．

（でも，もしかしたら……，自分にも何かできるかもしれない……．この数週間，花京院君と一緒に勉強しているあいだに，私だって，少しは成長したと思う．だから，私にだって作れる小さな世界が，きっとあるはず……）

「やってみようかな」青葉は小さな声でつぶやいた．

17.4. 青葉の経済モデル

青葉はアパートに戻り，ベッドに寝転んだ．天井のライトが少し眩しい．まず，自分が考えるべき目標を整理した．

（もし世の中の人がすべて同じ仕事をして同じ給料をもらっていたとしたら，きっと分布はあんな形にはならない．

でも実際には，高い給料をもらっている人もいれば，低い給料をもらっている人もいる．そういう人々をあつめて収入の分布を作ってみると，対数正規分布という形になる．

多くを稼ぐ人と，ちょっとしか稼げない人はなにが違うのかな？）

青葉は，目をつぶって考えた．メディアによく登場する IT 企業の CEO や，スポーツ選手や，ミュージシャンの顔が頭に浮かんだ．それらの人々は青葉にとって典型的な成功者で，たくさんのお金を稼いでいる人々だった．

（スポーツの世界では試合で活躍した選手が稼ぐ．音楽の世界では，ヒット曲を作ったミュージシャンが稼ぐ．ビジネスの世界ではヒット商品を開発した企業が稼ぐ．受験競争を勝ち抜き，一流大学を卒業した者が，大手企業に就職して稼ぐ．

これらの多様な現象の根底にあるもの．

……競争．

……多くを稼ぐ人は競争の勝者だ．勝ち続けた人が多くを稼ぐ）

《単純なモデルをベースに修正を加えるんだよ》

青葉は，花京院の教えにしたがい，既存のモデルをベースにして考えることにした．幸いなことにルーレットのモデルが参考になりそうだった．

（でも世の中の人はギャンブルで生計をたてているわけじゃないし……）

青葉は《最初は単純な例からはじめるんだよ》という花京院の声を思い出した．

（ものごとの本質，中心にあるもの……

お金を稼ぐ，ということの本質が，ルーレットみたいなものだとしたら？）

《重要なのは表面的なテーマではなくて，そこに潜む本質，いってみれば数学的構造だ》という美田園の言葉を思い出した．

\$\$

お金を稼ぐことの根底に，《確率 p で成功》，《確率 $1-p$ で失敗》というベルヌーイ試行があると考えてみよう．

仮定

- 人々はお金を稼ぐために，何らかの行動をとる（例えばモノをつくる，モノを売る，など）．
- 成功した場合にはお金を 1 単位得るが，失敗した場合にはお金を 1 単位失う．
- 成功する確率は p，失敗する確率は $1-p$ である．

仮定はこれだけでいいのかな‥‥‥．なんか，ちょっと不安だな．

あ，でも，《仮定はいつでも追加できる》んだよね．やってみて，うまくいかなかったら，あとで変えればいいんだった．

よし．じゃあ，この試行を n 回繰り返したとき，人々が稼いだお金の分布はどんな形をしているのかな？

k 回成功して，$n-k$ 回失敗した人の割合は二項分布に従うから

$$P(X=k)={}_nC_k(p)^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$$

かな？

でもこれは，成功数の分布であって，成功によって得たお金の分布じゃない‥‥‥

\$\$

そこで青葉はしばらく考えた．考えるだけでは，なかなか進まないので，できるだけ思いついたことを数式に直して紙に書きとめるようにした．ノートに数式を書くと，頁が進むにつれて，前に書いた式を探すことに時間がかかってしまうため，途中からノートに書くのをやめて，一枚ずつばらばらになったコピー用紙に式を書き始めた．ベッドの上に並べると，式変形の過程を一目で見渡すことができるようになった．

\$\$

試行の成功数をお金に変換するには，どうすればいいのかな‥‥‥？

そうだ，ランダムウォークと同じように考えればいいんだ．

稼いだお金を y，成功数を k とおけば，稼いだお金 y との関係は，

$$y = k-(n-k) = 2k-n$$

になっている．例えば n 回全部勝てば，

$$y = 2n-n = n$$

逆に n 回全部負ければ

$$y = 2\cdot 0-n = -n$$

うん．いい感じ．k を y で表せば

$$k = \frac{y+n}{2}$$

稼いだ金額 Y を確率変数とおくと，その確率分布は次の確率関数で与えられる．

$$P(Y=y) = {}_nC_{(y+n)/2}(p)^{(y+n)/2}(1-p)^{(n-y)/2}$$

この関数をもとに，少し計算してみよう．

$n=10$ くらいでいいかな，最小値が－10 で最大値が+10 になるはずね．p はどうしようかな？　最初は簡単に $p=1/2$ でいいか・・・・・・

$$

青葉は自分の定義した確率関数を使って計算をはじめた．なるべくシンプルに，という原則を守りながら計算したので 1 時間ほどで全ての計算を終えた．計算をする途中で，n が偶数（$n=10$）という仮定のもとでは，y もまた偶数であることをに気づいた．青葉は間違いのないように成功数と金額の対応表を作った．

表：n=10 の場合の，成功数 k と金額 $2k-n$ との関係

成功数 k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
金額 $2k-n$（k だけ代入）	0－n	2－n	4－n	6－n	8－n	10－n	12－n	14－n	16－n	18－n	20－n
金額 $2k-n$（k,n を代入）	－10	－8	－6	－4	－2	0	2	4	6	8	10

青葉は表をもとにして，さらに思考し続けた．ときおり自分の考えを紙に書き出すという作業は，頭のメモリを解放して思考に集中することに，単調ながらも絶大な効果があった．

《ある程度，計算結果がたまってきたら清書するんだよ》

試行錯誤した結果を客観視するという意味でも，花京院の助言は役に立った．

$$

そうかあ，基本的には二項分布だけど，成功数の分布のように実現値が

0, 1, 2, 3, …, n

じゃなくて，

－10, －8, －6, －4, …, 6, 8, 10

のように, 2 ずつ増えていくのか……. つまり実現値が奇数の場合は確率が 0 になるんだ.

ということは確率関数も厳密に言うと

$$P(Y=y)={}_nC_{(y+n)/2}(p)^{(y+n)/2}(1-p)^{(n-y)/2}$$ ただし y が奇数の時は確率は 0

だね.

$p=1/2$ という仮定から

$$(p)^{(y+n)/2}(1-p)^{(n-y)/2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{y+n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-y}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2n}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

よし，少し計算がラクになった．まとめると

$$P(Y=y)={}_nC_{(y+n)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$ ただし y が奇数の時は確率は 0

か……

$$

結果として彼女が得た関数は，求めていた確率密度関数とは違っていた．しかし，それでも青葉は満足していた．いや，それは満足感という言葉では言い表すことができない感情だった．彼女は，自分の胸に形容しがたい感情がわきあがってくるのを感じた．

（なんだろう，この感じ……）

青葉は不思議に思った．数学の計算なんて，これまでに何度も体験したはずだ．小学校，中学校，高校で何千何万回も繰り返してきたのに，今感じているような感情がわき上がったことは一度もなかった．彼女は未知の感情に興奮していた．

ずっと座って計算を続けていたせいで，体はぐったりと疲れ，頭もぼうっとしていた．それでも青葉の心は未知なる充足感で満たされていた．

17.5. 青葉の予想は正しいか

翌朝青葉は，自分の考えた計算を試すために，研究室に向かった．この日，彼女が履修している授業は一つもなかった．友人達との約束もなかった．花京院との約束さえなかった．にもかかわらず，彼女は大学にやってきた．

初めての経験にもかかわらず，彼女はこれが大学の本来の姿なのだと直感した．授業への出席は彼女にとって単なる義務の遂行であり，自発的な学びとはほど遠い強制に過ぎなかった．大学に入学して以来はじめて，彼女は自分の意思でこの場所に立っていることを自覚した．

研究室には誰もいなかった．しかし彼女はそのことを，かえって好都合だと考えた．

（ちゃんとした計算結果を出してから, それを見せて花京院君をびっくりさせてやるんだ）

青葉は誰もいない研究室で一人きりで作業を続けた．めずらしく研究室で作業している彼女の姿を見て，友人達は『宿題でもやってるの？』と声をかけてくる．青葉は友人達の問いかけを適当にあしらいながら作業に集中した．

しばらく作業を続けていると，美田園が自分宛の郵便物を取りに研究室にやってきた．青葉は少し迷ったが，思い切って美田園に声をかけた．

「先生ちょっと，コンピュータを使った計算の方法を教えて欲しいんですけど」青葉は身振り手振りをまじえて，どういう計算をやりたいのか一生懸命に説明した．

「要するに，二項分布の確率関数のパラメータに様々な値を代入し，異なる条件下で分布の形状の変化を観察したいんだね」美田園は青葉の要望を察すると，計算用のコードそのものではなく，コードの書き方を解説した文献の情報だけを教えると，自分の部屋へと戻っていった．

（ちぇっ，先生ケチだなあ……，花京院君ならすぐにでもコードを書いて計算してくれるのに. うーん, もしかして美田園先生って, あんまりコンピュータには詳しくないのかな？）

美田園が細部まで教えてくれなかったので，青葉は文献をもとに自分で計算用のコードを書かなければならなかった．結局その日のうちには，青葉は計算を実行することができなかった．

翌日，青葉は数式処理ソフトの勉強を一人で始めることにした．彼女には今，目的があった．解き明かしたい研究対象があった．そういう動機を持った状態で見ると，大学はとてもすばらしい場所だった．図書館に行けば，必要な資料は全て揃っていたし，研究室に行けば高価な数式処理ソフトを自由に使うことができた．また花京院という，うってつけの相談相手もいた．

はじめは手間取っていた青葉も，1 週間ほどで，簡単なプログラミングを用いた数値計算

の方法を習得した．青葉の書いたコードはけして効率のよいものではなかったが，十分に実用に足るものだった．コンピュータを働かせることで，彼女は自分の確かめたい計算を短時間で実行することがきできた．プログラムの使い方を覚えた彼女は，コンピュータの便利さをあらためて認識した．青葉は中学生の頃から自分用のコンピュータを所有していたが，メールとインターネットとワープロにしか利用したことはなかった．しかし，プログラムを書いてはじめて，彼女は本来のコンピュータの用途を知ったような気がした．

準備は整った――．青葉は研究室で，花京院が来るのを待ちわびている．通学の途中から，青葉はそわそわしていた．

（大学に来ることが，こんなに楽しいなんて……．私らしくない）

道すがら自分のアイデアを，どうやって伝えようかと考えた．すると自然と早足になった．期待感に青葉の胸は満ちていた．

彼女は，まず自分が導出した確率関数を示した．

$$P(Y=y)={}_nC_{(y+n)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{ただし } y \text{ が奇数の時は確率は } 0$$

「y が奇数のとき，というのは条件として少し一般性がないな」花京院は確率関数を見てこう指摘した．

「そうなの？」

「だって，n が奇数だったら，どうするのさ」

$$

n が奇数の場合について考えみよう．n=5 とおくよ．すると

成功数 k	0	1	2	3	4	5
金額（k だけ代入）	$0-n$	$2-n$	$4-n$	$6-n$	$8-n$	$10-n$
金額（k,n を代入）	-5	-3	-1	1	3	5

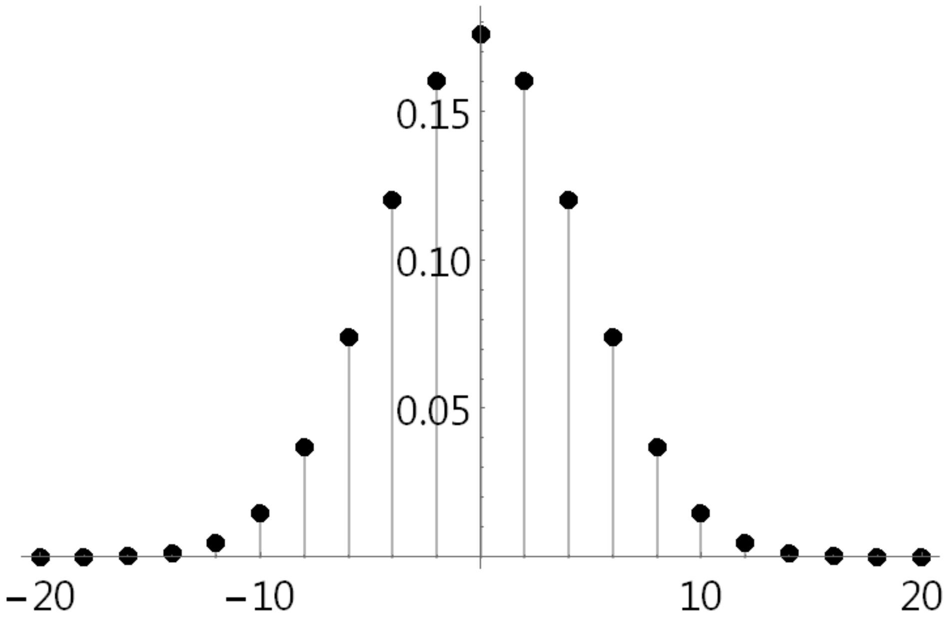
だ．つまり n が奇数だと，金額は全て奇数となり，偶数となる確率が 0 になる．だったらまとめて，こうでもいいんじゃないかな．

$$P(Y=y)=\begin{cases} {}_nC_{(y+n)/2}\,p^{\frac{y+n}{2}}(1-p)^{\frac{n-y}{2}}, & \dfrac{y+n}{2}\in Z \\ 0, & \dfrac{y+n}{2}\notin Z \end{cases}$$

ただし Z は整数の集合だよ．

$$

「そっかあ，一つにまとめちゃえばいいんだね．でも，見てもらいたいのは，実はこっちなんだ」彼女は競争に基づく所得分布をディスプレイ上にプロットした．



図：$P(Y=y)$ のグラフ．横軸は y，縦軸は確率．$n=20, p=0.5$ で計算．

「うん．2 項分布の確率関数だね．横軸が負の方向にシフトしていることを除けば，特に変わったところはなさそうだけど……」花京院にとっては，なんの変哲もない，見慣れたグラフのようだった．

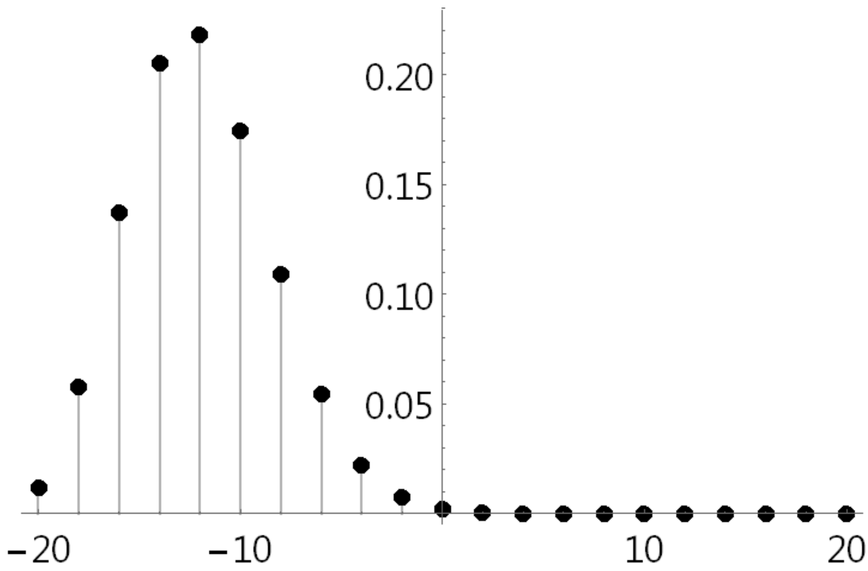
「次にパラメータ p だけを変化させて計算してみるね」

「n を固定して，p だけを変化させる，というのはいい方針だね．これはモデルを分析する際に，とても大切なことだよ．二つのパラメタを同時に変化させてしまったら，結果が何によって変化したのか分からないらね」

「そうだね．私もやっているうちに気がついた」青葉はうなずいた．

「で，何か発見したの？」

「さっきのグラフとの違いを見てね」青葉は p だけを変化させたグラフをプロットした．



図：$P(Y=y)$ のグラフ．横軸は y，縦軸は確率．$n=20, p=0.2$ で計算．

「どう？　この形って何かに似ていると思わない？」

花京院は彼女の言わんとすることをすぐに理解した．

「ほら，まえに花京院君が見せてくれた，所得分布の観察データに形が似てるでしょ？」青葉は楽しそうに言った．彼女が作ったグラフは，所得分布と共通する特徴——モードが分布の左に位置して右側の裾の長いという特徴——を持っている．

「ルーレットのモデルを基にして，いろんなグラフを作ってみたの．そしたら，おもしろいことが分かったんだ．p が 1/2 よりも小さいとグラフの形が対数正規分布っぽくなるの．山の一番高いところが左に偏るんだ」

「なるほど，それで？」

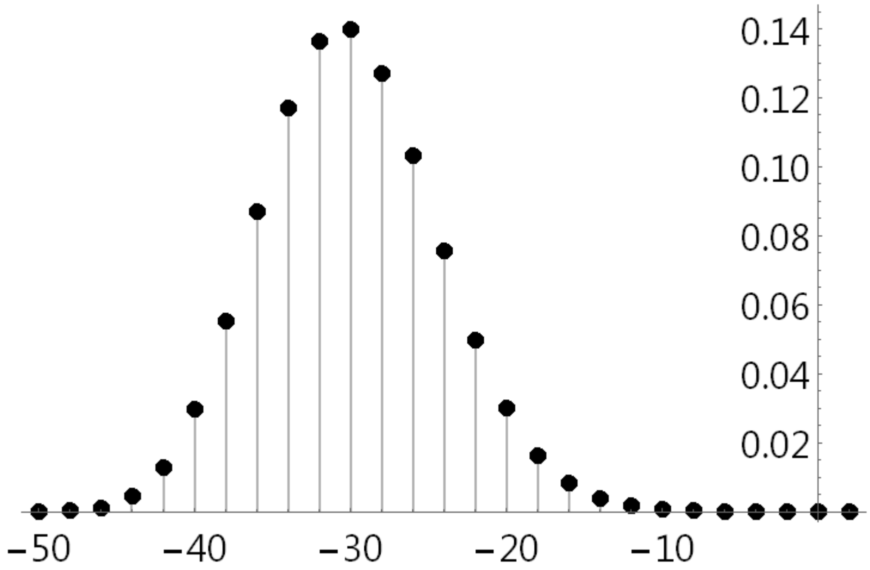
「現実の世界では，お金を稼ぐチャンスが 1/2 よりもっと低いんだよ．だから，それに合わせて p の値を小さく設定すれば，現実に近い分布が導き出せるってことなの」青葉は目を輝かせながら説明した．花京院は少し困惑した表情で話を聞いている．

（あれ……？　私, なんか勘違いしてる？　この発見には, たいした意味がないのかな？）

青葉は急に不安になった．

「パラメータを変化させると分布の形状が変わるという発見はとてもいいと思う．そういうことって，実際に計算しないとわからないからね．ただ君が見落としていることがある」

花京院は p=0.2 のまま，今度は n だけを 50 に変えて計算した．さらに横軸を負の範囲だけに限定してプロットしてみせた．



図：$P(Y=y)$ のグラフ．横軸は y，縦軸は確率． $n=50, p=0.2$ で計算し，横軸が負の範囲をプロットした

青葉は，思わずあっと声を漏らした．

「ゆがみが……消えた」

青葉は不思議そうにディスプレイに映ったグラフを眺めた． $p=0.5$ なら，左右対称になるのは直感的には理解できる．でもどうして $p=0.2$ の場合でも左右対称に見えるのだろうか？

「n が大きくなったとき，平均位置をずらせば左右対称になる．これはド・モアブル＝ラプラスの定理から予想される当然の結果なんだ」

「ド・モアブル＝ラプラスの定理……」青葉は定理の名前をゆっくりと繰り返した．

彼女は計算結果と花京院が打ち出したグラフを何度も見比べた．しかしゆがみが消えるという事実は動かしがたい証拠だった．

（なんだあ，意味なかったのかあ……）

彼女は，自分のこれまでの作業が全て無駄だったと感じた．そして浮かれていた自分をひどく恥ずかしく思った．

その様子を察したのか，花京院は言った．

「君の計算は無駄じゃないよ．どんな計算も無駄にはならない．君は計算することで，この世界をよりよく理解できるようになったんだよ」

だが，青葉にはそんな花京院の慰めの言葉など耳に入らなかった．

18. 正規分布と二項分布——第 9 変奏

ある命題が他の命題から論理的に有意味的な方法でつくりだされるとき初めて，演算が成り立つ

5.233

18.1. 山の上に続く道

青葉は重い足どりで，大学へと続く坂道を歩いていた．昨日までは，あんなに軽やかな足どりだったというのに．今日はうってかわって，陰鬱な気分だ．

それというのも，あの定理のせいだ．《ド・モアブル＝ラプラスの定理》

その定理の存在が呪わしかった．花京院の慰めも彼女には効果がなかった．

（いったいなんなのよ……ド・モアブル＝ラプラスって．どこからどこまでが名前なのよ．私の一週間を返せ）

ふいに背後から，バイクのエンジン音が響いた．青葉が振り返ると，大型バイクが減速しながら近づき，すぐ横で停止した．ネイビーブルーのレザージャケットとパンツ．黒いスモークシールドのせいでヘルメットの内部は見えないが，脚のラインと胸の膨らみでドライバーが女性であることはすぐにわかる．

フルフェイスのヘルメットを脱ぐと，豊かな黒髪から甘い香りが広がった．

（アンリさん……）

「上まで行くけど．よかったら乗ってく？」

青葉は，生まれてから一度もバイクに乗ったことがなかった．初めは恐怖で，しがみついたアンリの体温しか感じることができなかった．やがておそるおそる目を開けると，風と共に音と加速を感じることができた．

（あ，花京院君だ）

流れていく風景の中に，一人で坂道を自転車で上っていく花京院の姿があった．アンリのバイクはスピードを緩めること無く，その横を走り去っていった．

青葉とアンリは理学部キャンパスのカフェテラスにやってきた．理学部は丘の上にある文学部より，さらに坂を登った山の上に位置している．青葉がそこを訪れるのは基礎ゼミの授業以来，1 年ぶりだった．

理工系キャンパス食堂は天井が高く，壁面の巨大なガラスから，自然光がたっぷりと入る

開放的な構造だった．留学生が多いせいか，外国の大学に来たかのように青葉には感じられる．青葉はパスタをほおばりながら，最近考えていたことをアンリに説明した．

$$

つまり, 青葉ちゃんは, ゲームの結果が二通りにしか分岐しないベルヌーイ試行によって，所得分布を生成しようとしたんだね．なるほど‥‥‥．文系の人って，人間社会で確率分布が持つ意味を，そんな風に解釈するんだね．

投資ゲームの成功回数 X を確率変数と見なせば，X は二項分布に従う．トータルの利得 Y は成功数 X の関数

$$Y = 2X - n$$

で表すことができる．

ここから青葉ちゃんは，n 回後の総所得の分布を直接計算できるような関数を定義した．それが所得 Y の確率関数

$$P(Y = y) = \begin{cases} {}_nC_{(y+n)/2}\, p^{\frac{y+n}{2}} (1-p)^{\frac{n-y}{2}}, & \dfrac{y+n}{2} \in Z \\ 0, & \dfrac{y+n}{2} \notin Z \end{cases}$$

だね．

花京院君が指摘した事実は，正規分布による二項分布の近似だよ．簡単に言うとね，n が十分に大きいとき，二項分布の確率関数

$$P(X = x) = {}_nC_x\, p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

は次に示す正規分布の確率密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{ \frac{-(x-np)^2}{2np(1-p)} \right\}$$

で近似することができるんだよ．

$$

「ええ？　ちょっと待って．いまアンリさんが言ったのは,

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{と} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{ \frac{-(x-np)^2}{2np(1-p)} \right\}$$

が同じような値になるってこと？」

「そうだよ」

「えー？　嘘でしょ．全然違う式に見える」

2 項分布の確率関数には馴染んでいる彼女も，2 つめの式に関しては，それがいったいどこから出てきたのか全く分からなかった．

ただし，青葉はその不思議な数式になぜか見覚えがあった．

（あの式･･･，どこかで見た記憶がある･･･，どこで見たんだっけ？）青葉は目をつぶって考えた．そしてその数式のイメージと自分の記憶がどこでつながっているのかを探った．

（そうだ･･･，最初のあのときだ）

青葉は，自分が花京院とはじめて会話した日のことを思い出した．花京院が唐突に自分に異性と出会う確率を伝えてきたあの日，花京院がホワイトボードに書いた数式には確かにこの式

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}\exp\left\{\frac{-(x-np)^2}{2np(1-p)}\right\}$$

が含まれていた．

18.1. ド・モアブル＝ラプラスの定理

「この π とか exp って，なんですか？　しかもルートまで使っているし，そもそも階乗はどこにいっちゃったの？」青葉はアンリの主張をにわかに信じることができなかった．

「うん．確かに $P(x)$と $f(x)$とではずいぶん見た目が異なっているね」

「でしょう？　計算すると同じような値になるなんて，ちょっと信じられないです」

「実例を見せた方が納得できるかな？　n=10, p=0.4, x=6 とおいて計算してみようか」アンリはテーブルの上に置かれたサークルのチラシを拾い上げると，その裏に計算式を書いた．

$$

二項分布の確率関数

$$P(X=x)={}_nC_x p^x (1-p)^x$$

に n=10, p=0.4, x=6 を代入すると

$$\begin{aligned}
P(X=6) &= \frac{10!}{6!(10-6)!}0.4^6(1-0.4)^{10-6} \\
&= \frac{10!}{6!(4!)}0.4^6(0.6)^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}0.4^6(0.6)^4 \\
&= \frac{5040}{24}\cdot 0.004096\cdot 0.1296 \\
&= 0.111476736
\end{aligned}$$

だよ．もう一つの正規分布の確率密度関数を使って計算すると

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{ \frac{-(x-np)^2}{2np(1-p)} \right\} \\
f(6) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 10 \cdot 0.4(1-0.4)}} \exp\left\{ \frac{-(6-10\cdot 0.4)^2}{2\cdot 10 \cdot 0.4(1-0.4)} \right\} \\
&\approx 0.11191605
\end{aligned}
$$

だよ．ふたつの数値の差をとってみると

$$0.111476736 - 0.11191605 = -0.000439314$$

しかない．ほとんど同じ値でしょ？

$$

（確かに，ほとんど同じだ･･･．でもいったい，どうしてこんな不思議な関係が成立するのだろう）

どこから

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{ \frac{-(x-np)^2}{2np(1-p)} \right\}$$

という関数がでてきたのか？　青葉には分からないことだらけだった．

数ヶ月前の青葉ならば，おそらくこの時点で，自分には理解できない，と思って話を聞くのを止めていたに違いない．

しかしこの数日間の体験で，青葉は変化していた．彼女は，すぐにでもこの謎をアンリに説明してほしいと思った．

「この不思議な一致を定理として表現したのが，ド・モアブル＝ラプラスの定理だよ」アンリは，残った余白に一つの命題を書いた．

$$

命題（ド・モアブル＝ラプラスの定理）．試行回数が n，1 回毎のベルヌーイ試行で注目事象が生じる確率が p であるような二項分布にしたがう確率変数を X とおく．a,b を任意の実数として，n が十分に大きいとき

$$P\left(a \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

が成立する．

$$

「アンリさん，これってどうやって証明するんですか？」

「ちょっと，この余白には書ききれないわね」アンリは優雅に肩をすくめた．

「お願いします．私，知りたいんです．そうしないと先に進めないんです」

「青葉ちゃん．この証明はあなたには，まだ難しいと思うんだけどなあ．あなたが知っている数学の範囲だけで証明すれば，すごく時間がかかる．それでもいいかな？」

青葉は，黙ってうなずいた．

「分かった．どうせなら花京院君も一緒にいる時にやりましょう．来週，美田園先生のところで用事があるから，そのときに会いましょう」

青葉は再会を約束すると一人で山を下りることにした．文学部のキャンパスまで送っていくとアンリが言ってくれたが，青葉はその申し出を丁寧に断った．歩きながら彼女はさまざまなことを考えた．山を下りる途中でカーブした坂道から街を見下ろすと，そこには見慣れない景色が広がっていた．

（山のうえから見ると，こんな風にみえるんだ‥‥‥．見慣れたはずの街なのに，まるで別の街みたい）

18.2. 長き証明の道

青葉と花京院は，研究室でド・モアブル＝ラプラスの定理の証明に取り組んでいる．

アンリと約束した日は今日――．

彼女が来るまでに少しでも自力で進めるつもりだった．しかし，いろいろな方法を試してみたが, この問題にはまるで歯が立たなかった. 具体的な数値を使えば例示はできるものの, 一般的な代数的変形によって示す事ができない．

二人が頭を抱えていると，美田園准教授が研究室に入ってきた．後ろには笑顔の七北アンリ．黒髪の奥でピアスが光っている．形は前につけていたものとは違うようだ．タイトなモスグリーンのニットに，黒いロングスカートを合わせている．

「ああ，ちょうど良かった．紹介しておこう．彼女は理学部の 4 年生で七北アンリ君だ．うちの研究室が参加している科研のプロジェクトを手伝ってもらっている．あれ？　君たち，すでに知り合いか？」

「はい，理学部にいた頃からの同級生です．神杉さんも，彼女とは面識があります」花京院が答えた．

「それならちょうどよかった．私はこれから会議があるから，その間に資料室の使い方を彼女に教えてあげてくれるかい？」美田園は机の上に散乱する大量の計算用紙を一瞥した．

計算用紙に書かれた数式の断片から，青葉達が取り組んでいる課題を察知した様子である．

「ふむ，中心極限定理か⋯⋯ずいぶん難しい問題に取り組んでるね」

花京院は，どの部分で行き詰まっているかを美田園に説明した．

「うん，そりゃあそうだろう」美田園は他人事のように言った．

「花京院君，その定理の証明は，そこの棚にある『確率概論』が詳しく解説している．分からないところがあったら七北さんに教えてもらうといい．七北さん，君はこの定理の証明は見たことある？」

「ええ，そのつもりもあって来ましたから」アンリはすました顔で答えた．

「え？　そうなの？　君はなんでも準備がいいんだね．まあとにかく，あとは君たちでよろしくやってくれ」そう言い残すと美田園は首をひねりながら研究室を出て行った．

花京院と青葉も，朝からずっと計算をしていたので休憩がてらアンリを連れて研究室を出た．

「どうして君が，美田園先生の科研を手伝ってるわけ？　事務的な仕事なら僕だって手伝えるのに⋯⋯．先生，どうして僕に頼まないのかな」資料室周辺を案内しながら，花京院が不機嫌そうに言った．

「知らないわよ．私だって先生に頼まれただけなんだから．でもいいじゃない．おかげこっちに遊びに来れるわけだし」

アンリは文学部に来たのは，あれ以来はじめてだと言った．しかし特に建物や施設に興味があるわけではなそうだ．三人は他愛のない会話をしつつ研究室に戻ってきた．お互いの自己紹介から，少しだけ複雑な年齢と学年の関係が明らかになった．

「すると⋯⋯，花京院君は文学部では 2 年生なんだね．ってことは青葉ちゃんと学年が同じなのね」

「そうです．花京院君の方が年上ですけど」と青葉が補足する．

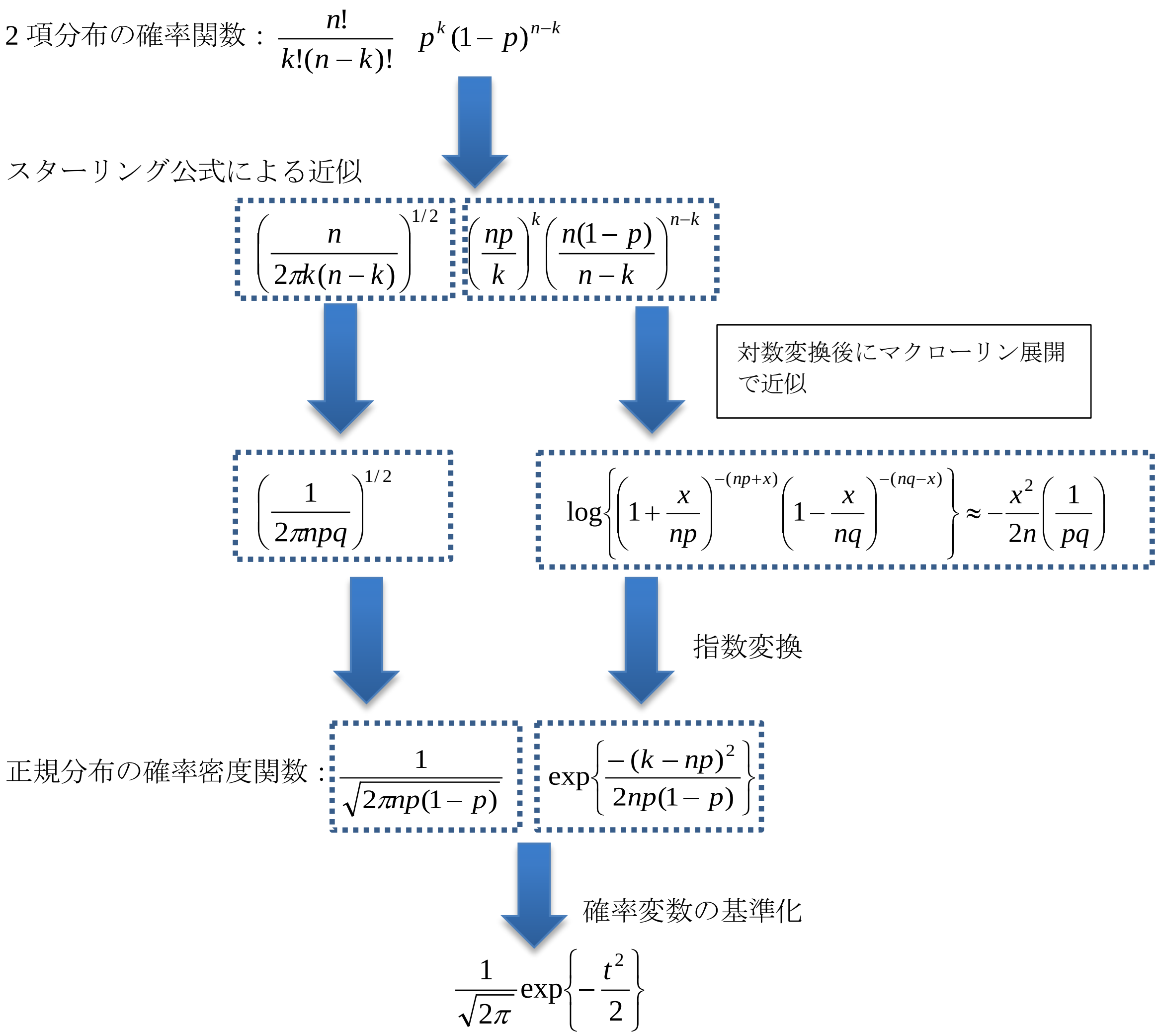
見た目はアンリの方が大人っぽく見えるが，実は花京院がアンリより 1 つ年上であることも分かった．

（花京院君，やけに落ち着いてると思ったら私より，3 つも年が上だったとは⋯⋯）

「じゃあ，問題を見せてもらえる？」落ち着いたところでアンリが口火を切った．

花京院は，しぶしぶ自分が理解できない箇所を説明した．しばらくアンリは黙って花京院の説明を聞いていた．

「まずはゴールまでの道筋を直感的な絵で示すね」



「記号については，これから説明するから，大体のイメージだけを感じてね．青葉ちゃん……．前にも言ったと思うけど，あなたがまだ知らない補題や命題をたくさん使うから，一度で完全に理解しようとは思わないでね．一度も走ったことのない人がフルマラソンをいきなり走ることはできないでしょう？　今からやることは，後で自分が走る予定のコースを車に乗って下見するようなものだよ．自分が走るスピードとは違うから戸惑うかもしれないけれど，あとでゆっくり振り返ればいいんだからね．それじゃあ，まずスターリングの公式からはじめるよ」

二人はうなずいた．

18.2.1. スターリングの公式

「《スターリングの公式》は，階乗の近似を与える命題だよ」アンリは説明を進めた．

命題（スターリングの公式）．

$$\lim_{n\to\infty} n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)} e^{-n}$$

この証明は別に与えるとして，いまはこの関係が成立することを認めておくわね．まずnが大きい時に，

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left\{ \frac{-(k-np)^2}{2np(1-p)} \right\}$$

が成立するかどうか考えてみるよ．$n \to \infty$ であるとき，$k!$ や $(n-k)!$ についても公式が成立すると考えれば

$$k! \approx \sqrt{2\pi}\, k^{k+(1/2)} e^{-k}, \quad (n-k)! \approx \sqrt{2\pi}\, (n-k)^{(n-k)+(1/2)} e^{-(n-k)}$$

という関係が成立する．これを二項分布の確率関数に代入すると

$$\begin{aligned}
\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} &\approx \frac{\sqrt{2\pi}\, n^{n+(1/2)} e^{-n}}{\sqrt{2\pi}\, k^{k+(1/2)} e^{-k} \sqrt{2\pi}\, (n-k)^{(n-k)+(1/2)} e^{-(n-k)}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n^{n+(1/2)} e^{-n}}{k^{k+(1/2)} e^{-k+k-n} \sqrt{2\pi}\, (n-k)^{(n-k)+(1/2)}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{n^n n^{1/2}}{(2\pi)^{1/2} k^k k^{1/2} (n-k)^{(n-k)} (n-k)^{1/2}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \left(\frac{n}{2\pi k(n-k)} \right)^{1/2} \frac{n^k n^{n-k}}{k^k (n-k)^{(n-k)}} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \left(\frac{n}{2\pi k(n-k)} \right)^{1/2} \left(\frac{np}{k} \right)^k \left(\frac{n(1-p)}{n-k} \right)^{n-k}
\end{aligned}$$

「ここまではいい？」とアンリが聞いた．二人はうなずいた．青葉はスターリングの公式がどうして成立するのかは，知らなかった．でも，それが成立すると仮定すれば，その後の式変形は理解できた．

「n が大きくなるとき，$k!$ や $(n-k)!$ も同様にスターリングの公式で近似できるっていう

のは，ほんとうかな？　ちょっと，待って．計算して確かめてみよう」花京院は階乗の数値例を表計算ソフトを使って計算した．

n	$n!$	$\sqrt{2\pi}n^{n+(1/2)}e^{-n}$	$n!/\sqrt{2\pi}n^{n+(1/2)}e^{-n}$
1	1	0.9221	1.0844
2	2	1.919	1.0422
3	6	5.836	1.0281
4	24	23.51	1.0210
5	120	118.0	1.0168
6	720	710.1	1.0140
7	5040	4980	1.0120
8	4.032*10^4	3.990*10^4	1.0105
9	3.629*10^5	3.595*10^5	1.0093
10	3.629*10^6	3.599*10^6	1.0084
11	3.992*10^7	3.962*10^7	1.0076
12	4.790*10^8	4.757*10^8	1.0070
13	6.227*10^9	6.187*10^9	1.0064
14	8.718*10^10	8.666*10^10	1.0060
15	1.308*10^12	1.300*10^12	1.0056

「なるほど，思った以上に精度がいいんだなあ．n=1 のときでさえ，公式で近似できるんだから，k が小さくても $k!$ に対して公式による近似を適用しても問題なさそうだ」花京院が計算結果を確認した．

「さて，ここからの大きな流れはこうよ．マクローリン展開を使って，n が大きい時に 0 に近づく項を落として関数を近似する．そのための準備として記号を

$$x = k - np \Leftrightarrow k = np + x$$

$$x = k - np \Leftrightarrow x = k - n(1-q) \Leftrightarrow n - k = nq - x$$

とおくね．$1 - p = q$ と定義したわよ」アンリが続けた．

$$

この記号を使っておきかえると

$$\left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{1/2}\left(\frac{np}{k}\right)^{k}\left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}=\left(\frac{n}{2\pi(np+x)(nq-x)}\right)^{1/2}\left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{nq}\right)^{-(n-k)}$$
$$=\left(\frac{n}{2\pi(np+x)(nq-x)}\right)^{1/2}\left(1+\frac{x}{np}\right)^{-(np+x)}\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{-(nq-x)}$$

さ

て，式の第一項の括弧の中だけに注目すると

$$\frac{n}{2\pi(np+x)(nq-x)}=\frac{n}{2\pi n(p+\frac{x}{n})n(q-\frac{x}{n})}=\frac{1}{2\pi n(p+\frac{x}{n})(q-\frac{x}{n})}$$

だよ．分母の $2\pi n(p+\frac{x}{n})(q-\frac{x}{n})$ と $2\pi npq$ の比にかんして

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi npq}{2\pi n(p+\frac{x}{n})(q-\frac{x}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{pq}{(p+\frac{x}{n})(q-\frac{x}{n})}=\frac{pq}{(p+0)(q-0)}=\frac{pq}{pq}=1$$

が言えるから， n が大きいとき

$$2\pi n(p+\frac{x}{n})(q-\frac{x}{n})\approx 2\pi npq$$

と近似できる．一方，第二項以下の積の部分については，まず対数をとる．

$$\log\left\{\left(1+\frac{x}{np}\right)^{-(np+x)}\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{-(nq-x)}\right\}=\log\left(1+\frac{x}{np}\right)^{-(np+x)}+\log\left(1-\frac{x}{nq}\right)^{-(nq-x)}$$
$$=-(np+x)\log\left(1+\frac{x}{np}\right)-(nq-x)\log\left(1-\frac{x}{nq}\right)$$
$$=-\left\{(np+x)\log\left(1+\frac{x}{np}\right)+(nq-x)\log\left(1-\frac{x}{nq}\right)\right\}$$

そしてこの部分だけマクローリン展開する．

\$\$

「えっとマクローリン展開って‥‥‥？」

それは青葉がはじめて聞く言葉だった．

18.2.2. マクローリン展開

「マクローリン展開は，関数をより単純な和の形で近似する方法だよ」アンリのかわりに

花京院が説明した．

$$

　マクローリンの定理．関数 $f(x)$ が 0 を含む区間 D で n 回微分可能ならば，D の任意の x に対して $f(x)$ は

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$$

と表される（ただし $0<\theta<1$）．右辺の和を関数 $f(x)$ のマクローリン展開という．

　補題として，例えば次のような対数を使った関数のマクローリン展開を考えてみよう．

補題（関数 $\log(1+x)$ のマクローリン展開）．

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^7}{7}+\cdots$$

　ここで，補題ではプラスとマイナスが交互に表れているところを，少し不思議に感じるかもしれない．

　マクローリン展開は，関数を和の形で書く命題だからだ．でも第 1 項から順番に確認していけば，その理由が分かる．順番に各項を書くと，

$$\begin{aligned}
&f(x)=\log(1+x) && f(0)=\log 1=0\\
&f'(x)=\left(\frac{1}{1+x}\right)=(1+x)^{-1} && f'(0)=1^{-1}=1\\
&f''(x)=-(1+x)^{-2} && f''(0)=-(1)^{-2}=-1\\
&f^{(3)}(x)=2(1+x)^{-3} && f^{(3)}(0)=2(1)^{-3}=2\\
&f^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4} && f^{(4)}(0)=-6(1)^{-4}=-6
\end{aligned}$$

となっている．つまり，導関数の符号が 1 階ごとに入れ替わっているから，補題では正負の符号が交互に現れるんだ．

$$

　花京院の説明に，なるほどお，と青葉は声をもらした．

　アンリが続けて式を書く．

$$

花京院君が説明してくれた補題を使って，$(1+x/np)$ と $(1-x/nq)$ の対数のマクローリン展開をそれぞれ考えるよ．

$$\log\left(1+\frac{x}{np}\right)=\frac{x}{np}-\frac{x^2}{2n^2p^2}+\frac{x^3}{3n^3p^3}-\frac{x^4}{4n^4p^4}+\cdots$$
$$\log\left(1-\frac{x}{nq}\right)=-\frac{x}{nq}-\frac{x^2}{2n^2q^2}-\frac{x^3}{3n^3q^3}-\frac{x^4}{4n^4q^4}+\cdots$$

$\log(1-x/nq)$ の方は，マクローリン展開すると各項がマイナスになる点に注意してね．あわせて書けば,

$$\begin{aligned}
&(np+x)\log\left(1+\frac{x}{np}\right)+(nq-x)\log\left(1-\frac{x}{nq}\right)\\
&=(np+x)\left(\frac{x}{np}-\frac{x^2}{2n^2p^2}+\frac{x^3}{3n^3p^3}-\frac{x^4}{4n^4p^4}+\cdots\right)-(nq-x)\left(\frac{x}{nq}+\frac{x^2}{2n^2q^2}+\frac{x^3}{3n^3q^3}+\frac{x^4}{4n^4q^4}+\cdots\right)\\
&=\left(x+\frac{x^2}{np}-\frac{x^2}{2np}-\frac{x^3}{2n^2p^2}+\frac{x^3}{3n^2p^2}+\frac{x^4}{3n^3p^3}-\frac{x^4}{4n^3p^3}-\frac{x^5}{4n^4p^4}\cdots\right)\\
&\qquad-\left(x-\frac{x^2}{nq}+\frac{x^2}{2nq}-\frac{x^3}{2n^2q^2}+\frac{x^3}{3n^2q^2}-\frac{x^4}{3n^3q^3}+\frac{x^4}{4n^3q^3}-\frac{x^5}{4n^4q^4}\cdots\right)\\
&=\left(x+\frac{x^2}{2np}-\frac{x^3}{6n^2p^2}+\frac{x^4}{12n^3p^3}\cdots\right)\\
&\qquad-\left(x-\frac{x^2}{2nq}-\frac{x^3}{6n^2q^2}-\frac{x^4}{12n^3q^3}\cdots\right)\\
&=\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\frac{x^3}{6n^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)+\frac{x^4}{12n^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)-\cdots
\end{aligned}$$

だよ．さて，

$$\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\frac{x^3}{6n^2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)+\frac{x^4}{12n^3}\left(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}\right)-\cdots$$

の括弧の中は n とは無関係だから定数と考えると，

$$\frac{x^2}{2n}a_1-\frac{x^3}{6n^2}a_2+\frac{x^4}{12n^3}a_3-\frac{x^5}{20n^4}a^4\cdots$$

という形になっている．ここで《ランダウ記号》を使うよ

$$

18.2.3. ランダウ記号

アンリは新しい記号を導入した．

$$

定義（ランダウ記号．ラージ・オーとスモール・オー）．正の値をとる 2 つの数列 $f(n), g(n), n=1,2,\ldots$ を仮定する．定数$0<c<\infty$が存在して，任意のnに対して

$$\frac{f(n)}{g(n)}<c$$

が成り立つとき， $f(n)=O(g(n))$ とかく（ラージ・オー）．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

が成り立つとき

$$f(n)=o(g(n))$$

とかく（スモール・オー）．

$$

「なに，これ？　初めて見たわ」と青葉が目を丸くした．彼女はまだ，さきほどのマクローリン展開も十分に消化できていなかったので，あたらしい記法に戸惑った．しかしそこで，アンリの言葉を思い出して，気を落ち着かせた．

（いますぐに理解できなくても，焦らなくていいんだ……．あとでゆっくり振り返ろう……）

「これは今まで使ったことのない新しい記号だから，例を考えてみよう」青葉の様子を察した花京院が補足した．

$$

$\log n$ とnの比を考えてみよう．対数を取っている分$\log n$は，ただのnよりも増加の仕方が緩やかだから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$$

が成立する．このことを新しい記号を使って書くと$\log n=o(n)$ とあらわすことができる．

他にも例えば

$$f(n)=\frac{1}{n^2}, g(n)=\frac{1}{n}$$

とおく．すると二つの比をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1/n^2)}{(1/n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

が成立する．だからスモール・オーを使えば，$\dfrac{1}{n^2}=o(1/n)$ と書ける．これは直感的に言えば，n が大きくなったとき，$1/n^2$ は $1/n$ よりもっと 0 に近づいている，ってことを表しているんだよ．

$$

「うーん，難しいなあ．これまでに出てきた記号とは，確かにちょっと違うみたい」と青葉は言った．

「ランダウ記号を使えば，マクローリン展開したときに，とても小さな項を省略して，より単純な関数で近似することができるのよ」アンリが続けた．

$$

たとえば

$$f(x)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}+\cdots$$

という関数があったとするでしょ？

n が大きくなったときに，$1/n$ よりも $1/n^2$ や $1/n^3$ のほうが，同じ n に対してより 0 に近い，ということは直感的にも分かるよね．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^2}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^3}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1/n^4}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$$

が成立するから，ランダウ記号の定義によって

$$\frac{1}{n^2}=o(1/n),\quad \frac{1}{n^3}=o(1/n),\quad \frac{1}{n^4}=o(1/n)$$

と書けるの．これは $1/n^2$ や $1/n^3$ が $1/n$ よりも，0 に近いことを意味しているのよ．いま

$$n\to\infty,\quad o(1/n)+o(1/n)=o(1/n)$$

だから，

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^5}+\cdots\\&=\frac{1}{n}+o(1/n)\end{aligned}$$

と書けるの．

$$

「うーん，つまりこの《小文字の o》は，《n が大きくなった時に 0 になる項》をまとめて表現していると考えればいいのかな」と青葉が首をかしげつつ聞いた．

「そうね，直感的にはそういうことだよ」とアンリが答え，さらに続きを紙に書いた．

「さて 2 項分布の確率関数の一部をマクローリン展開した

$$\frac{x^2}{2n}a_1 - \frac{x^3}{6n^2}a_2 + \frac{x^4}{12n^3}a_3 - \frac{x^5}{20n^4}a^4 \cdots$$

は，定数部分を無視して考えると本質的には

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5} + \cdots \\ &= \frac{1}{n} + o(1/n) \end{aligned}$$

という形をしているでしょ？　つまり第 2 項以下は第 1 項に比べて相対的に 0 に近いから，その部分を 0 と考えれば

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - \frac{x^3}{6n^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) + \frac{x^4}{12n^3}\left(\frac{1}{p^3} + \frac{1}{q^3}\right) - \cdots \\ &= \frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + o(1/n) \approx \frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \end{aligned}$$

と近似できるわけ」

「うーん」と花京院がうなずく．アンリは続けた．

「対数関数の性質から

$$\begin{aligned} &\log\left\{\left(1 + \frac{x}{np}\right)^{-(np+x)}\left(1 - \frac{x}{nq}\right)^{-(nq-x)}\right\} \\ &= -\left\{(np + x)\log\left(1 + \frac{x}{np}\right) + (nq - x)\log\left(1 - \frac{x}{nq}\right)\right\} \\ &\approx -\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = -\frac{x^2}{2n}\left(\frac{p+q}{pq}\right) = -\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{pq}\right) \end{aligned}$$

と変形できるから，対数をもとに戻せば

$$\left(1 + \frac{x}{np}\right)^{-(np+x)}\left(1 - \frac{x}{nq}\right)^{-(nq-x)} = \exp\left\{-\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{pq}\right)\right\}$$

になるの．じゃあ，ここまでの結果をまとめるわよ」アンリはここまでの証明の流れをあらためて紙に書いた．

\$\$

まず 2 項分布の確率関数をスターリングの公式を使って書き換えたわよ．

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{1/2}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}$$

右辺の 1 つめの括弧は

$$\left(\frac{n}{2\pi k(n-k)}\right)^{1/2}\approx\sqrt{2\pi npq}$$

と近似できる．残りの積の部分はマクローリン展開を使って

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{n(1-p)}{n-k}\right)^{n-k}\approx\exp\left\{-\frac{x^2}{2n}\left(\frac{1}{pq}\right)\right\}$$

と近似できる． $x=k-np$ だったから，これを戻して二つをあわせると， n が十分に大きければ

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}$$

という関係が示せたことになるの．

\$\$

「わあー，すごい．見た目が全然違う式なのに，ちゃんと近似できてる」青葉は驚嘆の声を上げた．

「最後に今の結果を基準化してド・モアブル＝ラプラスの定理を示すよ」アンリはいよいよ証明の最後にとりかかった．

\$\$

仮定より確率変数 X がパラメータ n,p の 2 項分布に従う．

$$P(a\le\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\le b)=P(a\sqrt{npq}+np\le X\le b\sqrt{npq}+np)$$

と変形しておくわね．集合として $L=\{k\,|\,a\sqrt{npq}+np\le k\le b\sqrt{npq}+np\}$ を定義すると，求める確率は二項分布の確率関数を使って

$$P(a\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le b)=\sum_{k\in L}{}_nC_k\,p^kq^{n-k}$$

とかける．

ここで先ほどの計算結果を使えば

$$\sum_{k\in L} {}_nC_k p^k q^{n-k} \approx \sum_{k\in L} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\}$$

となる．この総和記号$\displaystyle\sum_{x\in L}$ は集合 L の要素である x を全て足しあわせる，という意味よ．ここで総和範囲の表現を変えるために $k-np = x_k\sqrt{npq}$ とおくわよ．k が $a\sqrt{npq}+np$ のとき，x_k は

$$\begin{aligned} k-np &= x_k\sqrt{npq} \\ a\sqrt{npq}+np-np &= x_k\sqrt{npq} \\ a &= x_k \end{aligned}$$

となっている．同様に k が $b\sqrt{npq}+np$ のとき，$x_k = b$ である．つまり k が《$a\sqrt{npq}+np$ から $b\sqrt{npq}+np$》まで動くとき，x_k は《a から b》まで動く．したがって，

$$\sum_{k\in L} f(k) = \sum_{x_k\in[a,b]} f(g(x_k))$$

と考えていい．$L=\{k \mid a\sqrt{npq}+np \le k \le b\sqrt{npq}+np\}$ が k に関する総和の範囲だったことに注意して，x_k に関する範囲で式を書き直すと

$$\begin{aligned} \sum_{k\in L} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right\} &= \sum_{x_k\in[a,b]} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(x_k\sqrt{npq})^2}{2npq}\right\} \\ &= \sum_{x_k\in[a,b]} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{{x_k}^2}{2}\right\} \\ &= \sum_{x_k\in[a,b]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{{x_k}^2}{2}\right\} \frac{1}{\sqrt{npq}} \end{aligned}$$

となるわね．ところで

$$x_{k+1}-x_k = \frac{k+1-np-(k-np)}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

だから n が大きくなれば，差 $x_{k+1}-x_k = 1/\sqrt{npq}$ は 0 に限りなく近づく．リーマン積分の定義によって

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in L} {}_nC_k p^k q^{n-k} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{x_k\in[a,b]} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{{x_k}^2}{2}\right\}(x_{k+1}-x_k) \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}\ dt \end{aligned}$$

である．つまり $n\to\infty$ のとき

$$P(a \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \ dt$$

が言えたわ．

$$

「ちょっと細部は省略したけど，初等的な計算だけで証明すれば，こんな感じかな」アンリは，ふうっと一息ついた．

「うわー，難しかったあ．こんなに長い式の展開をみたのは，はじめて」と青葉は大きくため息をついた．同時に彼女は，ずっと前から気になっていた謎がようやく解けたことに感動していた．

（花京院君が《モテる確率》を計算したとき……，n が大きい場合には 2 項分布を正規分布で近似できるって言ってのは，こういう意味だったんだ）

「青葉ちゃん．もっとセクシィな方法もあるんだよ」

「セクシィ？」青葉が目を白黒させていると，アンリは《特性関数》を説明しはじめた．

$$

特性関数は，実数 t に対して定義された

$$\varphi(t) = E[\exp\{\sqrt{-1}tX\}]$$

のことよ．例えば正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の特性関数は

$$\varphi(t) = \exp\{\sqrt{-1}\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}$$

なの．この特性関数と確率分布は 1 対 1 に対応しているのよ．逆にいうと，特性関数が，このような形である分布が正規分布なんだよ．

$$

「この関数はなんのために使うの？」と青葉が聞いた．

「特性関数は，分布の極限を調べたり，分布を合成した結果を調べるのに便利なの」そう言ってアンリは実際に，特性関数を活用した中心極限定理の証明を示した．それはスターリングの公式を経由した証明に比べて，ずっと短い説明だった．

$$

独立で同分布を持つ確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ に対して，ある $0 < \delta < 1$ が存在して，

$$E[|X_n - \mu|^{2+\delta}] = K < \infty$$

が成立すると仮定する．ただし $\mu = E[X_k]$．このとき

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

とおけば

$$\forall x, \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{\omega \mid \frac{S_n(\omega) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\}) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{t^2}{2}\} dt$$

が成立する．

証明．各 X_i がベルヌーイ確率変数のときは，この条件が成立することは簡単に確かめられるよ．ここで

$$\varepsilon(x) = \exp\{\sqrt{-1}x\} - (1 + \sqrt{-1}x - \frac{x^2}{2})$$

とおくと，δ に依存して決まる定数 $c > 0$ が存在して，任意の実数 x に対して

$$|\varepsilon(x)| \le c|x|^{2+\delta}$$

が成り立つ．確率変数の独立性から

$$\begin{aligned}\varphi_n(t) &= \prod_{k=1}^{n} E[\exp\{\sqrt{-1}t\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\}] \\ &= \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{t^2}{2n} + E[\varepsilon(t\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}})])\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\log\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \log(1 - \frac{t^2}{2n} + E[\varepsilon(t\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}})])$$

であり，$|x| \le 1/2$ に対して $|\log(1+x) - x| \le C|x|^2$ かつ

$$E[\varepsilon(t\frac{X_k - \mu}{\sigma\sqrt{n}})] \le c(t/\sigma)^{2+\delta} n^{-(1+\delta/2)K}$$

が成り立つから，

$$|\log\varphi_n(t) - \sum_{k=1}^{n}(-\frac{t^2}{2n})| = O(n^{-\delta/2})$$

となる．よって

$$\lim_{n\to\infty} \log\varphi_n(t) = -\frac{t^2}{2} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \exp(-\frac{t^2}{2}).$$

ほら，確かに標準正規分布 $N(0,1)$ の特性関数になったでしょう？

$$

「ちょっと待った．その証明が成立するためには，《法則収束するための必要十分条件は，対応する特性関数が各点収束することだ》っていう定理が必要じゃない？」花京院が聞いた．

「そうね」

「それにボホナーの定理もカッツの定理も全然説明していない．——たしかにその方が，すっりきりしていることは認めるけど．僕や神杉さんがそれを理解するためには，さらに時間がかかるよ」花京院が不満を述べた

「あのう，なんだか全然ついていけないんですけど……」青葉が遠慮気味に言った．

「あ，いいのいいの．だってちゃんと説明してないんだもの．私が言いたかったのは……，証明がうんと難しい一般的な定理を使うと，それよりも抽象度の低い命題の証明はぐっと簡略化できるってことなの．例えば実関数の増減を調べるのに，足し算や引き算だけを使って考えると手間がかかるけど，微分っていう抽象的な手法を使えば，もっと簡単になるでしょ？そういう感じってことを知って欲しかっただけなの」

アンリは携帯電話で時間を確認すると，そろそろ先生が会議から戻ってくる頃だ，とつぶやいた．

「うーん楽しかったね，また一緒にお話ししましょう．じゃあね，青葉ちゃん……あ，ついでに花京院君も」アンリは青葉に向かって片目をつぶると，研究室を去って行く．

黒髪の甘い残り香だけが，研究室にただよっていた．

「うーん七北さんって，カッコいいねえ」青葉は素直に賞賛した．

「うん，彼女は相変わらず……，スマートだ」花京院は複雑な表情で同意した．

「……けど，これって結局，わたしたちが考えている問題と，どういう関わりをもっているのかな？」

「そうだね，少し話を整理しておこう」花京院は気をとりなおして，ここまでの議論の流れを再確認した．

「まずゲームを繰り返すと，勝った回数は二項分布にしたがう．ここまではいいかい？」

「うん」

「で，ゲームの回数がすごく大きくなると，勝った回数の分布が，だんだんと正規分布に近づいてくる．二項分布が正規分布にだんだん近づくってことの直感的な意味は具体的な計算例で示したね」

「うん」

「そして，今みたように，この傾向は一般的な命題としても成立する」

「うん，それがド・モアブル＝ラプラスの定理ね」

「そうだよ」

「でも今の話はぜーんぶ正規分布よね.私たちが欲しかったのは対数正規分布だったよね」青葉が自分たちの目的を再確認した.

「そうなんだ．僕もここから先どう進めようか考えているんだけど...」

二人はコーヒーを飲みながら議論を続けた．しかし定理の証明をフォローするだけで既に疲れ切っていて，いいアイデアは浮かんでこなかった.

「花京院君なんだか元気がないよ．どうしたの？」青葉が花京院の顔をのぞき込んだ．花京院は少し落ち込んでいる様子だった.

「うん……，やっぱり七北さんにはかなわないなあと思って」花京院は苦笑いしながら言った.

「そうね，彼女は凄いね」

「僕は彼女から逃げたかったんだ」

青葉は目を丸く見開いた.

「どういうこと？　昔付き合ってたけど，喧嘩別れしたとか？」

「いや，そういうことじゃないよ．正確に言えば彼女だけじゃなくて，彼女みたいな人達から少し距離を置きたかったんだ」

「アンリさんみたいな人って，どういう人のこと？」

「高い水準の数学，つまり，より専門性の高い数学をやるための能力に優れている人達から」

「そうなの……．でも花京院だって数学は得意でしょ」

「いや，僕は得意じゃない．たしかに好きではあるけど，どちらかと言えば不得意な方じゃないかな」

「へえ，信じられない」

「僕が自転車で必死に坂を上っていると，横をバイクで駆け上がっていくような感じなんだ．僕が全力で漕いでも，同じスピードで上ることは絶対にできない」花京院は，含み笑いを浮かべて言った.

「え？　あのとき，気づいてたの？　やだあ」

「あんなバイクに乗ってるのは,七北さんだけだよ.排気音を聞いただけですぐに分かる.まあともかく，純粋数学から少し離れようとしたとき，美田園先生のサイエンスカフェでの講演を聞いたんだ．僕が偶然参加した講演の内容は，人間の行動や社会現象を説明するために作られた数理モデルの紹介だった」

彼は，美田園の講演のどういう部分がおもしろかったのかをくわしく説明した．

「それで，僕も美田園先生みたいな数学を使った研究をしてみたいと思ったんだ」

「ふうん．そうだったの」

「その講演で先生の言った言葉がすごく印象に残っている」

「どんな言葉？」

「《数学は自由です．不自由なのは私たちの想像力のほうです》だよ」花京院は，美田園の口調を真似て言った．

「あれ，その台詞⋯⋯，どこかで聞いたおぼえが⋯」

「以前，僕が君に言った言葉だよ．オリジナルは美田園先生」

「なーんだ，カッコいい台詞だなと思ってたのに⋯⋯，先生の言葉だったのかあ」

「その言葉を聞いたとき，本当に希望を感じたんだ」

青葉は花京院の転部理由を聞きながら, この人は気の毒なくらい真面目なんだなと思った．

きっと多くの人は，そんな風に考えない．

きっと多くの人は，状況に流されるままに生きている．

彼はそれができない人なんだろう．

19. 持てる者は，ますます豊かになる——第 10 変奏

絵は，現実と合致するかしないかである．すなわち正しいか正しくないかである．

2.21

19.1. わずかなコスト

青葉と花京院は美田園が運転する 4WD 車に乗って，温泉宿を目指している．チャイルドシートに座った美田園の娘——奈々美は，出発直後から興奮しすぎたせいか，いまは疲れて眠っていた．

後続の小田原の車——動くのが不思議なくらい古い軽自動車には，美田園ゼミの学部生二名が同乗している．青葉は車の外を眺めながら，ぼんやりと考え事をしていた．

美田園が突然，ゼミ合宿に行こう，と宣言したのは約 1 週間前のことだった．例年，ゼミ合宿の行き先は，美田園の気分で適当に決まる．行き先は参加者にとってはどうでもいいことだった．一般に，大学におけるゼミ合宿は，勉強時間はわずかで，遊び時間のほうが長い．しかし三田園ゼミの合宿は，実際に勉強するための合宿であり，通例，遊ぶ時間はほとんどないに等しいからである．今回のゼミ合宿は，美田園が 3 歳になる娘を連れてきているところが例年とは違っていた．

車の窓の外を流れていく景色の中に，《温泉まであと 23km》と表示した標識があった．

「あと 23km だって」青葉は何の気なしに，自分の視界に入った道路情報を伝えた．少しの間があった後，助手席に座った花京院があと 23 分くらいだね，とつぶやいた．

「この速度で進み続けるならば，という仮定のもとでは正しい」運転中の美田園が付け加えた．青葉は後部座席から身を乗り出して，運転席をのぞきこんだ．スピードメータの針は時速 60km/h の位置を示している．その速度は彼らが現在走っている国道の制限速度とピッタリ同じだった．

「花京院君，計算がはやいね」

花京院は，今のは計算してないよ，と答えた．

「なあんだ．テキトーに言っただけなの？　」青葉は聞き返した．

「いや，適当じゃないよ．先生が言ったとおり，60km/h という速度で走るという仮定の下でなら 23 分後に着くという予想は正しいはずだ」と花京院は答えた．

青葉にはわけが分からなかった．計算せずにどうして，到着までの時間を予想できるのだろう？　気になった青葉は，頭の中で残りの所要時間を計算してみた．

現在，車は時速 60km/h で目的地に向かって走っている．23km 進むのに，時速 60km/h では何分かかるか？

23km÷60km/h＝？？？

青葉はそこまで考えたが，23/60 という計算が面倒になって，途中で止めてしまった．その様子に気づいた美田園は青葉にクイズを出した．

Q: 目的地までの距離を 30km とおく．時速 60km/h で走り続けるという条件下で，到着に要する時間は？

「1/2 時間走れば 30km 進むから，所要時間は 30 分です」青葉は即答した．
「ＯＫ．じゃあ次はどうかな？」美田園はもう 1 つクイズを続けた．

Q: 目的地までの距離を 15km とおく．時速 60km/h で走り続けるという条件下で，到着に要する時間は？

さきほどよりも少し時間がかかったが，青葉は答えた．
「1/4 時間で 15km 進むから，1/4 時間＝15 分ですね」
「今までの問題に，なにか共通点はあるかな？」

青葉は考えた．まず時速 60km/h という仮定が共通している．他にはないだろうか？　結果をもう一度確認してみよう．

残り 23km で所要時間 23 分
残り 30km で所要時間 30 分
残り 15km で所要時間 15 分

（あ，残りの距離と所要時間が，単位は違うけど同じだ．偶然一致したのかな？）

「花京院君，紙に書いて説明してあげたら？　そこにノートが入っている」美田園は視線を先方に向けたまま，手探りでグローブボックスを開けた．花京院はボールペンとノートを取り出した．

$$

考え方はこうだよ．

時速 X km/h で走っているとき， Z km 進むのに要する時間は

$$Z\ \text{km} \div X\ (\text{km/h}) = \frac{Z\ \text{km}}{X(\text{km}/h)} = \frac{Z}{X/h} = (Z/X)\,\text{h}$$

だ．つまり Z/X 時間を要する．これを分になおすと $1h = 60m$ だから

$$\frac{Z}{X}h = \frac{Z}{X}60m$$

である（ m は分 minute を表す）．これは時速や距離がなんであれ，《時速》の定義より必ず成立する．

小学校の時に習ったよね．懐かしいだろう？

さて条件は「時速 60km/h」だから $X = 60$ だ．これを代入すると

$$\frac{Z}{X}60\,m = \frac{Z}{60}60m = Z\,m$$

だね．この結果は，

時速 60km/h で走り続けると Z km を進むのに Z 分かかる

と言う命題——残距離 km 数と所要時間分数は必ず一致すること，の証明になっている．たまたま時速の 60 と，1h=60 分の 60 が一緒だったために，一般式における分母分子がキャンセルされたってこと．

$$

「なんだあ，そういうことかあ」青葉は拍子抜けしたように言った．美田園が説明を補足する．

「たしかに答えを聞けば，なんでもない話だ．でもその計算を，頭の中だけではできなかったという事実が重要だ. 君は頭の中で考えるふりをしていただけだ. 本当に考えたければ，紙に書いて思考を外部化するんだ．これはとても重要なことだよ」

青葉は考えるふりをしているだけだと指摘されて，一瞬むっとしたが，花京院が手にしたノートを見て考えを改めた．そこには美田園が過去に書き込んだ数式や図が，びっしりと並んでいた．

（先生も，花京院君も，いつもこうして書いてるんだ．きっと毎日，少しずつ時間を見つけては書いてるんだね‥‥‥．だから私が見ている世界とは違う世界が見えているのかな）

青葉はふと，サイコロ振りの実験の話をしていた時のことを思い出した．

（60 億秒がどのくらいの長さなのか，という問題を花京院君は 1 ステップずつ丁寧に紙に書いて計算していた‥‥‥．自分もふくめて普通の人は，あんな面倒なことをいちいちやっ

たりしない．でも，花京院君や先生はきっと違うんだ．そうやって考えることが，二人にとっては自然なんだ）

突然，背後から迫った大型バイクが，4WD 車の横をかすめるように，追い抜いて行った．

「あんなにスピード出して，危ないなあ」美田園が小さくつぶやく．

大型バイクは徐々にスピードを緩め，車の右側を併走する．体にぴたりとフィットしたネイビーのレザースーツに，黒いフルフェイス・ヘルメット．レザーの光沢によって浮き上がるなまめかしい曲線に，青葉は見覚えがあった．運転手は左手でヘルメットのバイザーを開けると，後部座席の青葉にウィンクして見せる．

「わ，アンリさんだ」青葉が声を上げた．

「なんだ，冗談かと思ってのにホントに来たのか，やれやれ」花京院がため息をついた．美田園は運転席からアンリに向かって片手を振り，先に行くよう指示を出した．

ギアを一段落としたバイクは一気に加速する．長い黒髪がなびいた次の瞬間，アンリのバイクは視界の遙か前方に消えさった．

「わー，かっこいい．アンリさん．決まってるなあ」青葉が嬉しそうに言った．花京院は，不機嫌そうに反対側の窓の外を眺めている．

「七北君は私が呼んだ．合宿で君たちの助けになるかと思ってね．お⋯⋯，そろそろ温泉に着くぞ」美田園が宿泊先の旅館の駐車場に車を停めた．玄関先で待っていた従業員がお辞儀をして一行を迎えてくれた．

青葉が車内の時計を見ると，23 分が経過していた．

19.2. ジェンダー・バイアス

宿に着いた一行は，旅館の周りを散策したり，土産物を眺めたり，温泉につかったりそれぞれ自由行動を 1 時間ほど楽しんだ．青葉はひとりで近くの山道を歩いた．ひんやりとした空気と静寂が心地よかった．歩きながら青葉は所得分布の問題について考えていた．青葉は自分でもそのことを意外に思った．

（散歩しながら，数学について考えるなんて，私らしくない⋯⋯）

1 時間の自由時間が終わると，さっそく勉強の時間が始まった．美田園のゼミ合宿では，研究報告の時間は最終日の 1 時間だけで，それ以外は自習時間と割り当てが決まっている．

夜になると，一同は 10 畳ほどの和室に集まって一緒に食事をとった．既に風呂に入った者は浴衣に着替えている．学生達はビールをお互いについだり，料理の感想を言いながら食事を楽しんだ．花京院と院生の小田原は，夕食後にも計算をするらしく一滴も酒を飲んでい

なかった．美田園は少し酒を飲んでいたが，酔ってはいなかった．

「さてそれじゃあ食事も終わったし,お風呂でも入るかな······誰か一緒に行く人いる？」まだ風呂に入っていない者は，食事前に外を散歩していた青葉だけだった．神杉さん以外はみんな入ったみたいですよ，と小田原が代表して答えた．

「じゃあ神杉さん，一緒にお風呂はいる？」美田園が真顔で聞いた．

青葉は飲みかけのビールを思わず吹きだした．セクハラです，止めてください，と真っ赤な顔で叫ぶ．

「そうです．先生．青葉ちゃんとお風呂に一緒に入るのは，私でーす」浴衣に着替え，すでに酔っ払ったアンリが後ろから青葉に抱きついてきた．

（いや，それも絶対恥ずかしい）青葉は困惑して助けを求めた．

「しかたないなあ．じゃあ花京院君でもいいや，一緒にはいるか？」美田園は，やはり真顔のまま花京院を誘った．

花京院は飲みかけのウーロン茶を吹きだした．彼は顔を赤くして，それは完全にセクハラですと声をあげた．

「なんだ，なんだ······最近の学生は，恥ずかしがり屋だなあ」文句を言いながら，結局美田園は一人で風呂場へと向かっていった．

「おーい，佑(たすく)ー．せっかく先生が誘ってくれたのに，ノリが悪いぞー」アンリが据わった目で花京院をにらみつけ，真横に腰を下ろした．顔にかかる息のアルコール濃度が高い．

「誰だよ，彼女に酒を飲ませたのは．酒癖悪いんだから，だめだよ．······そうか，応用数学科じゃ破壊王と呼ばれてること，ここのみんなは知らないのか」花京院はため息をついた．

（ふうん．花京院君の名前，《たすく》っていうんだ．読み方を知らなかったなあ······下の名前で呼ぶところをみると，やっぱりアンリさんと花京院君は仲がいいのかな······）青葉は残っていたビールを飲み干した．

夕食が終わると，花京院と小田原は継続中の計算を再開するために部屋に戻っていった．青葉達は本を読みながら，柿ピーをつまみに酒を飲み続けた．

1 時間ほどの宴会が終わったあと，他の学生達もそれぞれ自分の部屋に戻り，勉強や研究の続きを再開した．

青葉は部屋で少し本を読んで時間を潰してから，一人で大浴場へと向かった．漢字で大きく女湯と書かれたのれんをくぐると，予期したとおり脱衣場には誰もいなかった．

（やった，お風呂を独占できる）青葉は心の中で歓声をあげた．

背後でトタトタっと小さな足音がした．振り返るとそこにいたのは，美田園の娘——奈々

美だった．

「あれ，奈々美ちゃん一人でお風呂に来たの？　お姉ちゃんと一緒にはいる？」青葉が聞いた．奈々美は首をぶんぶんと左右に振った．突然，のれんをくぐって美田園が脱衣場に入ってきた．青葉はとっさにバスタオルで体を覆い隠した．

「先生！　もうお風呂は入ったんじゃないんですか？」青葉の顔が紅潮した．

「いやー，奈々美がもう一度お風呂に入りたいって言うから……」美田園は青葉の横であっという間に服を脱ぎ捨てた．

「ママー，はやくおいでよお」奈々美が風呂場から美田園を呼んだ．

「奈々美ー，先に体を洗わなきゃダメだよ」中から奈々美の嬌声が響いた．青葉は脱衣場で立ちつくしていた．

（先生って，お子さんを産んだとは思えないほど，スタイルがいいなあ……）奈々美は美田園響子が 30 歳の時に生んだ子供である．青葉は絶対に見られないように，タオルで厳重に体を覆ってから風呂場の扉を開けた．

19.3. 美田園のヒント

翌日，ゼミ合宿に参加したメンバー達はそれぞれに取り組んでいる研究を一心不乱に進めた．朝食をとった後，各自は自分の部屋にこもり，昼食までのあいだは作業に集中する．学生達の研究手法は，基本的に数理モデル解析なので，必要な道具は紙と鉛筆のみである．コンピュータはおもに計算の確認用にのみ使われ，合宿中は誰もインターネットを使わない．

そもそもこの旅館にはインターネットの回線がなかった．これは美田園が意図的に計画したことだった．自分の世界に集中するための工夫である．

誰も彼らを邪魔しなかった．

静かな時間だけが流れた．

ある者は，微分方程式を解くことだけに一日を費やし，ある者は，結託耐性ナッシュ均衡の存在証明に没頭した．

食事の時間になると，お互いに自分が行き詰まっている箇所についての情報を交換して，助言を求め合った．問題を人に説明しているうちに，自ら解決の糸口をつかみ，自分の部屋にさっさと戻っていく者もいた．また中には，自分の問題をそっちのけにして，人の考えている問題に没頭してしまう者もいた．

青葉と花京院は，朝からずっとギャンブルと所得分布の関係について考えてきたが，問題を打開するよいアイデアに恵まれなかった．一度，美田園の意見を聞いてみよう，ということで二人の意見は一致した．

部屋を訪ねると，美田園は人さし指を口にあて，音を立てないよう合図した．「いま寝たところなんだ」昼寝をする自分の娘を横において，彼女は机に向かって計算していた．

奈々美の昼寝を邪魔しないように，談話スペースに移動した三人は，向かい合ってソファに腰をおろした．青葉は花京院と共に，正規分布を導出した経緯までを美田園に説明した．

美田園は，ぼんやりした様子で話を聞いていたが突然，なんだ，もうほとんど出来ているじゃないか，と言った．青葉と花京院は顔を見合わせた．

「でも，ここからさき，全然進まないんですけど」

「研究にとって，最も大切なことは，よい問題を見つけることだ．そして二人が見つけた問題は，間違いなく《よい問題》だ．だからあとはなんとでもなる．いや，なんとかしなくてはいけないんだ」

「はあ⋯⋯」二人は釈然としない様子で言った．問題が見つかってもその答えが見つからないから困っているのではないか，と二人は思った．

「おおよそ持っている人は，与えられてますます豊かになる⋯⋯，ってとこかな」美田園は唐突につぶやいた．

「え？　なんですかそれ？」青葉は，具体的なアドバイスをしてくれないので，少し不満そうに言った．花京院も，美田園の言葉と自分たちが考えている問題の接点が，よく分からなかった．

「じゃあ，言い方を変えようか⋯⋯ 《加法的》ではなく，《乗法的》に考えるんだよ」美田園はどうやらヒントを追加したようだ．

「それだけですか？」青葉は，まだ不満そうだった．

「あとは自分で考えてごらん」美田園はそう言って，昼寝中の奈々実の様子を見るために部屋へと戻っていった．美田園が去ったあと，青葉と花京院はただ，顔を見合わせるほかなかった．

19.4. 対数正規分布の導出

青葉と花京院は，旅館内の会議室で研究を再開した．もっともそこは会議室とは名ばかりの和室の宴会場で，ただ平机と申し訳程度に小さなホワイトボードが置いてあるだけの部屋だった．

「ここまでの流れを確認しておこう」花京院は自分たちが考えてきた道筋を整理して，会議室兼宴会場のホワイトボードに書いた．

- 1 回毎の試行で確率 p で成功して，確率 $1-p$ で失敗する．
- 成功すれば，1 単位の所得を得るが，失敗すると 1 単位失う
- 総所得の分布はゲーム回数 n が十分に大きいとき，正規分布に近似する

「ここまでの仮定だと，プレイヤーは連続してゲームに勝ち，総所得が増えてもその増え方は一定でしかない．だから僕らはまだ最終的な目標に到達できていない．先生は，加法的にではなく，乗法的に考える，というヒントを出した」

「そうね．結局利得を足すってことは，一度に決まった量しか増減しないからね」

青葉はこれまでの計算経過を見直した．彼女の視線はルーレットのアルゴリズムの箇所で止まった．なにか気になることを発見したようだ．

「私たち，以前《倍賭法》について考えたよね」

「ああ．リスクが高すぎて結局は実用性に欠ける方法だったね」

「確かに，個人の観点からすると，リスクが高すぎるんだけど．社会全体で考えてみたらどうかしら？」と青葉が提案した．

「社会全体？」

「そう．社会の全ての個人が《倍賭法》を使ってお金を稼ぐゲームに参加したと考えるの．確かに多くの人は失敗するけど，全員が失敗するわけじゃない．少数の人は勝ち続けることができるはず．ほら，ポーカーの時もそうだったじゃない」

「なるほど．個人ベースじゃなくて，マクロな視点から《倍賭法》を評価してやればいいのか．ただ……その場合は，増加量が一定という問題が残るよ」

「だからね，《倍賭法》の逆を考えるの」

「逆？」

「以前考えた《倍賭法》は，負ける度に前回の倍を賭けたでしょ？　今回はその反対に，勝ち続ける限り倍賭けする，と仮定するの」

花京院は青葉のアイデアに少なからず驚いた．そこには二つの大きな飛躍があった．一つは個人の視点から考えてきた投資方法をマクロな視点から評価してその分布を調べようという発想である．もう一つは，《倍賭法》を負けた場合ではなく，勝った場合に適用するという真逆の発想である．どちらも花京院には思いつかなかった自由なアイデアだった．さっそく花京院は計算に取りかかった．

$$

単純例として，成功し続けた場合の所持金がどうなるのかを確認しておこう．最初の所持

金が 10 円で 1 回目に 1 円賭けることにしよう. 勝った場合に倍賭けするから,《倍賭法 (勝)》と呼ぶことにするよ

表 : 倍賭法（勝）による数値例

回数	開始前の所持金	ベット額	終了時の所持金
1	10	1	11
2	11	2	13
3	13	4	17
4	17	8	25
5	25	16	41
6	41	32	73
7	73	64	137
8	137	128	265
9	265	256	521
10	521	512	1033

10 回連続で成功すると，10 円が 1033 円になる．通常の倍賭法だと，10 回連続で勝っても 20 円にしかならないから，結果的に差は大きい.

$$

「この場合の確率分布ってどうなっているのかな？　計算が難しそうだね．一定額を賭け続ける場合は，ランダムウォークの変形だったから 2 項分布に従うことがすぐに分かった⋯⋯．でも倍賭法（勝）の場合は難しそうだなあ」青葉が疲れた様子で言った.

「そういうときは，どうするんだっけ？」

「そうだ！　単純例だ」青葉は計算用紙を取り出した.

$$

倍賭法（勝）の勝数と負け数，およびトータル所持金の関係を考えるよ.

ルーレットを 3 回繰り返したと仮定するね．2 回勝って 1 回負けるパターンには次の 3 通りあるよ.

	1 回目	2 回目	3 回目

パタン 1	勝	勝	負
パタン 2	勝	負	勝
パタン 3	負	勝	勝

所持金 10 円で 1 円を賭けるとしよう．もし定額を賭け続けるのなら，どのパタンであっても稼いだ金額は同じだよ

	1 回目	2 回目	3 回目
パタン 1	勝　11 円	勝　12 円	負　11 円
パタン 2	勝　11 円	負　10 円	勝　11 円
パタン 3	負　9 円	勝　10 円	勝　11 円

ところが倍賭法（勝）を使うと……

	1 回目	2 回目	3 回目
パタン 1	勝　11 円	勝　13 円	負　9 円
パタン 2	勝　11 円	負　9 円	勝　10 円
パタン 3	負　9 円	勝　10 円	勝　12 円

ほら，倍賭法（勝）だと勝数と負け数が同じでも，どの時点で勝ったかによって，所持金が変わっちゃうよ．でも規則性は見えてこないな.

$$

「この倍賭法（勝）は，事態の本質を表していると思う」

「本質？」

「現実の社会では， 既に富める者，つまり過去のゲームの勝者が多くを投資して，より多くを得る機会に恵まれている．この仮定は, 持っている量に比例して賭金が決まり， 勝てば勝つほどより多くを得るような《累積効果》を表している，と言える」

「あ，もしかして」

「《持てる者は与えられて，ますます豊かになる》――美田園先生がくれたヒントだよ．マタイによる福音の一節だ」

「倍賭法（勝）は，勝てば勝つほど利益がどんどん増えていく．美田園先生は，このことを言ってたんだね」

花京院は立ち上がって，広間をぐるぐると歩きながら考えた．

「賭金が変化しながらも，どの回で勝ったかに依存せずに結果が同じになるような方法はあるだろうか？　持っている量に比例‥‥‥比例‥‥‥そうか割合を使えばいいんだ．本質的なのは,《一定の割合》という仮定なんだ！」花京院は興奮した声で叫んだ．その勢いのまま，ホワイトボードに，新しい仮定を殴り書きする．

《プレイヤーは，初期所得 y_0 を持ち，そこから一定割合 $b(0<b<1)$ を賭ける》

「これでうまくいくの？」と青葉が聞いた．

「うまくいくかどうかは計算してみないと分からない．さっそくやってみよう」

花京院は計算用紙に飛びついた．

$$

記号 y_n でゲーム n 回繰り返した後の総利得を表すことにするよ．初期所得は y_0 だからコストは $y_0 b$ だね．

結果は《勝つ》か《負ける》かの二通りしかないから，ゲームに 1 回勝った場合，トータルの所得 y_1 はこうなる．

$$y_1 = y_0 + y_0 b = y_0(1+b)\,.$$

2 回連続で勝つ場合，1 回目で得た所得 y_1 をもとに賭けるから,

$$y_2 = y_1 + y_1 b = y_1(1+b) = y_0(1+b)(1+b) = y_0(1+b)^2$$

になる．

1 回目も 2 回目も所持金に対する一定の割合 b を賭けるから， b 自体は一定でも，勝ち続けると少しずつ賭ける金額は増加していくんだ．

以下同様に, 3 連続，4 連続で投資に成功した場合の総所得を考えると,

$$y_3 = y_0(1+b)^3,\ y_4 = y_0(1+b)^4$$

であると予想できる．だから n 回投資に成功した場合の総所得 y_n は

$$y_n = y_0(1+b)^n$$

だよ．

次に，賭に失敗した場合を考える．

失敗した場合, 今度は賭けた金額を引けばいいんだ. 例えば 1 回目を失敗した場合の y_1 は,

$$y_1 = y_0 - y_0 b = y_0(1-b)$$

となる．2 回連続で失敗すると

$$y_2 = y_1 - y_1 b = y_0(1-b)^2$$

だよ．この結果から n 回連続で失敗すると，

$$y_n = y_0(1-b)^n$$

になることが予想できる．

さて，おもしろくなってきたぞ．ここまではいいかな？

$$

「うん．所持金の一定割合を賭ける，という仮定に変更した場合は，たしかに勝てば勝つほど自動的に賭ける額が大きくなるし，逆に負ければ負けるほど賭ける額が小さくなるね」

「それだけじゃない．この仮定を使えば，勝ち負けの順番に依らず，最終利得が同じになるんだ」

「どういうこと？」

「例えばゲームを 5 回繰り返したプレーヤーが 2 人――A, B がいると仮定しよう」

A：最初の 3 回が「成功」，残りの 2 回は「失敗」

B：最初の 1 回が「失敗」，次の 2 回は「成功」，次の 1 回は「失敗」，最後の 1 回は「投成功」

「この 2 人は結果的には同じ回数だけ《投資成功》と《投資失敗》を経験している」

「そうだね，順番は違うけど，成功数と失敗数は同じだね」

「この二人の手元に残った金額は同じだろうか？　それとも違うだろうか？」

青葉は頭の中で計算しようとしてが，うまくいかないので，紙を使って計算を始めた．

$$

A の総所得は，えーっと

「成功 3 回」→「失敗 2 回」

を体験した場合の総所得だから，3 回成功した時点で

$$y_3 = y_0(1+b)^3$$

になっていて，4 回目に負ける．つまり

$$y_4 = y_3 - y_3 b = y_3(1-b) = y_0(1+b)^3(1-b)$$

になるんだね．最後の 1 回は負けだから

$$y_5 = y_4 - y_4 b = y_4(1-b) = y_0(1+b)^3(1-b)^2$$

だ．

次に B の総所得，つまり

「失敗 1 回」→「成功 2 回」→「失敗 1 回」→「成功 1 回」

を体験した人の総所得を考えるよ.

1 回目失敗: $y_1 = y_0 - y_0 b = y_0(1-b)$

2 回目成功: $y_2 = y_1 + y_1 b = y_1(1+b) = y_0(1-b)(1+b)$

3 回目成功: $y_3 = y_2 + y_2 b = y_2(1+b) = y_0(1-b)(1+b)^2$

4 回目失敗: $y_4 = y_3 + y_3 b = y_3(1+b) = y_0(1-b)^2(1+b)^2$

5 回目成功: $y_5 = y_4 + y_4 b = y_4(1+b) = y_0(1+b)^3(1-b)^2$

だから，A と B の総所得はどちらも $y_5 = y_0(1+b)^3(1-b)^2$.

$$

「ほんとだ！　同じになった」青葉が興奮して叫んだ.

「実数の乗算は，かけあわせる順番を換えても結果が変化しない．乗法の可換性という性質だよ．この性質により，選択肢の経路に依らずトータルの利益は，必ず一致する」

花京院が一般式を書いた.

$$

n 回ゲームを繰り返したとき，w 回成功して，$n-w$ 回失敗すると，トータルの利益は

$$y_n = y_0(1+b)^w(1-b)^{n-w}$$

である.

ここからがさらにおもしろいよ．y_n の対数をとると，

$$\begin{aligned}
\log y_n &= \log\{y_0(1+b)^w(1-b)^{n-w}\} \\
&= \log y_0 + \log(1+b)^w + \log(1-b)^{n-w} \\
&= \log y_0 + w\log(1+b) + (n-w)\log(1-b) \\
&= \log y_0 + w\log(1+b) + n\log(1-b) - w\log(1-b) \\
&= w\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) + \log y_0 + n\log(1-b)
\end{aligned}$$

となる.

僕たちはすでに，ベルヌーイ試行を反復した場合の成功回数 w は二項分布にしたがうってことを知っている．また《二項分布の正規分布による近似》や《ド・モアブル＝ラプラスの定理》によって，ゲーム回数 n が十分に大きいとき, w の分布を正規分布で近似できることも知っている.

ここで, w の係数である

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$$

と，第 2 項と第 3 項の和

$$\log y_0 + n\log(1-b)$$

に注目してみる．

これらの数は確率変数ではなく，モデルの仮定によって与えられるパラメーター――つまり定数だ．定数の部分を A,B で表すと，

$$A = \log\left(\frac{1+b}{1-b}\right),\ B = \log y_0 + n\log(1-b)$$

と表すことができる．言い換えると総所得は

$$\log y_n = wA + B$$

と表すことができる．こうしてみると，$\log y_n$ が w の一次変換になっていることがよく分かる．

$$

「w が正規分布にしたがっているとき，定数 A,B によって変換した

$$wA + B$$

の分布は何にしたがっているだろう？」花京院が楽しそうに聞いた．

「正規分布だ！　正規分布にしたがう確率変数は一次変換しても，やっぱり正規分布にしたがうんだよ．……『基礎数学』に書いてあったし，私，証明もフォローしたことあるよ」

「ということは右辺の $wA+B$ は正規分布に従うわけだね」

「そうだよ」

「じゃあ右辺の $\log y_n$ は？」花京院は慎重に誘導した．

「右辺と左辺が等しいから， $\log y_n$ も正規分布にしたがうはずよ」

「その通り．――さて，いよいよクライマックスだ．対数正規分布の定義は何だったか覚えているかい？」花京院が最後の質問をした．青葉は目をつぶって集中した．

「対数正規分布の定義は……,《対数をとったときに正規分布に従う確率変数》だったはずだよ…….」青葉は記憶をゆっくりと呼び起こしながら言った．

花京院は黙って聞いている．まだ，続きがあるという風に．

「ということは，いま $\log y_n$ が正規分布にしたがうことが分かったから……， y_n それ自体は……対数正規分布に従う」

青葉は，なぜか，急に寒気を感じた．

「分かったかい？」花京院は青葉に比べれば冷静だった．しかしやはり彼も興奮を隠せない様子だった．

（なんだろう，この感じ．背筋がぞっとする．嬉しいっていう気持ちや，怖いっていう気持ちが混ざった不思議な感じ‥‥‥．なんだろう？）

「花京院君．これって証明ができたんだよね？　ゲームの繰り返しから，所得分布ができあがる条件を特定したんだよね？」青葉はおそるおそる聞いた．

「うん．いま考えてきた方針でおおむね間違っていないはずだよ．どうしたの？　嬉しくないの？」

「ううん．もちろん嬉しいよ．でも，なんだか‥‥‥ちょっと怖いんだ．どうしてだろう」青葉はこれまで体験したことのない感情に戸惑いを感じていた．

「それはね，まだ不安だからじゃないかな．もしかしたら間違っているかもしれないって，心の底で感じてるんだ．トランプのお城を作ったことある？」

「え？　なに突然．‥‥‥どういう関係があるの？」

「何度も失敗して，苦労して完成したトランプのお城を想像してごらん．できあがった瞬間に壊れないでって思うだろう？　それと同じだよ．君は時間をかけて，苦労してモデルを作り上げた．その世界が壊れないでって願ってるんだ」

（そういうものなのかな？　なんだか不思議な感じ‥‥‥．数学をやっててこんな感じがしたのって，初めての気がする）

青葉は，達成感と不安が入り交じった奇妙な感情に満たされたまま，その場に立ち尽くした．

20. みんなが自分を「中」だと思うわけ——第 11 変奏

現実の世界からどんなにかけ離れた思考の世界も，現実の世界と何かを—ある形式を—共有しなくてはならぬことは明らかである．

2.022

20.1. ミクロマクロリンク——理念と経験

旅行先から戻った美田園ゼミの学生達は，それぞれに自分たちが合宿中に進展させた研究内容を卒業論文やタームペーパーの形でまとめる準備をはじめていた．花京院と青葉も，合宿から戻ってからすぐに計算結果を TeX を使って清書した．今日は，その結果を美田園に見せてコメントをもらう日だった．

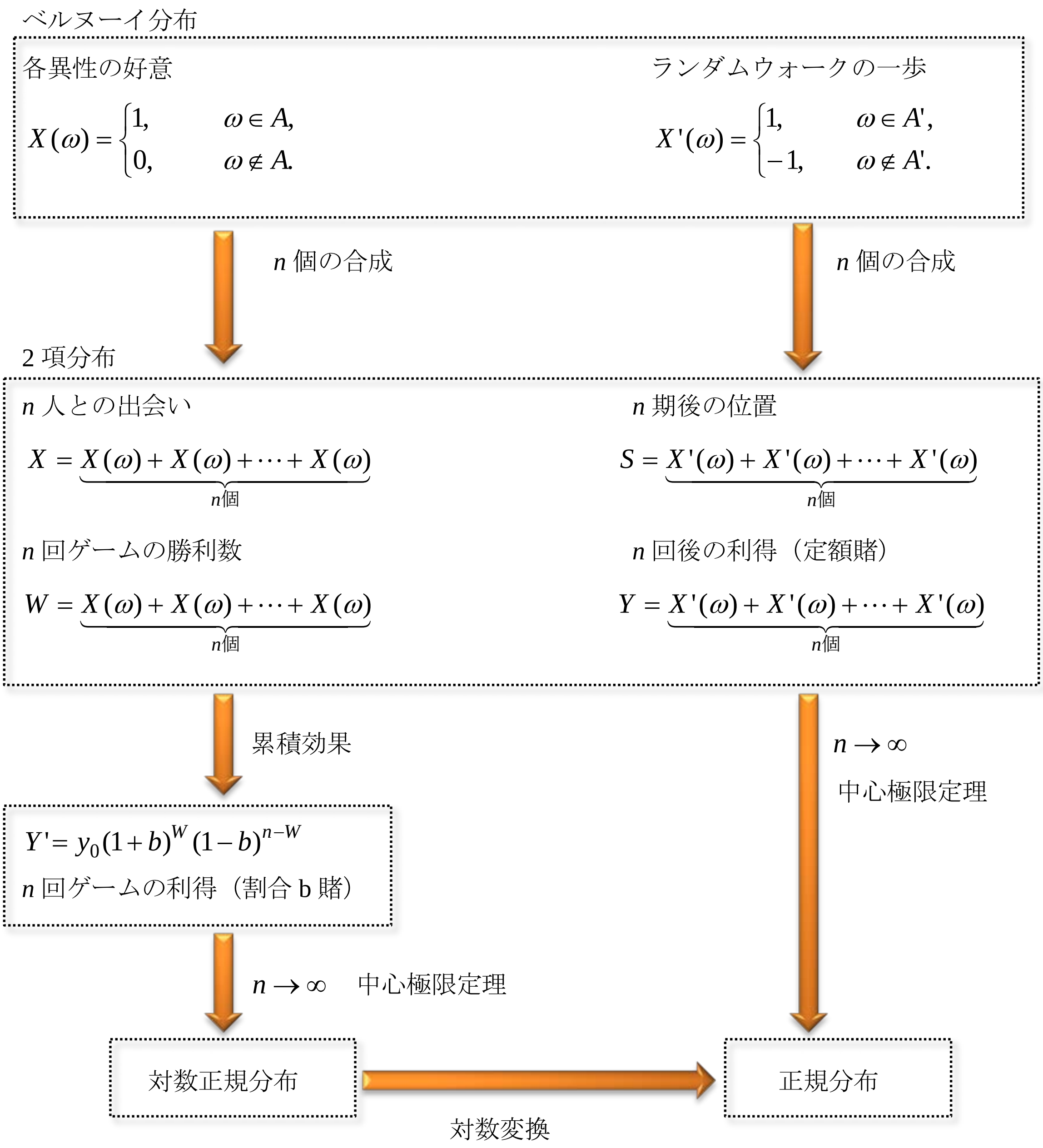
美田園研究室を訪れた二人は緊張した表情で，彼女の反応を窺っていた．美田園は TeX で清書された二人の研究成果をじっくりと読んでいた．やがて彼女は，きちんと整理された机の上に，草稿をそっと置いた．

「これは前のモデルよりもさらによくなった」

その言葉を聞くと，二人は顔を見合わせて，小さな声でやったと叫んだ．

美田園は立ち上がり，ホワイトボードの壁面に立った．真っ白な壁には，まだ何も書かれていない．

二人が辿った軌跡を，確率変数の視点で振り返ってみよう．



「対数正規分布を導出する理論の歴史は旧く，1903 年 Kapteyn を皮切りに，Kalecki, Aitchison, Brown らによって検討されている．したがって数学的には，君たちのモデルに特に目新しい発見はない．だが，人々の行為という観点から解釈できるようにモデルを作った点

は評価できる．マクロな社会構造が，ミクロな個人行為の意図せざる結果として集積していくプロセスを，論理的な飛躍無しに定式化している．ではどうしてミクロな行為に分解して説明する必要があるのか？　それは，われわれが世界を理解するとき，われわれは行為の追体験によって，世界の意味を解釈するからだ

社会――いや世界とは，われわれの意識と独立に存在するものではない．われわれが，その意味を解釈するとき，あたかもわれわれの意識の外側にあるかのように現れるものなのだ．《世界》が意識の外部に存在して，それを理解するために，そのミニチュアとして数理モデルを頭の中に作るのではない．世界はそもそも，複雑すぎるモデルなのだ．われわれが世界を理解する方法を論理的に純化したものが，数理モデルなんだよ」

「私，よく分かりません……」と青葉が答えた．

「花京院君はどう思う？」美田園は花京院の意見を求めた．

「僕もよく分かりません．先生の言うこと，半分は分かるような気がします．でもやっぱり半分くらいは分かりません」

「というと？」

「数学のような理念の世界と，僕たちが生きている現実の世界は，やっぱり種類が違うと思うからです．僕たちの生きている現実の中に，数学のような理念の世界が存在するって話ならわかるんですけど．先生の話はまるで逆のようで……」

「確かに普通はそう考える．数学はわれわれの世界のごく一部分だと．私が言っているのはオブジェクトのレベルではない．フレームワークの抽象度の話なんだ．情報を圧縮することなしに，われわれは世界を解釈できない．理念型によって世界を理解できるという事実，これこそが，逆に世界の理念性を傍証しているのだと私は思う」

美田園は，ふいに笑顔を見せた．

「自己言及と世界の理念性……そうだな，これは難しい問題だ．少し時間をかけて考えることにしよう」

20.2.　上・中・下

研究室に戻った二人は，ひとまず所得分布モデルを美田園に評価してもらったことを喜んだ．

「ところでさ，花京院君……ちょっと聞きたいことがあるんだけど．先生が言ってたミクロとマクロのつながりって，どんなものにでも当てはまるのかなあ？」

「例えば？」

「日本の社会を《上・中の上・中の下・下の上・下の下》っていう，5 つの層に分けるとすると，花京院君の家はどこに入ると思う？」

「なんだいそれ？」

「このあいだ授業で聞いたの．社会学ではこういうのを階層意識っていうんだって」

「そんなの層化の基準によって答えが違うよ．収入で分けているのか，学歴で分けているのか，暮らしぶりで分けているのか, . . . どれで答えればいいの？」

「えーっとね，それはまあ総合的というか，とにかく 5 つの層に分けたときに，自分がどこに入るかを答えてほしいの」

「そうだなあ．うちは金持ちってわけでもないし，かといって貧乏というわけでない．中の下くらいでいいかな．でもこれ,《上》だけ二つに分かれていないね，他のやつは二つに分かれているのに，なんだか気持ち悪いなあ」花京院はぶつくさと文句を言いつつ，5 つの項目から選択した．

「そっかあ．やっぱり《中の下》かあ．私もそれを選んだよ．奇遇だね」

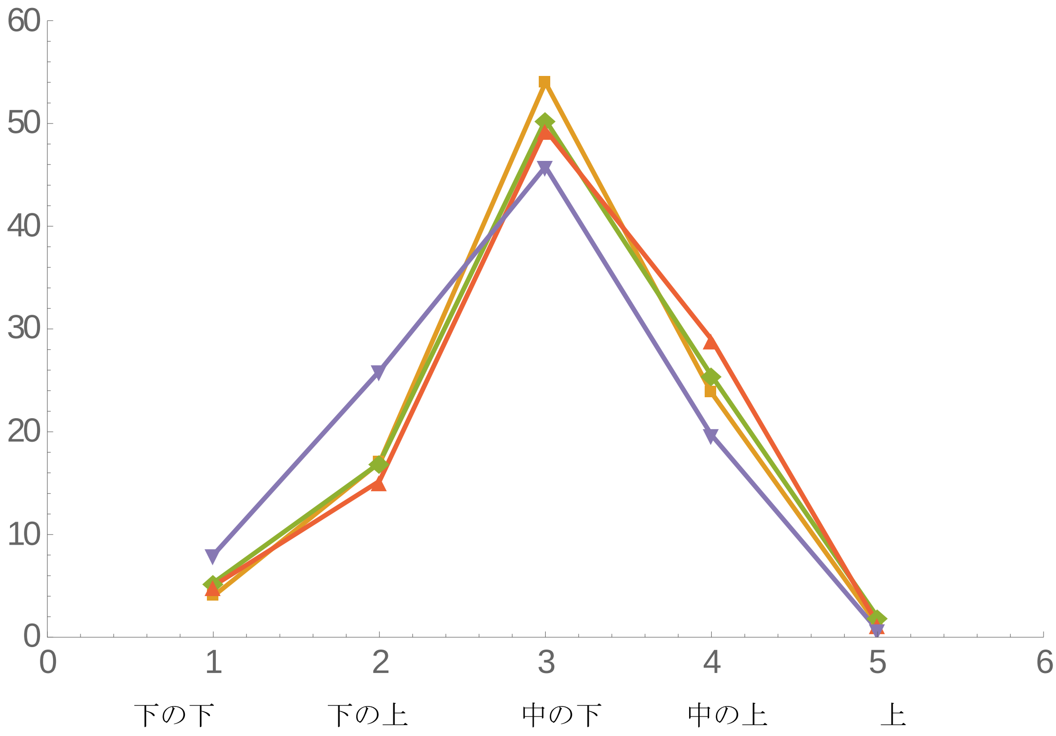
「で，この質問への回答がどうかしたの？」

「うん，授業で過去数回調査した結果を紹介してたんだけど，この回答の分布って，いつも《中の下》と《中の上》が 8 割くらいになるんだって．まあそんなものかなと思ってたんだけど．さっき，先生の話を聞いてたら，それぞれの人がどういう風に考えたら，こんな集計結果になるんだろうって思ったんだ」

青葉は鞄の中から授業配布資料を探して取り出して説明した．

\$\$

これは 1975 年, 1985 年, 1995 年, 2005 年の過去 4 回分の調査結果を要約したグラフだよ.



図：階層帰属意識の分布．縦軸は%（無回答をのぞく有効票のみに基づく%）

\$\$

「なるほど，階層意識を尋ねると，みんなが《中》って答えるのはなぜかっていう問題か．僕がさっきやったみたいに，家の経済状況を思い描いて，答えてるんじゃないかな」

「でも，そうしたら，もっと下が多くてもいいと思うだけどな．だって収入の分布は山の高いところが左に偏っているでしょ」

「それもそうだ．個人がどういう判断をすると，結果的に《中》が多い分布になるのか．神杉さん，これはきっといい問題だよ」花京院が悪戯を思いついた子供のように楽しそうに言った．

「でも，どうやったら表現できるのか，私には全然分からない……，花京院君，手伝ってくれる？」

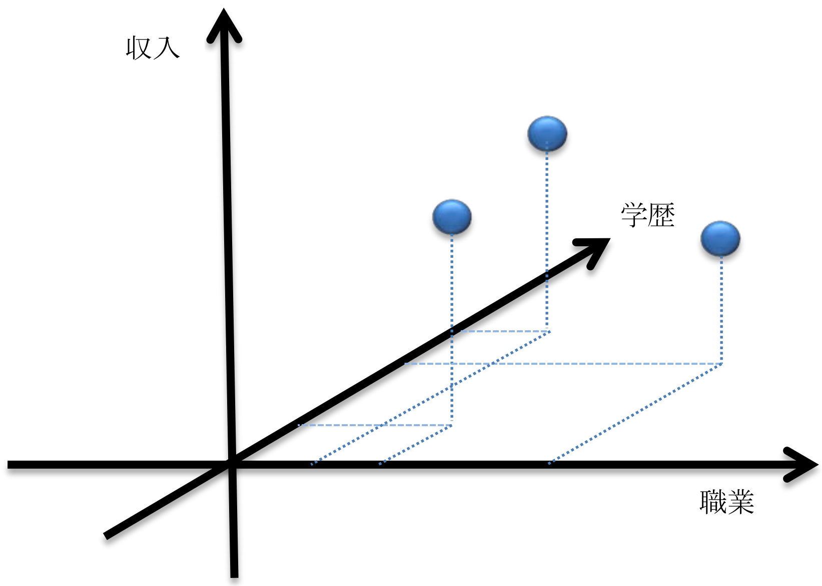
「もちろん」
こうして青葉と花京院は，新しい問題に取り組むこととなった．

20.3. 社会的地位の多次元性

外は少し肌寒い．
花京院が研究室に青葉を呼び出したのは，秋の始まりを予感する頃だった．青葉が問題を見つけてから，彼はほとんど誰とも口をきかずに情報の収集と計算に没頭していた．
一方の青葉も，花京院とは独立に自分なりのリサーチと計算を進めていた．彼女が研究室にいる時間は，春や夏の頃と比べると，ずいぶんと長くなっていた．
「今日は上中下意識分布の謎を解くための下準備ができたから，神杉さんの意見を聞かせてもらおうと思ったんだ」
「へえー，もうできたんだ．はやいなあ」
「まだほんの準備だよ．まず最初に人々が自分の地位を判断するためにどんな基準を使うかってことを考えたんだ」
「えーっと確か……，上・中・下の意識にもっとも強い影響力を持っていたのは世帯収入じゃなかったっけ？」
「うん，過去のデータ分析の結果から，世帯収入が一番影響することは分かっている．でもそれだけじゃないんだ」
「へえ，他にどんなものがあるの？」
「他には例えば学歴とか職業なんかも影響するらしい．例えば中卒よりも高卒の人，高卒の人よりも大卒の人の方が，より自分を上の層に位置づけやすいんだ」
「ふうん」青葉にはあまりピンとこなかった．自分はこのまま順調にいけば大学を卒業するはずだが，そのことによって自分がこの社会の上にいると感じるようになるとは思えなかったからだ．花京院は説明を続けた．
「ようするに，人々の社会の中での位置というのは，一直線上にあるというよりは，2 次元とか 3 次元の空間上にあると考えた方が自然なんだ．1 次元の場合は図で書くとこんな感じだよ」

図：1 次元の場合

「で，3 次元の場合がこんな感じ」



図：3 次元の場合

「《上》とか《中》とか《下》っていう階層意識は，もともとは収入や学歴といった複数の次元からなる社会的地位を，無理矢理一つの次元に単純化したものだと考えればいいと思うんだ」

「多次元のものを一つにまとめる……，か．うん，イメージはできたよ」

「次に，この社会の中に存在する，さまざまな特徴を持った人々をどう数学的に表現するかってことを考えた」

「それは難しそうだなあ，収入は数字で簡単に表せるけど……，職業なんかはそうじゃないもんね」

「少し前にやった，確率論のおさらいを思い出してほしいんだけど．集合の要素は別に数字じゃなくてもいい，って話をしたの覚えてる？」

青葉は数ヶ月前の記憶を呼び起こした．彼女は，モビルスーツやキャラクターで作った集合の例を思いだした．

$$

数字以外の要素を持つ集合を考えればいいんだ．

社会にいる人々の特徴が《収入》と《学歴》の二つの次元で構成されると仮定しよう．そ

して収入には《100 万円》と《300 万円》の 2 種類があって，学歴の方は《高卒》と《大卒》の 2 種類があると仮定する．

ようするに，各次元に，とりうる値が 2 種類あるってことだ．

すると収入の集合は

$$\{100,300\}$$

で，学歴の集合は

$$\{\text{高卒},\ \text{大卒}\}$$

で表すことができる．

この社会における社会的地位が収入と学歴の組み合わせで決まるとしよう．

可能な組み合わせは全部でいくつか？

《100 万・大卒》《100 万・高卒》《300 万・大卒》《300 万・大卒》

の 4 種類だ．

集合の表記を使うと，この社会に存在する社会的地位は

$$S=\{(100\text{万},\text{大卒}),(100\text{万},\text{高卒}),(300\text{万},\text{大卒}),(300\text{万},\text{高卒})\}$$

と表すことができる

$$

「あ……これって，順序対！」

「そうだよ. 順序対からなる集合を使えば, さまざまな地位を持つ人々を表現できるんだ」

「なるほど……こうやって順序対で組み合わせる集合を増やしていけば，どんな複雑な特徴も表現できるね」

「そういうこと．各次元の集合の要素数をランク数と呼ぶことにしよう．例えば学歴次元の場合，集合が $\{\text{高卒},\text{大卒}\}$ ならランク数は 2 だ．もし学歴の集合が $\{\text{中卒},\text{高卒},\text{大卒}\}$ だったら，ランク数は 3 だ．ランク数を増やしていけば，学歴の細かな違いや，収入の細かな違いを表現できる」花京院は《社会的地位》という概念の定義をホワイトボードに書いた．

定義（社会的地位）．社会的地位は収入や学歴などの複数の次元からなる．各次元で取りうる値は集合によって定義される．各次元の集合の直積集合が，社会的地位の集合であり，順序対は，個々の具体的な地位を表している．

「じゃあ，定義の確認のために例を作ってみるよ」

青葉はすぐに例の作成にとりかかった．

$$

えっと，さっきの例が《2 次元で 2 ランク》だったから，今度は《2 次元で 3 ランク》の場合を考えてみるよ．

まず収入を要素を 3 種類に増やして

$$\{100, 200, 300\}$$

にするよ．次に学歴も 3 種類にして

$$\{\text{中学校, 高校, 大学}\}$$

にするよ．つぎにこの二つを組み合わせて，直積集合をつくる……えーっと，

$$\begin{gathered}\{(100,\text{中学校}),(200,\text{中学校}),(300,\text{中学校}),\\(100,\text{高校}),(200,\text{高校}),(300,\text{高校}),\\(100,\text{大学}),(200,\text{大学}),(300,\text{大学})\}\end{gathered}$$

かな？

よし，これで社会的地位の数学的表現はできた．

あとはこの多次元の社会的地位を，どうやって上中下の一次元に集約するのか，っていう問題だね．

あれ……，それってどうやればいいんだろう？

$$

「n 次元の集合を 1 次元の集合に対応させるルールは無数にある．だから実際に人々がお互いにどうやって比較しているのかを考えて，それを一般的なルールとして定義しよう」花京院が提案した．

「ふむふむ．どうやるの？」

「それは今考え中」

「じゃあ，ちょっと休憩しようよ．ちょっとお腹空いちゃったな，花京院君，学食でも行かない？」

「いいよ．僕も少しお腹がへった」

「腹が減っては戦はできぬ……」

「君，ホントに平成生まれなの？」

20.4. 社会的地位の順序

文系キャンパスの学生食堂は，文学部棟から歩いて 5 分ほどの距離にある．食堂へと続く並木道は，枯葉で覆われていた．

青葉と花京院は，食券の自動販売機の前で立ち止まった．

「たらこスパゲッティもいいけど，味噌ラーメンも捨てがたいわね‥‥‥うーん，悩む」青葉がどのメニューにするか迷っている横で，花京院は無言でカレーを選んだ．まるであらかじめ決めていたかのようだった．

青葉はさんざん迷ったあげく味噌ラーメンを選択した．

「いま食べたいのは《たらこスパ》なんだけど，ちょっと量が少ないんだよねー．その点，味噌ラーメンはボリュームがあるんだあ」そう言いながら青葉は調理カウンターから受け取ったラーメンをテーブルに運んだ．

「メニューを選ぶのに，君はいろいろ考えてるんだね．僕はいつもカレーだから，そんなこと考えたことがないよ．‥‥‥あ，そうか！《味》という次元と《量》という次元，どちらを優先させるかで，順番がきまるんだ．社会的地位も同じことだよ」花京院が興奮気味に言った．

「え，どういうこと？」青葉はレンゲを置いた．

「順序対で社会的地位を定義した場合にね，順序対同士の上下をどうやって決めたらいいのかを考えていたんだ．各次元の要素は順番をつけることができるよね．例えば収入だと明らかに　$300 > 200 > 100$　という順番になっている」花京院は持参した計算用紙をテーブルの上に広げた．

「うん．そうね．学歴の場合も数字じゃないけど上の教育段階にいるほど地位が高いと考えられるから･･･　大学＞高校＞中学　という順番があると仮定できるね・・・．ねえ，それはいいんだけどさ･･･，せめて食べ終わってからにしない？」

「ああ，そうだね．ゴメン，ゴメン」そう言いながらも花京院は作業を中断しなかった．左手のスプーンでカレーを口に運びながら，右手のペンで彼はメモを書き続ける．

（器用なもんだね．そんなに急いでやる必要あるのかな？　まさかいつもカレーしか食べない理由は，計算しながら食べるからじゃないでしょうね‥‥‥）

青葉は，そんなことを考えながらラーメンを食べ続けた．花京院は，右手と左手を交互に動かしながら，食事と計算を続けた．

「ふー．満腹満腹．やっぱりここの味噌ラーメンはボリュームがあるわあ」彼女がラーメンを食べ終わるのを待ってから花京院は話を再開した．

$$

いいかい？　順序対同士を比較した場合の話だよ．例えば

（100，中学校）　　　（300，大学）

という二つの順序対を比較すると，これは

（100，中学校）　＜　　（300，大学）

という順番があると考えてよさそうだ.

この場合，学歴で考えても，収入で考えても（300，大学）は（100，中学校）よりも高い位置にあるからね.

でも，

（300，中学校）　と　（100，大学）

みたいな二つの比較だと，どうすればいいのか？

つまり，収入で比較した場合の順番と学歴で比較した場合の順番が，食い違っているようなケースだ.

$$

「ここで，さっき神杉さんがラーメンとスパゲッティを悩んでいるのを見て，思いついたんだ．さっき《味で言えばスパゲッティーを選ぶけど，量がもの足りないからラーメンを選ぶ》っていう話をしたでしょ？」

「うん，たらこスパだと，後でお腹が空くかなあと思って．ちょっとお，そこ強調しないでくれる？　くいしんぼうみたいで恥ずかしいじゃない」青葉の顔が少し赤くなった.

「スパゲティとラーメンの特徴が《味》と《量》という2次元によって構成されていると仮定する．このとき，どちらの次元を重視するかで，順番を一意的に決めることができる.

社会的地位も同じように，学歴と収入どっちを重視しているかを決めた上で順番をつけたらいいんじゃないかな？

例えば学歴と収入のどっちが大事かってことを考えて，やっぱり学歴よりもお金のほうが大事って人は，収入を優先して順番をつけるんだ．この場合

（300，中学校）　＞　（100，大学）

になる」

「この考え方だと，学歴は無視しちゃうの？」

「いや, 無視されるわけじゃないよ. 比較する基準として優先される度合いが低いだけで, 学歴によって順番がつく場合もある．例えば収入が同じで学歴が違う場合は

（300，高校）　＞　（300，中学）

という順番になる.

まず収入で順番を比較して，それで順番がつく場合は，そこでおしまいだけど，もし収入で順番がつかない場合は，次に学歴を比較して順番をつけるんだ」

「なるほど，複数の次元を同時に比べるんじゃなくて，順番に比べていくのね」

「この方法だと，どんな特徴の組み合わせでも一意的に順番をつけることができるんだ.

こういう順番のことを**辞書式順序**という」

$$

定義（**辞書式順序**）．X, Y を弱順序集合とする．直積 $X \times Y$ の要素である順序対 $(x_1, y_1),\ (x_2, y_2) \in X \times Y$ の辞書式順序を

$$(x_1, y_1) \le (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \text{ or } ((x_1 = x_2) \text{ and } (y_1 \le y_2))$$

と定義する．

$$

「うわわ，難しい定義」青葉が言った．

「辞書に載っている言葉の並びかたを想像すればいいんだよ．例えば《赤い》と《明かり》では《赤い》の方が先に載っているでしょ？」

「うん．そうね」

「ふたつを比べた場合「あか」までの順番は同じだけど，三文字目の「い」と「り」を比べると「い」の方が五十音の順番で先にくるからね．辞書式順序は，こういう並べ方を正確に表現したものだと考えればいい」

「なるほどー．言葉の並べ方が数学的に表現できるってなんだか不思議ね」

「辞書式順序の例を確認しておこう．さっき考えた次元が 2 つで，ランクが 3 つの場合はどうなるか分かる？」

$$

えーと，社会全体がまず

$$\begin{aligned}S = \{&(100, \text{中学校}), (200, \text{中学校}), (300, \text{中学校}),\\ &(100, \text{高校}), (200, \text{高校}), (300, \text{高校}),\\ &(100, \text{大学}), (200, \text{大学}), (300, \text{大学})\}\end{aligned}$$

となっていて，収入を優先して順番を決めるから……

$$\begin{aligned}&(300, \text{大学}) > (300, \text{高校}) > (300, \text{中学校})\\ &> (200, \text{大学}) > (200, \text{高校}) > (200, \text{中学校})\\ &> (100, \text{大学}) > (100, \text{高校}) > (100, \text{中学校})\end{aligned}$$

じゃないかな？

$$

「そのとおり」

「でも，ここからどうやって，それぞれの人がどんな社会をイメージするのかを決めればいいの？」

「うーん，そうだなあ．ここから先はかなり自由度があるな……」花京院はしばらく目を閉じて考えた．

「まずはこの現象についての観察データを調べてみよう」

学生食堂を出ると，外はもう暗かった．日が沈むのが，はやい．

もうすぐ冬なんだ，と青葉は思った．

21. 社会のイメージ——第 12 変奏

命題と状態とは，同じだけの論理学的（数学的）多様性を持たねばならない．

4.04

21.1. Deep South

それから数日間，花京院と青葉は手分けして，社会のイメージに関する文献を調べた．花京院は主に図書館にこもって調べ，青葉はインターネット上の検索エンジンを使ってサーチした．

数日後花京院から連絡を受けた青葉は研究室にやってきた．

「どう，なにか有用な情報は見つかった？」と花京院が聞いた．

「いろいろ調べたんだけど，ダメね．《社会　イメージ》っていうキーワードで，たくさん引っかかるけど，どれも私が知りたい情報とは関係がないものばっかり」青葉は口をとがらせた

「検索エンジンは，適切なキーワードが分からない状態で使っても情報検索には役立たない」

「そうなの．なにを探すべきか分からないものを探してるんだから，見つかりっこないよ……花京院君は，こういうとき，どうやって資料を探すの？」

「こういう場合，僕は源流を辿る．まず最初に適当な一冊の本や一本の論文から始めて，その参考文献リストから，そのテーマに関する最も旧い研究を探し出す．次にその旧い研究からさらに旧い研究を辿り，オリジナルに辿り着くまで参考文献リストを遡るんだ．途中でオリジナルに到達しないことが分かった場合は，少し新しい時代に戻って，また別の文献の流れを辿っていく」

「インターネットでリンクを辿っていく感じね」

「そう．似ている点もある．ただし重要な違いがある．文献のリンクを時代を遡って辿っていけば，いつかは源流にたどり着けるのに対して，ネット上のリンクは時系列を遡ることが難しい．だから検索エンジンにヒットする新しい情報を堂々巡りするだけで，いっこうに情報の核心にたどり着けない場合がある」

「そっかあ，どの情報がオリジナルなのか，ネット上の情報は分かりにくいんだね」

「今回僕が図書館でみつけてきたのはこれ」そう言って花京院は古ぼけた洋書を一冊取り出した．彼が図書館から借りだしたものだ．

「タイトルは *Deep South*. 南カリフォルニア，ジョージア，フロリダ，アラバマ，ミシシッピー，ルイジアナといったアメリカ南部の州を調査した結果をまとめた本だよ．著者は Davis,A., Gardner, B.B., M.R. Gardner で 初版の刊行は 1941 年．1988 年に再発行されている」

「へえー，旧い本だね．どういうことが書いてあるの？」

花京院は本を開いた．旧い洋書の香りがあたりに漂った．

<table>
<tr><th>客観的階層</th><th colspan="2">主観的イメージ</th></tr>
<tr><td></td><td>Upper-Upper　Class</td><td>Lower-Lower　Class</td></tr>
<tr><td>Upper-Upper　Class</td><td>“Old aristocracy”</td><td rowspan="3">“Society” or the “folks with money”</td></tr>
<tr><td>Lower-Upper　Class</td><td>“Aristocracy,” but not “old”</td></tr>
<tr><td>Upper-Middle　Class</td><td>“Nice, respectable people”</td></tr>
<tr><td>Lower -Middle　Class</td><td>“Good people, but ‘nobody’”</td><td>“Way-high-ups,” but not “Society</td></tr>
<tr><td>Upper- Lower　Class</td><td rowspan="2">“Po’ whites”</td><td>“Snobs trying to push up”</td></tr>
<tr><td>Lower-Lower　Class</td><td>“People just as good as anybody”</td></tr>
</table>

図：Davis 達が発見した知見のまとめ

「一番左の列が客観的な階層だよ．真ん中と右が主観的なイメージで，真ん中が《上の上》階層からみたイメージ，右の列は《下の下》階層からみたイメージだよ．彼らは，《他の諸階級からの距離が大きくなればなるほど，階級間の区別は曖昧になり大ざっぱになる》と述べている．その様子が枠の区切り方と破線によって示されているんだ」

「どうやって表をみたらいいの？」

「太字になっている部分，つまり “Old aristocracy（古くからの貴族）”や “People just as good as anybody（いいひとたち）”はが自分の所属階層をどうイメージするかを表している．そして境界のないところには，一緒の枠に収まっている．例えば，《上の上》階層からみたイメージの中では，UL 階層と，LL 階層はただ “Po’ whites” として，まとまって見えるんだ．破線になっているところは実線ほどには境界がハッキリしていない，という意味だよ」

「ふーん．なるほどお．客観的には同じ階層だけど，見る人の位置によってそのイメージが異なるんだね」

21.2. イメージ形成のルール

「僕は，この知見をもとに，辞書式順序構造を持つ社会にいる人々が，どんな風に社会全体をイメージするかを考えてみた．出会った他者が自分より上か下かを次のようなルールで判定していくんだ」

1. 最初の《社会のイメージ》は自分の階層そのものである
2. 自分と異なる階層の人と出会ったとき，まず最初の次元について自分と相手のランクを比べる．このとき相手が自分よりも上か下であれば，そのランクを自分のイメージに追加する．
3. 最初の次元のランクが同じ場合，次の次元に進んで，自分と相手のランクを比べる．
4. 以下，相手と自分の上下が決定するまでこの手順を繰り返す
5. 《社会のイメージ》が変化しなくなるまで他者との出会いを繰り返す

「うーん，相手のランクを自分のイメージに追加するっていうのが，難しいなあ．どういうことだろ？」青葉は言った．

「そういうときは……」

「あ，単純例ね」

$$

いいかい？

もっとも単純な社会として収入と学歴が 2 つのランクを持つ社会を想像しよう．

この社会の構造は順序対（収入，学歴）により直積

$$S = \{(100,\text{高校}),(300,\text{高校}),(100,\text{大学}),(300,\text{大学})\}$$

で表されると仮定する．収入を優先して順番を決めると

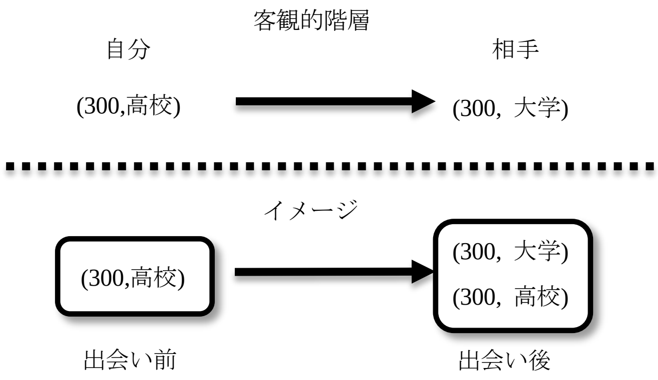
$$(300,\text{大学}) > (300,\text{高校}) > (100,\text{大学}) > (100,\text{高校})$$

が成立する．

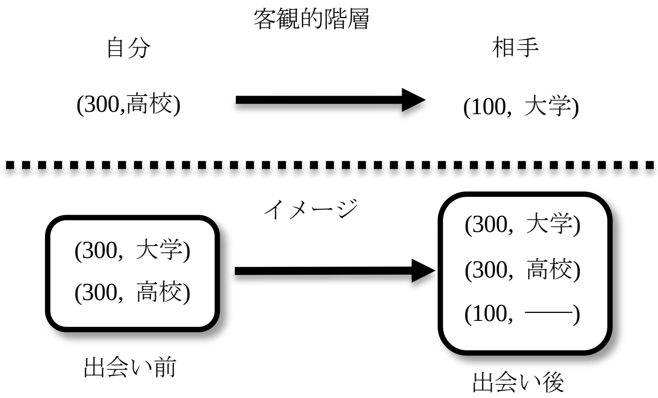
例えば年収が 300 万円で，学歴が高校卒業である層の人を考えてみよう．

この層を記号で(300, 高校)と表すことにする．(300, 高校) が (300, 大卒) と出会った場合，

最初の収入次元は同じだから，次に二番目の学歴を比較する．すると学歴（第 2 次元）に関しては相手が自分より上にいることが分かる．そこで自分のイメージに相手の階層を追加する．こんな感じだ．



次に {(300，大学), (300，高校)} というイメージを持った(300,高校)層が，(100，大学)層の人と出会ったとする．すると



のように変化する

$$

「え？　ちょっと待って．(100，大学) の人と出会ったのに，

{(300，大学), (300，高校),(100，大学)}

というイメージじゃなくて，

{(300，大学), (300，高校),(100，――)}

っていうイメージに変わるのはどうして？　この《――》はどういう意味なの？」

「この《――》は，第二次元のランクはなんでもいい，ということを表している．

『距離が離れるほど，階級間の区別は曖昧になる』という先行研究の知見を反映しているんだ．この場合，第一次元つまり優先度の高い収入の次元で，相手が《下にいる》ことが分

かったので，学歴は無視する」花京院は図を指さしながら説明した．

「うーん，でもそうすると(300, 高校)という階層の人は，

(100, 大学)　と　(100, 高校)

を区別しないってことになるよ．それでいいの？」青葉が聞いた．

「そう．(300, 高校)という階層の人にとって，

(100, 大学)　と　(100, 高校)

はどちらも単に (100, ――) という階層といっしょくたにされてしまう．これが《階級の区別が大ざっぱになる》という観察を抽象的に表現した結果なんだ」

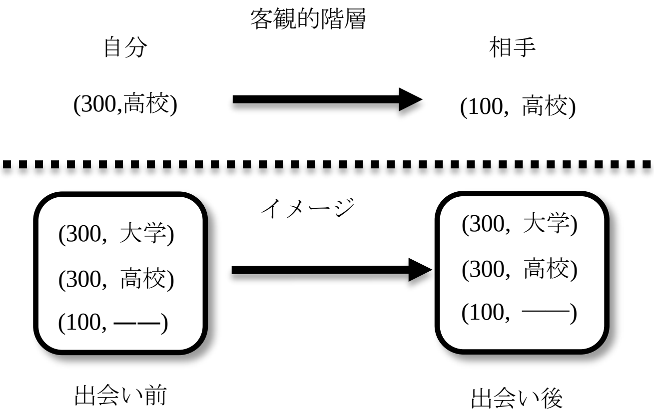
花京院は例示を続けた．

\$\$

(300, 高校)層のひとが，(300, 大学)層と(100, 大学)層の人と出会うことで，

{(300, 大学), (300, 高校),(100, ――)}

というイメージを持つようになった．ここから先は誰と出会ってもイメージは変化しない．例えば(100, 高校)層の人と出会っても



のように，変化なしだ．

なぜなら(100, ――)というイメージの中に，

(100, 大学)　と　(100, 高校)

が区別されず，まとめられてしまうからだ．

\$\$

「これって，いま(300,大学)→(100, 大学)→（100, 高校）っていう順番で出会ったけど，最後にできあがるイメージは，出会う他者の順番によって変わったりしないの？」

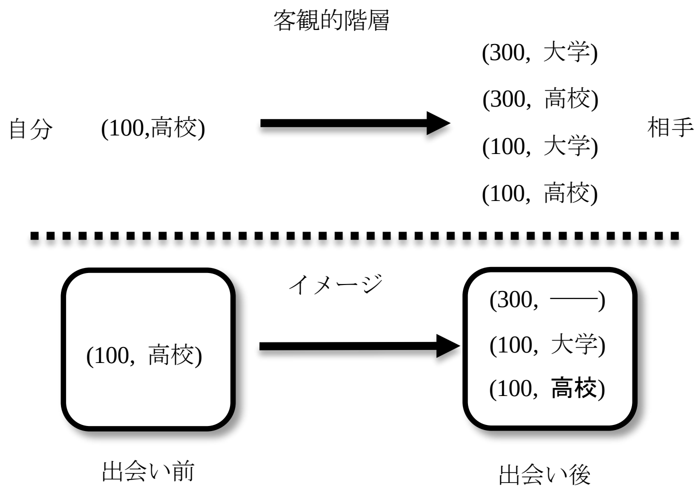
「いい疑問だ．最終的なイメージは，出会う他者の順番には依存しない」

「ちょっと，まって．確かめてみるね……，あ，ほんとだ．出会う順番を変えても，最後のイメージは同じだ」

「ただし基準となる階層が変われば，イメージは変化する可能性がある．例えば——」

$\$\$$

(100，高校)を基準とする．最後にできあがるイメージは次のようにまとめて書くことができる



$\$\$$

「この調子で，ほかの社会的地位の人についても，どんなイメージを持つか調べてみよう」

「よし，じゃあやってみる」

$\$\$$

残りの

(300,大学)，　(100,大学)，　(100,高校)

について，社会のイメージを確認するよ．

	自分の地位			
他者の地位	300,大学	300,高校	100,大学	100,高校
300,大学	300,大学	300,大学	300,──	300,──
300,高校	300,高校	300,高校	300,──	300,──
100,大学	100,──	100,──	100,大学	100,大学
100,高校	100,──	100,──	100,高校	100,高校

こうやってまとめたほうが，さらにコンパクトになるかな

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">自分の地位</td></tr>
<tr><td>他者の地位</td><td>300,大学</td><td>300,高校</td><td>100,大学</td><td>100,高校</td></tr>
<tr><td>300,大学</td><td>300,大学</td><td>300,大学</td><td rowspan="2">300,──</td><td rowspan="2">300,──</td></tr>
<tr><td>300,高校</td><td>300,高校</td><td>300,高校</td></tr>
<tr><td>100,大学</td><td rowspan="2">100,──</td><td rowspan="2">100,──</td><td>100,大学</td><td>100,大学</td></tr>
<tr><td>100,高校</td><td>100,高校</td><td>100,高校</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">自分の地位</td></tr>
<tr><td>他者の地位</td><td>300,──</td><td>100, ──</td></tr>
<tr><td>300,大学</td><td>300,大学</td><td rowspan="2">300,──</td></tr>
<tr><td>300,高校</td><td>300,高校</td></tr>
<tr><td>100,大学</td><td rowspan="2">100,──</td><td>100,大学</td></tr>
<tr><td>100,高校</td><td>100,高校</td></tr>
</table>

よし，スッキリしたぞ.

$$

「神杉さんが表を整えてくれたおかげで，結果的には 2 種類のイメージしかないことがよ

く分かる．ここからおもしろい傾向が見えてくるよ」

「おもしろい傾向？」

「うん，イメージのなかでの順番と，客観的な地位の順番を比較してみるんだ」

$$

辞書式順序に基づく順位と，イメージのなかでの人々の順位を表の形でまとめると

	300,大学	300,高校	100,大学	100,高校
辞書式順序の順位	1	2	3	4
イメージ上の順位	1	2	2	3

になるだろう？　これを見ると，もともと 4 種類あった社会的地位が，イメージ上では 3 種類に圧縮されているようすがよく分かる．

さらによくみると， (100,大学) は辞書式順序では上から 3 番目だったけど，イメージ上では 2 番目に上がっている．

それから(100,高校)も辞書式順序では上から 4 番目だったけど, イメージ上では 3 番目に変わっているよ

$$

「あ，ほんとだ」

「しかも，この変化によって，イメージ上の順位では，真ん中である《2 番目》の状態にいる人の数が増えている」

確かに花京院が指摘したように，イメージ上では上から 2 番目に位置する社会的地位は 1 つから 2 つに増えていた．

「うーん，でも地位の種類が少なすぎて，まだ傾向がつかめないな」

「よし，一般化しながらランク数を増やしてみよう」

21.3. イメージ形成モデルの一般化

「まずモデルの仮定を一般化して再確認しておこう」

花京院はモデルの仮定を整理した．

1. 社会的地位は複数の次元と次元内のランクの違いによって表現できる．

2. 人々は他者と出会い，比較する．このとき第 1 次元から順にランクを比較し，他者が自分より上か下か判明した時点で比較を終える
3. その結果，人々は《社会のイメージ》を持つ．
4. 人は自分の地位を初期のイメージとして持ち，他者と出会うことで新たなイメージを追加する．既にイメージの中に存在する他者と出会ってもイメージは変化しない

「よし，じゃあさっき考えた

$$
\begin{aligned}
S = \{&(100,\text{中学}),(200,\text{中学}),(300,\text{中学}),\\
&(100,\text{高校}),(200,\text{高校}),(300,\text{高校}),\\
&(100,\text{大学}),(200,\text{大学}),(300,\text{大学})\}
\end{aligned}
$$

という例で考えてみるね．これは次元が 2 つでランクが 3 つだよ」

青葉は計算用紙を使って，各社会的地位にいる人が比較の結果どんなイメージを社会についてもつのかを考え，表に書き込んでいった．

（あ，なんだか規則性が分かってきた．基準になる地位が違っても，同じイメージを持つ場合があるんだ⋯⋯.）

アルゴリズムを理解した青葉のスピードは，どんどんはやくなっていった．

$$

	自分の地位								
他者の地位	300,大	300,高	300,中	200,大	200,高	200,中	100,大	100,高	100,中
300,大学	300,大	300,大	300,大	300,−	300,−	300,−	300,−	300,−	300,−
300,高校	300,高	300,高	300,高	300,−	300,−	300,−	300,−	300,−	300,−
300,中学	300,中	300,中	300,中	300,−	300,−	300,−	300,−	300,−	300,−
200,大学	200,−	200,−	200,−	200,大	200,大	200,大	200,−	200,−	200,−
200,高校	200,−	200,−	200,−	200,高	200,高	200,高	200,−	200,−	200,−
200,中学	200,−	200,−	200,−	200,中	200,中	200,中	200,−	200,−	200,−
100,大学	100,−	100,−	100,−	100,−	100,−	100,−	100,大	100,大	100,大
100,高校	100,−	100,−	100,−	100,−	100,−	100,−	100,高	100,高	100,高
100,中学	100,−	100,−	100,−	100,−	100,−	100,−	100,中	100,中	100,中

うーん，なんだろう．これで完成したはずなのに，なんだかスッキリしない．

同じ数字が入っている箇所が，なんだか気に入らない．

結果的に同じイメージになっているカテゴリ同士をまとめたほうが綺麗かな？

<table>
<tr><td></td><td colspan="9">自分の地位</td></tr>
<tr><td>他者の地位</td><td>300,大</td><td>300,高</td><td>300,中</td><td>300,高</td><td>300,中</td><td>200,中</td><td>100,大</td><td>100,高</td><td>100,中</td></tr>
<tr><td>300,大学</td><td colspan="3">300,大</td><td colspan="3" rowspan="3">300,―</td><td colspan="3" rowspan="3">300, ―</td></tr>
<tr><td>300,高校</td><td colspan="3">300,高</td></tr>
<tr><td>300,中学</td><td colspan="3">300,中</td></tr>
<tr><td>200,大学</td><td colspan="3" rowspan="3">200, ―</td><td colspan="3">200,大</td><td colspan="3" rowspan="3">200, ―</td></tr>
<tr><td>200,高校</td><td colspan="3">200,高</td></tr>
<tr><td>200,中学</td><td colspan="3">200,中</td></tr>
<tr><td>100,大学</td><td colspan="3" rowspan="3">100, ―</td><td colspan="3" rowspan="3">100, ―</td><td colspan="3">100,大</td></tr>
<tr><td>100,高校</td><td colspan="3">100,高</td></tr>
<tr><td>100,中学</td><td colspan="3">100,中</td></tr>
</table>

どう？こっちのほうがより美しいでしょ

$$

彼女は自分が作った表のできばえにとても満足していた．

「うん，全体の構造が見やすいね．これはとても重要なことだ．結果を見やすくまとめることで，そこに潜んでいる一般的な傾向や構造が見えてくる」

花京院が表のデザインを賞賛した．

青葉は自分の作った表をじっと観察した．（どんなことが読み取れるかな‥‥‥）

$$

えーっと，まず，客観的には異なる特徴を持っているのに，イメージは同じって人がいるね‥‥‥．例えば

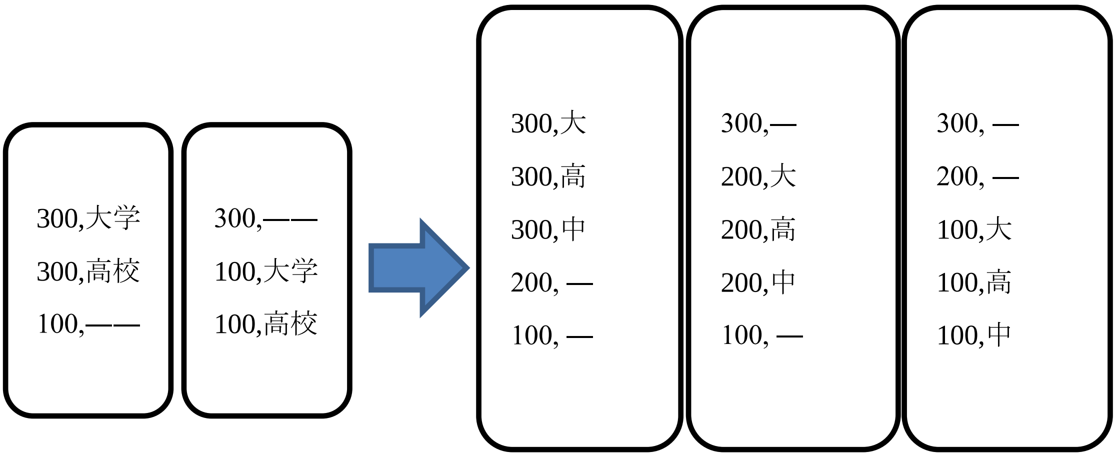
(300,大) と(300,高)と (300,中)

は学歴が異なっているけど，この 3 タイプは同じ社会のイメージ，つまり

{(300,大), (300,高), (300,中), (200, *), (100, *)}

というイメージを共通して持っているよ．

ほかには‥‥‥，えーっと，イメージの種類って言うのかな，それが 3 種類に増えたよ．さっきの例だと 2 種類だった．



2 次元 2 ランク　　　　　　　　　　2 次元 3 ランク

$$

「なるほど，おもしろいところに目をつけたね．さっきと違う条件はなんだろう？」

「次元の数は，収入と学歴だから 2 つのままだったね．でも収入の階級は{100, 300}の 2 種類から

{100, 200, 300}

の 3 種類に増えたし，学歴の階級も{高卒，大卒}の 2 種類から，

{中学校卒，高校卒，大学卒}

の 3 種類に増えたよ」

「そう．次元は同じだけど，各次元内のランク数が変化していた．だからイメージの種類の数はランク数と関連しているのかもしれない」

「なるほどー．結果が変化したのは，条件が変わったせいだと考えるんだね」

「そうだよ．今の分析は，次元の数を一定にたもったまま，次元内のランク数だけを変えたのがよかった．一つしか条件を変えていないから，その条件の変化が結果の変化をもたらしたと考えることができる」

「そっかあ，たしかに次元数まで一緒に増やしちゃうと，次元の変化のせいなのか，ランク数の変化のせいなのか，原因が分からないね」

「ほかに気づいたところはある？」

　イメージの種類は 3 つあるが，それらのあいだで何か共通項があるように感じられた．彼女はその言語化に少し手間取った．彼女は社会のイメージを一つの集合と考えて，そこに含まれる要素の数を数えてみた．

$$

えーと，最初のイメージである

{(300,大), (300,高), (300,中), (200, *), (100, *)}

の中には，5 つの要素が含まれているよね.

で，次のイメージである

{(300, *), (200,大), (200,高), (200,中), (100, *)}

の中にも，5 つの要素が含まれている.

そして最後のイメージである

{(300,*), (200, *), (100,大), (100,高), (100,中)}

の中にも，やはり 5 つの要素が含まれている.

ということは…….

そっか，イメージの要素は異なるけど，要素数は全部同じだ

$$

「そうだね，どのイメージも，含まれる要素の数が同じになっているのはおもしろいね. さっきの例だと要素数は 3 だったから，これも次元内の階級数と関連しているのかもしれない. イメージの中での順番はどうなってるかな？」

「あ，それ，私がやりたい」青葉は率先して順位のチェックをはじめた. 彼女は丁寧に一つずつ順位を確認すると結果を表にまとめた.

自分の地位	300,大	300,高	300,中	300,高	300,中	200,中	100,大	100,高	100,中
順位	1	2	3	2	3	4	3	4	5

「よし，じゃあこの社会の上中下の意識の分布を計算してみよう」

「ちょっと待って，(300, 大)とか(200, 高)とかの地位についている人は 1 人とは限らないよね？　それぞれ何人存在すると考えればいいの？」と青葉が聞いた.

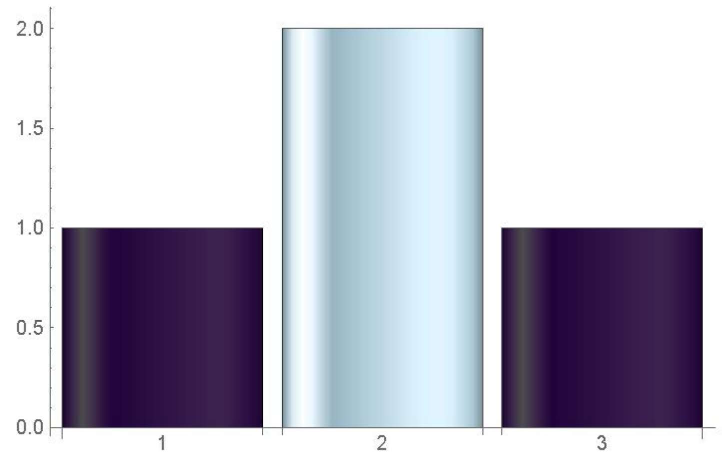
「そうだなあ，もっとも計算しやすいパタンとして，各地位は 1 人と仮定しよう」

「単純例から始める，ってやつね」

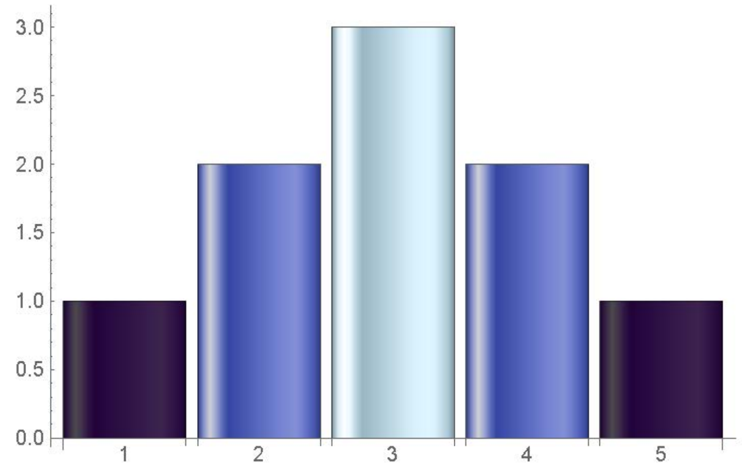
順位	1	2	3	4	5
人数	1 人	2 人	3 人	2 人	1 人

「こうなったよ」

「グラフにしてみると，さらに分かりやすい」花京院は青葉の作った表をもとにして簡単なグラフを作成した．また花京院は比較のために，2 次元で 2 階級の場合の例についてもイメージ上の順位のグラフもつくり横に並べた．



図：2 次元，2 階級の場合



図：2 次元，3 階級の場合

「あ，3 番目の人が一番多くなってる」

「つまり客観的な地位の分布が**一様分布**だったとしても，上中下意識の回答は《中》が増えることを示唆している」

「なるほどー．モデルの中の人達が，他の人たちと自分を比較しながらイメージをつくりあげるってところが，とってもおもしろい．モデルなのに，なんだかリアルな気がする」

「追体験による理解ってやつだよ．ただ，まだ問題が残っている．《中》が増えることの例

示には成功したけれど，まだ証明には至っていない——」

花京院は，腕組みしたまま黙り込んだ.

（証明かあ……，これで十分だと思うんだけど．やっぱり証明が必要なのかな？　そもそも，中が増えるってことをどうやって証明するんだろう？　そんなことできるの？）

22. 中心極限定理，ふたたび——第 13 変奏

命題だけが意味を持つ．命題との関連においてのみ，名は意味を持つ

3.3

22.1. もうひとつのルート

花京院と青葉は研究室で中意識のモデルの計算について議論していた．そこへ七北アンリが訪ねてきた.アンリが文学部数理行動科学研究室へ顔を出す頻度は,日ごとに増えていた.はじめのうちは，美田園が研究分担者をつとめる理学部の研究プロジェクトの仕事を手伝うという名目だったが，最近では仕事がない日でさえ，研究室に顔を出していた.

「へえ．中意識のモデルかあ．文系の人っておもしろいこと考えるのね.」

アンリは，計算結果を見ながら，しばらく思索にふけった.

「このイメージ上の順位って，社会的地位の各次元のランクを使った式で表すことができるよ」

「え？　どういうこと？」花京院が聞いた.

$$

（500 万円，大卒）という社会的地位をそれぞれの次元で下から数えたランクに変換するよ．仮に収入の集合が{400, 500, 600}だったとすると，

$$\begin{array}{ccc} \{400, & 500, & 600\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \{\ 1, & 2, & 3\} \end{array}$$

に変換すれば，500 万円はランク《2》になる.

一方で学歴が

{中卒，高卒，大卒}

の 3 種類しかないと仮定すれば，大卒はランク《3》だよ．つまり（500 万円，大卒）という社会的地位をランク数のベクトルで表現すれば

$$(2, 3)$$

となる．この人のイメージ上での地位は，第 1 次元で自分のランクより下の数(1)と第 2 次元で自分のランクより下の数(2)を足して，1 を加えた数に等しい.

$$1 + 2 + 1 = 4$$

（500 万円，大卒）という地位の人は，この社会ではイメージの中で下から 4 番目なんだよ．

一般的に言うと，社会的地位のランク $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のイメージ上の順位は，下から数えて

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1)$$

となる．

証明っていうほどのものでもないけど，理屈はこうだよ．$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を《自分》だと考えてね．

まず最初の次元だけみると，自分よりもランクが低い階層が $x_1 - 1$ 種類存在する．次に第 1 次元は自分と等しくて第 1 次元のランクが自分よりも低い階層は $x_2 - 1$ 種類存在する．同じように考えていくと，第 1 次元から $n-1$ 次元までランクが同じで，n 次元のランクだけが自分よりも低い階層は $x_n - 1$ 種類存在する．

順々に足していけば，自分よりランクが低い階層の前パターン数と等しくなる．つまり

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)$$

だよ．下から数えた自分の順位はこの数に 1 を足した値に等しいから，

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i - n + 1 = \sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1)$$

となる．

$$

「えっと，最後に 1 を足すのはどうして？」青葉が聞いた．

「例えば自分よりも低い階層がイメージ上で 3 種類あるとするでしょ？　そしたら下から数えて自分の階層の順位は 4 番目だよね？　つまり 3+1=4．一般的には n 次元の場合，イメージ上で自分より下の階層は $\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)$ パタン存在するから，$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1) + 1$ になるんだよ」

「なるほど．ランクのベクトルから自然数への関数として，イメージ上の順位を定義できるわけか‥‥‥．これは気づかなかったな」花京院はアンリの書いた数式を悔しそうにじっと見つめている．

「このモデル，座標対順序を与えても同じ結果になるね」アンリは唐突に言った．

「ざひょーついじゅんじょ？」青葉が聞き返した．

アンリはホワイトボードに書いた数式を躊躇無く消すと，新たに記号を書いて説明した．

$$

社会階層を《収入》や《学歴》や《職業》みたいな複数次元で定義しているでしょ？

辞書式順序は二つの階層ベクトル，例えば

(100 万，大学)　と　(300 万，高校)

を

(300 万，高校) ＞(100 万，大学)

っていう風に収入を優先して順位づけたけど，それとは別の順序を導入するの．

新しい順序は《比べられない》っていう状態も許容するように定義するの．

いいかな？

《各次元について関係≥が成立するときだけ，順序対のあいだにも≥が成立する》

って考えるんだよ．たとえば，(100 万，大学)　と　(300 万，高校)　を比較した場合，

収入　100 万　≤　300 万

学歴　大学　≥　高校

だから二つの次元で順序が一致しないでしょ？　だからこの場合は

(100 万，大学)　と　(300 万，高校)

に順序がつけられない，って考えるの．でも

(100 万，高校)　と　(300 万，大学)

だと

収入　100 万　≤　300 万

学歴　高校　≤　大学

だから，二つの次元で順序が一致しているでしょう？　この場合は

(100 万，高校) ≤ (300 万，大学)

と考えることができるってわけ．もちろん

(300 万，高校)　と　(300 万，大学)

みたいに，一方の次元に等号成立する場合でも，

収入　300 万　≤　300 万

学歴　高校　≤　大学

であることに変わりはないから，この場合でも

$$(300万,\ 高校) \le (300万,\ 大学)$$

と考えるの．ちなみに座標対順序は，

反射性，反対称性，推移性

という性質を満たすから半順序になっているんだよ．

$$

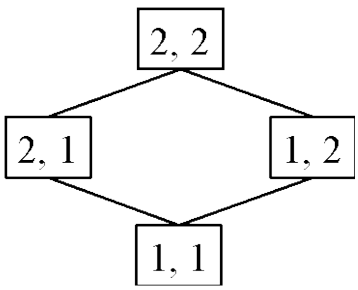
アンリが新たに導入した順序の定義を，青葉はなんとか理解した．しかし，なんのために，そのような順序が必要なのか，その肝心の理由が分からなかった．

「どうして？　どうして，別の順序を使わなくちゃいけないの？」

$$

そのメリットは，《順序がつく要素だけを辿ってランク付けすると，イメージの中で自分を位置づけた順序と一致する》ってことなの．

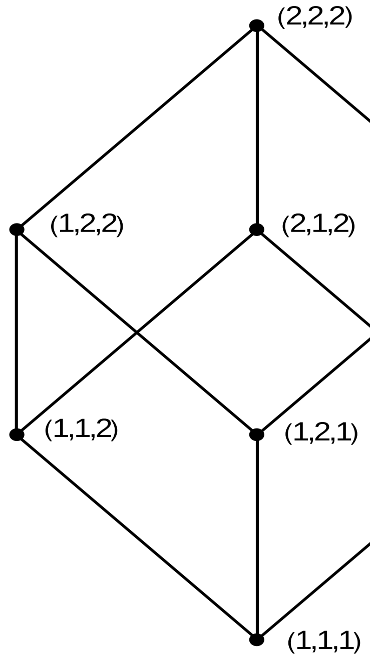
例えば 2 次元 2 ランクの場合，その階層ベクトルの集合を $S = \{(2,2),(2,1),(1,2),(1,1)\}$ で表せるでしょ？　要素間の座標対順序を図で描けば，



になるの．図上で線がつながっていない部分，例えば $(2,1)$ と $(1,2)$ は順序がつかないっていう意味よ．

このとき各階層ベクトルを一番下の(1, 1)から数えた順位が，イメージ上の主観的地位と一致するってわけ．

3 次元 2 ランクの場合はこうだよ．



どう？　なかなか綺麗でしょ？　これはね，ハッセ図っていうんだよ．

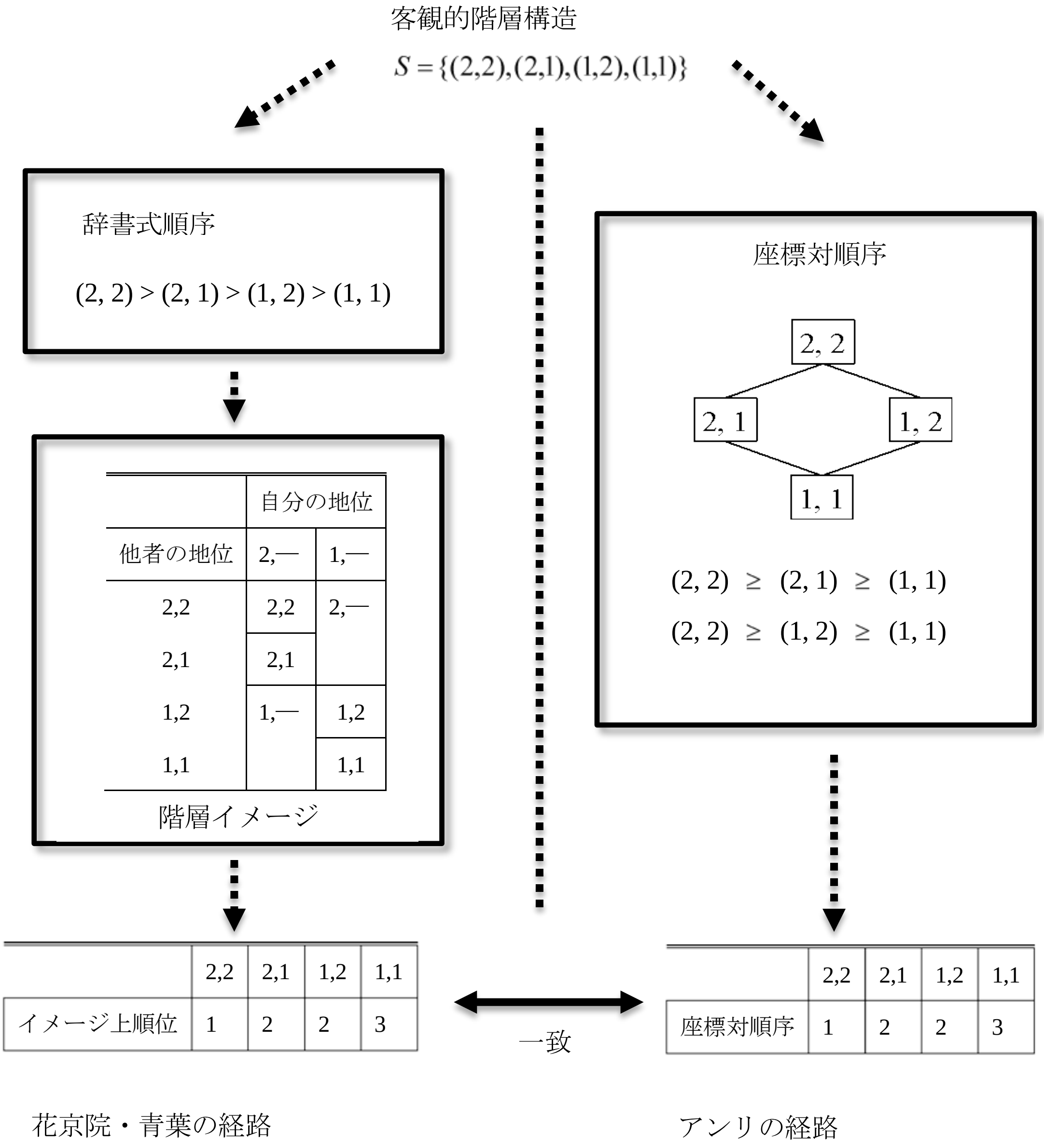
$$

「えー……　どういうことなの？　最後に主観的地位と階層ベクトルのランクが一致するってどういう意味？」青葉が混乱気味に質問した．

これに対して，花京院が答えた．どうやら花京院はアンリの提案の意味を理解したようだった．

「つまり七北さんは，僕らが考えた方法とは全然違うやり方で，同じ結論にたどりつく方法を提案したんだよ．図で書けばこんなイメージだよ」

\$\$



\$\$

青葉は花京院の書いた図をみながら，各階層の順位と，イメージ上の主観的地位が一致するかどうかを確かめた．確かに両者はことごとく一致していた．

アンリは図を見ながらしばらく考えていたが，やがてこう言った．

「いっそのこと主観的地位を確率変数で表現した方が，もっとセクシィかも……」

「各次元はレンジが等しい離散的一様分布を仮定してるんでしょ？」アンリが聞いた．

「ここまでの話では，そうだよ」

「そこはもっと一般化できそうね．例えば学歴なんてせいぜい，中・高・大・院の 4 ランクぐらいだけど，収入は細かく刻めば数百万のランクに分解できるでしょ？　だから各次元で異なるランク数を許容する方が自然よ」

「でもなるべく単純なほうがいいんでしょ？」青葉が聞いた．モデルはなるべく単純につくるべし，という方針は花京院が最初に青葉に教えた原則の一つだった．

「青葉ちゃん，確かにモデルは単純な方がいいけど，結論が仮定を過度に単純化した結果に依存しないってことも重要なの．大丈夫，私の直感ではうまくいくから．とにかく計算の結果を示すね」

「え？　結果って？」

「この中に，もうできあがってる」アンリは自分のこめかみを人さし指で軽くおさえた．

$$

じゃあ，まず主観的地位 X を確率変数として表現した場合の確率関数から始めるよ．各次元がランク数の異なる離散一様分布に従っている場合，主観的地位 X の確率関数は

$$P(X=x)=\left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1}\beta_x$$

になる．ただし

$$\beta_x=\#\{y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\mid y\in S,\sum_{i=1}^{n} y_i-(n-1)=x\}$$

だよ．ここで記号 $\#A$ は集合 A に含まれる要素の数だからね．

証明は以下の通り．

まず, 階層ベクトルが $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ で表されている人の主観的地位は, $\sum_{i=1}^{n} y_i-(n-1)$ だよったよね？　この和を x とおくよ．主観的地位が x になる階層のパタンは複数あるから，その数を

$$\#\{y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\mid y\in S,\sum_{i=1}^{n} y_i-(n-1)=x\}.$$

であらわす．各次元が独立であると仮定すれば，任意の $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$,に対して，

$$
\begin{aligned}
&P((Y_1 = y_1)\bigcap(Y_2 = y_2)\bigcap\cdots\bigcap(Y_n = y_n)) \\
&= P(Y_1 = y_1)P(Y_2 = y_2)\cdots P(Y_n = y_n) = \frac{1}{r_1}\frac{1}{r_2}\cdots\frac{1}{r_n}
\end{aligned}
$$

が定義できる．主観的地位が x となるパタンは相互に排反だから

$$
P(X = x) = \left(\prod_{i=1}^{n} r_i\right)^{-1}\beta_x
$$

となる．以上，証明終わり．

$$

「確かに確率関数は特定できている．でもこの確率関数から《中》意識が最頻値になるって言えないんじゃないか？」花京院が冷静に指摘した．

「そう．だから中心極限定理をここで使う」アンリは力強く答えた．

「中心極限定理？　それって，あの二項分布を正規分布で近似するときに使った定理？」と青葉が聞いた．

「そう．ただしド・モアブル=ラプラスの中心極限定理じゃなくて，もっと一般的な中心極限定理を使う」

「もっと一般的な定理？」

「リアプノフの中心極限定理」

アンリは二人の顔を交互にながめて，楽しそうに笑った．

22.3. 最後の変奏曲

アンリはゆっくりと深呼吸すると，説明をはじめた．花京院は一言も聞き漏らすまいと，彼女の言葉に集中した．

$$

$\{X_j\}$ を独立な確率変数列とする．それぞれが期待値 $E(X_j) = \mu_j$ と分散 $V(X_j) = {\sigma_j}^2$ をもつ．各分散の和の正の平方根を

$$
B_n = \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2 + \cdots + {\sigma_n}^2}
$$

とおき，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n{}^{2+\delta}}\sum_{j=1}^{n}E[|X_j-\mu_j|^{2+\delta}]=0$$

を満たすと仮定する．このとき，確率変数

$$Y_n=((X_1-\mu_1)+(X_2-\mu_2)+\cdots+(X_n-\mu_n))/B_n$$

は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う．

　これが《リアプノフの中心極限定理》よ．ド・モアブル=ラプラスの中心極限定理よりも一般的なことが分かる？

　各確率変数が異なる分布にしたがっていても，2+δ 位のモーメントの和が，さきほど述べた条件を満たすならば，基準化した確率変数の和が標準正規分布に従う．これが定理の意味だよ．この定理を応用すれば，ただちに次の命題が成立するわ．

命題（離散的一様分布を仮定した中意識の分布）．社会階層が，次元毎にランク数が異なることを許容する離散的一様分布の n 次直積集合

$$S=\{1,2,\ldots,r_1\}\times\{1,2,\ldots,r_2\}\times\cdots\times\{1,2,\ldots,r_n\}$$

として表現されると仮定する．各次元の確率変数は独立なとき，基準化した主観的地位は標準正規分布に従う．

証明．リアプノフの中心極限定理を直接適用するよ．X_j で次元 j の離散一様分を表す．その実現値は $1,2,\ldots,r_j$ で，この r_j が次元毎に異なっていてもよく，最大の値を K とおく．つまり任意の j に関して

$$\max_j(r_j)=K$$

とおく．すると任意の j にたいし，X_j の 3 次の絶対モーメントは

$$E[|X_j-\mu_j|^3]=\sum_{i=1}^{r_j}|i-\mu_j|^3\frac{1}{r_j}=\sum_{i=1}^{r_j}|i-\mu_j||i-\mu_j|^2\frac{1}{r_j}<\sum_{i=1}^{r_j}K|i-\mu_j|^2\frac{1}{r_j}=K\sigma_j{}^2$$

を満たす．ここで全ての i　$(i=1,2,\ldots,r_j)$について $|i-\mu_j|<K$ という関係を使えば，各絶対 3 次モーメントから

$$\frac{1}{B_n{}^3}\sum_{j=1}^{n}E[|X_j-\mu_j|^3]<\frac{1}{B_n{}^3}\sum_{j=1}^{n}K\sigma_j{}^2$$

が成立し

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n{}^3}\sum_{j=1}^{n}K\sigma_j{}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{KB_n{}^2}{B_n{}^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{K}{B_n}=0.$$

となる．絶対値の和の極限は非負だから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{B_n}^3}\sum_{j=1}^{n}E[|X_j-\mu_j|^3]$$
は非負でなければならない．極限について成立する
$$\forall n,\ a_n<b_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n$$
という関係から，
$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{B_n}^3}\sum_{j=1}^{n}E[|X_j-\mu_j|^3]\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{B_n}^3}\sum_{j=1}^{n}K{\sigma_j}^2=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{{B_n}^3}\sum_{j=1}^{n}E[|X_j-\mu_j|^3]=0$$
をえる．このことは$\delta=1$のときリアプノフ条件が成立することを意味する．よって
$$Y_n=((X_1-\mu_1)+(X_2-\mu_2)+\cdots+(X_n-\mu_n))/B_n$$
は標準正規分布$N(0,1)$に従う.既に示したように，イメージ上の主観的地位は
$$Y=X_1+X_2+\cdots+X_n-(n-1)$$
で与えられているから，これを標準化して
$$Y_n=\{Y+(n-1)-\textstyle\sum_{i=1}^{n}\mu_i\}/B_n$$
とけば，　Y_n　は中心極限定理により標準正規分布$N(0,1)$にしたがう．

$$

「ふうー，やっぱり一般的な定理を使うと，一挙に進んで快適ね」アンリは晴れ晴れとした表情で言った．

「でも，未証明の定理をたくさん使ってるなあ．このギャップを埋めるのは相当に大変だよ」花京院が不満を述べた．

「これは頂上からの眺めだよ」アンリが言った

「頂上からの眺め？」青葉と花京院は，ほぼ同時に聞き返した．

「そう．これから山を駆け上がっていくの．楽しいよ」

23. エピローグ

私たちは，私たちのために，事実の絵を描く

2.1

23.1. 美田園×花京院

美田園の個人研究室に呼ばれた花京院は，緊張した表情でドアをノックした．美田園の研究室はいつものように整然としている．それは美田園が綺麗好きだからとか整理が上手だからという理由によるものではない．単に彼女の部屋のエントロピーが，他の教員に比べて圧倒的に低いだけだ．

不要なものは捨てる．躊躇無く捨てる．間違って必要なものを捨てても後悔しない．それが彼女の部屋を支配する基本原則だった．

「以前話した君の卒業後の進路のことなんだが‥‥‥」美田園がさっそく用件を切り出した．花京院もおそらくその話だろうと予期していた．

「はい」

「仮に大学院に進学して修士号を取得したら，その後はどうするつもり？」と美田園が聞いた．S 大学の大学院は他の多くの大学院と同様に，大学院博士課程前期課程と後期課程に分かれている．通常，最初の前期課程の二年間で修士号を取得して，その後は後期課程に進むか就職するかを選択する．

「博士課程に進みたいと思っています」と花京院は答えた．しかし正直なところ，彼は修士課程を修了したあとの自分の進路を現実的な問題として想像することができなかった．彼にしてみれば，そもそも大学を卒業した後にどうするのかさえ確定していないのだから，その先を考えろと言われても無理なことだった．

「後期課程に進んで，博士号をとったらその後はどうやって生活するつもりなの？」さらに美田園は質問を続けた．花京院は返答に困った．2 年後ですら想像できないのに，5 年ごとなるとなおさら想像できなかった．

「あらかじめ言っておくが，文学研究科の博士課程に進学してもアカデミックポストにつける可能性は低い」と美田園は言った．花京院はアカデミックポストという言葉をはじめて聞いたが，研究者としての職を得るという意味だと理解した．

「そうですか‥‥」と花京院は答えた．しかしそうは言ったものの，そんな先のことを今から考えてどうするのだろうと思った．

「博士課程修了後に職を得る人間が何％いるか知っている？」と美田園が聞いた．花京院

は答えられなかった．

「文部科学省の発表によれば人文系で約 30%，社会科学系で約 40%だよ．ただし研究者としての職に就く者は，そのうちのさらに半分程度だ」

「少ないんですね」と花京院は答えた．

「つまり君が博士課程修了後に研究職に就ける可能性はわずか 20%に過ぎない，ということだ」美田園は博士課程修了後の進路に関するおおよその統計を彼に伝えた．それは花京院が想像した数字より遙かに低い数字だった．ある程度は予想していたものの，その確率の低さにショックを受けた．

「この数字は，任期付きのポストを含む数字だよ．つまり 20%という僅かな確率で研究職についたとしても，そのうちの一部は 3 年から 5 年程度の任期しかない」美田園はさらに悲観的な情報を追加した．

「ということは，上位の 20%以内に入らなければだめなんですね」花京院は落胆した調子で言った．

「いや，残念ながらそうじゃない．君がどんなに優秀でも確実に研究者になれるとは限らないんだよ」

「え，どういうことですか？」花京院は美田園の話が理解できなかった．研究者になれるかどうかは，自分の研究能力にのみ関わっているはずだ．それ以外にいったいどんな選考の基準があるのだろうか？

「私がいい例だよ」と美田園は言った．

「先生が？」

「そうだよ」

「でも先生は，優秀な研究者だったから大学の先生になれたんでしょう？」花京院は美田園の言葉が理解できなかった．

「自分の力だけでいまのポストにつけたわけじゃない．もちろん私はできるかぎりの努力はしてきた．だがそれだけでなく私は幸運だった」

美田園響子は博士課程在学中に博士論文を完成させ,課程修了と同時に博士号を取得した．その後日本学術振興会の特別研究研究員に採用され，研究員 2 年目に S 大の准教授職の公募に応募して現職に採用された．研究員時代に現在の夫と結婚して，長女を出産したのが 3 年前である．この業界において，それ以上望めないくらい順調なキャリアといってよい．

「先生は実力で今の地位を獲得したんですよ」花京院は，お世辞ではなく本心でそう思っていた．実際，美田園の業績は彼女の分野ではトップクラスに入る．しかし美田園は首を振った．

「私がいまの旦那と出会ったのは大学院生の頃だった……」美田園は突然，自分の過去

を語り始めた．どうして彼女が突然その話を始めたのか，花京院には見当がつかなかった．少なくとも，美田園がこれまでに自分の夫について語っているのを聞いたことは，一度もなかったからだ．突然の家族の話に花京院はとまどいを感じた．

「私の同期には私より優れた連中がたくさんいたよ‥‥‥．みんな，やめてしまったけどね」美田園は，腕を頭の後ろに組むと，椅子にもたれて上方を見上げた．

「こんなこというのはちょっと恥ずかしいけれど，そのなかでも旦那は特に優秀な研究者だったよ」美田園は少し照れ笑いを見せた．

「そうなんですか，全然知りませんでした」

「私がこの大学に就職したあとで，旦那がわたしと同じ S 大の准教授職の公募に応募していたことを偶然知ったんだ‥‥当時私たちは手当たり次第に教員募集公募に応募していたからね. 気づかなかったんだ. 結果的に私が採用され, 私よりも優秀な彼は採用されなかった．どうしてだか分かる？」

花京院はその理由を考えた．美田園には悪いが，夫が自分よりも有能だという彼女の考えかたが，そもそも間違っているのではないだろうか？　と彼は思った．花京院は自分の推論を口にすることを躊躇した．しかし美田園の説明は花京院の予期しないものだった．

「当時この大学は男女共同参画計画を推進していた．公募には，能力が同程度であれば女性を優先して採用する，という特記事項が明記されていた．つまり私は女性であるという理由で，優先的に採用されたんだよ」

「でも‥‥‥」花京院は，そんなルールが存在することを知らなかった．

「もちろん，事実は分からない．そういう特殊な採用基準と私の就職とは関連が全くないのかもしれない」

「きっとそうですよ」花京院はそう思いたかった．美田園は話を続けた．

「公募の採用が決まった後，私はまっさきに彼に報告した．これで結婚できるよってね．そのときは彼が同じポストに応募していたとは知らなかったんだ．私はあとから選考委員長を務めていた先生から，その事実を知った．旦那はいったいどんな気持ちで私の話を聞いていたのだろう‥‥．私が出産後，すぐに職場に復帰できたのも，いまこうして通常通り勤務できているのもすべて旦那のおかげだ．彼の献身がなければ私のキャリアはなかった」

「でも，べつに先生が悪いわけでは‥‥」そういいながら，花京院は美田園の夫の気持ちを想像した．そこではいったい，どんな感情が渦巻いていたのだろうか.

「一番身近で観察しているから分かるが，私の夫は優秀な研究者だ．けっして身内びいきじゃないよ．それでも彼はまだ常勤の研究職についていない．彼は自分が S 大の公募にアプライした事実をいまだに黙っている．私のことを気遣っているんだろうね‥‥‥．きっと死ぬまで話さないつもりだろう．だから私も，いまだにそのことに気づいていないふりをして

いる」

花京院は，美田園の話を聞き，彼女もまた未だに苦しんでいることを知った．お互いが，お互いのことを思いやるがゆえに苦しんでいるのだとしたら，一体誰がその苦しみから彼らを解放できるのだろうか．花京院はなんともやりきれない気持ちになった．彼はようやく，美田園が自分の大学院進学に積極的でない理由を理解した．

「学問の世界に職を奉ずるものの生活は，すべて僥倖の支配下にある．ヴェーバーの有名な言葉だね．これから先，君が見る世界は美しい世界だけではない･･･．そのことが私を躊躇させる」

花京院は何も言えなかった．自分はただ，この研究室にいれば，好きな研究ができるとだけ考えていた．この研究室がなくなってしまうかもしれないことや，自分が研究者として生活できない可能性など，まったく想像していなかった．

「僕はただ･･･すっと研究ができればいいなと思っていたんです･･･」花京院も自分の正直な感情を伝えた．美田園は何も答えなかった．花京院は振り返ってドアに手をかけた．

「花京院君･･････」部屋を出て行こうとする彼に美田園が背後から呼び止めた．

「はい，なんですか？」

「さっきの統計の話には続きがある」

花京院は足をとめた．

「君が博士課程修了後に研究職に就ける可能性はわずか 20%に過ぎない，と言ったけど，それは単なる記述統計レベルの話だ」

美田園は椅子から立ち上がると，壁際のホワイトボードに数式を書きはじめた．

$$

母集団を大学院進学者の集合としよう．《アカデミックポストに就くこと》を事象 A とおく．すると社会科学系の場合は過去の統計から $P(A)=0.2$ と推測できる．次に《優れた研究者である》という事象を G とおこう．

したがって条件付き確率 $P(A|G)$ は，優れた研究者であるという条件の下でアカデミックポストに就く確率を表している．

$$
\begin{aligned}
P(G) &= P(G\cap\Omega) = P(G\cap(A\cup A^C)) \\
&= P((G\cap A)\cup(G\cap A^C) \\
&= P(G\cap A)+P(G\cap A^C)
\end{aligned}
$$

だから，これを使えば

$$
\begin{aligned}
P(A\,|\,G) &= \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{P(G\,|\,A)P(A)}{P(G\cap A)+P(G\cap A^C}\\
&= \frac{P(G\,|\,A)P(A)}{P(G\,|\,A)P(A)+P(G\,|\,A^C)P(A^C)}
\end{aligned}
$$

となる．もちろん，君も知っているだろう，ベイズの定理だ．さてここからは，ある仮定のもとでのみ成立する話だ．

$P(G\,|\,A)$，つまり，アカデミックポストに就いている者が優れた研究者である確率は，どれくらいだろうか？　私の知る限り，研究職に就いている人は大部分が優秀だ．だからこの確率をさしあたり $P(G\,|\,A)=0.95$ ぐらいだと仮定しておく．

次に $P(G\,|\,A^C)$，つまり研究職に就いてはいないが，その者が優れた研究者であるという確率は，どれくらいだろうか？　$P(G\,|\,A^C)$ とは具体的に言えば，私の旦那のように，有能な研究者でありながらな研究職に就けない，という不遇な状態の実現確率だ．ずいぶんと理不尽な確率だね．残念ながらこの確率はゼロではない，だが，そう多くはないはずだ．そこでこの条件付き確率を $P(G\,|\,A^C)=0.1$ くらいだと仮定する．これは幾分私の希望が含まれているかもしれないけど……

すると

$$
\begin{aligned}
P(A\,|\,G) &= \frac{P(G\,|\,A)P(A)}{P(G\,|\,A)P(A)+P(G\,|\,A^C)P(A^C)}\\
&= \frac{0.95\times 0.2}{0.95\times 0.2+0.1\times 0.8} \approx 0.7037
\end{aligned}
$$

となる．つまり君が優れた研究者になるという条件の下で，研究職につける確率は，この仮定のもとでは約 70%だ．

$$

「私はね,『がんばれば，なんとなるさ』なんて言葉を使いたくない．そんないいかげんな言葉で君の将来を台無しにしてしまったとしても，責任が持てないからね．将来のことは私にも君にも分からない．が，少なくとも君自身の努力が良い結果をもたらすという予想は確率論的に正しい，ということだけは言える」美田園は静かに言った．

それは感情のこもった口調ではなかったが，彼女なりにやさしさを彼は感じることができた．

「先生．ありがとうございます．先生は気づいてないかもしれないけれど，僕が先生の言葉で救われたのは，これで 2 度目です」

「ん．そうなのか？　どうせなら $P(G \mid A^C) = 0.1$ を内生的に組み込んだモデルのほうがおもしろいかな‥‥‥」美田園は独り言のようにつぶやくと，机に座って，計算をはじめた．

一旦計算がはじめると，美田園はもはや花京院の存在を忘れてしまったかのように，ペンを動かし続けた．

花京院はその様子を見て，邪魔をしないように，そっと研究室のドアに手をかけた．

「今度, 研究計画書を持ってきなさい」美田園は, 顔を上げずに机に向かったまま言った．花京院は，分かりました，と答えると音を立てずに研究室を出た．

23.2. アンリ×花京院

美田園研究室の外には，腕組みをしたアンリが壁に背をあずけて廊下に立っていた．

「進路相談？」とアンリが聞いた．

「さすが，するどい」と花京院が苦笑した．

「純粋数学には，戻らないの？」アンリは急に核心をついた．花京院と話す時，彼女は余計な回り道をしない．花京院は急な質問にとまどい，すぐには返答できなかった．

「ちょっと外でも歩く？　煙草が吸いたい」アンリが散歩に誘った．花京院とアンリはキャンパス内の小道を二人で歩いた．あたりには二人の他に誰もいない．空は夕陽で赤く染まり，外は少しだけ肌寒かった．こうして外を誰かと一緒に歩くのは，ずいぶん久しぶりだと花京院は思った．

「昔よく，計算に行き詰まったとき，こうして君と外を歩いた」と花京院は言った．

「そうだったね」アンリは口にくわえた煙草に火をつけた．

「君は歩くのが速くて，僕はいつもおいていかれた」

「ふう．そうだっけ？」煙を吐き出しながら，アンリがとぼけた口調でこたえた．

「そうだよ」

「私たちが最初に出会った頃のこと，おぼえている？」唐突にアンリが聞いた．花京院は彼女との出会いを思い出そうと，記憶を探った．しかしその記憶はひどく曖昧だった．

「はっきりとはおぼえてないな‥‥‥．あんまりいい印象じゃなかったのかも．それに‥‥‥，その頃は，今よりもっと，他人に感心がなかった」と花京院は笑った．アンリもつられて少し笑った．

「でも，君の存在はやがて大きくなった．解析学，測度論，公理的確率論，幾何，抽象代数，どの授業でも，君は僕よりも先に問題を解いたから‥‥‥．僕は夢中で走ったけど，君には追いつけなかった」

「さあ‥‥‥そうだったかな」アンリは少し首を傾け，肯定も否定もしなかった．

「それから少したって，僕は数学から離れた」
　アンリの歩くスピードは速い．だんだんと二人の距離は離れていったが，彼女は歩くスピードを緩めない．前を歩く彼女から煙草の匂いが少し遅れて届く．花京院はアンリの背中を見つめながら，出会った頃と少しも変わらないなと思った．それは彼にとって嬉しいことでもあるし，寂しいことでもあった．
　「君と同じ道を一緒に歩くことは，僕にはもうできそうもない」
　アンリは黙って先を歩き続けた．彼女の影が，花京院の足下まで伸びている．
　「君は僕の目標だった．そのまま王道を歩き続けてほしい」その声が彼女の耳に届いたかどうか，花京院には分からなかった．夕陽が山の端にさしかかり，あたりはますます暗くなっていく．
　アンリは歩くのをやめ，立ち止まってゆっくりと振り返った．
　「ついてこれないの？」沈みかけた夕陽を背にしたアンリの表情は，花京院からはよく見えない．彼は小さな声で，ごめんと言った．
　「そう……．残念ね．別に謝ることじゃないけど」アンリは言った．花京院は彼女の声の調子から感情を読みとることができなかった．よく分からないけれど，きっと彼女は思うままに歩き続けるだろうと花京院は確信していた．そう考えると，花京院は胸にわずかな寂寥を感じた．
　「ただ，ときどき君と，こんな風に一緒に散歩できたら僕はそれでいい．……，きっと悪くない」
　「疲れた？」とアンリが聞いた．
　「少しね」
　「じゃあ，ゆっくり歩きましょう」煙草の匂いが近づいてきた．
　「うん．それがいい」
　「私たちが歩く道はきっと平行線だね」とアンリが言った．花京院は黙ってうなずいてから「じゃあ，いつかどこかで交わるかもね」と付け加えた．

23.3. 青葉×花京院

　研究棟の外でアンリと分かれた後，花京院が研究室に戻ると，青葉がひとりでパソコンの前に座っていた．
　「さっき，三田園先生に呼ばれたでしょ？　なんの話だったの」
　「えっと，まあなんというか，僕の進路のこと」花京院は，とっさにそう答えた．

「先生は，花京院君の大学院進学に賛成してなかったんだよね？　結局どうなったの？　別の大学の院に進むの？」

「いや，別の大学院とかはまだ考えてないよ」

「ふうん……．先生の様子，どうだった？　やっぱり花京院君の進学には乗り気じゃないのかな？」

「うん，いろいろと難しいことがあるってことは分かったよ．現実は複雑らしい」花京院は，ふうっと息をはくと，窓の外を眺めた．

「花京院君，ありがとう」

「え？　なに，突然」

「今まで，花京院君にいろいろ教えてもらったけど，お礼をいってなかったと思ってさ．将来の話をしてたら，なんだか急に，花京院君がどこかにいっちゃう気がしたから」

「僕は，まだこの研究室にいるよ」

「それならよかった．ねえ，花京院君はどうして私に数学を教えてくれるの？　私は楽しいけど，花京院君にとっては退屈じゃないかな．だって，私に教えてくれる内容って分かりきったことでしょ？」

花京院はゆっくりと首を振った．

「君に教えながら，僕も君から教わっているんだよ．だから君と話す時間はとても楽しいし，貴重なんだ．分かっていると思っていたことが，君に説明しようとしてはじめて，理解していなかったって気づくことがある．だから僕は，君からたくさんのことを学んだ．君のおかげで，僕はまた数学と向きあうことが出来るようになったんだ．だから感謝しているのは僕の方だよ」

「えへへ．それなら遠慮することないか．じゃあ，さっそくこのあいだから考えているモデルの話なんだけど，聞いてくれる？」

青葉は自分が考えてきたアイデアを，数式を交えて説明した．

「出会いのモデルの続きなんだけどさ．一緒にいる時間が長いとね，相手を好きなる確率が上昇するっていう仮定で計算したらどうなるかっていう拡張なの」

「うん」

「相手のことが，最初はぜんぜん好きじゃなかったし，趣味とか性格とかも自分には合わないなあって思ってたのに，一緒の時間を過ごしているうちに，あれ，この人意外と魅力的じゃん，って気づくの……．そういうことってあると思わない？」

そう言いながら青葉は，少し花京院に顔を近づけた．一瞬，花京院と目があう．それはわずかな時間だったが，青葉には実際以上に長く感じられた．すぐに彼女は照れたように視線をそらし，天井を見あげた．

花京院は，その様子に気づくことなく，あっというまに計算に没入していった．青葉は軽くため息をついた後，気を取り直して計算にとりかかった．

窓の外はもう暗く，研究室には二人しかいない．静寂の中，ハードディスクのモーター音と計算用紙の上を走るペンの音だけが聞こえる．

窓ガラスに結露した水滴が流れ落ちるのを見て，もう冬だなと青葉は思った．

「ボレル－カンテリの補題が使えないかな……」と花京院はつぶやいた．それはまだ青葉が知らない定理の名前だった．

「ちょっと難しくなるけど，聞きたい？」花京院は，悪戯を思いついた子どものような顔で青葉を見た．彼女は迷いなく答えた．

「聞きたい！」

END

24. 参考文献

Bartoszynski, Robert and Magdalena, Niewiadomska-Bugaj, 2008, *Probability and Statistical Inference, Second Edition*, Wiley-Interscience

○確率変数の合成について参照しました．具体例が豊富です.

Billingsley, Patrick, 1995, *Probability and Measure, Third Edition*, Wiley-Interscience.
清水良一『中心極限定理』教育出版

○リアプノフの中心極限定理に関する説明で，参照しました．いろんなタイプの中心極限定理が解説されています.

Davey, B. A. and H.A. Priestley, 2002, *Introduction to Lattice and Order, Second Edition*, Cambridge University Press.

○辞書体式順序の定義を参照しました.

福井幸男, 1995, 『知の統計学――株価からアメリカンフットボールまで』共立出版.

○ポアソン分布の性質の証明で参照しました.

Aitchison, J. and J.A.C. Brown, 1957, *The Lognormal Distribution: with Special Reference to It's Uses in Economics*. Cambridge University Press.
依田高典, 1997, 『不確実性と意志決定の経済学』日本評論社.
Hamada, Hiroshi, 2003, "A Generative Model of Income Distribution," *Journal of Mathematical Sociology*, 27 (4): 279-99.
Hamada, Hiroshi, 2004, "A Generative Model of Income Distribution 2: Inequality of the Iterated Investment Game," *Journal of Mathematical Sociology*, 28 (1): 1-24.

○所得分布が対数正規分布に従うのはなぜか，という問題を考えるパートで参照しました.

河野敬雄, 1999, 『確率概論』京都大学学術出版会.
小針あき宏, 1973, 『確率・統計入門』岩波書店.
国沢清典, 1982, 『確率論とその応用』岩波書店.

○ド・モアブル=ラプラスの中心極限定理の証明で参照しました．アンリによる証明は，国沢先生と河野先生の本で用いられた証明に準拠しています.

松原望, 2003, 『入門確率過程』東京図書.

○ランダムウォークに関する記述で参照しました.

松坂和夫, 1989, 『数学読本 1』岩波書店.
————, 1990, 『数学読本 4』岩波書店.
————, 1997, 『解析入門 1』岩波書店.

○確率論の基礎を説明する部分で，参照しました.

結城浩, 2011, 『数学ガール—— 乱択アルゴリズム』ソフトバンククリエイティブ出版.
森真, 2012, 『入門確率解析とルベーグ積分』東京図書.

○確率変数に関する説明で参照しました．また本書で数式を表示する際の形式（数式を展開する部分を$$ $$で囲み，独立した段落で表示させる形式）は結城先生の本で用いられた段組から着想を得ました.

中村健蔵, 1996, 『Mathematica による OR』アジソン・ウェスレイ・パブリッシャーズ・ジャパン.

○倍賭け法のシミュレーションについて参照しました. Mathematica のコードを解説したテキストとしては珍しく社会科学分野の具体例が豊富です.

田代嘉宏, 1986, 『初等微分積分学（改訂版）』裳華房.

○微分の説明で参照しました.

矢野健太郎, 1964, 『数学の考え方』講談社現代新書.

○「9 の段の秘密」の証明で参照しました.

髙坂健次, 2006, 『社会学におけるフォーマル・セオリー ——階層イメージに関する FK モデル 改訂版』ハーベスト社.
Hamada, Hiroshi, 2012,"A Model of Class Identification: Generalization of the Fararo-Kosaka Model using Lyapounov's Central Limit Theorem," *Kwansei Gakuin University School of Sociology Journal*, Vol.114:21-33.

○階層イメージにかんするモデルについて参照しました．花京院が作ったモデルは，髙坂先生の本をベースにしています．アンリが作ったモデルは浜田論文をベースにしています.

野矢茂樹, 1999, 『無限論の教室』講談社.
根上生也, 1999, 『第三の理——ハノイの塔修復秘話』日本評論社.
永井均, [1995] 2007, 『翔太と猫のインサイトの夏休み——哲学的諸問題へのいざない』ちくま学芸文庫.
結城浩, 2008, 『数学ガール』ソフトバンククリエイティブ出版.

○物語形式で専門的知識や研究内容を紹介する著作のお手本として，上記の本を参照させていただきました.

各章の最初にあるウィトゲンシュタイン『論理哲学論』からの引用は，中央公論社『世界の名著 70』に収録された版を用いました.

25. あとがき 1.0.0

私は普段，大学の文学部で数理社会学を教えています．世間一般では数理社会学はまだまだマイナな分野で，あまり知られていないようです．そこで大学生だけでなく，高校生や社会人など，より多くの人にその存在と楽しさを知ってもらいたいと思い，この原稿を書きました．草稿に対して有益なコメントを毛塚和宏さん，石田淳さん，髙坂健次さんからいただきました．記して感謝いたします．

この原稿は，主に子供が寝静まったあとの時間帯に少しずつ書きためました．不思議なもので，自分が勝手に作った登場人物達に会うのが，いつのまにか深夜の密かな楽しみになっていました．書いているあいだ，自分で分かっていたつもりだったことが実はちゃんと理解できていないことや，今まで見えていなかったモデル間のつながりに気づかされたりしました．今後もしばらく，授業の資料を兼ねた文体練習という形で短めの話を書き続けるつもりです．

浜田宏