

# 卒業論文の概要版

上田 寛人

2020 年 2 月 2 日

## 摘要

病院や飲食店のように、勤務形態としてシフト制を採用している職場の多くでは、スタッフがあるシフトを担当するためには、そのシフトに対する担当スキルを所持していることが前提となる。またそのような職場では、未熟なスタッフに対する研修や指導も非常に重要な要素である。特にアルバイトスタッフを主力とした職場では、短期間のうちに研修スタッフが正規スタッフとなり、スタッフのスキルが勤務計画作成の対象期間内で変化するということが度々起こりうる。しかし、それらのことを考慮した数理モデルの開発はこれまでおこなわれてこなかった。そこで本稿では、勤務計画作成の対象期間内において、研修によってスタッフのスキルが変化することを考慮に入れたスタッフスケジューリング問題を扱い、これに対する整数計画モデルを提案する。

## 最適化モデル

### 諸定義

スタッフの集合を  $A$  とする。勤務計画を考える日付の集合を  $N = \{1, 2, \dots, n_\ell\}$  とする。シフトの集合を  $S$  で表す。各シフト  $s \in S$  は、それぞれそのシフトの開始時刻を情報として持ち、それを  $s_{time}$  で表す。2 つのシフト  $s, s' \in S$  があるとき、 $s_{time} \geq s'_{time}$  であればシフト  $s$  のほうがシフト  $s'$  より開始時刻が遅いことを表す。

各スタッフ  $a \in A$  の月当たりの契約勤務回数を  $O_a$  で表す。 $j (\in N)$  日のシフト  $s \in S$  に割り当てなければならない最低限の人数を  $\ell_{js}$  で表し、上限人数を  $u_{js}$  で表す。 $\delta_{as}$  を、勤務計画作成前の段階においてスタッフ  $a \in A$  がシフト  $s \in S$  を独力で担当できれば 1、そうでなければ

0 をとるパラメータとし、スタッフの休暇希望申請に関して  $r_{aj}$  を、スタッフ  $a \in A$  が  $j (\in N)$  日に休暇を希望するとき 1、それ以外は 0 であるようなパラメータとする。 $h_{aj}$  を、スタッフ  $a \in A$  が  $j (\in N)$  日にシフト  $s' \in S$  を希望するとき  $h_{aj} = s'$  を取るようなパラメータとし、そのシフト  $s'$  より開始時刻が早いシフト集合を  $S_{imp}(a, j) = \{s \in S \mid s_{time} < s'_{time}\}$  で表す。

$\theta_{as}$  を、スタッフ  $a \in A$  についてシフト  $s \in S$  での研修を計画しているとき 1、そうでなければ 0 を取るパラメータとする。ただし研修計画は、現場管理者の経営判断によってあらかじめ決定されているものとする。 $\xi_{as}$  を、スタッフ  $a \in A$  がシフト  $s \in S$  の指導スキルを所持しているとき 1、そうでなければ 0 をとるパラメータとする。ただし、 $\xi_{as} \leq \delta_{as}$  である。研修が必要なスタッフ  $a \in A$  が受けなければならない研修シフトの回数を  $t_{as}$  とし、 $c_{as}$  ( $0 \leq c_{as} \leq t_{as}$ ) を、スタッフ  $a \in A$  が勤務計画作成前の段階において、研修スタッフとして既にこなしたシフト  $s \in S$  の回数とする (つまり、あと  $t_{as} - c_{as}$  回研修を受けることでスタッフ  $a$  はシフト  $s$  を独力で担当可能となる)。ただし、研修の必要がないスタッフについては  $t_{as} = c_{as} = 0$  と定める。スタッフ  $a \in A$  が研修を予定していないシフト集合を  $S_{ban}(a) = \{s \in S \mid \theta_{as} = 0\}$  で表す。

決定変数は以下の通りである。 $\lambda_{ajs}$  をスタッフ  $a \in A$  の  $j (\in N)$  日におけるシフト  $s \in S$  のスキル習熟度とし、スタッフ  $a$  の  $j$  日のシフト  $s$  について研修を必要としない状態、すなわちシフト  $s$  を独力で担当できる状態のとき 1 であり、それ以外は 0 であるような 0-1 変数とする。 $x_{ajs}$  をスタッフ  $a \in A$  が  $j (\in N)$  日のシフト  $s \in S$  にシフトを独力で担当するとき 1、それ以外は 0 で

あるような 0-1 変数とし、 $y_{ajs}$  をスタッフ  $a \in A$  が  $j (\in N)$  日のシフト  $s \in S$  を研修シフトとして担当するとき 1、それ以外は 0 であるような 0-1 変数とする。その他に、 $d_{as}, e_{ajs}, \check{f}_a, \hat{f}_a$  を制約式 (6), (8), (11) のペナルティ変数として用意するが、詳細については 2.2 節で説明する。

#### 制約式

本稿のスケジューリング問題において満たすべき制約条件式を説明する。ここで (1)~(3) 式はシフトを担当するための条件とスキルに関する制約であり、(4)~(8) 式は研修に関する制約である。また、(9)~(13) 式はスタッフスケジューリングにおける基本的な制約である。

$$x_{ajs} \leq \lambda_{ajs} \quad (\forall a \in A, \forall j \in N, \forall s \in S) \quad (1)$$

$$\delta_{as} \leq \lambda_{ajs} \quad (\forall a \in A, \forall j \in N, \forall s \in S) \quad (2)$$

$$\delta_{as} = 0 \Rightarrow \lambda_{ajs} \leq \theta_{as} \quad (\forall a \in A, \forall j \in N, \forall s \in S) \quad (3)$$

(1) 式は、スタッフ  $a \in A$  が  $j (\in N)$  日までにシフト  $s \in S$  のスキルを保持していない ( $\lambda_{ajs} = 0$ ) とき、スタッフ  $a$  は  $j$  日にシフト  $s$  を独力で担当しない ( $x_{ajs} = 0$ ) ことを表す。一方、スタッフ  $a$  が  $j$  日までにシフト  $s$  のスキルを保持している ( $\lambda_{ajs} = 1$ ) とき、 $x_{ajs}$  は 0 と 1 のどちらもとれる。 (2) 式は、勤務計画作成前の段階において、スタッフ  $a \in A$  がシフト  $s \in S$  のスキルを所持している ( $\delta_{as} = 1$ ) とき、スタッフ  $a$  は任意の  $j (\in N)$  日についてシフト  $s$  を独力で担当可能であるから、勤務計画作成の対象期間内においては研修が必要なく、独力でシフト  $s$  を担当できる状態 ( $\lambda_{ajs} = 1$ ) であることを表す。 (3) 式は、勤務計画作成前の段階でスタッフ  $a \in A$  にシフト  $s \in S$  を担当するスキルがなく ( $\delta_{as} = 0$ )、かつ当該シフトの研修も計画されていない ( $\theta_{as} = 0$ ) のであれば、スタッフ  $a$  はシフト  $s$  を独力で担当することができず研修が必要な状態 ( $\lambda_{ajs} = 0$ ) のままであるということを表したものである。

$$\sum_{s \in S_{ban}(a)} y_{ajs} \leq 0 \quad (\forall a \in A, \forall j \in N) \quad (4)$$

$$\sum_{a \in A} y_{ajs} \leq 1 \quad (\forall j \in N, \forall s \in S) \quad (5)$$

(4) 式は、スタッフ  $a \in A$  が、定められた研修シフト以外のシフトに研修として入ることを禁止するものである。 (5) 式は、同日の 1 つのシフトについて研修スタッフは 2 人以上入ることはできず、高々 1 人までという規則を表したものである。

$$t_{as} - d_{as} \leq c_{as} + \sum_{j \in N} y_{ajs} \leq t_{as} \quad (\forall a \in A, \forall s \in S) \quad (6)$$

$$(t_{as} - c_{as}) \lambda_{ajs} \leq \sum_{k=1}^j y_{aks} \quad (\forall a \in A, \forall j \in N, \forall s \in S) \quad (7)$$

(6) 式は、シフト  $s \in S$  について研修が必要なスタッフ  $a \in A$  は、研修シフトを勤務計画作成の対象期間内に定められた回数こなさなければならないということを表したものである。ただし、スタッフや職場の事情によって規定の回数である  $t_{as}$  をこなすことが難しい場合がある。ゆえにペナルティ変数である  $d_{as}$  を設定することで、対象期間内にできるだけ規定回数へ近づけるように要請する制約式 (このような制約を考慮制約という) としている。また、研修を終えた後は当該シフトについて、もはや研修スタッフではなく普通のスタッフとして独力でシフトを担当することが期待されているため、研修回数には下限だけではなく上限も設けている。一方 (7) 式では、必要な回数 ( $t_{as} - c_{as}$ ) 分の研修を受けていない間は、スキルを保持していない ( $\lambda_{ajs} = 0$ ) 状態のままであることを表す。

$$\theta_{as} y_{ajs} \leq \sum_{i \in A} \xi_{is} x_{ijs} + e_{ajs} \quad (\forall a \in A, \forall j \in N, \forall s \in S) \quad (8)$$

(8) 式は、スタッフ  $a \in A$  が研修でシフト  $s \in S$  に入るときは、なるべく指導スキルを所持しているスタッフ  $i \in A$  が同時に教育係としてシフトに入らなければならないということを表したものである。なお、 $e_{ajs}$  はこの制約に対するペナルティ変数である。

$$\sum_{s \in S} (x_{ajs} + y_{ajs}) \leq 1 \quad (\forall a \in A, \forall j \in N) \quad (9)$$

$$\ell_{js} \leq \sum_{a \in A} x_{ajs} \leq u_{js} \quad (\forall j \in N, \forall s \in S) \quad (10)$$

$$O_a - \tilde{f}_a \leq \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} (x_{ajs} + y_{ajs}) \leq O_a + \hat{f}_a \quad (\forall a \in A) \quad (11)$$

(9) 式は、各日において1人のスタッフが研修シフトも含めて複数のシフトを兼任することはできないという規則を表したものである。(10) 式は、各日の個別のシフトにおいて割り当てなければならない人数の上下制限約である。(11) 式は、各スタッフの、契約時に定められた月当たりの契約勤務回数をできるだけ守るよう要請することを表したものである。この契約勤務回数を大幅に違反しても問題はないが、この回数はスタッフの意向が反映されたものであるから、この制約はできるだけ満たすのが望ましい。なお、 $\tilde{f}_a$ ,  $\hat{f}_a$  はペナルティ変数であることに注意する。

$$\sum_{j \in N} \sum_{s \in S} r_{aj}(x_{ajs} + y_{ajs}) \leq 0 \quad (\forall a \in A) \quad (12)$$

$$h_{aj} = s' \Rightarrow \sum_{s \in S_{imp}(a,j)} (x_{ajs} + y_{ajs}) \leq 0 \quad (\forall a \in A, \forall j \in N) \quad (13)$$

(12) 式はスタッフの休暇希望申請に関する制約であり、スタッフ  $a \in A$  が  $j \in N$  日に休暇を希望するときそのスタッフは  $j$  日のどのシフト  $s \in S$  にも割り当てられないことを表したものである。(13) 式は、スタッフ  $a \in A$  が  $j \in N$  日に  $s' \in S$  というシフト希望したとき、そのシフトより早い時刻から開始するシフトは割り当てないということを表したものである。

#### 整数計画問題としての定式化

職場内教育を考慮したスタッフスケジューリングの整数計画問題は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 \sum_{a \in A} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} (1 - \lambda_{ajs}) + w_2 \sum_{a \in A} \sum_{s \in S} d_{as} \\ & + w_3 \sum_{a \in A} \sum_{j \in N} \sum_{s \in S} e_{ajs} + w_4 \sum_{a \in A} (\tilde{f}_a + \hat{f}_a) \end{aligned} \quad (14)$$

s. t. (1) – (13)

ここで (14) 式の第1項は、 $\lambda_{ajs}$  の値をできるだけ早い時期に1にすること、言い換えれば、研修の早期完了を目的とするものである。一方、第2, 3, 4項はそれぞれ (6), (8), (11) 式の制約に対するペナルティ (違反度合) を最小にすることを目的としている。また、 $w_1, \dots, w_4$  を各ペナルティに対する非負実数の重みとする。特に条件を満たしてほしい制約について、それに対応する重み  $w_i$  に大きな値を設定することでその制約をより厳しく守るスケジュールを作成することができる。

#### 計算実験と考察

##### 計算環境とデータ

提案したモデルの評価をするために、実際の現場のデータを用いて計算実験をおこなった。なお、計算にはソフトウェアに Python 3.7.1 の付属パッケージである PuLP 1.6.5 を用いた。また、計算環境は CPU が Intel Core M-5Y10c 0.80GHz (2 コア), メモリが 4GB である。問題

表1 各シフトの勤務時間帯

シフト名	勤務時間帯
1	15:00-19:30
2	16:45-19:30
3	17:00-19:30
4	15:00-19:30
5	15:30-19:30
6	17:30-19:30
7	17:30-19:30
21	10:00-14:30
22	10:30-14:30
23	12:00-14:30
24	10:00-14:30

表2 シフト構成と上下限人数

シフト構成	1	2	3	4	5	6	7	21	22	23	24
A	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
B	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
C	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

の規模は、 $|A| = 15$ ,  $|N| = 25$ ,  $|S| = 11$  である。各シフトの勤務時間帯は表 1 のとおりである。シフト 1 から 7 は平日の業務に必要なシフトであり、シフト 21 から 24 は土曜日の業務に必要なシフトである。表 2 はシフト構成を表したものである。対象とした飲食店では、通常シフト 2, 3, 5, 6, 7 を組み合わせたシフト構成を取っている（これを構成 A と呼ぶ）。他にも、シフト 2 の代わりにシフト 1 とシフト 4 が追加される構成 B や、構成 A にシフト 4 が追加される構成 C、土曜日のシフトであるシフト 21, 22, 23, 24 が必要となる構成 D がある（表 2 参照）。図 1 は各スタッフの勤務計画作成の対象期間における勤務希望を表したものである。ただし、10 はその日に休暇希望申請を出していることを表し、それ以外の数字については、その番号のシフトと同じかそれより開始時刻が遅いシフトについては勤務可能であることを表す。また各日のシフト構成はあらかじめ定められており、図 1 の最下行にまとめられている。

前節のモデルに従って実験をおこなったところ、休暇希望申請をすべて満たし、かつシフトの下限制約を満たす解は存在しないことがわかった。このような理由として、対象の飲食店固有の事情であるが、スタッフの休暇希望申請については「本当はシフトに入ることは可能であるものの、積極的にシフトに入りたいというわけではない」という意味での申請が頻繁にあり、必要以上に休暇希望申請が出ていたことが考えられる。

よって以下では、前章で示したモデルの (10) 式に対してペナルティ変数  $g_{js}$  を導入し、(15) 式のように変更する。

$$\ell_{js} - g_{js} \leq \sum_{a \in A} x_{ajs} \leq u_{js} \quad (\forall j \in N, \forall s \in S) \quad (15)$$

言うまでもないことであるが、シフトの下限制約は極力満たす方が望ましいため、非負実数の重み  $w_{5,s}$  を設定したうえで (14) 式に第 5 項として  $\sum_{j \in N} \sum_{s \in S} w_{5,s} g_{js}$  を追加する。以上の変更を加えて再度実験をおこなった。

## 結果と考察

前節に従って変更された整数計画問題は変数が 16,970 個、制約式は 24,971 本であり、求解までに要した時間は 10.3074 秒であった。図 2 は 3.1 節の計算結果により得られた勤務計画（以下、計算実験による勤務計画という）であり、図 3 は、前述のとおり実際の現場で用いられた手作業による勤務計画（以下、手作業による勤務計画という）である。なお、図の下部の不足欄には担当者が不足するシフトがまとめて表示されている。

## 参考にした論文など

- [1] B. Cheang, H. Li, A. Lim, B. Rodrigues, Nurse Rostering Problems - A Bibliographic Survey, *European Journal of Operational Research*, Vol.151(3), pp.447-460, 2003.
- [2] G. B. Dantzig, A Comment on Edie's "Traffic Delays at Toll Booths", *Journal of the Operations Research Society of America*, Vol.2(3), pp.339-341, 1954.
- [3] A. T. Ernst, H. Jiang, M. Krishnamoorthy, D. Sier, Staff Scheduling and Rostering: A Review of Applications, Methods and Models, *European Journal of Operational Research*, Vol.153(1), pp.3-27, 2004.
- [4] T. Miyamoto, K. Hidaka, Modified Model of Radiographer Scheduling Problem for Sequential Optimization, *Proc. of IEEE IEEM* 2018, pp.273-277, 2018.
- [5] Z. Sinuany-Stern, Y. Teomi, Multi-Objective Scheduling Plans for Security Guards, *Journal of the Operations Research Society*, Vol.37(1), pp.67-77, 1986.
- [6] H. Yuura, T. Miyamoto, K. Hidaka, An Integer Programming Model for Radiographer Scheduling Considering Skills and Training, *Proc. of IEEE IEEM* 2017, pp.889-893, 2017.

	Jun-19																															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日		
Staff 1	10		3	10	10	1	10	10		3	10	10	1	10	10		10	10	10	10	10	10		3	10	10	1	10	10			
Staff 2	10		10	10	10	10	10	10		10	2	10	10	1	10		10	2	10	10	1	10		10	2	10	10	1	10			
Staff 3	10		6	6	5	10	6	23		4	6	10	6	5	21		1	6	5	10	5	23		1	6	5	10	5	21			
Staff 4	10		2	10	10	2	2	24		2	10	10	2	2	10		2	10	10	2	2	24		2	10	10	2	2	10			
Staff 5	23		6	10	10	10	10	10		6	5	10	5	10	23		6	5	10	5	10	10		6	5	10	5	10	23			
Staff 6	10		10	10	10	10	10	10		10	10	10	3	10	10		10	10	10	5	10	10		10	5	10	5	10	10			
Staff 7	21		10	10	10	10	10	21		10	10	1	1	10	10		1	1	1	10	10	21		10	1	1	1	1	21			
Staff 8	10		2	2	10	10	10	10		2	2	2	2	10	10		2	2	2	2	2	10		2	2	2	2	2	10			
Staff 9	10		10	10	10	10	10	10		3	10	10	10	10	10		3	10	10	2	10	10		3	10	10	2	10	10			
Staff 10	22		10	4	10	10	10	22		10	4	10	10	10	22		10	4	10	10	10	22		10	4	10	10	10	10	22		
Staff 11	10		10	10	10	10	5	10		10	10	7	10	5	24		10	10	7	10	5	24		10	10	7	10	5	24			
Staff 12	10		10	10	10	5	10	10		10	5	10	5	10	22		10	6	10	5	10	22		10	5	1	5	10	22			
Staff 13	10		6	6	6	6	10	10		6	6	6	6	10	10		6	6	6	10	10	10		10	10	6	6	10	10			
Staff 14	10		10	1	1	10	10	10		10	1	1	10	10	10		10	1	1	1	10	10		10	1	1	1	10	10			
Staff 15	10		10	7	10	7	10	24		7	10	10	7	7	24		7	10	7	7	7	24		10	7	7	10	7	24			
構成	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D			

図 1 各スタッフの勤務希望

	Jun-19																													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日
Staff 1			3			5				3			3											3			2			
Staff 2											3			2				3				3			3			2		
Staff 3					5		6	23		4				5			4		5		5	23		4						
Staff 4			7			7	2	24		2			7	7			3						2					7		
Staff 5	23										5		5		23			5		5				6	5				23	
Staff 6																				6							3			
Staff 7	21							21				5					5					21			6	5	5	5	21	
Staff 8			2	3							3	2					2		2	3	2					2		3		
Staff 9										7							7			7				7			7			
Staff 10	22			4				22			4							4							4					
Staff 11							7					7		6	24						6							6		
Staff 12						5T					5T		5T		22					5T		22			5T				22	
Staff 13			6	6	6	6				6	6	6	6				6	6	6							6	6			
Staff 14				1	2						1	2						1	3	2						1	3			
Staff 15				7T		7T		24T		7T			7T	7T	24T				7		7	24			7	7			24	
構成	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D	
不足	24		4	5	3	2	3			5	7			3	21			7						5						

図 2 計算実験による勤務計画 (T は研修シフトであることを表す)

	Jun-19																													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日	月	火	水	木	金	土	日
Staff 1			3			2				3			2											3			2			
Staff 2											3			2							2				2			2		
Staff 3			6	6	5		6	23		4	6		6	6	22		4		5		6			4	6	5		6	22	
Staff 4			7			3	7	24		2			7	7			3				3	24						7		
Staff 5	23		6							6	5		5				6	5		5				6					23	
Staff 6																				6										
Staff 7	21							21				5					5		2			21			1	3			21	
Staff 8			2	2						2		2	3				2	3	3	2				2		2		3		
Staff 9										7										7				7			7			
Staff 10	22			4				22			4							4				22			4					
Staff 11						7	7	5					7		5	24					5							5	24	
Staff 12						5T					5T		5T		23			5T		5T		23			5		5			
Staff 13				6	6	6				6	6	6						6	6							6	6			
Staff 14				1	2						1	3						1		3										
Staff 15			7T		7T		24T		7T			7T	7T	24T			7		7		7				7	7				
構成	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D		C	B	A	A	A	D	
不足	24		4	3	3	5	2			5	7			3	21			7						5						

図 3 手作業による勤務計画 (T は研修シフトであることを表す)